生保数理（問題）

問題１． 次の（１）～（８）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　各５点（計４０点）

（１）　債務の返済方法として次の 2 つを考える。

- 返済額が毎回同額となるように返済する方法（元利均等返済）
- 元金は均等に返済することとし、これに加えて毎返済時には未返済元金に対する利息を支払う方法（元金均等返済）

元金が同額であり、返済期間 35 年、年 1 回期末返済、金利 2.00%の場合、（元金均等返済による総返済額）÷（元利均等返済による総返済額）の値に最も近いものは次のうちどれか。必要であれば、$a_{\overline{35|}} = 24.9986$を用いなさい。

（Ａ） 0.95	（Ｂ） 0.96	（Ｃ） 0.97	（Ｄ） 0.98	（Ｅ） 0.99
（Ｆ） 1.00	（Ｇ） 1.01	（Ｈ） 1.02	（Ｉ） 1.03	（Ｊ） 1.04

（２）　ある集団が原因 A、B によって減少していく 2 重脱退表を考える。x 歳($0 \leqq x < 100$)における原因 A による脱退力が $\mu_x^A = \dfrac{1}{100-x}$ 、原因 B による脱退力が $\mu_x^B = 0.05$であるとするとき、40 歳以上で A 脱退する者の脱退時の平均年齢として最も近いものは次のうちどれか。必要であれば、$e^{-2} = 0.1353$、$e^{-5} = 0.0067$を用いなさい。

（Ａ） 45	（Ｂ） 48	（Ｃ） 51	（Ｄ） 54	（Ｅ） 57
（Ｆ） 60	（Ｇ） 63	（Ｈ） 66	（Ｉ） 69	（Ｊ） 72

（３）　次の**（Ａ）**～**（Ｅ）**の関係式のうち、常に正しい関係式の記号を全て選びなさい。ただし、該当するものが１つもないときは**（Ｆ）**を選びなさい。

（Ａ） 年 k 回支払の期始払確定年金の年金現価

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(k)} = 1 + v^{\frac{1}{k}} + \cdots + v^{n-\frac{1}{k}}$$

（Ｂ） 期末払の有期生命年金現価

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x}$$

（Ｃ） 計算基数

$$C_x = v^x \cdot (l_x - l_{x+1})$$

（Ｄ） 保険料一時払、保険金即時支払の f 年据置定期保険の純保険料

$$_{f|}\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \frac{\bar{M}_{x+f} - \bar{M}_{x+n}}{D_x}$$

（Ｅ） 期始払累減年金の現価

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x} \cdot \{n \cdot N_x - (S_x - S_{x+n})\}$$

（4）　$A_{x:\overline{n}|}$および$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$は、発生確率｛$q_x$，${}_{1|}q_x$，…，${}_{n-1|}q_x$，${}_np_x$｝で生じる支払金の現価および支払総額の現価をそれぞれ確率変数とした際の平均値として表すことができる。$A_{x:\overline{n}|}$および$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$のそれぞれに対応する確率変数の分散を$\sigma^2\left(A_{x:\overline{n}|}\right)=A^{[2]}_{x:\overline{n}|}-\left(A_{x:\overline{n}|}\right)^2$および$\sigma^2\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)=\ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|}-\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2$と表した場合、以下の算式の①～③に当てはまる組み合わせ$\{①,②,③\}$として適切なものは次のうちどれか。ここで、$A^{[2]}_{x:\overline{n}|}$、$\ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|}$はそれぞれ$A_{x:\overline{n}|}$、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$に対応する確率変数の二乗を確率変数とした際の平均値を表すものとする。

$$A^{[2]}_{x:\overline{n}|}=1-2\cdot\boxed{①}\cdot\boxed{②}+\boxed{①}^2\cdot\boxed{③}$$

（Ａ）　$\left\{\ddot{a}_{x:\overline{n}|},\ d\ ,\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right\}$　　（Ｂ）　$\left\{\ddot{a}_{x:\overline{n}|},\ v\ ,\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right\}$
（Ｃ）　$\left\{\ d\ ,\ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|},\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ \right\}$　　（Ｄ）　$\left\{\ v\ ,\ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|},\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ \right\}$
（Ｅ）　$\left\{\ d\ ,\ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|},\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right\}$　　（Ｆ）　$\left\{\ v\ ,\ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|},\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\right)^2\right\}$
（Ｇ）　$\left\{\ d\ ,\ddot{a}_{x:\overline{n}|},\ \ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|}\ \right\}$　　（Ｈ）　$\left\{\ v\ ,\ddot{a}_{x:\overline{n}|},\ \ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|}\ \right\}$
（Ｉ）　$\left\{\ d\ ,A_{x:\overline{n}|},\ \ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|}\ \right\}$　　（Ｊ）　$\left\{\ 1\ ,A_{x:\overline{n}|},\ \ddot{a}^{[2]}_{x:\overline{n}|}\ \right\}$

（5）　x 歳加入、保険料一時払、保険金額 1、保険期間 n 年の生存保険で、期間途中 $t(0<t<n)$の死亡に対しては責任準備金${}_tV^{(\infty)}$の 1/2 を即時に支払うものとするとき、一時払純保険料に最も近いものは次のうちどれか。ただし、$v^n=0.88277$、${}_np_x=0.90250$とする。

（Ａ）　0.831　（Ｂ）　0.832　（Ｃ）　0.833　（Ｄ）　0.834　（Ｅ）　0.835
（Ｆ）　0.836　（Ｇ）　0.837　（Ｈ）　0.838　（Ｉ）　0.839　（Ｊ）　0.840

（6）　40 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 20 年の養老保険において、15 年経過後に払済保険へ変更する場合の払済保険金額は 0.7567 になる。同じ時点で延長保険へ変更する場合の生存保険金額に最も近いものは次のうちどれか。

ただし、払済保険金額、生存保険金額を計算する場合に用いる解約返戻金は変更時点の平準純保険料式責任準備金と同額とし、払済保険の予定事業費は毎年度始に払済保険金額 1 に対し 0.002、延長保険の予定事業費は毎年度始に死亡保険金額 1 に対し 0.001、生存保険金額 1 に対し 0.001 とする。また、$v=0.99$、${}_5p_{55}=0.9670$、$\ddot{a}_{40:\overline{20}|}=17.7601$とする。

（Ａ）　0.712　（Ｂ）　0.717　（Ｃ）　0.722　（Ｄ）　0.727　（Ｅ）　0.732
（Ｆ）　0.737　（Ｇ）　0.742　（Ｈ）　0.747　（Ｉ）　0.752　（Ｊ）　0.757

（7）　${}_\infty q^{2}_{xy}=0.42$、${}_\infty q^{2}_{xz}=0.50$、${}_\infty q^{1}_{xyz}=0.28$、${}_\infty q^{2}_{xyz}={}_\infty q^{3}_{xyz}$のとき、${}_\infty q^{1}_{xyz}$の値に最も近いものは次のうちどれか。

（Ａ）　0.31　（Ｂ）　0.32　（Ｃ）　0.33　（Ｄ）　0.34　（Ｅ）　0.35
（Ｆ）　0.36　（Ｇ）　0.37　（Ｈ）　0.38　（Ｉ）　0.39　（Ｊ）　0.40

余白ページ

（８）　x 歳加入、保険料年払全期払込、給付日額δ、保険期間 n 年の次の給付を行う疾病入院保険の年払純保険料を表す式は次のうちどれか。

【給付内容】

・疾病により 5 日以上 270 日未満入院した場合、入院日数から 4 日を差し引いた日数と 120 日との短い方の日数を給付日額に乗じて得られる金額を支払う。また、270 日以上入院した場合、給付日額に 270 を乗じて得られる金額を支払う。なお、入院の発生および疾病入院給付金の支払は入院日数によらず年央に発生するものとし、1 年間に 2 回以上の入院は発生しないものとする。また、保険期間中に入院を開始した場合、入院期間が保険期間を超えて継続する場合も給付の対象とする。

【記号の定義】

・退院までの入院日数が i 日の予定疾病入院発生率は、$x+t$ 歳の被保険者について 1 年間あたり $q_{x+t}^{shi}\ (i=1,2,\cdots)$

・ $q_{x+t}^{sh}=\sum_{i=5}^{\infty}q_{x+t}^{shi}$

（A） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t}^{sh} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 270 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（B） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t}^{sh} \cdot \left\{ \sum_{i=5}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 270 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（C） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t}^{sh} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i,120) - 4 + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 270 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（D） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t}^{sh} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 150 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（E） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot q_{x+t}^{sh} \cdot \left\{ \sum_{i=5}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 150 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（F） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 270 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（G） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot \left\{ \sum_{i=5}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 270 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（H） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i,120) - 4 + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 270 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（I） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 150 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

（J） $$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2} \cdot {}_t p_x \cdot \left\{ \sum_{i=5}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot \min(i-4,120) + \sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi} \cdot 150 \right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot \delta$$

問題 2. 次の（1）～（6）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

各７点（計４２点）

（1） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険期間 n 年($n \geqq 3$)の次の給付を行う保険を考える。

・ 満期まで生存すれば、満期時に保険金額 1 を支払う。
・ ある t ($1<t<n$)に対し、第 t 保険年度までに死亡した場合は、死亡した保険年度末に、死亡した保険年度末の平準純保険料式責任準備金を支払う。
・ 第 t+1 保険年度以降に死亡した場合は、死亡した保険年度末に保険金額 1 を支払う。

この保険の年払純保険料 P が、$x+t$ 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 $n-t$ 年の養老保険の年払純保険料の 50%であるとき、v^t を表す式は次のうちどれか。

（A） $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$　（B） $\dfrac{s_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$　（C） $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$　（D） $\dfrac{a_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$　（E） $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$

（F） $\dfrac{a_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}$　（G） $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　（H） $\dfrac{s_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　（I） $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　（J） $\dfrac{a_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

（2） ある x' 歳($x \leqq x' < x+n-1$)の予定死亡率を引き下げたとき、必ず値が小さくなるものの記号を全て選びなさい。ただし、該当するものが 1 つもないときは（H）を選びなさい。ここで、予定利率は一定かつ 0 ではないものとし、$n \geqq 2$ とする。

（A） $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　（B） $A_{x:\overline{n}|}$　（C） $A_{x:\overline{n}|}^{\,1}$　（D） $A_{x:\overline{n}|}^{1}$　（E） $P_{x:\overline{n}|}$

（F） $P_{x:\overline{n}|}^{\,1}$　（G） $P_{x:\overline{n}|}^{1}$

（3） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険期間 n 年の生存保険において、被保険者が満期まで生存すれば保険金額 1 を支払い、死亡すればその保険年度末に既払込営業保険料に年 i %の利息を付けて支払う場合の営業保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

予定利率は i %とし、予定新契約費は新契約時にのみ保険金額 1 に対し 0.025、予定集金費は保険料払込のつど営業保険料 1 に対し 0.03、予定維持費は毎保険年度始に保険金額 1 に対し 0.003 とする。

また、$A_{x:\overline{n}|}^{\,1} = 0.334$、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 15.900$、$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 16.247$、${}_n p_x = 0.890$ とする。

（A） 0.0290　（B） 0.0291　（C） 0.0292　（D） 0.0293　（E） 0.0294
（F） 0.0295　（G） 0.0296　（H） 0.0297　（I） 0.0298　（J） 0.0299

（４） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年の養老保険の第 t 保険年度末全期チルメル式責任準備金 ${}_tV^z_{x:\overline{n}|}$ を考える。

$P_{x:\overline{n}|}=0.04771$2、$q_x=0.005$、$i$=1.00%、$P_{x:\overline{k}|}=0.09696$5、$P^1_{x:\overline{k}|}=0.00495$0

（2≦k＜n、k は定数）とする。

この保険の第 1 保険年度末全期チルメル式責任準備金 ${}_1V^z_{x:\overline{n}|}=0$ となるとき、チルメル割合

$\alpha=$ $\boxed{①}$ となり、第 k 保険年度末全期チルメル式責任準備金 ${}_kV^z_{x:\overline{n}|}=$ $\boxed{②}$ となる。

①および②の空欄に当てはまる値に最も近いものをそれぞれ選びなさい。

【①の選択肢】

（Ａ） 0.025 （Ｂ） 0.030 （Ｃ） 0.035 （Ｄ） 0.040 （Ｅ） 0.045
（Ｆ） 0.050 （Ｇ） 0.055 （Ｈ） 0.060 （Ｉ） 0.065 （Ｊ） 0.070

【②の選択肢】

（Ａ） 0.40 （Ｂ） 0.42 （Ｃ） 0.44 （Ｄ） 0.46 （Ｅ） 0.48
（Ｆ） 0.50 （Ｇ） 0.52 （Ｈ） 0.54 （Ｉ） 0.56 （Ｊ） 0.58

（５） 40 歳の被保険者が 60 歳の被保険者より先に死亡する確率は 0.1284、40 歳の被保険者が 10 年以内に死亡する確率は 0.0212、50 歳の被保険者が 10 年以内に死亡する確率は 0.0416 である。このとき、40 歳の被保険者と 50 歳の被保険者が相互に 10 年以内の期間を隔てて死亡する確率（ある一方が死亡した後、もう一方が 10 年以内に死亡する確率）として最も近いものは次のうちどれか。ここで、全ての被保険者は同一の生命表に従うとする。

（Ａ） 0.15 （Ｂ） 0.20 （Ｃ） 0.25 （Ｄ） 0.30 （Ｅ） 0.35
（Ｆ） 0.40 （Ｇ） 0.45 （Ｈ） 0.50 （Ｉ） 0.55 （Ｊ） 0.60

（６） 契約時 30 歳の就業者が就業不能となった年度末から生存中、ただし契約時から 20 年後の年度末まで支払われる年金の現価 $a^{ai}_{30:\overline{20}|}$ に最も近いものは次のうちどれか。

ここで、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。また、基数は下表のとおりとする。

x	D^{aa}_x	N^{aa}_x	D^{ii}_x	N^{ii}_x	D^i_x	N^i_x
30	73,519	2,102,735	121	30,955	68,728	1,658,697
31	72,710	2,029,216	139	30,834	67,279	1,589,969
50	57,223	784,251	699	24,069	43,060	528,196
51	56,291	727,028	757	23,370	41,756	485,136

（Ａ） 0.0629 （Ｂ） 0.0666 （Ｃ） 0.0712 （Ｄ） 0.0751 （Ｅ） 0.0812
（Ｆ） 0.0865 （Ｇ） 0.0928 （Ｈ） 0.0967 （Ｉ） 0.1003 （Ｊ） 0.1045

問題 3. 次の（１）、（２）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 各９点（計１８点）

（１） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年(n≧2)の標準体および特別条件体の定期保険について考える。

次の①～⑨の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。
ここで、記号の定義は以下のとおりとする。

- q_{x+k} ：標準体の死亡率 $(k=0, 1, \cdots, n-1)$
- q'_{x+k} ：特別条件体の死亡率 $(k=0, 1, \cdots, n-1)$
- P ：標準体の死亡率に基づく年払純保険料
- P' ：特別条件体の死亡率に基づく年払純保険料
- ${}_kV$ ：標準体の死亡率に基づく第 k 保険年度末平準純保険料式責任準備金
- ${}_kV'$ ：特別条件体の死亡率に基づく第 k 保険年度末平準純保険料式責任準備金
- D'_{x+k} 、 N'_{x+k} 、 C'_{x+k} 、 M'_{x+k} は特別条件体の死亡率に基づく計算基数
- $p_{x+k}=1-q_{x+k}$ 、 $p'_{x+k}=1-q'_{x+k}$
- $\Delta_k V={}_kV'-{}_kV$ 、 $\Delta P=P'-P$ 、 $\Delta q_{x+k}=q'_{x+k}-q_{x+k}$ 、 $\Delta p_{x+k}=p'_{x+k}-p_{x+k}$

なお、予定利率は標準体と特別条件体で同じものとする。

A) 標準体と特別条件体の各保険契約に対する責任準備金の再帰式について、$\Delta p_{x+k}=\boxed{①}$ を用いて整理すると、

$$\Delta_k V+\Delta P=v\cdot\boxed{②}\cdot\boxed{③}+v\cdot\boxed{④}\cdot\Delta_{k+1}V \qquad (k=0, 1, \cdots, n-1)$$

と表すことができる。
よって、特別条件体の保険契約の標準体の保険契約に対する上乗せ年払純保険料 ΔP は、

$$\Delta P=\frac{1}{\boxed{⑤}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}v\cdot D'_{x+k}\cdot\boxed{②}\cdot\boxed{③}$$

となる。

B) 標準体の保険契約と特別条件体の保険契約とで年払純保険料の額に差が生じないように、特別条件体の契約に対する保険金額を 1 から β だけ削減することとした場合、標準体の死亡率と特別条件体の死亡率に $q'_{x+k}=(1+\alpha)\cdot q_{x+k}$ という関係があるとすると、

$P=\boxed{⑥}\cdot P'$ 、 $q_{x+k}=\dfrac{q'_{x+k}}{1+\alpha}$ より、

$$\beta=\frac{\boxed{⑦}}{1+\boxed{⑦}}\cdot\frac{1}{\boxed{⑧}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\boxed{⑨}\cdot\boxed{③}$$

と表すことができる。ただし、$\alpha>0$、$0<\beta<1$ とする。

【選択肢】

（ア）	α	（イ）	β	（ウ）	$(1-\alpha)$	（エ）	$(1-\beta)$	（オ）	$1+\Delta p_{x+k}$
（カ）	$1-\Delta p_{x+k}$	（キ）	Δq_{x+k}	（ク）	$-\Delta q_{x+k}$	（ケ）	p'_{x+k}	（コ）	p_{x+k}
（サ）	q'_{x+k}	（シ）	q_{x+k}	（ス）	D'_{x+k}	（セ）	C'_{x+k}	（ソ）	N'_{x+k}
（タ）	M'_{x+k}	（チ）	D'_x	（ツ）	C'_x	（テ）	N'_x	（ト）	M'_x
（ナ）	$D'_x-D'_{x+n}$	（ニ）	$N'_x-N'_{x+n}$	（ヌ）	$M'_x-M'_{x+n}$	（ネ）	P'	（ノ）	$(1-\Delta_k V)$
（ハ）	$(1-{}_k V)$	（ヒ）	$(1-{}_k V')$	（フ）	$(1-\Delta_{k+1} V)$	（ヘ）	$(1-{}_{k+1} V)$	（ホ）	$(1-{}_{k+1} V')$

（２）

40 歳加入、保険料年払 20 年払込の次の給付を行う保険を考える。

【給付内容】

・第 1 保険年度から第 5 保険年度に死亡した場合は、死亡した保険年度末に保険金額 0.5 を支払う。

・第 6 保険年度から第 20 保険年度に死亡した場合は、死亡した保険年度末に保険金額として 1 と保険年度末平準純保険料式責任準備金のいずれか大きい金額を支払う。

・第 20 保険年度末まで生存した場合は、60 歳年金開始、保険年度始支払、年金年額 0.1 の 20 年確定年金を支払う。

予定利率 i=1.00%とすると、この保険の保険年度末平準純保険料式責任準備金は、ある保険年度以降において 1 を超えることとなるが、その保険年度を求めたい。このとき、次の(a)、(b)の各問に答えなさい。

(a) 次の①～⑥の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

年払純保険料を P 、年金原資（年金開始時点における年金現価）を F 、第 t 保険年度末平準純保険料式責任準備金を ${}_tV$ とし、${}_tV \leqq 1$ となる最終保険年度を第 k 保険年度とする。

題意より、次の再帰式が成り立つ。

${}_tV + P = 0.5v \cdot q_{40+t} + v \cdot p_{40+t} \cdot {}_{t+1}V$ （$0 \leqq t \leqq 4$） ……(Ⅰ)

${}_tV + P = v \cdot q_{40+t} + v \cdot p_{40+t} \cdot {}_{t+1}V$ （$5 \leqq t \leqq k-1$） ……(Ⅱ)

${}_tV + P = v \cdot {}_{t+1}V$ （$k \leqq t \leqq 19$） ……(Ⅲ)

(Ⅰ)、(Ⅱ)の両辺に $v^t \cdot {}_tp_{40}$ を乗じて、$t = 0,1,\cdots,k-1$ について加えて整理すると、

$P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} = \boxed{①} - \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot {}_kV$ ……(Ⅳ)

となる。

同様に、(Ⅲ)の両辺に v^{t-k} を乗じて、$t = k, k+1, \cdots, 19$ について加えると、

$P \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} = v^{20-k} \cdot \boxed{③} - {}_kV$ ……(Ⅴ)

となる。

$(Ⅴ) \times \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - (Ⅳ) \times \ddot{a}_{\overline{20-k|}}$ により、P を消去し ${}_kV$ について解くと、

$${}_kV = \frac{v^{20-k} \cdot \boxed{③} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - \boxed{①} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} + \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{k|}} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}}$$

となる。

${}_kV \leqq 1$ より、

$$v^{20-k} \cdot \boxed{③} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - \boxed{①} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} + \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} \leqq \ddot{a}_{40:\overline{k|}} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}$$

$$v^{20-k} \cdot \boxed{③} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}} - (1 - \boxed{④} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k|}}) \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} + \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}} \leqq \ddot{a}_{40:\overline{k|}}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k|}} \cdot (v^{20-k} \cdot \boxed{③} - 1 + \boxed{④} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k|}}) \leqq \ddot{a}_{\overline{20-k|}} \cdot (1 - \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}})$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k|}} \cdot \left(v^{20-k} \cdot \boxed{③} - \boxed{⑤}\right) \leqq \ddot{a}_{\overline{20-k|}} \cdot (1 - \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}})$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k|}} \leqq \ddot{s}_{\overline{20-k|}} \cdot \frac{1 - \boxed{②} \cdot A^{1}_{40:\overline{5|}}}{\boxed{③} - \boxed{⑥}} \quad \cdots\cdots(Ⅵ)$$

が成り立つ。

よって、(Ⅵ)を満たす最大の k を求めれば、第 $k+1$ 保険年度以降の保険年度末平準純保険料式責任準備金が 1 を超えることが分かる。

【選択肢】

（ア） 0.5	（イ） 1	（ウ） i	（エ） v	（オ） d
（カ） v^5	（キ） v^{20}	（ク） v^{20-k}	（ケ） v^k	（コ） $\ddot{a}_{\overline{5}|}$
（サ） $\ddot{a}_{\overline{20}|}$	（シ） $\ddot{a}_{\overline{20-k}|}$	（ス） $\ddot{a}_{\overline{k}|}$	（セ） $\ddot{s}_{\overline{5}|}$	（ソ） $\ddot{s}_{\overline{20}|}$
（タ） $\ddot{s}_{\overline{20-k}|}$	（チ） $\ddot{s}_{\overline{k}|}$	（ツ） ${}_{t-1}V$	（テ） ${}_{t}V$	（ト） ${}_{t+1}V$
（ナ） ${}_{k-1}V$	（ニ） ${}_{k}V$	（ヌ） ${}_{k+1}V$	（ネ） F	（ノ） $A^{\ 1}_{40:\overline{5}|}$
（ハ） $A^{\ 1}_{40:\overline{k-5}|}$	（ヒ） $A^{\ 1}_{40:\overline{k}|}$	（フ） $A^{\ 1}_{40:\overline{20}|}$	（ヘ） $A^{\ 1}_{45:\overline{k-5}|}$	（ホ） $A^{\ 1}_{45:\overline{k}|}$
（マ） $A^{\ 1}_{45:\overline{15}|}$	（ミ） $\ddot{a}_{40:\overline{5}|}$	（ム） $\ddot{a}_{40:\overline{k-5}|}$	（メ） $\ddot{a}_{40:\overline{k}|}$	（モ） $\ddot{a}_{40:\overline{20}|}$
（ヤ） $\ddot{a}_{45:\overline{5}|}$	（ユ） $\ddot{a}_{45:\overline{k-5}|}$	（ヨ） $\ddot{a}_{45:\overline{k}|}$	（ラ） $\ddot{a}_{45:\overline{15}|}$	

(b) $A^{\ 1}_{40:\overline{5}|}=0.00858$であるとする。このとき、保険年度末平準純保険料式責任準備金が<u>1 を超える最初の保険年度</u>は次のうちどれか。ただし、$\ddot{a}_{40:\overline{t}|}$、$v^t$、$\ddot{a}_{\overline{t}|}$、$\ddot{s}_{\overline{t}|}$は下表のとおりとする。

t	$\ddot{a}_{40:\overline{t}|}$	v^t	$\ddot{a}_{\overline{t}|}$	$\ddot{s}_{\overline{t}|}$
1	1.00000	0.99010	1.00000	1.01000
2	1.98864	0.98030	1.99010	2.03010
3	2.96590	0.97059	2.97040	3.06040
4	3.93179	0.96098	3.94099	4.10101
5	4.88628	0.95147	4.90197	5.15202
6	5.82932	0.94205	5.85343	6.21354
7	6.76087	0.93272	6.79548	7.28567
8	7.68085	0.92348	7.72819	8.36853
9	8.58920	0.91434	8.65168	9.46221
10	9.48582	0.90529	9.56602	10.56683
11	10.37061	0.89632	10.47130	11.68250
12	11.24345	0.88745	11.36763	12.80933
13	12.10418	0.87866	12.25508	13.94742
14	12.95264	0.86996	13.13374	15.09690
15	13.78867	0.86135	14.00370	16.25786
16	14.61209	0.85282	14.86505	17.43044
17	15.42274	0.84438	15.71787	18.61475
18	16.22043	0.83602	16.56225	19.81090
19	17.00496	0.82774	17.39827	21.01900
20	17.77615	0.81954	18.22601	22.23919

【選択肢】

（A） 9	（B） 10	（C） 11	（D） 12	（E） 13
（F） 14	（G） 15	（H） 16	（I） 17	（J） 18

以上

生保数理（解答例）

問題１．

設問	解答	配点	設問	解答	配点
（１）	**（C）**	５点	（５）	**（Ｉ）**	５点
（２）	**（E）**	５点	（６）	**（H）**	５点
（３）	**（F）**	５点	（７）	**（J）**	５点
（４）	**（G）**	５点	（８）	**（J）**	５点

（１）

元金を S 、返済期間を n 年とする。

元利均等返済の場合、毎年の返済額は $\dfrac{S}{a_{\overline{n}|}}$ 、総返済額は $n\cdot\dfrac{S}{a_{\overline{n}|}}$

元金均等返済の場合、k 回目の返済額は $S\cdot\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{n-(k-1)}{n}\cdot i\right\}$ 、

総返済額は $S\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{n-(k-1)}{n}\cdot i\right\}=S\cdot\left\{1+\dfrac{i}{2}\cdot(n+1)\right\}$

よって、求める値は、

$$S\cdot\left\{1+\frac{i}{2}\cdot(n+1)\right\}\div\left(n\cdot\frac{S}{a_{\overline{n}|}}\right)=\frac{a_{\overline{n}|}}{n}\cdot\left\{1+\frac{i}{2}\cdot(n+1)\right\}=\frac{24.9986}{35}\cdot\left(1+\frac{0.02}{2}\cdot 36\right)=0.97137$$

解答：**（C）**

（２）

$\mu_x^A=\dfrac{1}{a-x}$ 、 $\mu_x^B=b$ とすると、x 歳の残存者数 l_x は以下のように表される。

$$\begin{aligned}l_x&=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\left(\mu_t^A+\mu_t^B\right)dt\right\}\\&=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\left(\frac{1}{a-t}+b\right)dt\right\}\\&=l_0\cdot\exp\left\{\left[\log(a-t)-bt\right]_0^x\right\}\\&=l_0\cdot\exp\left\{\log\frac{a-x}{a}-bx\right\}\\&=\frac{l_0}{a}\cdot(a-x)\cdot e^{-bx}\end{aligned}$$

40 歳以上で A 脱退する者の脱退時の平均年齢は、

$$
\frac{\int_{40}^{100} x\cdot l_x\cdot\mu_x^A dx}{\int_{40}^{100} l_x\cdot\mu_x^A dx}=\frac{\int_{40}^{100} x\cdot e^{-bx}dx}{\int_{40}^{100} e^{-bx}dx}
$$

$$
=\frac{\left[-\frac{x}{b}\cdot e^{-bx}\right]_{40}^{100}+\int_{40}^{100}\frac{e^{-bx}}{b}dx}{\left[-\frac{1}{b}\cdot e^{-bx}\right]_{40}^{100}}
$$

$$
=\frac{\left[-\frac{x}{b}\cdot e^{-bx}-\frac{e^{-bx}}{b^2}\right]_{40}^{100}}{\left[-\frac{1}{b}\cdot e^{-bx}\right]_{40}^{100}}
$$

$$
=\frac{\left(40+\frac{1}{b}\right)\cdot e^{-40b}-\left(100+\frac{1}{b}\right)\cdot e^{-100b}}{e^{-40b}-e^{-100b}}
$$

$$
=\frac{(40+20)\cdot e^{-2}-(100+20)\cdot e^{-5}}{e^{-2}-e^{-5}}
$$

$$
=\frac{60\times 0.1353-120\times 0.0067}{0.1353-0.0067}
$$

$$
=56.874028
$$

解答：**（E）**

（3）

（A）誤り：正しくは$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{k}\cdot\left(1+v^{\frac{1}{k}}+\cdots+v^{n-\frac{1}{k}}\right)$　（教科書上巻　式 1.6.3）

（B）誤り：正しくは$a_{x:\overline{n}|}=\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x}$　（教科書上巻　式 4.3.10）

（C）誤り：正しくは$C_x=v^{x+1}\cdot d_x=v^{x+1}\cdot(l_x-l_{x+1})$　（教科書上巻　p.119）

（D）誤り：正しくは${}_{f|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}=\frac{\bar{M}_{x+f}-\bar{M}_{x+f+n}}{D_x}$　（教科書上巻　式 4.8.8）

（E）誤り：正しくは$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{D_x}\cdot\{n\cdot N_x-(S_{x+1}-S_{x+n+1})\}$　（教科書上巻　式 4.11.5）

解答：**（F）**

（4）

$$
\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{〔2〕}=\sum_{t=1}^{n}\left(\ddot{a}_{\overline{t}|}\right)^2\cdot{}_{t-1|}q_x+\left(\ddot{a}_{\overline{n}|}\right)^2\cdot{}_np_x=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1-v^t}{d}\right)^2\cdot{}_{t-1|}q_x+\left(\frac{1-v^n}{d}\right)^2\cdot{}_np_x
$$

$$
=\frac{1}{d^2}\left(\sum_{t=1}^{n}(1-2v^t+v^{2t})\cdot{}_{t-1|}q_x+(1-2v^n+v^{2n})\cdot{}_np_x\right)
$$

$$
=\frac{1}{d^2}(1-2A_{x:\overline{n}|}+A_{x:\overline{n}|}^{〔2〕})
$$

と表されるので、

$$A^{(2)}_{x:\overline{n}|} = -(1-2A_{x:\overline{n}|}) + d^2 \cdot \ddot{a}^{(2)}_{x:\overline{n}|}$$
$$= -1 + 2\cdot(1 - d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) + d^2 \cdot \ddot{a}^{(2)}_{x:\overline{n}|}$$
$$= 1 - 2d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + d^2 \cdot \ddot{a}^{(2)}_{x:\overline{n}|}$$

解答：（G）

（5）

Thiele の微分方程式より

$$\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt} = (\mu_{x+t} + \delta)\,{}_tV^{(\infty)} - \frac{1}{2}\mu_{x+t}\cdot{}_tV^{(\infty)}$$

$$\frac{1}{{}_tV^{(\infty)}}\cdot\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt} = \delta + \frac{1}{2}\mu_{x+t}$$

$$\int_0^n \frac{1}{{}_tV^{(\infty)}}\cdot\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt}dt = \int_0^n\left(\delta + \frac{1}{2}\mu_{x+t}\right)dt$$

$$\left[\log{}_tV^{(\infty)}\right]_0^n = n\cdot\delta + \frac{1}{2}\int_0^n \mu_{x+t}dt$$

$${}_0V^{(\infty)} = {}_nV^{(\infty)}\cdot\exp\left(-n\cdot\delta - \frac{1}{2}\int_0^n \mu_{x+t}dt\right) = {}_nV^{(\infty)}\cdot v^n\cdot({}_np_x)^{\frac{1}{2}}$$

ここで、満期保険金額 ${}_nV^{(\infty)} = 1$ であるから、一時払純保険料 ${}_0V^{(\infty)}$ は

$${}_0V^{(\infty)} = v^n\cdot({}_np_x)^{\frac{1}{2}} = 0.88277\times\sqrt{0.90250} = 0.838631$$

解答（Ｉ）

（6）

払済保険金額が 0.7567 となることから、

$${}_{15}V_{40:\overline{20}|} = 0.7567\cdot\left(A_{55:\overline{5}|} + 0.002\ddot{a}_{55:\overline{5}|}\right)$$

$${}_{15}V_{40:\overline{20}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{55:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{55:\overline{5}|}}{17.7601}$$、$A_{55:\overline{5}|} = 1 - d\cdot\ddot{a}_{55:\overline{5}|}$ より、

$$\ddot{a}_{55:\overline{5}|} = 4.841561$$

延長保険の生存保険金額を S とすると、

$$S = \frac{{}_{15}V_{40:\overline{20}|} - \left(A^1_{55:\overline{5}|} + 0.001\ddot{a}_{55:\overline{5}|}\right)}{A_{55:\overline{5}|}^{\ \ 1} + 0.001\ddot{a}_{55:\overline{5}|}}$$

ここで、${}_{15}V_{40:\overline{20}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{55:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} = 1 - \frac{4.841561}{17.7601} = 0.727391$、$A_{55:\overline{5}|}^{\ \ 1} = v^5\cdot{}_5p_{55} = 0.919607$、

$A^1_{55:\overline{5}|} = A_{55:\overline{5}|} - A_{55:\overline{5}|}^{\ \ 1} = 1 - d\cdot\ddot{a}_{55:\overline{5}|} - A_{55:\overline{5}|}^{\ \ 1} = 0.031977$ より、

$$S = \frac{0.727391 - (0.031977 + 0.001\cdot 4.841561)}{0.919607 + 0.001\cdot 4.841561} = 0.747010$$

解答：（H）

（7）

x 、 y 、 z の順で死亡する確率を $q(x,y,z)$ で表わす。

$q(x,y,z)=A$ 、 $q(x,z,y)=B$ 、 $q(y,x,z)=C$

$q(y,z,x)=D$ 、 $q(z,x,y)=E$ 、 $q(z,y,x)=F$ とおくと、

$A+B+C+D+E+F=1$ …（Ⅰ）

${}_{\infty}q_{xy}^{2}=C+D+F$ 、 ${}_{\infty}q_{xz}^{2}=D+E+F$ 、 ${}_{\infty}q_{\overset{1}{x}yz}=C+D$ 、 ${}_{\infty}q_{x\overset{2}{y}z}=B+D$ 、 ${}_{\infty}q_{xy\overset{3}{z}}=B+E$

であるから、

$C+D+F=0.42$ …（Ⅱ）

$D+E+F=0.50$ …（Ⅲ）

$C+D=0.28$ …（Ⅳ）

$B+D=B+E$ …（Ⅴ）

（Ⅱ）～（Ⅴ）より、$C=0.10$ 、 $D=E=0.18$ 、 $F=0.14$

（Ⅰ）より、 ${}_{\infty}q_{\overset{1}{x}yz}=A+B=1-(C+D+E+F)=1-(0.10+0.18+0.18+0.14)=0.40$

解答（J）

（8）

教科書下巻第 14 章 p.182 より、疾病入院保険の年払純保険料は平均給付日数 T_{x+t}^{sh} を用いて

$$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2}\cdot{}_{t}p_{x}\cdot q_{x+t}^{sh}\cdot T_{x+t}^{sh}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\delta$$

で与えられる。入院日数ごとの支払日数は

入院日数 i	支払日数
1～4 日	0
5～124 日	i–4
125～269 日	120
270 日～	270

であるから、平均給付日数 T_{x+t}^{sh} は、

・ $i\geq 125$ のとき、 $120=\min(i-4,120)$

・ $i\geq 270$ のとき、 $270=\min(i-4,120)+150$

に注意すると、

$$T_{x+t}^{sh}=\frac{\sum_{i=5}^{\infty} q_{x+t}^{shi}\cdot\min(i-4,120)+\sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi}\cdot 150}{q_{x+t}^{sh}}$$

と表せる。従って、

$$\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2}\cdot{}_{t}p_{x}\cdot q_{x+t}^{sh}\cdot T_{x+t}^{sh}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\delta=\frac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1/2}\cdot{}_{t}p_{x}\cdot\left\{\sum_{i=5}^{\infty} q_{x+t}^{shi}\cdot\min(i-4,120)+\sum_{i=270}^{\infty} q_{x+t}^{shi}\cdot 150\right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\cdot\delta$$

解答（J）

問題 2.

設問	解答	配点
（１）	**（C）**	7 点
（２）	**（B）、（D）、（E）、（G）**	7 点
（３）	**（B）**	7 点

設問		解答	配点
（４）	①	**（E）**	3 点
	②	**（C）**	4 点
（５）		**（F）**	7 点
（６）		**（D）**	7 点

※（２）は完答の場合のみ得点

（１）

責任準備金の再帰式は、

$$ {}_{k-1}V + P = v \cdot {}_kV \qquad (k = 1, 2, \cdots, t) \qquad \cdots (\mathrm{I}) $$

$$ {}_{k-1}V + P = v \cdot q_{x+k-1} + v \cdot (1 - q_{x+k-1}) \cdot {}_kV \qquad (k = t+1, t+2, \cdots, n) \qquad \cdots (\mathrm{II}) $$

(Ⅰ)より、$v^{k-1} \cdot P = v^k \cdot {}_kV - v^{k-1} \cdot {}_{k-1}V$ で、これを k=1 から t まで加えると、

$$ P \cdot \sum_{k=1}^{t} v^{k-1} = v^t \cdot {}_tV - v^0 \cdot {}_0V = v^t \cdot {}_tV $$

よって、

$$ {}_tV = P \cdot \frac{\sum_{k=1}^{t} v^{k-1}}{v^t} = P \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{t|}}}{v^t} \qquad \cdots (\mathrm{III}) $$

また、(Ⅱ)より、

$$ D_{x+k-1} \cdot {}_{k-1}V + D_{x+k-1} \cdot P = C_{x+k-1} + D_{x+k} \cdot {}_kV $$

$$ D_{x+k-1} \cdot {}_{k-1}V - D_{x+k} \cdot {}_kV + D_{x+k-1} \cdot P = C_{x+k-1} $$

これを k=t+1 から n まで加えると、

$$ D_{x+t} \cdot {}_tV - D_{x+n} \cdot {}_nV + P \cdot \sum_{k=t+1}^{n} D_{x+k-1} = \sum_{k=t+1}^{n} C_{x+k-1} $$

$$ P \cdot \frac{\sum_{k=t+1}^{n} D_{x+k-1}}{D_{x+t}} = \frac{\sum_{k=t+1}^{n} C_{x+k-1} + D_{x+n}}{D_{x+t}} - {}_tV $$

$$ P \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = A_{x+t:\overline{n-t|}} - {}_tV $$

$$ P = P_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{{}_tV}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} $$

仮定より、$P = 0.5P_{x+t:\overline{n-t|}}$ なので、

$$ P = 2P - \frac{{}_tV}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} $$

$$ P = \frac{{}_tV}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} $$

これに(Ⅲ)を代入して、

$$ P = P \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{t|}}}{v^t} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} $$

$$ \therefore v^t = \frac{\ddot{a}_{\overline{t|}}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}} $$

解答**（C）**

（２）

死亡率を引き下げた場合の記号を、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \to \ddot{a}'_{x:\overline{n|}}$ 等と表記する。

（Ａ） $\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x < \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p'_x = \ddot{a}'_{x:\overline{n|}}$ より、必ず大きくなる（小さくならない）。

（Ｂ） $A_{x:\overline{n|}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} > 1 - d \cdot \ddot{a}'_{x:\overline{n|}} = A'_{x:\overline{n|}}$ より、必ず小さくなる。

（Ｃ） $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \cdot {}_n p_x < v^n \cdot {}_n p'_x = A'_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ より、必ず大きくなる（小さくならない）。

（Ｄ） $A^{1}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}} - A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} > A'_{x:\overline{n|}} - A'_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = A'^{1}_{x:\overline{n|}}$ より、必ず小さくなる。

（Ｅ） $P_{x:\overline{n|}} = \dfrac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} > \dfrac{A'_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n|}}} = P'_{x:\overline{n|}}$ より、必ず小さくなる。

（Ｆ）

$$\frac{{}_n p'_x}{{}_n p_x} = \frac{p'_x}{p_x} \cdot \frac{p'_{x+1}}{p_{x+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{p'_{x+n-1}}{p_{x+n-1}}$$

$$\geq \frac{p'_x}{p_x} \cdot \frac{p'_{x+1}}{p_{x+1}} \cdot \cdots \cdot \frac{p'_{x+n-2}}{p_{x+n-2}} = \frac{{}_{n-1} p'_x}{{}_{n-1} p_x}$$

$\cdots$

$$\geq \frac{p'_x}{p_x} = \frac{{}_1 p'_x}{{}_1 p_x}$$

$$\geq 1 = \frac{{}_0 p'_x}{{}_0 p_x}$$

となるため、$0 \leq t \leq n$ について、$\dfrac{{}_n p'_x}{{}_n p_x} \geq \dfrac{{}_t p'_x}{{}_t p_x} \Leftrightarrow \dfrac{{}_t p_x}{{}_n p_x} \geq \dfrac{{}_t p'_x}{{}_n p'_x}$ であり、特に $0 \leq t \leq n-1$ のいずれかの t については等号は成立しない。よって

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{v^n \cdot {}_n p_x}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x} = \frac{v^n}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot \frac{{}_t p_x}{{}_n p_x}} < \frac{v^n}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot \frac{{}_t p'_x}{{}_n p'_x}} = \frac{v^n \cdot {}_n p'_x}{\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p'_x} = P'_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

従って、必ず大きくなる（小さくならない）。

（Ｇ） $P^{1}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} > \dfrac{A'^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n|}}} = P'^{1}_{x:\overline{n|}}$ より、必ず小さくなる。

<u>解答：**（Ｂ）（Ｄ）（Ｅ）（Ｇ）**</u>

（３）

営業保険料を P、予定新契約費を α、予定集金費を β、予定維持費を γ とすると、収支相等の原則より、

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = P \cdot \sum_{t=1}^{n} \ddot{s}_{\overline{t|}} \cdot v^t \cdot {}_{t-1|}q_x + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} + \alpha + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

となる。また、$\ddot{s}_{\overline{t|}} \cdot v^t = \ddot{a}_{\overline{t|}}$ であるため、$\sum_{t=1}^{n} \ddot{s}_{\overline{t|}} \cdot v^t \cdot {}_{t-1|}q_x = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}} \cdot {}_n p_x$ となる。従って、

$$P=\frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}+\alpha+\gamma\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot{}_np_x-\beta\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{0.334+0.025+0.003\times15.900}{16.247\times0.890-0.03\times15.900}=0.02909$$

解答：（B）

（4）

①

$$\begin{aligned}{}_1V_{x:\overline{n}|}^{z}&=A_{x+1:\overline{n-1}|}-P_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}-\alpha\cdot\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\\&=1-d\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}-\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-d\right)\cdot\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}-\alpha\cdot\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\\&=1-\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-\alpha\cdot\frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\\&=0\end{aligned}$$

となる。従って、

$$\alpha=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}-1=\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1}\cdot v\cdot p_x-1=\frac{1}{1-1/\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\cdot v\cdot p_x-1=\frac{1}{1-(P_{x:\overline{n}|}+d)}\cdot v\cdot p_x-1$$

$$=\frac{1}{1-(0.047712+0.01/1.01)}\cdot\frac{1}{1.01}\cdot(1-0.005)-1=0.04537574$$

②

$$\begin{aligned}{}_kV_{x:\overline{n}|}^{z}&=1-(1+\alpha)\cdot\frac{\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\\&=1-(1+\alpha)\cdot\frac{N_{x+k}-N_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\cdot\frac{D_x}{D_{x+k}}\\&=1-(1+\alpha)\cdot\frac{(N_x-N_{x+n})-(N_x-N_{x+k})}{N_x-N_{x+n}}\cdot\frac{D_x}{D_{x+k}}\\&=1-(1+\alpha)\cdot\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\cdot\frac{1}{P_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}\\&=1-(1+\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)\cdot\frac{1}{P_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}}\\&=1-(1+\alpha)\cdot\left(P_{x:\overline{k}|}-P_{x:\overline{n}|}\right)\cdot\frac{1}{P_{x:\overline{k}|}^{\ \ 1}}\\&=1-(1+0.04537574)\cdot(0.096965-0.047712)\div(0.096965-0.004950)\\&=0.44044024\end{aligned}$$

解答　①：（E）②：（C）

（５）

40 歳の被保険者と 50 歳の被保険者が相互に 10 年を超える期間を隔てて死亡する確率は、

$$\int_0^\infty {}_t p_{40} \cdot \mu_{40+t} \cdot {}_{t+10} p_{50} dt + \int_0^\infty {}_t p_{50} \cdot \mu_{50+t} \cdot {}_{t+10} p_{40} dt$$

$$= {}_{10}p_{50} \cdot \int_0^\infty {}_t p_{40,60} \cdot \mu_{40+t} dt + {}_{10}p_{40} \cdot \int_0^\infty {}_t p_{50,50} \cdot \mu_{50+t} dt$$

$$= \left(1 - {}_{10} q_{50}\right) \cdot {}_\infty q^{1}_{40,60} + \left(1 - {}_{10} q_{40}\right) \cdot {}_\infty q^{1}_{50,50}$$

$$= \left(1 - 0.0416\right) \cdot 0.1284 + \left(1 - 0.0212\right) \cdot 0.5$$

$$= 0.612459$$

よって、求める確率は$1 - 0.612459 = 0.387541$

解答：**（Ｆ）**

（６）

教科書下巻の式（13.2.8）、（13.2.5）、（13.2.1）より、

$$a^{ai}_{30:\overline{20}|} = \ddot{a}^{a}_{30:\overline{21}|} - \ddot{a}^{aa}_{30:\overline{21}|}$$

$$= \left(\frac{N_{30} - N_{51}}{D^{aa}_{30}} - \frac{D^{ii}_{30}}{D^{aa}_{30}} \cdot \frac{N^{i}_{30} - N^{i}_{51}}{D^{i}_{30}} \right) - \frac{N^{aa}_{30} - N^{aa}_{51}}{D^{aa}_{30}}$$

$$= \frac{N^{ii}_{30} - N^{ii}_{51}}{D^{aa}_{30}} - \frac{D^{ii}_{30}}{D^{aa}_{30}} \cdot \frac{N^{i}_{30} - N^{i}_{51}}{D^{i}_{30}}$$

$$= \frac{30{,}955 - 23{,}370}{73{,}519} - \frac{121}{73{,}519} \cdot \frac{1{,}658{,}697 - 485{,}136}{68{,}728}$$

$$= 0.075067$$

解答**（Ｄ）**

問題 3.

設問		解答	配点
（１）	①	（ク）	１点
	②	（キ）	１点
	③	（ヘ）	１点
	④	（ケ）	１点
	⑤	（ニ）	１点
	⑥	（エ）	１点
	⑦	（ア）	１点
	⑧	（ヌ）	１点
	⑨	（セ）	１点

設問			解答	配点
（２）	(a)	①	（ヒ）	１点
		②	（ア）	１点
		③	（ネ）	１点
		④	（オ）	１点
		⑤	（ク）	１点
		⑥	（イ）	１点
	(b)		（Ｄ）	３点

（１）

A)　標準体・特別条件体の各保険契約に対する責任準備金の再帰式より、

$${}_kV + P = v\cdot q_{x+k} + v\cdot p_{x+k}\cdot {}_{k+1}V \quad (k=0,1,\cdots,n-1)\cdots(\mathrm{I})$$

$${}_kV' + P' = v\cdot q'_{x+k} + v\cdot p'_{x+k}\cdot {}_{k+1}V' \quad (k=0,1,\cdots,n-1)\cdots(\mathrm{II})$$

(Ⅰ)(Ⅱ)の辺々を差し引き、$\Delta p_{x+k} = \boxed{①-\Delta q_{x+k}}$ を用いて整理すると、

$$\Delta_k V + \Delta P = v\cdot \boxed{②\,\Delta q_{x+k}}\cdot\boxed{③\,(1-{}_{k+1}V)} + v\cdot\boxed{④\,p'_{x+k}}\cdot\Delta_{k+1}V \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

よって、

$$D'_{x+k}\cdot\Delta_k V + D'_{x+k}\cdot\Delta P = v\cdot D'_{x+k}\cdot\boxed{②\,\Delta q_{x+k}}\cdot\boxed{③\,(1-{}_{k+1}V)} + D'_{x+k+1}\cdot\Delta_{k+1}V$$

$k=0, 1, \cdots, n-1$ について加えると、

$$\Delta P\cdot\sum_{k=0}^{n-1}D'_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}v\cdot D'_{x+k}\cdot\boxed{②\,\Delta q_{x+k}}\cdot\boxed{③\,(1-{}_{k+1}V)}$$

$$\Delta P = \frac{1}{\boxed{⑤\,N'_x - N'_{x+n}}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}v\cdot D'_{x+k}\cdot\boxed{②\,\Delta q_{x+k}}\cdot\boxed{③\,(1-{}_{k+1}V)}\cdots(\mathrm{III})$$

B)　題意より、$P = \boxed{⑥\,(1-\beta)}\cdot P' = \boxed{⑥\,(1-\beta)}\cdot\dfrac{M'_x - M'_{x+n}}{N'_x - N'_{x+n}}$

よって、$\Delta P = P' - P = \beta\cdot\dfrac{M'_x - M'_{x+n}}{N'_x - N'_{x+n}}\cdots(\mathrm{IV})$

また、$\Delta q_{x+k} = q'_{x+k} - q_{x+k} = q'_{x+k} - \dfrac{q'_{x+k}}{1+\alpha} = \dfrac{\alpha}{1+\alpha}\cdot q'_{x+k}\cdots(\mathrm{V})$

(Ⅲ)式に(Ⅳ) (Ⅴ)を代入すると、

$$\beta\cdot\frac{M'_x - M'_{x+n}}{N'_x - N'_{x+n}} = \frac{1}{N'_x - N'_{x+n}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}v\cdot D'_{x+k}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot q'_{x+k}\cdot(1-{}_{k+1}V)$$

$$\therefore \beta = \frac{\boxed{⑦\,\alpha}}{1+\boxed{⑦\,\alpha}}\cdot\frac{1}{\boxed{⑧\,M'_x - M'_{x+n}}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\boxed{⑨\,C'_{x+k}}\cdot\boxed{③\,(1-{}_{k+1}V)}$$

（２）

(a)

年払純保険料を P 、年金原資（年金開始時点における年金現価）を F 、第 t 保険年度末平準純保険料式責任準備金を ${}_tV$ とし、${}_tV \leqq 1$ となる最終保険年度を第 k 保険年度とする。

ここで、$F = 0.1\ddot{a}_{\overline{20}|}$ である。

題意より、次の再帰式が成り立つ。

${}_tV + P = 0.5v \cdot q_{40+t} + v \cdot p_{40+t} \cdot {}_{t+1}V$ （$0 \leqq t \leqq 4$） …（Ⅰ）

${}_tV + P = v \cdot q_{40+t} + v \cdot p_{40+t} \cdot {}_{t+1}V$ （$5 \leqq t \leqq k-1$） …（Ⅱ）

${}_tV + P = v \cdot {}_{t+1}V$ （$k \leqq t \leqq 19$） …（Ⅲ）

（Ⅰ）、（Ⅱ）の両辺に $v^t \cdot {}_tp_{40}$ を乗じて、$t = 0, 1, \cdots, k-1$ について加えて整理すると、${}_0V = 0$ より、

$$P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k}|} = 0.5A^{1}_{40:\overline{5}|} + v^5 \cdot {}_5p_{40} \cdot A^{1}_{45:\overline{k-5}|} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot {}_kV$$
$$= \boxed{\text{①}\, A^{1}_{40:\overline{k}|}} - \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot {}_kV \quad \cdots \text{(Ⅳ)}$$

となる。

同様に、（Ⅲ）の両辺に v^{t-k} を乗じて、$t = k, k+1, \cdots, 19$ について加えると、${}_{20}V = F$ より、

$$P \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|} = v^{20-k} \cdot \boxed{\text{③}\, F} - {}_kV \quad \cdots \text{(Ⅴ)}$$

となる。

$(\text{Ⅴ}) \times \ddot{a}_{40:\overline{k}|} - (\text{Ⅳ}) \times \ddot{a}_{\overline{20-k}|}$ により、P を消去し ${}_kV$ について解くと、

$${}_kV = \frac{v^{20-k} \cdot \boxed{\text{③}\, F} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k}|} - \boxed{\text{①}\, A^{1}_{40:\overline{k}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|} + \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{k}|} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|}}$$

となる。

${}_kV \leqq 1$ より、

$$v^{20-k} \cdot \boxed{\text{③}\, F} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k}|} - \boxed{\text{①}\, A^{1}_{40:\overline{k}|}} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|} + \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|} \leqq \ddot{a}_{40:\overline{k}|} + v^k \cdot {}_kp_{40} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|}$$

$$v^{20-k} \cdot \boxed{\text{③}\, F} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k}|} - (1 - \boxed{\text{④}\, d} \cdot \ddot{a}_{40:\overline{k}|}) \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|} + \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|} \leqq \ddot{a}_{40:\overline{k}|}$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k}|} \cdot (v^{20-k} \cdot \boxed{\text{③}\, F} - 1 + \boxed{\text{④}\, d} \cdot \ddot{a}_{\overline{20-k}|}) \leqq \ddot{a}_{\overline{20-k}|} \cdot (1 - \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|})$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k}|} \cdot (v^{20-k} \cdot \boxed{\text{③}\, F} - \boxed{\text{⑤}\, v^{20-k}}) \leqq \ddot{a}_{\overline{20-k}|} \cdot (1 - \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|})$$

$$\ddot{a}_{40:\overline{k}|} \leqq \ddot{s}_{\overline{20-k}|} \cdot \frac{1 - \boxed{\text{②}\, 0.5} \cdot A^{1}_{40:\overline{5}|}}{\boxed{\text{③}\, F} - \boxed{\text{⑥}\, 1}} \quad \cdots \text{(Ⅵ)}$$

が成り立つ。

よって、（Ⅵ）を満たす最大の k を求めれば、第 $k+1$ 保険年度以降の保険年度末平準純保険料式責任準備金が 1 を超えることが分かる。

(b)

$F = 0.1\ddot{a}_{\overline{20}|} = 0.1 \times 18.22601$ であるから、

$$\frac{1 - 0.5A^{1}_{40:\overline{5}|}}{F - 1} = \frac{1 - 0.5 \times 0.00858}{0.1 \times 18.22601 - 1} = 1.210441 \text{ となる。}$$

t=11 のとき、$\ddot{a}_{40:\overline{t}|} = 10.37061$、$\ddot{s}_{\overline{20-t}|} \cdot \dfrac{1 - 0.5A^{1}_{40:\overline{5}|}}{F - 1} = 9.46221 \times 1.210441 = 11.453447$

t=12 のとき、$\ddot{a}_{40:\overline{t}|} = 11.24345$、$\ddot{s}_{\overline{20-t}|} \cdot \dfrac{1 - 0.5A^{1}_{40:\overline{5}|}}{F - 1} = 8.36853 \times 1.210441 = 10.129612$

よって、保険年度末平準純保険料式責任準備金が 1 を超えない最終保険年度は第 11 保険年度。保険年度末平準純保険料式責任準備金が 1 を超える最初の保険年度は第 12 保険年度。

解答（D）