〔問〕

昭和37年度　（問題）

1. 年払全期払込養老保険において，死亡保険金の支払時期を保険期間満了の時としたときの純保険料をPとすると，

(a) $P > P_{\overline{n|}}$　（$P_{\overline{n|}}$ は定期積金の掛金率）を示せ。

(b) 責任準備金の算式を求めよ。

2. 全期払込保険（年払）において，被保険者の死亡に際し，死亡保険金として満期保険金と同額の金額に，既払込純保険料を加えたものを支払う場合の，年払純保険料および平準純保険料式で責任準備金の算式を求めよ。

3. 死亡率を，すべての x につき q_x から $q_x^{(\beta)} = q_x + \beta$ に変えた場合，$P_{x:\overline{n|}}$ および $_tV_{x:\overline{n|}}$ はそれぞれ $P_{x:\overline{n|}}^{(\beta)}$ および $_tV_{x:\overline{n|}}^{(\beta)}$ に変るとする。

$$\varDelta P_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}}^{(\beta)} - P_{x:\overline{n|}}$$

とおくとき，

$$\varDelta P_{x:\overline{n|}} = \frac{v\beta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x \left(1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}^{(\beta)}\right)$$

となることを証明せよ。

昭和 37 年度　（解答）

1.

(a) 求める養老保険は，

収入の現価　　$P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

支出の現価は，生死にかゝわらず，つねに満期時に保険金を支払うことになるから

$$v^n$$

であることから，純保険料は

$$P=\frac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$$

となる。一方，

$$P_{\overline{n|}}=\frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

であり，

$\ddot{a}_{\overline{n|}}>\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ であるから

$$P>P_{\overline{n|}}$$

(b) 被保険者生存中のt年経過の責任準備金は，

支出の現価 $=v^{n-t}$

収入の現価 $=P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$

であることから

$${}_tV=v^{n-t}-P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

又，死亡後については

$${}_tV=v^{n-t}$$

となる。

2. 契約時における支出の現価は，純保険料をPとすれば，

$$\frac{(1+P)\overline{C}_x+(1+2P)\overline{C}_{x+1}+(1+3P)\overline{C}_{x+2}+\cdots+(1+nP)\overline{C}_{x+n-1}+D_{x+n}}{D_x}$$

$$=\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}+\frac{\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\overline{M}_{x+n}}{D_x}\cdot P$$

収入の現価は$P\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ であるから

$$P\cdot\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}=\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}+P\cdot\frac{\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\overline{M}_{x+n}}{D_x}$$

なることから

$$P=\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{(N_x-N_{x+n})-(\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\overline{M}_{x+n})}$$

となる。次にt年経過の平準純保険料式責任準備金を求めるに，支出の現価は

$$\frac{[1+(t+1)P]\overline{C}_{x+t}+[1+(t+2)P]\overline{C}_{x+t+1}+\cdots+[1+nP]\overline{C}_{x+n-1}+D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$=\frac{\overline{M}_{x+t}-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}+P\cdot\frac{\overline{R}_{x+t}-\overline{R}_{x+n}+t\overline{M}_{x+t}-n\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$=\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}}+P\cdot\frac{\overline{R}_{x+t}-\overline{R}_{x+n}+t\overline{M}_{x+t}-n\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}$$

であり，又収入の現価は

$$P\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

であることから

$${}_tV=\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}}+P\cdot\frac{\overline{R}_{x+t}-\overline{R}_{x+n}+t\overline{M}_{x+t}-n\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}-P\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$=\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}}-P\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}-\frac{\overline{R}_{x+t}-\overline{R}_{x+n}+t\overline{M}_{x+t}-n\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}\right)$$

3. 責任準備金の再帰方程式により，

$$P^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}=v\,q^{(\beta)}_{x+t}\left(1-{}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}\right)+v\cdot{}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}-{}_tV^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}$$

$$=v(q_{x+t}+\beta)(1-{}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}})+v\cdot{}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}-{}_tV^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}$$

$$(\,q^{(\beta)}_{x+t}=q_{x+t}+\beta\ \text{により})$$

両辺に D_{x+t} を掛けると

$$D_{x+t} \cdot P^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} = (C_{x+t} + v\beta D_{x+t})(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}) + v D_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} - D_{x+t} \cdot {}_{t}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}$$

$$= C_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}) + v\beta D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}) + v \cdot D_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} - D_{x+t} \cdot {}_{t}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}$$

$$= C_{x+t} + (v \cdot D_{x+t} - C_{x+t})\, {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} + v\beta D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}) - D_{x+t} \cdot {}_{t}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}$$

$$= C_{x+t} + D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} + v\beta D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}) - D_{x+t} \cdot {}_{t}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}$$

（$vD_{x+t} - C_{x+t} = D_{x+t+1}$ による。）

$$= C_{x+t} + (D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} - D_{x+t} \cdot {}_{t}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}}) + v\beta D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}})$$

tを0から$n-1$まで変えて加えると

$$(N_x - N_{x+n})P^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} = M_x - M_{x+n} + D_{x+n} + v\beta \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}})$$

両辺をD_xで割ると，

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \cdot P^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}} + v\beta \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}E_x(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}})$$

故に $$P^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}} + \frac{v\beta}{\ddot{a}_{x:n}} \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}E_x(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:n})$$

すなわち

$$\triangle P_{x:\overline{n|}} = P^{(\beta)}_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}} = \frac{v\beta}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}E_x(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)}_{x:\overline{n|}})$$

3.の別解　1.

責任準備金の再帰方程式は

$$v\, p^{(\beta)}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)} = {}_tV^{(\beta)} + P^{(\beta)} - v\, q^{(\beta)}_{x+t}$$

すなわち　$v\,(p_{x+t} - \beta)\cdot {}_{t+1}V^{(\beta)} = {}_tV^{(\beta)} + P^{(\beta)} - v\,(q_{x+t} + \beta)$

$$\therefore\quad v\, p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)} = {}_tV^{(\beta)} + P^{(\beta)} - v\, q_{x+t} - v\,\beta\,(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)})$$

両辺に D_{x+t} をかけると

$$D_{x+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(\beta)} = D_{x+t} \cdot {}_tV^{(\beta)} + P^{(\beta)} \cdot D_{x+t} - C_{x+t} - v\,\beta\, D_{x+t}(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)})$$

$t=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ とおいて

$$\begin{cases} D_{x+1} \cdot {}_1V^{(\beta)} = D_x \cdot {}_0V^{(\beta)} + P^{(\beta)} D_x - C_x - v\,\beta D_x\,(1 - {}_1V^{(\beta)}) \\ D_{x+2} \cdot {}_2V^{(\beta)} = D_{x+1} \cdot {}_1V^{(\beta)} + P^{(\beta)} D_{x+1} - C_{x+1} - v\,\beta D_{x+1}\,(1 - {}_2V^{(\beta)}) \\ \qquad \vdots \\ D_{x+n} \cdot {}_nV^{(\beta)} = D_{x+n-1} \cdot {}_{n-1}V^{(\beta)} + P^{(\beta)} D_{x+n-1} - C_{x+n-1} - v\,\beta\, D_{x+n-1} \\ \qquad\qquad \times\,(1 - {}_nV^{(\beta)}) \end{cases}$$

これを両辺たして，(${}_nV^{(\beta)}=1,\ {}_0V^{(\beta)}=0$ なることを考慮して)

$$D_{x+n} = P^{(\beta)}(N_x - N_{x+n}) - (M_x - M_{x+n}) - v\beta \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\,(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)})$$

両辺を D_x で割り，整頓すると，

$$P^{(\beta)} \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = v\beta \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x\,(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)})$$

すなわち，

$$\triangle P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = v\beta \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x\,(1 - {}_{t+1}V^{(\beta)})$$

3.の別解　2.

責任準備金の再帰方程式は

$$v\,p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V={}_tV+P-v\,q_{x+t} \qquad (1)$$

$$v\,(p_{x+t}-\beta)\cdot{}_{t+1}V^{(\beta)}={}_tV^{(\beta)}+P^{(\beta)}-v\,(q_{x+t}+\beta) \qquad (2)$$

(2)−(1)：$v\,p_{x+t}\cdot\triangle_{t+1}V-v\beta\cdot{}_{t+1}V^{(\beta)}=\triangle_tV+\triangle P-v\beta$

（ここに，$\triangle_tV={}_tV^{(\beta)}-{}_tV$）

すなわち

$$\triangle P=v\beta(1-{}_{t+1}V^{(\beta)})+v\,p_{x+t}\cdot\triangle_{t+1}V-\triangle_tV$$

両辺にD_{x+t}をかけると

$$\triangle P\cdot D_{x+t}=v\beta D_{x+t}(1-{}_{t+1}V^{(\beta)})+D_{x+t+1}\cdot\triangle_{t+1}V-D_{x+t}\triangle_tV$$

$t=0,1,\cdots,n-1$とおいて

$$\begin{cases}\triangle P\,D_x=v\beta D_x(1-{}_1V^{(\beta)})+D_{x+1}\cdot\triangle_1V-D_x\cdot\triangle_0V\\ \triangle P\,D_{x+1}=v\beta D_{x+1}(1-{}_2V^{(\beta)})+D_{x+2}\cdot\triangle_2V-D_{x+1}\cdot\triangle_1V\\ \quad\vdots\\ \triangle P\,D_{x+n-1}=v\beta D_{x+n-1}(1-{}_nV^{(\beta)})+D_{x+n}\cdot\triangle_nV-D_{x+n}\cdot\triangle_nV\end{cases}$$

$\triangle_0V={}_0V^{(\beta)}-{}_0V=0-0=0$，$\triangle_nV={}_nV^{(\beta)}-{}_nV=1-1=0$を考慮して，

辺々たすと，

$$\triangle P(N_x-N_{x+n})=v\beta\sum_{t=0}^{n-1}D_{x+t}(1-{}_{t+1}V^{(\beta)})$$

$$\therefore\ \triangle P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=v\beta\sum_{t=0}^{n-1}{}_tE_x(1-{}_{t+1}V^{(\beta)})$$