数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いなさい。〕

問題１． 次の（１）～（１２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

各５点（計６０点）

（１）次の確率分布のうち、記憶喪失性を持つものは $\boxed{\quad ① \quad}$ と $\boxed{\quad ② \quad}$ である。（<u>①と②は順不同</u>）

ここで、ある種類の確率分布が記憶喪失性を持つとは、任意の定数 a に対して $P(X \geq a + x \mid X \geq a) = P(X \geq x)$ が成り立つことを意味するものとする。

（Ａ）二項分布　（Ｂ）ポアソン分布　（Ｃ）幾何分布

（Ｄ）正規分布　（Ｅ）指数分布　（Ｆ）ガンマ分布

（２）確率変数 X, Y は互いに独立で、ともに平均 2 の指数分布に従うとする。ある円を考え、$W = \min(X, Y)$ をこの円の半径を表す確率変数とする。

この円について、面積の期待値は $\boxed{\quad ① \quad}$、面積の分散は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

［①の選択肢］

（Ａ）2π　（Ｂ）4π　（Ｃ）6π　（Ｄ）8π

（Ｅ）10π　（Ｆ）12π　（Ｇ）14π　（Ｈ）16π

［②の選択肢］

（Ａ）$16\pi^2$　（Ｂ）$20\pi^2$　（Ｃ）$24\pi^2$　（Ｄ）$28\pi^2$

（Ｅ）$32\pi^2$　（Ｆ）$36\pi^2$　（Ｇ）$40\pi^2$　（Ｈ）$44\pi^2$

（3）ある店では、店員Ａ、店員Ｂの２人で1種類の製品を販売している。過去の営業実績から1日の平均売上個数は店員Ａが1個、店員Ｂが２個である。店員Ａ、店員Ｂの売上個数は互いに独立で、どちらもポアソン分布に従うものとする。
1日の売上個数は店員Ａ、店員Ｂ合計して高々$\boxed{}$個と考えて製品を用意しておけば、お客さまからの購入依頼に95％以上の確実さで対応できる。
なお、必要であれば$e = 2.718$を用いなさい。

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6

（E）7　（F）8　（G）9　（H）10

（4）$X_1, X_2, \ldots$ は同じ確率分布を持つ独立な確率変数列であり、各 $X_k\,(k = 1,2,\ldots)$ は $\{0,1,2,3\}$ という値をそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ でとるものとする。
$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{4^k}$ とおくと、Y_n の特性関数は $n \to \infty$ のとき $\dfrac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$ に近づく。

［①の選択肢］

（A）$e^{it} - 1$　（B）$e^{it} + 1$　（C）$-(e^{it} - 1)$　（D）e^{it}

（E）$4(e^{it} + 1)$　（F）$-4(e^{it} - 1)$　（G）$e^{it} + 4$　（H）$-(e^{it} - 4)$

［②の選択肢］

（A）it　（B）$1 + it$　（C）$1 - it$　（D）$4it$

（E）$1 + 4it$　（F）$1 - 4it$　（G）$4 + it$　（H）$4 - it$

（5） $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を標本変量とし、標本変量平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ について、$\overline{X}$ の分散 $V\left(\overline{X}\right)$ は

$\dfrac{\boxed{①}}{\boxed{②}}$ であり、$\overline{X}$ の分布のひずみ $\dfrac{E\left\{\left(\overline{X}-\mu\right)^3\right\}}{\left\{V\left(\overline{X}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}$ は $\dfrac{\boxed{③}}{\boxed{④}}$ である。

なお、母平均を μ 、母分散を σ^2 、平均値のまわりの 3 次の母積率 $E\left\{\left(X_i-\mu\right)^3\right\}$ を μ_3 と表す。

（A） $\sqrt{n}$　（B） n　（C） σ　（D） σ^2　（E） $2\sigma^2$

（F） σ^3　（G） $\sigma^2\sqrt{n}$　（H） $\sigma^3\sqrt{n}$　（I） μ_3　（J） $2\mu_3$

（6）ある選挙候補者の支持率 p を、標本として一部の有権者を抽出することにより、近似法で区間推定を行う。支持率が 20% であると予想される場合に、信頼係数 90% で信頼区間の幅が 5 ポイント以内となるために最低限必要な標本数として、最も近い数値は ① である。
また、支持率の予想が全くつかない場合に、同条件の区間推定をするために最低限必要な標本数として、最も近い数値は ② である。
ここで、支持率の信頼区間の幅が 5 ポイント以内であるとは、信頼区間 $a < p < b$ に対して $b - a \leq 0.05$ が成り立つことを意味する。

[①の選択肢]

（A） 11　（B） 22　（C） 44　（D） 174

（E） 246　（F） 421　（G） 693　（H） 984

[②の選択肢]

（A） 17　（B） 33　（C） 271　（D） 385

（E） 657　（F） 1,083　（G） 1,537　（H） 4,330

（7）ある店ではゼリーを箱詰めにして販売している。箱詰めする前のゼリーを無作為に6個取り出し重さを測定したところ、次のとおりであった。ただし、測定の誤差が無視できないものとし、この分散が $\sigma_E{}^2 = 0.0100$（g^2）と多くの繰り返しにより推定されていたものとする。また、重さと測定誤差との間に相関はないものとする。

（単位：g）

120.1， 121.0， 120.5， 120.4， 120.3， 120.1

測定の誤差を除くゼリーの本来の重さの分散を信頼係数95％で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い値は ① g^2、信頼区間の上限に最も近い値は ② g^2 となる。
また、ゼリーを入れる箱の重さの分散が $\sigma^2 = 0.0600$（g^2）であることが分かっているとする。このゼリーを4個ずつ箱詰めして販売するとき、測定の誤差を除くこの1箱の総重量の分散を信頼係数95％で区間推定すると、信頼区間の下限に最も近い値は ③ g^2、信頼区間の上限に最も近い値は ④ g^2 となる。

［①、②の選択肢］

（A）0.0288　（B）0.0336　（C）0.0406　（D）0.0424

（E）0.4426　（F）0.4789　（G）0.6637　（H）0.7985

［③、④の選択肢］

（A）0.1752　（B）0.1944　（C）0.2296　（D）0.3744

（E）1.8304　（F）2.7148　（G）2.8948　（H）3.2540

（8）大人と子供に対し、夏と冬のどちらが好きかアンケートを行ったところ、nを正の整数として下表の結果を得た。なお、アンケートには少なくとも100人は参加した。

	大人	子供
夏が好き	$3n$	$10n$
冬が好き	n	$2n$

帰無仮説H_0を「大人か子供かと、夏と冬のどちらが好きかは互いに独立である」として、有意水準1% で独立性の検定を行った結果、帰無仮説は採択された。このとき、nの取りうる値の上限に最も近い数値は$\boxed{}$である。

（A）19　（B）28　（C）39　（D）48

（E）56　（F）67　（G）97　（H）134

（9）8個のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_8, y_8)$ を用いて y を x で回帰したときの回帰直線は $y = 6x + 1$、x を y で回帰したときの回帰直線は $x = \frac{1}{8}y + 2$、$s_x^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 1$ であった。このとき、決定係数は$\boxed{①}$であり、y を x で回帰したときの誤差分散の不偏推定量は$\boxed{②}$である。

[①の選択肢]

（A）0　（B）$\frac{3}{256}$　（C）$\frac{1}{48}$　（D）$\frac{1}{2}$

（E）$\frac{3}{4}$　（F）$\frac{4}{5}$　（G）$\frac{7}{8}$　（H）1

[②の選択肢]

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）2　（D）12

（E）16　（F）$\frac{64}{3}$　（G）48　（H）96

（１０）標準ブラウン運動$\{X_t\}, t \geq 0$に対して、$X_1 - X_2$は平均$\boxed{\quad ① \quad}$、分散$\boxed{\quad ② \quad}$の正規分布に従い、$E(X_1 \mid X_1 - X_2 > 0) = \boxed{\quad ③ \quad}$である。

（A）-1　（B）$-\dfrac{1}{2}$　（C）0　（D）$\dfrac{4}{5}$　（E）$\dfrac{1}{2}$

（F）1　（G）2　（H）$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$　（I）$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$　（J）$2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

（１１）$AR(2)$モデル$Y_t = 1.0 + 0.2Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2} + \varepsilon_t$（$E(\varepsilon_t) = 0$）について、偏自己相関$\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}$はそれぞれ$\phi_{11} = \boxed{\quad ① \quad}$、$\phi_{22} = \boxed{\quad ② \quad}$、$\phi_{33} = \boxed{\quad ③ \quad}$である。

（A）0　（B）0.1　（C）0.2　（D）0.3　（E）0.4

（F）0.5　（G）0.6　（H）0.7　（I）0.8　（J）0.9

（１２）$f(x)$ を $[0,1]$ 上の一様分布の確率密度関数、X を $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数、$g(x)=e^{x}$ としたとき、$V(g(X))$ に最も近い値は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

次に、シミュレーションにより $\theta = E(g(X)) = \int_0^1 g(x)f(x)dx$ を推定することを考える。制御変量として $h(x)=x^2$ を採用し、試行回数を 5 回とした場合、制御変量法による標本平均の分散の減少率に最も近い値は $\boxed{\quad ② \quad}$ %である。なお、必要であれば $e=2.718$ を用いなさい。

［①の選択肢］

（A）0.1722　（B）0.1822　（C）0.1922　（D）0.2022

（E）0.2122　（F）0.2222　（G）0.2322　（H）0.2422

［②の選択肢］

（A）96.1　（B）96.6　（C）97.1　（D）97.6

（E）98.1　（F）98.6　（G）99.1　（H）99.6

問題２． 次の（１)、(２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）以下の料金体系を持つゲームについて1日の利用料金の総額Z円の平均値を求めたい。

あるゲームの利用料金は、2 分以内の利用であればa円の定額であるが、2 分以上利用した場合は時間に応じて追加料金がかかる。また1人のプレイヤーのゲーム時間X分は平均λ分の指数分布に従い、1日の利用者数N人は平均μ人のポアソン分布に従うものとする。ただし、以下の計算において時間X分の上限は考慮しなくて良いものとし、各プレイヤーのゲーム時間と1日の利用者数は独立であるとする。

Ⅰ）ゲームの追加料金が連続的に変化する場合を考える。すなわち、2 分以上利用する場合、追加料金が1分あたりb円の割合で比例的に加算されるものとする。まず初めに1人あたりの料金Y円の平均値を求める。

ゲーム時間がx分のときの料金y円は次の式で与えられる。(①と②の解答は順不同)

$$y = f(x) = \begin{cases} a & (0 < x \leq 2) \\ a + \boxed{①} \times \boxed{②} & (2 < x) \end{cases}$$

これより料金Y円の平均値は

$$E(Y) = \int_0^{\infty} f(x) \times \boxed{③} \times \boxed{④}^{\boxed{⑤}} dx$$
$$= \boxed{⑥} + \boxed{⑦} \times \boxed{⑧}^{\boxed{⑨}}$$

となる。i番目のプレイヤーの利用料金をY_i円とすれば、1日の利用料金の総額Z円の平均値は

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) \times E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \middle| N=k\right)$$
$$= \boxed{⑩} \times \left(\boxed{⑪} + \boxed{⑫} \times \boxed{⑬}^{\boxed{⑭}} \right)$$

となる。

Ⅱ）次に2 分以上利用する場合、追加料金がb円加算され、以降1分ごとにb円加算される場合を考える。ここで、ゲーム時間がx分のときの料金y円は$(1+n < x \leq 2+n)$を満たす自然数nを用いて、次の式で与えられる。

$$y = g(x) = \begin{cases} a & (0 < x \leq 2) \\ a + \boxed{⑮} & (2 < x) \end{cases}$$

Ⅰ）と同様に計算すると

$$E(Y)=\int_0^{\infty} g(x)\times\boxed{\quad③\quad}\times\boxed{\quad④\quad}^{\boxed{⑤}}dx$$

$$=\boxed{\quad⑯\quad}+\frac{\boxed{\quad⑰\quad}}{\boxed{\quad⑱\quad}}$$

$$E(Z)=\boxed{\quad⑲\quad}\times\left(\boxed{\quad⑯\quad}+\frac{\boxed{\quad⑰\quad}}{\boxed{\quad⑱\quad}}\right)$$

となる。

Ⅲ）現在の料金体系は Ⅱ）の方法であるが、Ⅰ）の方法に見直す。ただし、見直しに伴って1日の利用料金の総額の平均値が変わらないようにb円の追加料金が生じる時間を 2 分からw分に変更する。なお、利用者の利用時間や利用者数が料金体系変更の影響を受けないとするとき、

$$w=2+\lambda\left\{\log\left(\boxed{\quad⑳\quad}\right)+\log\left(1-\boxed{\quad㉑\quad}\right)\right\}$$

となる。

（2）このゲームの料金体系について（1）と異なる方式として、以下の料金体系を検討する。

ゲームの利用時間に関わらず、プレイヤーごとに 24 時間単位で定額料金が課せられる。すなわち、プレイヤーは一度料金を支払うと 24 時間は追加料金なしでゲームを利用することが可能となるが、24 時間を経過した場合、もしくは 24 時間経過後にゲームを再開する場合には改めて定額料金を支払うものとする。

Ⅳ）$a=100$円、$b=10$円とし、$\lambda=60$分、$\mu=1{,}000$人と見込まれるとき、1日の利用料金の総額の見込額が Ⅱ）で求めた$E(Z)$の1.2倍となるように定額料金を設定する場合、1人あたりの料金は$\boxed{\quad㉒\quad}$円となる。なお、必要であれば$e^{-\frac{1}{60}}=0.983$を用いなさい。

Ⅴ） Ⅳ）で設定した定額料金制に移行したところ、1人あたりのゲーム時間および1日あたりの利用者数が変化し、$\lambda=90$分、$\mu=800$人となった。このとき1日あたりの利用料金の総額の見込額は$\boxed{\quad㉓\quad}$円減少する。
このとき、上記の前提に見直したうえで1日あたりの利用料金の総額の見込額が Ⅱ）で求めた$E(Z)$の1.2倍となるように定額料金を再設定した場合、1人あたりの料金は$\boxed{\quad㉔\quad}$円増加する。
なお、必要であれば$e^{-\frac{1}{90}}=0.989$を用いなさい。

[①～⑭の選択肢]

（A）a （B）b （C）e （D）k

（E）x （F）$(k+2)$ （G）$(x+2)$ （H）$(k-2)$

（I）$(x-2)$ （J）λ （K）$-\lambda$ （L）$\dfrac{1}{\lambda}$

（M）$-\dfrac{1}{\lambda}$ （N）$-\dfrac{2}{\lambda}$ （O）-2λ （P）$-\dfrac{\lambda}{2}$

（Q）$-\lambda x$ （R）$-\dfrac{x}{\lambda}$ （S）$-\dfrac{2x}{\lambda}$ （T）$-2\lambda x$

（U）$-\dfrac{\lambda x}{2}$ （V）$a\lambda$ （W）$b\lambda$ （X）μ

（Y）$a\mu$ （Z）$b\mu$

[⑮～⑲の選択肢]

（A）a （B）b （C）bn （D）$b(n+2)$

（E）$b(n-2)$ （F）$e^{-\frac{\lambda}{2}}$ （G）$e^{-\frac{2}{\lambda}}$ （H）$e^{-\lambda}$

（I）$e^{-\frac{1}{\lambda}}$ （J）$\left(1-e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)$ （K）$\left(1-e^{-\frac{2}{\lambda}}\right)$ （L）$\left(1-e^{-\lambda}\right)$

（M）$\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$ （N）$be^{-\frac{\lambda}{2}}$ （O）$be^{-\frac{2}{\lambda}}$ （P）$be^{-\lambda}$

（Q）$be^{-\frac{1}{\lambda}}$ （R）$a\lambda$ （S）$b\lambda$ （T）μ

（U）$a\mu$ （V）$b\mu$ （W）$\left(a+2e^{-\frac{\lambda}{2}}\right)$ （X）$\left(a+2e^{-\frac{2}{\lambda}}\right)$

（Y）$\left(a+2e^{-\lambda}\right)$　　（Z）$\left(a+2e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)$

［⑳、㉑の選択肢］

（A）λ　　（B）2λ　　（C）$\dfrac{1}{\lambda}$　　（D）$\dfrac{2}{\lambda}$

（E）$\dfrac{\lambda}{2}$　　（F）$e^{-\frac{\lambda}{2}}$　　（G）$e^{-\frac{2}{\lambda}}$　　（H）$e^{-\frac{1}{\lambda}}$

（I）$be^{-\frac{\lambda}{2}}$　　（J）$be^{-\frac{2}{\lambda}}$　　（K）$be^{-\lambda}$　　（L）$be^{-\frac{1}{\lambda}}$

［㉒～㉔の選択肢］

（A）39　　（B）154　　（C）269　　（D）385

（E）519　　（F）668　　（G）802　　（H）989

（I）1,187　　（J）1,385　　（K）23,195　　（L）24,976

（M）26,805　　（N）28,956　　（O）31,044　　（P）33,195

（Q）35,024　　（R）36,805

問題３． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（２０点）

（１）母集団がガンマ分布であり、その確率密度関数が

$$f(x)=\frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-x} \qquad (0 \le x < \infty, a > 0)$$

で与えられているとき、標本変量平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\ (n \ge 2)$ の確率密度関数を求めたい。

まず、X_1+X_2 の確率密度関数 $f_2(x)$ を、X_i の確率密度関数 $f(x_i)$ を用いて表すと、

$$f_2(x)=\int_0^\infty f(x_1)f(\boxed{①})dx_1=\int_0^\infty \frac{x_1^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-x_1}\cdot\frac{(\boxed{①})^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-(\boxed{①})}dx_1$$

となる。

ここで、$u=\frac{x_1}{x}$ で変数変換をすると、

$$f_2(x)=\boxed{②}\times\boxed{③}\times\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a-1}du$$

となる。

ベータ関数の性質より、$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a-1}du=\boxed{④}$ となるため、

$$f_2(x)=\boxed{⑤}\times\boxed{⑥}$$

となる。

上記の結果より、$X_1+X_2+\cdots+X_n$ の確率密度関数は、$f_n(x)=\boxed{⑦}\times\boxed{⑧}$ と推測されるため、これを帰納法で証明する。

$f_n(x)$ を、$X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}$ の確率密度関数 $f_{n-1}(x)$ を用いて表すと、

$$f_n(x)=\int_0^\infty f_{n-1}(s)f(\boxed{⑨})ds$$

となる。

さきほどと同様に、$v=\dfrac{s}{x}$ で変数変換をし、ベータ関数の性質を用いて整理すると、

$$f_n(x)=\boxed{⑩}\times\boxed{⑪}\times\int_0^1 v^{(n-1)a-1}(1-v)^{a-1}\,dv=\boxed{⑦}\times\boxed{⑧}$$

となり、$f_n(x)$ の推測が正しいことが示された。

よって、$\overline{X}=\dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ の確率密度関数は

$$f(\bar{x})=n^{\boxed{⑫}}\times\bar{x}^{\boxed{⑬}}\times\boxed{⑭}$$

となる。

（2）0 と 1 の間の一様分布をもつ母集団からの標本 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$ $(n\geq 2)$ の幾何平均として、統計量 $T=(Y_1Y_2\cdots Y_n)^{1/n}$ を作ったとき、次の方法で統計量 T の確率密度関数を求めたい。

まず、$T=(Y_1Y_2\cdots Y_n)^{1/n}$ の対数をとり、$\log T=\dfrac{1}{n}(\log Y_1+\cdots+\log Y_n)$ とおいて $-\log Y_1$ の分布を調べる。Y_1 の分布は矩形分布であるから、十分小さい区間 Δz をとると、

$$P(z_1<-\log Y_1<z_1+\Delta z)=P(\boxed{⑮}<Y_1<\boxed{⑯})=\boxed{⑰}\times\boxed{⑱}$$

となり、$\boxed{⑱}$ は Δz で近似できるため、$Z_1=-\log Y_1$ の確率密度関数は

$f(z_1)=\boxed{⑰}$ で与えられることが分かる。

ここで、（1）の結果を用いると

$\overline{Z}=\dfrac{1}{n}(Z_1+\cdots+Z_n)$ の確率密度関数は $f(\bar{z})=\boxed{⑲}\times\boxed{⑳}$ となる。

ゆえに、統計量 T の確率密度関数は

$$f_T(t)=\boxed{㉑}\times\boxed{㉒}\quad(0\leq t\leq 1)$$

となる。

[①の選択肢]

（A） x　（B） $\dfrac{1}{x}$　（C） $\dfrac{x_1}{x}$　（D） $\dfrac{x}{x_1}$

（E） $x+x_1$　（F） $x-x_1$　（G） $\dfrac{x}{x+x_1}$　（H） $\dfrac{x}{x-x_1}$

[②、⑤の選択肢]

（A） $x^{a-1}e^{-x}$　（B） $x^{2a-1}e^{-x}$　（C） $x^{2(a-1)}e^{-x}$　（D） $x^{2(a-1)-1}e^{-x}$

（E） $x^{a-1}e^{-2x}$　（F） $x^{2a-1}e^{-2x}$　（G） $x^{2(a-1)}e^{-2x}$　（H） $x^{2(a-1)-1}e^{-2x}$

[③、④、⑥の選択肢]

（A） 1　（B） $\dfrac{1}{2}$　（C） $\Gamma(a)$　（D） $\{\Gamma(a)\}^2$

（E） $\Gamma(2a)$　（F） $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$　（G） $\dfrac{1}{\{\Gamma(a)\}^2}$　（H） $\dfrac{1}{\Gamma(2a)}$

（I） $\dfrac{\Gamma(2a)}{\{\Gamma(a)\}^2}$　（J） $\dfrac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)}$　（K） $\dfrac{\{\Gamma(a)\}^2}{\Gamma(2a)}$　（L） $\dfrac{\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}$

[⑦、⑩の選択肢]

（A） $x^{a-1}e^{-x}$　（B） $x^{na-1}e^{-x}$　（C） $x^{n(a-1)}e^{-x}$　（D） $x^{n(a-1)-1}e^{-x}$

（E） $x^{a-1}e^{-nx}$　（F） $x^{na-1}e^{-nx}$　（G） $x^{n(a-1)}e^{-nx}$　（H） $x^{n(a-1)-1}e^{-nx}$

[⑧、⑪の選択肢]

（A） $\Gamma(a)$　（B） $n\Gamma(a)$　（C） $\Gamma(na)$　（D） $\dfrac{1}{\Gamma(a)}$

（E） $\dfrac{1}{n\Gamma(a)}$　（F） $\dfrac{1}{\Gamma(na)}$　（G） $\Gamma\{(n-1)a\}\Gamma(a)$　（H） $\dfrac{1}{\Gamma\{(n-1)a\}\Gamma(a)}$

（I） $\dfrac{\Gamma\{(n-1)a\}}{n\Gamma(a)}$　（J） $\dfrac{\Gamma\{(n-1)a\}}{\Gamma(a)}$　（K） $\dfrac{n\Gamma(a)}{\Gamma\{(n-1)a\}}$　（L） $\dfrac{\Gamma(a)}{\Gamma\{(n-1)a\}}$

[⑨の選択肢]

（A） x　（B） $\dfrac{1}{x}$　（C） $\dfrac{s}{x}$　（D） $\dfrac{x}{s}$

（E） $x+s$　（F） $x-s$　（G） $\dfrac{x}{x+s}$　（H） $\dfrac{x}{x-s}$

[⑫、⑬の選択肢]

（A） $a-1$　（B） a　（C） $-(a-1)$　（D） $-a$

（E） $n(a-1)-1$　（F） $n(a-1)$　（G） $na-1$　（H） na

（I） $-n(a-1)+1$　（J） $-n(a-1)$　（K） $-na+1$　（L） $-na$

[⑭の選択肢]

（A） $\dfrac{e^{-\bar{x}}}{\Gamma(a)}$　（B） $\dfrac{e^{-(\bar{x}+1)}}{\Gamma(a)}$　（C） $\dfrac{e^{-n\bar{x}}}{\Gamma(a)}$　（D） $\dfrac{e^{-\frac{\bar{x}}{n}}}{\Gamma(a)}$

（E） $\dfrac{e^{-\bar{x}}}{\Gamma(na)}$　（F） $\dfrac{e^{-(\bar{x}+1)}}{\Gamma(na)}$　（G） $\dfrac{e^{-n\bar{x}}}{\Gamma(na)}$　（H） $\dfrac{e^{-\frac{\bar{x}}{n}}}{\Gamma(na)}$

[⑮～⑱の選択肢]

（A） z_1　（B） $(z_1+\Delta z)$　（C） e^{-z_1}　（D） $e^{-\Delta z}$

（E） $e^{z_1+\Delta z}$　（F） $e^{-z_1-\Delta z}$　（G） $(1-e^{-z_1})$　（H） $(1-e^{-\Delta z})$

（I） $z_1e^{-z_1}$　（J） $\dfrac{{z_1}^2e^{-z_1}}{2}$　（K） $\log z_1$　（L） $\log \Delta z$

（M） $\log(z_1+\Delta z)$　（N） $\log(z_1-\Delta z)$　（O） $(1-\log z_1)$　（P） $(1-\log \Delta z)$

［⑲の選択肢］

（Ａ） $n\bar{z}$　（Ｂ） $\dfrac{1}{n\bar{z}}$　（Ｃ） $(n\bar{z})^{n-1}$　（Ｄ） $(n\bar{z})^{n}$

（Ｅ） $n^{n-1}\bar{z}^{n}$　（Ｆ） $n^{n}\bar{z}^{n-1}$　（Ｇ） $n^{n}\bar{z}^{n+1}$　（Ｈ） $n^{n+1}\bar{z}^{n}$

［⑳の選択肢］

（Ａ） $e^{-\bar{z}}$　（Ｂ） $e^{-(\bar{z}+1)}$　（Ｃ） $e^{-n\bar{z}}$　（Ｄ） $e^{-\frac{\bar{z}}{n}}$

（Ｅ） $\dfrac{e^{-\bar{z}}}{\Gamma(n)}$　（Ｆ） $\dfrac{e^{-(\bar{z}+1)}}{\Gamma(n)}$　（Ｇ） $\dfrac{e^{-n\bar{z}}}{\Gamma(n)}$　（Ｈ） $\dfrac{e^{-\frac{\bar{z}}{n}}}{\Gamma(n)}$

［㉑の選択肢］

（Ａ） nt　（Ｂ） $\dfrac{1}{nt}$　（Ｃ） $(nt)^{n-1}$　（Ｄ） $(nt)^{n}$

（Ｅ） $n^{n-1}t^{n}$　（Ｆ） $n^{n}t^{n-1}$　（Ｇ） $n^{n}t^{n+1}$　（Ｈ） $n^{n+1}t^{n}$

［㉒の選択肢］

（Ａ） $(\log t)^{n-1}$　（Ｂ） $(-\log t)^{n-1}$　（Ｃ） $(\log t)^{n+1}$　（Ｄ） $(-\log t)^{n+1}$

（Ｅ） $\dfrac{(\log t)^{n-1}}{\Gamma(n)}$　（Ｆ） $\dfrac{(-\log t)^{n-1}}{\Gamma(n)}$　（Ｇ） $\dfrac{(\log t)^{n+1}}{\Gamma(n)}$　（Ｈ） $\dfrac{(-\log t)^{n+1}}{\Gamma(n)}$

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x>0.25)=0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\rightarrow\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$$P(x > 1.9600) = 0.025$$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon =$ 0.100

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon =$ 0.050

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon =$ 0.025

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon =$ 0.010

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon =$ 0.005

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

以上

数学 (解答例)

問題１

（１）

各確率分布について、$P(X \geq a+x \mid X \geq a) = P(X \geq x)$ …（＊）が成り立つか確認する。

（A）確率変数 X が二項分布 $b(n,p)$ に従う場合

$$P(X \geq a+x \mid X \geq a) = \frac{P(X \geq a+x)}{P(X \geq a)} = \frac{\binom{n}{a+x} p^{a+x} q^{n-(a+x)} + \binom{n}{a+x+1} p^{a+x+1} q^{n-(a+x+1)} + \cdots}{\binom{n}{a} p^{a} q^{n-a} + \binom{n}{a+1} p^{a+1} q^{n-(a+1)} + \cdots}$$

$$P(X \geq x) = \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} + \binom{n}{x+1} p^{x+1} q^{n-(x+1)} + \cdots$$

よって、等式（＊）は明らかに成り立たず、（A）二項分布は記憶喪失性を持たない。

（B）確率変数 X がポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う場合

$$P(X \geq a+x \mid X \geq a) = \frac{P(X \geq a+x)}{P(X \geq a)} = \frac{\lambda^x \left(\frac{1}{(a+x)!} + \frac{1}{(a+x+1)!}\lambda + \frac{1}{(a+x+2)!}\lambda^2 + \cdots \right)}{\frac{1}{a!} + \frac{1}{(a+1)!}\lambda + \frac{1}{(a+2)!}\lambda^2 + \cdots}$$

$$P(X \geq x) = e^{-\lambda} \lambda^x \left(\frac{1}{x!} + \frac{1}{(x+1)!}\lambda + \frac{1}{(x+2)!}\lambda^2 + \cdots \right)$$

よって、等式（＊）は明らかに成り立たず、（B）ポアソン分布は記憶喪失性を持たない。

（C）確率変数 X が幾何分布 $G(p)$ に従う場合

$$P(X \geq a+x \mid X \geq a) = \frac{P(X \geq a+x)}{P(X \geq a)} = \frac{pq^{a+x} + pq^{a+x+1} + \cdots}{pq^{a} + pq^{a+1} + \cdots} = \frac{q^x (pq^a + pq^{a+1} + \cdots)}{pq^{a} + pq^{a+1} + \cdots} = q^x$$

$$P(X \geq x) = pq^x (1 + q + q^2 + \cdots) = pq^x \frac{1}{1-q} = q^x$$

よって、等式（＊）は成り立ち、（C）$\boxed{\text{幾何分布は記憶喪失性を持つ。}}$

（D）確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う場合

$$P(X \geq a+x \mid X \geq a)=\frac{P(X \geq a+x)}{P(X \geq a)}=\frac{1-F(a+x)}{1-F(a)}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{a+x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2} ds}{1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2} ds}$$

$$P(X \geq x)=1-F(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(s-\mu)^2} ds$$

よって、等式（＊）は明らかに成り立たず、（D）正規分布は記憶喪失性を持たない。

（E）確率変数 X が指数分布 $e(\lambda)$ に従う場合

$$P(X \geq a+x \mid X \geq a)=\frac{P(X \geq a+x)}{P(X \geq a)}=\frac{1-F(a+x)}{1-F(a)}=\frac{e^{-\frac{1}{\lambda}(a+x)}}{e^{-\frac{1}{\lambda}a}}=e^{-\frac{1}{\lambda}x}$$

$$P(X \geq x)=1-F(x)=e^{-\frac{1}{\lambda}x}$$

よって、等式（＊）は成り立ち、（E）$\boxed{\text{指数分布は記憶喪失性を持つ。}}$

（F）確率変数 X がガンマ分布 $\Gamma(p,\sigma)$ に従う場合

$$P(X \geq a+x \mid X \geq a)=\frac{P(X \geq a+x)}{P(X \geq a)}=\frac{1-F(a+x)}{1-F(a)}=\frac{1-\frac{1}{\Gamma(p)\sigma^p}\int_{-\infty}^{a+x} s^{p-1} e^{-\frac{1}{\sigma}s} ds}{1-\frac{1}{\Gamma(p)\sigma^p}\int_{-\infty}^{a} s^{p-1} e^{-\frac{1}{\sigma}s} ds}$$

$$P(X \geq x)=1-F(x)=1-\frac{1}{\Gamma(p)\sigma^p}\int_{-\infty}^{x} s^{p-1} e^{-\frac{1}{\sigma}s} ds$$

よって、等式（＊）は明らかに成り立たず、（F）ガンマ分布は記憶喪失性を持たない。

ゆえに、解答は　①（C）　②（E）（①と②は順不同）

（2）

確率変数 W の分布関数 $F(w)$ を計算する。

$$\begin{aligned}F(w)&=P(W \leq w)\\&=P(\min(X,Y) \leq w)\\&=1-P(\min(X,Y) \geq w)\\&=1-P((X \geq w)\cap(Y \geq w))\\&=1-P(X \geq w)P(Y \geq w)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}P(X \geq w)&=P(Y \geq w)\\&=\int_{w}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}dt\\&=e^{-\frac{w}{2}}\end{aligned}$$

となるので、

$$F(w)=1-\left(e^{-\frac{w}{2}}\right)^2=1-e^{-w}$$

となることから、W は平均1の指数分布に従うことがわかる。

W の積率母関数 $\phi(\theta)$ は $\phi(\theta)=\dfrac{1}{1-\theta}=1+\theta+\theta^2+\theta^3\ldots$ であるから、

$E(W^n)=\phi^{(n)}(0)=n!$ となる。

従って、

面積の期待値は

$E(\pi W^2)=2\pi$

分散は

$$\begin{aligned}V(\pi W^2)&=\pi^2\left(E(W^4)-E(W^2)^2\right)\\&=\pi^2(24-4)\\&=20\pi^2\end{aligned}$$

である。

よって、解答は　①（A）　②（B）

（3）

ポアソン分布の再生性により、1日の売上個数 S は $Po(3)$ に従うから、

$P(S\le k)\ge 0.95$ なる最小の整数 k が求めるものである。

$P(S\le k)$ がはじめて 0.95 を突破するのは下表より、$k=6$ のときである。

k	$P(S=k)$	$P(S\le k)$
0	0.04980	0.04980
1	0.14941	0.19921
2	0.22411	0.42332
3	0.22411	0.64743
4	0.16808	0.81552
5	0.10085	0.91637
6	0.05043	0.96679

よって、解答は（D）

（4）

各 X_k の特性関数 $\varphi(t)=E\left(e^{itX_k}\right)=\dfrac{1}{4}\left(1+e^{it}+e^{2it}+e^{3it}\right)=\dfrac{1}{4}\dfrac{1-e^{4it}}{1-e^{it}}$

よって、$\widetilde{X}_k=\dfrac{X_k}{4^k}$ の特性関数 $\widetilde{\varphi}(t)(k=1,2\ldots)$ は、

$$\widetilde{\varphi}(t)=E\left(e^{it\widetilde{X}_k}\right)=E\left(e^{it\cdot 4^{-k}X_k}\right)=\varphi\left(t\cdot 4^{-k}\right)=\frac{1}{4}\frac{1-e^{i\cdot 4^{-(k-1)}t}}{1-e^{i\cdot 4^{-k}t}}$$

したがって、$X_1,X_2,\ldots X_n$ は独立であるので、Y_n の特性関数 $\phi_n(t)(n=1,2,\ldots)$ は

$$\phi_n(t)=\widetilde{\varphi}_1(t)\cdot\widetilde{\varphi}_2(t)\cdots\widetilde{\varphi}_n(t)=\left(\frac{1}{4}\frac{1-e^{i\cdot 4^{0}t}}{1-e^{i\cdot 4^{-1}t}}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\frac{1-e^{i\cdot 4^{-1}t}}{1-e^{i\cdot 4^{-2}t}}\right)\cdots\left(\frac{1}{4}\frac{1-e^{i\cdot 4^{-(n-1)}t}}{1-e^{i\cdot 4^{-n}t}}\right)$$

$$=\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1-e^{it}}{1-e^{i\cdot 4^{-n}t}}$$

ここで、

$$4^n\cdot\left(1-e^{i\cdot 4^{-n}t}\right)=4^n\left\{1-\left\{1+\frac{i\cdot 4^{-n}t}{1!}+\frac{\left(i\cdot 4^{-n}t\right)^2}{2!}+\frac{\left(i\cdot 4^{-n}t\right)^3}{3!}+\cdots\right\}\right\}$$

$$=-\left\{\frac{it}{1!}+\frac{(it)^2 4^{-n}}{2!}+\frac{(it)^3\left(4^{-n}\right)^2}{3!}+\cdots\right\}$$

よって、$n\to\infty$ のとき $\phi_n(t)\to\dfrac{1-e^{it}}{-it}=\dfrac{e^{it}-1}{it}$

これは、区間 $(0,1)$ 上の一様分布の特性関数のため、Y_n は $n\to\infty$ のとき、一様分布に従うことがわかる。

よって、<u>解答は　①（A）　②（A）</u>

（５）

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ は標本変量であるから、X_i と X_j とはたがいに独立であり、かつその分布は同じである。したがって、原点まわりの２次の母積率を μ_2' と表すと

$$E\left(\overline{X}^2\right)=E\left\{\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,2}+2\sum_{i>j}X_iX_j\right)=\frac{1}{n^2}\left\{n\mu_2'+2{}_nC_2\mu^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\mu_2'+(n-1)\mu^2\right\}$$

$$V\left(\overline{X}\right)=E\left(\overline{X}^2\right)-\left\{E\left(\overline{X}\right)\right\}^2=\frac{1}{n}\left\{\mu_2'+(n-1)\mu^2\right\}-\mu^2=\frac{1}{n}\left(\mu_2'-\mu^2\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

である。また、原点まわりの３次の母積率を μ_3' と表すと

$$E\left(\overline{X}^3\right)=E\left\{\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^3\right\}=\frac{1}{n^3}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,3}+3\sum_{i\neq j}X_i^{\,2}X_j+6\sum_{i>j>k}X_iX_jX_k\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{\mu_3'+3(n-1)\mu_2'\mu+(n-1)(n-2)\mu^3\right\}$$

である。ここで、

$$\mu_3=E\left\{\left(X_i-\mu\right)^3\right\}=E\left(X_i^{\,3}\right)-3\mu E\left(X_i^{\,2}\right)+3\mu^2E\left(X_i\right)-\mu^3=\mu_3'-3\mu\mu_2'+2\mu^3$$

であることに注意すると、求めるひずみの分子は

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(\overline{X}-\mu\right)^3\right\} &= E\left(\overline{X}^3\right)-3\mu E\left(\overline{X}^2\right)+3\mu^2E\left(\overline{X}\right)-\mu^3 \\
&= \frac{\mu_3'}{n^2}+\frac{3(n-1)}{n^2}\mu_2'\mu+\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\mu^3-\frac{3}{n}\mu_2'\mu-\frac{3(n-1)}{n}\mu^3+3\mu^3-\mu^3 \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\mu_3'-3\mu_2'\mu+2\mu^3\right) \\
&= \frac{\mu_3}{n^2}
\end{aligned}
$$

である。以上より、$\overline{X}$ の分布のひずみは

$$
\frac{E\left\{\left(\overline{X}-\mu\right)^3\right\}}{\left\{V\left(\overline{X}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_3 / n^2}{\sigma^3 / n^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}}
$$

である。

よって、<u>解答は　①（D）　②（B）　③（I）　④（H）</u>

（6）

支持率を p 、大きさ n の標本をとった場合の支持率を $\hat{p}$ とする。二項母集団の母百分率 p の推定において近似法を用いると、

$$
\hat{p}-u\left(\frac{0.1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}<p<\hat{p}+u\left(\frac{0.1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}
$$

となる。従って、$2\times1.6449\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\leq0.05$ が成り立つから、$n\geq(65.8)^2\times\hat{p}(1-\hat{p})$ が求める n の条件となる。

支持率が 20 %と予想される場合、$\hat{p}=0.2$ を代入して、$n\geq(65.8)^2\times0.2\times(1-0.2)=692.7$ となる。また、支持率の予想が全くつかない場合、$\hat{p}(1-\hat{p})$ は $\hat{p}=0.5$ で最大となるから、$n\geq(65.8)^2\times0.5\times(1-0.5)=1082.4$ となる。

よって、<u>解答は　①（G）　②（F）</u>

（7）

測定された 6 個のゼリーの重さを $x_i\,(i=1,2,\cdots,6)$ と表すと、

標本数 $n=6$,　　$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i}{6}=120.4000$,　　$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{6}=0.09333$,　　自由度 $\phi=6-1=5$

であるから、母平均が未知の場合における分散の推定により、ゼリー1つの重さの分散の信頼区間は、信頼係数を $95\,\%=1-\varepsilon$ として、

$$\left(\frac{ns^2}{\chi_\phi^{\ 2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)},\ \frac{ns^2}{\chi_\phi^{\ 2}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right)=\left(\frac{6\times0.09333}{12.8325},\ \frac{6\times0.09333}{0.8312}\right)=(0.04364,\ 0.67370)$$

となる、分散の加成性より、測定されたゼリー1つの重さの分散は、

（測定の誤差を除くゼリー1つの重さの分散）＋（測定の誤差分散）

であるから、測定誤差を除くゼリーの本来の重さの分散の信頼区間は、

$$(0.04364-0.0100,\ 0.67370-0.0100)=(0.03364,\ 0.66370)$$

また、ゼリー4個を箱詰めした場合の1箱の重さの分散は、分散の加成性より、

（本来のゼリー1つの重さの分散）×4＋（箱だけの重さの分散）

であるから、ゼリー4個を箱詰めした場合の1箱の重さの分散の信頼区間は

$$(0.0336\times4+0.0600,\ 0.6637\times4+0.0600)=(0.1944,\ 2.7148)$$

となる。

よって、解答は　①（B）　②（G）　③（B）　④（F）

（8）

独立性の検定より、$\chi^2=\dfrac{(3n\cdot2n-10n\cdot n)^2\cdot16n}{13n\cdot3n\cdot4n\cdot12n}=\dfrac{16n}{117}$とおく。帰無仮説が採択されたので、

$\chi^2<\chi_1^2(0.01)=6.6349$が成り立つから、$n<\dfrac{6.6349\times117}{16}=48.5$となる。

よって、解答は　（D）

（9）

yをxで回帰したときの回帰直線が$y=6x+1$であること、また、$s_x^2=1\cdots$①より、

$$6=r_{xy}\frac{s_y}{s_x}=\frac{s_{xy}}{s_x^{\ 2}}=s_{xy}$$

次に、xをyで回帰したときの回帰直線が$x=\dfrac{1}{8}y+2$であること、また、$s_{xy}=6$より、

$$\frac{1}{8}=r_{xy}\frac{s_x}{s_y}=\frac{s_{xy}}{s_y^{\ 2}}=\frac{6}{s_y^{\ 2}}\cdots② \qquad \therefore s_y^2=48\cdots③$$

①、③を②へ代入して、決定係数$R^2=r_{xy}^2=\dfrac{3}{4}$

また、全変動$ns_y^2=8\times48=384$

これらより、yをxで回帰したときの誤差分散の不偏推定量$\hat{\sigma}^2$は

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\frac{1}{n-2}\times(1-R^2)\times ns_y^2=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times 384=16$$

よって、解答は　①（E）　②（E）

（１０）

$X_1-X_2=-(X_2-X_1)$ は、定常増分性より $-X_1$ と同じ分布に従うので、標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことがわかる。

これより、$P(X_1-X_2>0)=\dfrac{1}{2}$

また、独立増分性より

$$E(X_1,X_1-X_2>0)=E(X_1,-(X_2-X_1)>0)=\iint_{y>0}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}E(X_1)=0$$

よって、

$$E(X_1\mid X_1-X_2>0)=\frac{E(X_1,X_1-X_2>0)}{P(X_1-X_2>0)}=0$$

ゆえに、解答は　①（**C**）　②（**F**）　③（**C**）

（１１）

$AR(2)$ モデル $Y_t=1.0+0.2Y_{t-1}+0.5Y_{t-2}+\varepsilon_t$ に対し、自己相関 ρ_1,ρ_2,ρ_3 はユール・ウォーカー方程式を用いて次のとおり求めることができる。

$$\rho_1=\frac{0.2}{1-0.5}=0.4$$

$$\rho_2=\frac{0.2^2}{1-0.5}+0.5=0.58$$

$$\rho_3=0.2\cdot0.58+0.5\cdot0.4=0.316$$

求める偏自己相関は次の方程式の解である。

$$0.4=\phi_{11}、\begin{cases}0.4=\phi_{21}+0.4\phi_{22}\\0.58=0.4\phi_{21}+\phi_{22}\end{cases}、\begin{cases}0.4=\phi_{31}+0.4\phi_{32}+0.58\phi_{33}\\0.58=0.4\phi_{31}+\phi_{32}+0.4\phi_{33}\\0.316=0.58\phi_{31}+0.4\phi_{32}+\phi_{33}\end{cases}$$

これを解けば $\phi_{11}=0.4$ 、$\phi_{22}=0.5$ 、$\phi_{33}=0$ である。

よって、解答は　①（E）　②（F）　③（A）

（１２）

$E(h(X)) = E(X^2) = \frac{1}{3}$

$V(h(X)) = V(X^2) = E(X^4) - (E(X^2))^2 = \frac{4}{45}$

$C(g(X), h(X)) = C(e^X, X^2) = E(e^X \cdot X^2) - E(e^X)E(X^2) = e - 2 - \frac{1}{3}(e-1) = 0.1453$

$V(g(X)) = V(e^X) = E(e^{2X}) - (E(e^X))^2 = \frac{(e^2-1)}{2} - (e-1)^2 = 0.2422$

したがって制御変量法による分散は、試行回数を$n(=5)$とすると

$$V\left(\hat{\theta}_n^{\text{制}}\right) = \frac{1}{n}\left(V(g(X)) - \frac{C(g(X), h(X))^2}{V(h(X))}\right) = \frac{1}{n}0.00458$$

となる。一方、標本平均の分散は$V\left(\hat{\theta}_n\right) = \frac{1}{n^2} nV(g(X)) = \frac{1}{n}0.2422$であるから、制御変量法によって標本平均の分散は

$$\left(1 - \frac{\frac{1}{n}0.00458}{\frac{1}{n}0.2422}\right) = 98.1\,\%$$減少することが期待できる。

よって、解答は　①（H）　②（E）

問題２

（１）

Ｉ）

$$y = f(x) = \begin{cases} a & (0 < x \le 2) \\ a + (x-2) \times b & (2 < x) \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^\infty f(x) \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$= \int_0^2 a \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx + \int_2^\infty \{a + (x-2)b\} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$= \int_0^\infty a \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx + \int_2^\infty \{(x-2)b\} \cdot \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx$$

$$= a + b\lambda \times e^{-\frac{2}{\lambda}}$$

となる。またNは$Y_1, Y_2, \cdots$と独立であって

$Z = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$であるので

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N = k\} E\left(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \middle| N = k\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}k\left\{a+b\lambda e^{-\frac{2}{\lambda}}\right\}$$

$$=\mu\left(a+b\lambda e^{-\frac{2}{\lambda}}\right)$$

よって解答は、<u>①（Ｉ）②（Ｂ）③（Ｌ）④（Ｃ）⑤（Ｒ）⑥（Ａ）⑦（Ｗ）⑧（Ｃ）⑨（Ｎ）⑩（Ｘ）⑪（Ａ）⑫（Ｗ）⑬（Ｃ）⑭（Ｎ）　　**（①と②は順不同）**</u>

Ⅱ）

$$y=g(x)=\begin{cases} a & (0<x\leq 2) \\ a+bn & (2<x) \end{cases}$$

$$E(Y)=\int_0^{\infty} g(x)\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$=\int_0^2 a\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1+n}^{2+n}(a+nb)\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$=a\left(1-e^{-\frac{2}{\lambda}}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(a+nb)\left(e^{-\frac{1+n}{\lambda}}-e^{-\frac{2+n}{\lambda}}\right)$$

ここで、

$$a\text{ の係数}=1-e^{-\frac{2}{\lambda}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{1+n}{\lambda}}-e^{-\frac{2+n}{\lambda}}\right)$$

$$=1-e^{-\frac{2}{\lambda}}+\left(e^{-\frac{2}{\lambda}}-e^{-\frac{3}{\lambda}}\right)+\left(e^{-\frac{3}{\lambda}}-e^{-\frac{4}{\lambda}}\right)+\cdots=1$$

$$b\text{ の係数}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{-\frac{1+n}{\lambda}}-e^{-\frac{2+n}{\lambda}}\right)=e^{-\frac{2}{\lambda}}\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}n\left(e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}}\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^2}=\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}$$

$$E(Y)=a+\frac{be^{-\frac{2}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}$$

$$E(Z)=\mu\left(a+\frac{be^{-\frac{2}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)$$

よって解答は、<u>⑮（Ｃ）⑯（Ａ）⑰（Ｏ）⑱（Ｍ）⑲（Ｔ）</u>

Ⅲ）

求める時間 w は以下の方程式の解である。

$$\mu\left(a+\frac{be^{-\frac{2}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)=\mu\left(a+b\lambda e^{-\frac{w}{\lambda}}\right)$$

$$\frac{e^{-\frac{2}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}=\lambda e^{-\frac{w}{\lambda}}$$

$$w=2+\lambda\left\{\log\lambda+\log\left(1-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right)\right\}$$

よって<u>解答は、⑳（Ａ）㉑（Ｈ）</u>

（２）

Ⅳ）

$$E(Z)=\mu\times\left(a+\frac{be^{-\frac{2}{\lambda}}}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)=1{,}000\times\left(100+\frac{10\times0.983^2}{1-0.983}\right)=668{,}405$$ であるから、求める

数値は$1.2\times E(Z)\div\mu=802$

よって<u>解答は、㉒（Ｇ）</u>

Ⅴ）

１日あたりの利用料金の総額の見込額は800×802＝641,600円となり、

668,405－641,600＝26,805円減少する。

また、定額料金を再設定した場合、１人あたりの料金は、

$$1.2\times800\times\left(100+\frac{10\times0.989^2}{1-0.989}\right)/800=1{,}187$$

$1{,}187-802=385$ 円増加する。

よって<u>解答は、㉓（Ｍ）㉔（Ｄ）</u>

問題３

（１）

X_1+X_2 の確率密度関数 $f_2(x)$ を、X_i の確率密度関数 $f(x_i)$ を用いて表すと、

$$f_2(x)=\int_0^\infty f(x_1)f(x-x_1)dx_1=\int_0^\infty\frac{x_1^{\ a-1}}{\Gamma(a)}e^{-x_1}\cdot\frac{(x-x_1)^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-(x-x_1)}dx_1$$

となる。

ここで、$u=\dfrac{x_1}{x}$ で変数変換をすると、

$$f_2(x)=\int_0^1 \frac{(xu)^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-xu}\cdot\frac{(x-xu)^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-(x-xu)}\cdot\frac{d(xu)}{du}du$$

$$=\frac{x^{2a-1}e^{-x}}{\{\Gamma(a)\}^2}\cdot\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a-1}du$$

となる。

ベータ関数の性質より、$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{a-1}du=\frac{\{\Gamma(a)\}^2}{\Gamma(2a)}$ となるため、

$$f_2(x)=\frac{x^{2a-1}e^{-x}}{\Gamma(2a)}$$

となる。

上記の結果より、$X_1+X_2+\cdots+X_n$ の確率密度関数は、$f_n(x)=\frac{x^{na-1}e^{-x}}{\Gamma(na)}$ と推測されるため、これを帰納法で証明する。

$f_n(x)$を、$X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}$ の確率密度関数 $f_{n-1}(x)$ を用いて表すと、

$$f_n(x)=\int_0^\infty f_{n-1}(s)f(x-s)ds$$

$$=\int_0^\infty \frac{s^{(n-1)a-1}\cdot e^{-s}}{\Gamma\{(n-1)a\}}\cdot\frac{(x-s)^{a-1}\cdot e^{-(x-s)}}{\Gamma(a)}ds$$

となる。

さきほどと同様に、$v=\frac{s}{x}$ で変数変換をし、ベータ関数の性質を用いて整理すると、

$$f_n(x)=\int_0^\infty \frac{(xv)^{(n-1)a-1}\cdot e^{-xv}}{\Gamma\{(n-1)a\}}\cdot\frac{(x-xv)^{a-1}\cdot e^{-(x-xv)}}{\Gamma(a)}\cdot\frac{d(xv)}{dv}dv$$

$$=\frac{x^{na-1}e^{-x}}{\Gamma\{(n-1)a\}\Gamma(a)}\cdot\int_0^1 v^{(n-1)a-1}(1-v)^{a-1}dv=\frac{x^{na-1}e^{-x}}{\Gamma(na)}$$

となり、$f_n(x)$の推測が正しいことが示された。

よって、$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$の確率密度関数は

$$f(\bar{x})=f_n(n\bar{x})\cdot\left|\frac{d(n\bar{x})}{d\bar{x}}\right|=\frac{(n\bar{x})^{na-1}e^{-n\bar{x}}}{\Gamma(na)}\cdot n=n^{na}\cdot\bar{x}^{na-1}\cdot\frac{e^{-n\bar{x}}}{\Gamma(na)}$$

となる。

よって、<u>解答は　①（Ｆ）　②（Ｂ）　③（Ｇ）　④（Ｋ）　⑤（Ｂ）　⑥（Ｈ）</u>
<u>⑦（Ｂ）　⑧（Ｆ）　⑨（Ｆ）　⑩（Ｂ）　⑪（Ｈ）　⑫（Ｈ）　⑬（Ｇ）　⑭（Ｇ）</u>

（２）

$T=\left(Y_1Y_2\cdots Y_n\right)^{1/n}$ の対数をとり、$\log T=\dfrac{1}{n}\left(\log Y_1+\cdots+\log Y_n\right)$ とおいて $-\log Y_1$ の分布を調べる。

Y_1 の分布は矩形分布であるから、十分小さい区間 Δz をとると、

$$
\begin{aligned}
P\left(z_1<-\log Y_1<z_1+\Delta z\right)&=P\left(e^{-z_1-\Delta z}<Y_1<e^{-z_1}\right)\\
&=e^{-z_1}-e^{-z_1-\Delta z}\\
&=e^{-z_1}\left(1-e^{-\Delta z}\right)
\end{aligned}
$$

となり、$\left(1-e^{-\Delta z}\right)$ は Δz で近似できるため、$Z_1=-\log Y_1$ の確率密度関数は

$f\left(z_1\right)=e^{-z_1}$ で与えられることが分かる。

これは、(１) で与えられた確率密度関数 $f(x)=\dfrac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{-x}$ で、$a=1$ としたものであるから、

$\overline{Z}=\dfrac{1}{n}\left(Z_1+\cdots+Z_n\right)$ の確率密度関数は $f\left(\bar{z}\right)=n^n\cdot\bar{z}^{n-1}\cdot\dfrac{e^{-n\bar{z}}}{\Gamma(n)}$ となる。

$\overline{Z}=-\log T$ であるため、統計量 T の確率密度関数は

$$
\begin{aligned}
f_T\left(t\right)&=f\left(\bar{z}\right)\cdot\left|\frac{d\bar{z}}{dt}\right|\\
&=n^n\cdot\left(-\log t\right)^{n-1}\cdot\frac{e^{-n\left(-\log t\right)}}{\Gamma\left(n\right)}\cdot\left|-\frac{1}{t}\right|\\
&=n^n\cdot\left(-\log t\right)^{n-1}\cdot\frac{t^n}{\Gamma\left(n\right)}\cdot\frac{1}{t}\\
&=n^n\cdot t^{n-1}\cdot\frac{\left(-\log t\right)^{n-1}}{\Gamma\left(n\right)},\quad 0\le t\le 1
\end{aligned}
$$

となる。

よって、解答は　⑮（F）　⑯（C）　⑰（C）　⑱（H）　⑲（F）　⑳（G）　㉑（F）　㉒（F）

問題１

（１）	①	（C）	完答で５点	（７）	①	（B）	完答で３点
	②	（E）	①②は順不同		②	（G）	
（２）	①	（A）	２点		③	（B）	完答で２点
	②	（B）	３点		④	（F）	
（３）	（D）		５点	（８）	（D）		５点
（４）	①	（A）	完答で５点	（９）	①	（E）	３点
	②	（A）			②	（E）	２点
（５）	①	（D）	完答で１点	（１０）	①	（C）	１点
	②	（B）			②	（F）	１点
	③	（I）	完答で４点		③	（C）	３点
	④	（H）		（１１）	①	（E）	１点
（６）	①	（G）	２点		②	（F）	２点
	②	（F）	３点		③	（A）	２点
				（１２）	①	（H）	２点
					②	（E）	３点

問題２

（１）	①	（I）	完答で１点		⑮	（C）	１点
	②	（B）	①②は順不同		⑯	（A）	完答で３点
	③	（L）	完答で１点		⑰	（O）	
	④	（C）			⑱	（M）	
	⑤	（R）			⑲	（T）	１点
	⑥	（A）	完答で１点		⑳	（A）	完答で３点
	⑦	（W）			㉑	（H）	
	⑧	（C）		（２）	㉒	（G）	２点
	⑨	（N）			㉓	（M）	２点
	⑩	（X）	完答で３点		㉔	（D）	２点
	⑪	（A）					
	⑫	（W）					
	⑬	（C）					
	⑭	（N）					

問題３

（１）	①	（Ｆ）	１点	（２）	⑮	（Ｆ）	完答で１点
	②	（Ｂ）	完答で２点		⑯	（Ｃ）	
	③	（Ｇ）			⑰	（Ｃ）	完答で２点
	④	（Ｋ）	１点		⑱	（Ｈ）	
	⑤	（Ｂ）	完答で１点		⑲	（Ｆ）	完答で２点
	⑥	（Ｈ）			⑳	（Ｇ）	
	⑦	（Ｂ）	完答で１点		㉑	（Ｆ）	完答で３点
	⑧	（Ｆ）			㉒	（Ｆ）	
	⑨	（Ｆ）	１点				
	⑩	（Ｂ）	完答で２点				
	⑪	（Ｈ）					
	⑫	（Ｈ）	完答で３点				
	⑬	（Ｇ）					
	⑭	（Ｇ）					

以上