年金数理（問題）

この年金数理の問題において特に説明がない限り、以下のとおりとする。
- 「被保険者」とは、在職中の者をいう。
- 「受給権者」とは、年金受給中の者および受給待期中の者をいう。
- 「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。
- 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいう。
- 「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
- 「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年退職時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいい、保険料の払い込みは年 1 回期初払いとする。なお、「Trowbridge モデルの年金制度」は必ずしも定常人口を仮定するものではない。

次の（１）～（２０）について各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（各５点）

（1） x 歳の被保険者数 l_x が以下のとおり表される定常状態に達した年金制度があり、新規加入者は a 歳（$a>0$ の整数）でのみ加入するものとする。被保険者の平均年齢を小数点以下第 3 位で四捨五入した結果が 37.78 歳であるとき、この制度における $2a$ 歳以上の被保険者の脱退時平均年齢に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

$$l_x = \begin{cases} 5a - x & (a \le x \le 3a) \\ 0 & (x < a, x > 3a) \end{cases}$$

（A） 50　（B） 51　（C） 52　（D） 53　（E） 54
（F） 55　（G） 56　（H） 57　（I） 58　（J） 59

（2）以下の脱退残存表において、年齢 26 歳における生存脱退後の死亡も考慮した死亡率 q_{26}（空欄X に入る数値）に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、脱退および死亡は一年を通じて一様に分布しているものとする。

年齢 x	残存数 $l_x^{(T)}$	生存脱退数 $d_x^{(w)}$	死亡脱退数 $d_x^{(d)}$	生存脱退率 $q_x^{(w)}$	死亡脱退率 $q_x^{(d)}$	死亡率 q_x
25	100,000			0.06226	0.00511	
26		5,100				X
27	87,411					

（A） 0.00803　（B） 0.00806　（C） 0.00809　（D） 0.00813　（E） 0.00816
（F） 0.00819　（G） 0.00823　（H） 0.00826　（I） 0.00829　（J） 0.00833

（3）年金年額 1（年 1 回期初払い）を支給する 65 歳支給開始 20 年保証終身年金の 45 歳時の給付現価を算定する。ただし、65 歳までの据置期間中に受給権者が死亡した場合には、死亡の翌期初から遺族に本人と同額の年金を 20 年間支給する。基数表は次のとおりであり、期初払いの 20 年確定年金現価率を 15.3238 とした場合、給付現価として最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

年齢	D_x	N_x	C_x	M_x
45 歳	40,189.4064	887,866.0312	79.5984	14,329.2308
65 歳	19,975.7916	291,078.3896	209.8428	11,497.7803
85 歳	5,406.3201	33,008.8021	474.6539	4,444.8987

（A） 8.5　（B） 9.0　（C） 9.5　（D）10.0　（E）10.5
（F）11.0　（G）11.5　（H）12.0　（I）12.5　（J）13.0

（4）Trowbridge モデルの年金制度で定常状態のとき、次の①～④について正しいものの組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。ただし、C ：保険料総額、F ：積立金、i：予定利率、x_e ：加入年齢、x_r ：定年年齢とし、$l_x^{(T)}$ ：脱退残存表における x 歳の在職中の被保険者数、l_x ： x 歳の年金受給権者数、$v=1/(1+i)$ 、左肩の添え字は、U ：単位積立方式、P ：賦課方式、In ：加入時積立方式とする。

① ${}^{P}F=0$

② ${}^{U}C=\dfrac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\times\dfrac{(1-v^{x_r-x_e+1})}{1-v}$

③ ${}^{In}C=\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$

④ ${}^{U}F=\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}l_x^{(T)}\left(\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)\times\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$

（A）①　（B）②　（C）③　（D）④
（E）①と②　（F）①と③　（G）①と④　（H）②と③
（I）②と④　（J）③と④　（K）①と②と③　（L）①と②と④
（M）①と③と④　（N）②と③と④　（O）①と②と③と④　（P）全て正しくない

（5）開放型総合保険料方式による財政運営を行っている年金制度があり、保険料および給付は年 1 回期末に発生する。予定利率は 5.0%、保険料は 20、給付は 25 であり、定常状態に達している。この状態で予定利率を 1.5%へ変更した場合にも定常状態を保つような保険料として最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

（A） 20.0　（B） 20.5　（C） 21.0　（D） 21.5　（E） 22.0
（F） 22.5　（G） 23.0　（H） 23.5　（I） 24.0　（J） 24.5

（6）死力 $\mu_{x+t} = \dfrac{a}{1+at} \left(0 \le t \le 1\right)$ のとき、a を p_x で表したものとして最も適切なものを 1 つ選びなさい。

（A） $\dfrac{1}{1-p_x}$　（B） $\dfrac{1-p_x}{p_x}$　（C） $\dfrac{1+p_x}{1-p_x}$　（D） $1-p_x$　（E） $p_x(1-p_x)$
（F） $\dfrac{1}{1+p_x}$　（G） $\dfrac{1+p_x}{p_x}$　（H） $\dfrac{1-p_x}{1+p_x}$　（I） $1+p_x$　（J） $p_x(1+p_x)$
（K） いずれにも該当しない

（7）ある最終給与比例制の年金制度において財政再計算を行ったところ、次の諸数値が得られた。財政方式として、加入年齢方式を採用して期初未積立債務の x%を期初払いで償却する場合と、閉鎖型総合保険料方式を採用した場合とで初年度の保険料総額が等しくなる場合、x に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、保険料の払い込みは年 1 回であるものとする。

項目		金額（千円）
S^p	年金受給権者の給付現価	1,000,000
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の被保険者期間に対応する給付現価	3,000,000
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の被保険者期間に対応する給付現価	3,000,000
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	3,000,000
G^a	在職中の被保険者の給与現価	12,500,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	20,000,000
F	積立金残高	4,000,000
i	予定利率	2.0%
―	給与総額（年間）	1,000,000

（A） 5　（B） 6　（C） 7　（D） 8　（E） 9
（F） 10　（G） 11　（H） 12　（I） 13　（J） 14

（８）保険料および給付が年 1 回期初払いである年金制度において、期初の積立金が 1 年間の給付の 13 倍で、第 t 年度期初まで定常状態にあった。第 t 年度の運用利回りの実績が予定を下回り、第 t 年度期末時点の積立金が第 t 年度期初の積立金の 80%となった。このため、給付は見直さず、第（ t ＋１）年度から保険料を定常状態の保険料のα倍（α＞1）として第（ t ＋2）年度期末までに第 t 年度期初の積立金まで回復させる計画を立てた。この場合のαに最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、予定利率は 4.0%とし、第（ t ＋1）年度以降の運用利回りは予定利率に等しく、定常人口は維持されているものとする。

（Ａ） 2.2 倍	（Ｂ） 2.4 倍	（Ｃ） 2.6 倍	（Ｄ） 2.8 倍	（Ｅ） 3.0 倍
（Ｆ） 3.2 倍	（Ｇ） 3.4 倍	（Ｈ） 3.6 倍	（Ｉ） 3.8 倍	（Ｊ） 4.0 倍

（９）定常状態に達している Trowbridge モデルの年金制度における財政方式に関する説明のうち、正しいものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

①新規加入年齢 $x_e = 20$ および定年年齢 $x_r = 60$ である場合、年齢 40 歳での保険料は単位積立方式と加入年齢方式とで常に一致する。

②予定利率を 0%と仮定した場合、単位積立方式における年齢 x 歳での保険料 P_x は年齢によらず一定となる。

③退職時年金現価積立方式における積立金は、受給権者の給付現価（x_r 歳を除く）と一致する。

④完全積立方式における積立金は、在職中の被保険者および受給権者の給付現価と一致する。

（Ａ）①	（Ｂ）②	（Ｃ）③	（Ｄ）④
（Ｅ）①と②	（Ｆ）①と③	（Ｇ）①と④	（Ｈ）②と③
（Ｉ）②と④	（Ｊ）③と④	（Ｋ）①と②と③	（Ｌ）①と②と④
（Ｍ）①と③と④	（Ｎ）②と③と④	（Ｏ）①と②と③と④	（Ｐ）全て正しくない

（１０）年金額を次のように支払う場合、（ｘ）が受け取る年金の現価を表している式として最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

・（ｘ）、（ｙ）、（ｚ）が３人とも生存している間は、１人当り毎年 100 の年金額を期末に受け取る。
・（ｘ）、（ｙ）、（ｚ）のうち２人のみ生存している間は、1 人当り毎年 150 の年金額を期末に受け取る。
・（ｘ）、（ｙ）、（ｚ）のうち１人のみ生存している間は、１人当り毎年 300 の年金額を期末に受け取る。

（Ａ） $300a_x - 150(a_{xy} + a_{zx}) + 100a_{xyz}$	（Ｂ） $300a_x - 150(a_{xy} + a_{zx}) + 250a_{xyz}$
（Ｃ） $300a_x - 150(a_{xy} + a_{zx}) + 300a_{xyz}$	（Ｄ） $300a_x - 150(a_{xy} + a_{zx}) + 400a_{xyz}$
（Ｅ） $300a_x - 300(a_{xy} + a_{zx}) + 100a_{xyz}$	（Ｆ） $300a_x - 300(a_{xy} + a_{zx}) + 250a_{xyz}$
（Ｇ） $300a_x - 300(a_{xy} + a_{zx}) + 300a_{xyz}$	（Ｈ） $300a_x - 300(a_{xy} + a_{zx}) + 400a_{xyz}$
（Ｉ） いずれにも該当しない	

（１１）A社の年金制度は、定常人口にあり、諸数値は以下の状況であった。なお、財政方式は開放基金方式を使用している。

項目		金額（百万円）
S^p	年金受給権者の給付現価	300
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の被保険者期間に対応する給付現価	2,000
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の被保険者期間に対応する給付現価	2,250
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	3,000
G^a	在職中の被保険者の給与現価	5,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	10,000
F	積立金	1,500
i	予定利率	2.5%
$\ddot{a}_{\overline{10}|}$	予定利率 i による 10 年確定年金現価率	8.97
―	給与総額（年間）	500

財政方式を加入年齢方式に変更し、標準保険料と特別保険料の合計が財政方式変更前の標準保険料と特別保険料の合計と同じになるよう、将来の被保険者期間に対応する給付を現在の給付の x％に変更する。この場合の x に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、標準保険料率および特別保険料率は小数点以下第 4 位を四捨五入し小数点以下第 3 位まで求めたものを用い、特別保険料率は、変更前後ともに未積立債務を年 1 回期初払い、10 年間の元利均等償却で拠出するものとして計算しなさい。

（Ａ） 71　（Ｂ） 73　（Ｃ） 75　（Ｄ） 77　（Ｅ） 79
（Ｆ） 81　（Ｇ） 83　（Ｈ） 85　（Ｉ） 87　（Ｊ） 89

（１２）定常人口にある Trowbridge モデルの年金制度において、総合保険料方式に基づき算出した到達年齢方式による標準保険料率が制度発足時では 0.199 であった。このとき、$\ddot{a}_{x_r}$ に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。ただし、新規加入年齢 $x_e = 20$ 、定年年齢 $x_r = 60$ 、$v = 0.9804$ 、$v^{60} = 0.3048$ 、$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^{-x} = 89.7542$ 、$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} xv^{-x} = 3779.682$ とし、加入中は定年以外の脱退および死亡はないものとする。

（Ａ）10.0　（Ｂ）10.5　（Ｃ）11.0　（Ｄ）11.5　（Ｅ）12.0
（Ｆ）12.5　（Ｇ）13.0　（Ｈ）13.5　（Ｉ）14.0　（Ｊ）14.5

（１３）定常人口の下における年金制度（当初積立金：3,000）において、積立の促進を図るため以下の 3 つの未積立債務の償却方法を考えた。利差損以外に差損益は発生しない前提において、2 年目が終了した時点での積立金が多い順として最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

（前提）

・責任準備金：5,000（予定利率：5.0%）、10,000（予定利率：2.0%）

・保険料の払込時期：年 1 回期初

・給付：毎年 400（期初払い）

・積立金の運用利回り：2.0%

方法	予定利率	未積立債務の償却方法
①	5.0%	当初未積立債務を 3 年間元利均等償却する
②	2.0%	当初未積立債務を 13 年間元利均等償却する
③	2.0%	前年度末未積立債務の一定割合(10%)を当年度に償却する

なお、方法③の初年度は、当初未積立債務の一定割合(10%)を償却するものとする。また年 1 回期初払い確定年金現価率は、予定利率 5.0%かつ 3 年償却の場合 2.8594、予定利率 2.0%かつ 13 年償却の場合 11.5753 とする。

（Ａ）①>②>③　（Ｂ）①>③>②　（Ｃ）②>①>③　（Ｄ）②>③>①

（Ｅ）③>①>②　（Ｆ）③>②>①　（Ｇ）いずれにも該当しない

（１４）Trowbridge モデルの年金制度において、加入年齢方式による標準保険料率が 0.238 であった。

$\ddot{a}_{x_r} = 0.5\ddot{a}_{\infty}$ が成り立つ場合、この制度の予定利率に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。ただし、新規加入年齢 $x_e = 28$、定年年齢 $x_r = 60$ とし、加入中は定年以外の脱退および死亡はないものとする。また、必要であれば予定利率 i と $v = 1/(1+i)$ の関係を表した以下の表を使用すること。

i	v	v^{16}	v^{32}	i	v	v^{16}	v^{32}
2.1%	0.9794	0.7171	0.5143	3.1%	0.9699	0.6136	0.3765
2.2%	0.9785	0.7060	0.4984	3.2%	0.9690	0.6041	0.3650
2.3%	0.9775	0.6950	0.4830	3.3%	0.9681	0.5948	0.3538
2.4%	0.9766	0.6842	0.4682	3.4%	0.9671	0.5857	0.3430
2.5%	0.9756	0.6736	0.4538	3.5%	0.9662	0.5767	0.3326
2.6%	0.9747	0.6632	0.4398	3.6%	0.9653	0.5679	0.3225
2.7%	0.9737	0.6529	0.4263	3.7%	0.9643	0.5592	0.3127
2.8%	0.9728	0.6429	0.4133	3.8%	0.9634	0.5506	0.3032
2.9%	0.9718	0.6329	0.4006	3.9%	0.9625	0.5422	0.2940
3.0%	0.9709	0.6232	0.3883	4.0%	0.9615	0.5339	0.2851

（Ａ）2.2%　（Ｂ）2.4%　（Ｃ）2.6%　（Ｄ）2.8%　（Ｅ）3.0%

（Ｆ）3.2%　（Ｇ）3.4%　（Ｈ）3.6%　（Ｉ）3.8%　（Ｊ）4.0%

（１５）Trowbridge モデルの年金制度を開放型総合保険料方式と開放基金方式で運営した場合について考える。以下の①～④の記述について、いずれの財政方式についても正しく説明したものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

① 標準保険料、特別保険料の区別がない。

② 定常人口ではない場合、脱退および新規加入が期初に想定していた通りであったとしても、在職中の被保険者数が増減した場合には、新規の被保険者の見込みが前年と異なることによる差損益が発生する。

③ 定常状態の場合、利差損の発生による積立水準の低下は保険料の洗い替えによっては解消できない。

④ 保険料および積立金は、単位積立方式の保険料および積立金と一致する。

（A） ①	（B） ②	（C） ③	（D） ④
（E） ①と②	（F） ①と③	（G） ①と④	（H） ②と③
（I） ②と④	（J） ③と④	（K） ①と②と③	（L） ①と②と④
（M） ①と③と④	（N） ②と③と④	（O） ①と②と③と④	（P） いずれにも該当しない

（１６）ある年金制度の平成 24 年度末の貸借対照表、平成 25 年度の損益計算書は以下のとおりである。平成 25 年度の運用利回りが 7.0%であったとして、当年度剰余金のうち、利差益（積立金から発生する、「運用収益」と「予定利率による予定運用収益」との差）以外の要因による剰余金 α に、最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、この年金制度は、保険料は年 1 回期初払い、給付は年 1 回期末払いであり、予定利率は 5.0%、加入年齢方式を採用しており、特別保険料を設定していない。

平成 24 年度末の貸借対照表

積立金	4,700	責任準備金	5,500
未積立債務	800		
合計	5,500	合計	5,500

平成 25 年度の損益計算書

給付金	800	標準保険料収入	1,000
当年度剰余金	$\alpha+\gamma$	運用収益	β
（利差益以外）	α		
（利差益）	γ		
平成 25 年度末責任準備金	5,900	平成 24 年度末責任準備金	5,500
合計	X	合計	X

（A） 45	（B） 65	（C） 85	（D） 105	（E） 125
（F） 145	（G） 165	（H） 185	（I） 205	（J） 225

（１７）以下の前提に基づく年金制度を考える。この年金制度全体の被保険者の責任準備金は、

$\boxed{a}$, $\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$ 千円となる。

a 、b 、c 、d にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（なお、計算結果は各被保険者の責任準備金の合計額について千円未満を四捨五入しなさい。また、解答数値が 1,000 千円未満となった場合は a の桁に 0 をマーク、100 千円未満となった場合は a および b の桁に 0 をマーク、10 千円未満となった場合は a 、b および c の桁に 0 をマークしなさい。）

○制度内容

加入時期	年 1 回期初加入
給付内容	「給与の一定割合」の年金額を、定年（60 歳）到達者に対して年 1 回期初払で生死に関わらず 10 年間支給する
昇給時期	年 1 回期初昇給
脱退時期	年 1 回期末脱退（死亡による脱退は発生しない） 定年退職は定年年齢到達時の期初に脱退
保険料の拠出時期	年 1 回期初拠出（昇給後給与合計×保険料率）
財政方式	加入年齢方式（加入年齢 55 歳）
予定利率	3.0%

○被保険者構成（計算基準日時点／上段は人数合計、下段は給与合計）

計算基準日は期初とし、被保険者の人数は期初の新規加入後、給与は期初の昇給後の数値を記載している。また、計算基準日において、期初の保険料は拠出前とする。

年齢＼加入期間	0 年	1 年	2 年	3 年	4 年
55 歳	50 人 500,000 円				
56 歳		40 人 800,000 円			
57 歳		30 人 750,000 円			
58 歳			30 人 900,000 円	20 人 800,000 円	
59 歳					

○計算基礎率・現価率（給付現価率および給与現価率は給与 1 に対する率である。）

年齢	残存人数	脱退率	給与指数	加入期間別給付現価率					給与現価率
				0 年	1 年	2 年	3 年	4 年	
55 歳	10,000	0.200	1.000	1.518					6.600
56 歳	8,000	0.250	2.000	1.757	1.953				3.608
57 歳	6,000	0.333	3.000		2.413	2.681			2.387
58 歳	4,000	0.500	4.000			3.727	4.141		1.607
59 歳	2,000	0.000	5.000				7.677	8.530	1.000

（１８）ある年金制度において、初期の未積立債務 PSL_0 の償却のため、特別保険料に一定の幅を持たせてその幅の中で毎年の特別保険料を決定する弾力償却を採用した。具体的には、年 1 回期初払いで $PSL_0 / \ddot{a}_{\overline{10|}}$ 以上、$PSL_0 / \ddot{a}_{\overline{5|}}$ 以下の額を特別保険料として、毎年度拠出時に特別保険料を決定して支払うことにした。当初 3 年間は最大額である $PSL_0 / \ddot{a}_{\overline{5|}}$ を拠出した後、第 4 年度以降の償却計画を次の条件で作成することにした。

・第 4 年度から第 6 年度の 3 年間に拠出する特別保険料を毎年 PSL_0 / X とする。

・未積立債務の償却が第 6 年度までの 6 年間で過不足なく完了するようにする。

この場合、 X に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。ただし、予定利率は 3.5%とし、償却期間中に差損益の発生はないものとする。また、必要であれば以下の表の値を使用しなさい。

n	$\ddot{a}_{\overline{n\|}}$	n	$\ddot{a}_{\overline{n\|}}$
1	1.00000	6	5.51505
2	1.96618	7	6.32855
3	2.89969	8	7.11454
4	3.80164	9	7.87396
5	4.67308	10	8.60769

（Ａ） 6.5　（Ｂ） 6.6　（Ｃ） 6.7　（Ｄ） 6.8　（Ｅ） 6.9
（Ｆ） 7.0　（Ｇ） 7.1　（Ｈ） 7.2　（Ｉ） 7.3　（Ｊ） 7.4

（１９）60 歳支給開始、年 4 回期末払いで、かつ死亡した場合には死亡した日の属する月まで給付が行われる終身年金がある。この年金について、60 歳時点の給付現価を現行の 50%にし、さらに 20 年保証終身年金に変更することとしたい。この場合、変更後の年金額は現行の年金額の何%となるか。最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、変更後の年金は 60 歳支給開始、年 4 回期末払いで、保証期間中は生死に関わらず給付し、保証期間経過後は死亡した日の属する月まで給付を行うものとする。計算にあたっては、以下の数値を使用しなさい。

$\ddot{a}_{\overline{20|}}$ ：14.70984　$v^{\frac{1}{4}}$ ：0.99144　D_{60} ：19,485　N_{60} ：307,971

$\overline{M}_{60}$ ：9,227　D_{80} ：6,459　N_{80} ：49,991　$\overline{M}_{80}$ ：4,851

（Ａ）42.0%　（Ｂ）42.5%　（Ｃ）43.0%　（Ｄ）43.5%　（Ｅ）44.0%
（Ｆ）44.5%　（Ｇ）45.0%　（Ｈ）45.5%　（Ｉ）46.0%　（Ｊ）46.5%

（２０）財政方式は加入年齢方式、給付は加入 3 年以上の脱退者に対し年度末に「脱退時給与×加入者期間」の額を支給し、保険料は給与に比例して拠出する年金制度があり、制度発足後、初めての事業年度末に財政決算を行った。当該事業年度では計算基礎率どおり推移しなかったことから損益が発生した。損益発生の理由は以下のとおりであり、それ以外を理由に損益は発生していない。なお、この年金制度発足時の加入者については過去勤務期間を通算しない取り扱いとしている。

①利差損益

予定利率を 2.0%としていたが、実際の運用利回りが 5.75%であった。

②新規加入差損益

予定加入年齢を 30 歳としているが、年度末に年齢 31 歳で新規に 2 名加入した。なお、当該加入者の加入時給与は 1 名あたり 250 千円、年度末責任準備金率（給与 1 円あたりの率）は 0.13207。

③昇給差損益

全加入者一律で、年度末に予定より 3%多く昇給した。（ただし、②の新規加入者は考慮しない。）

その他の前提は以下である。

期初積立金	23,789 千円	保険料（期初払い）	314 千円
期初責任準備金	23,789 千円	決算期間	1 年

このとき、発生した損益の合計額は $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ 千円の利益となる。

a 、b 、c にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（なお、計算結果は①～③の合計額について千円未満を四捨五入し、100 千円未満となった場合は a の桁に 0 をマーク、10 千円未満となった場合は a および b の桁に 0 をマークしなさい。）

以上

年金数理（解答例）

（１）

この制度の平均年齢は、

$$\text{平均年齢}=\frac{\int_a^{3a} y\cdot l_y dy}{\int_a^{3a} l_y dy}=37.78\ \text{が成立する。}$$

ここで、$\int_a^{3a} l_y dy = 6a^2$、$\int_a^{3a} y\cdot l_y dy = \frac{34}{3}a^3$ より、

$$\frac{17}{9}a = 37.78$$

$a = 20.0$、つまり $a = 20$ となる。

次に $2a = 40$ 歳以上で脱退する者の脱退時平均年齢は

$$40+\frac{\int_{40}^{60} l_y dy}{l_{40}} = 40+\frac{1,000}{60} = 56.67$$

これより答えは 57 歳となる。

よって、解答は（**H**）

（２）

$d_{25}^{(w)} = l_{25}^{(T)}\cdot q_{25}^{(w)} = 100,000\cdot 0.06226 = 6,226$ 等より残存表は以下の通りとなる

年齢 x	残存数 $l_x^{(T)}$	生存脱退数 $d_x^{(w)}$	死亡脱退数 $d_x^{(d)}$	生存脱退率 $q_x^{(w)}$	死亡脱退率 $q_x^{(d)}$	死亡率 q_x
25	100,000	6,226	511	0.06226	0.00511	0.00527
26	93,263	5,100	752	0.05468	0.00806	0.00829
27	87,411					

上記のうち、求めるべき q_{26} の算出は以下の通り。

脱退および死亡は一年を通じて一様に分布するから

$$q_{26} = \frac{d_{26}^{(d)}}{l_{26}^{(T)}-\frac{1}{2}d_{26}^{(w)}} = \frac{752}{93,263-\frac{1}{2}\cdot 5,100} = 0.008289\cdots$$

よって、解答は（**I**）

（３）

給付現価を求める算式は題意より、

$$1\times\frac{D_{65}\cdot\ddot{a}_{\overline{20|}}+N_{85}+\left(M_{45}-M_{65}\right)\cdot\ddot{a}_{\overline{20|}}}{D_{45}}$$

$$=1\times\frac{19{,}975.7916\times15.3238+33{,}008.8021+(14{,}329.2308-11{,}497.7803)\times15.3238}{40{,}189.4064}=9.5175$$

よって、解答は（**C**）

（４）

①${}^{P}F=0$　正しい。

②${}^{U}C=\dfrac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\times\dfrac{v(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}$ であるから、誤り。

③${}^{In}C=l_{x_e}^{(T)}\times\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$ であるから、誤り。

④${}^{U}F=\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}l_x^{(T)}\left(\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\right)\times\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}+\sum_{x=x_r}^{\omega}l_x\cdot\ddot{a}_x$ であるから、誤り。（ω ：最終年齢）

したがって、解答は（**A**）

（５）

5.0%の予定利率で成立している極限方程式より、$\mathrm{F}\times(1+5.0\%)+20-25=F$

これを解くと、積立金Fは、$F=100$

予定利率を 1.5%として、保険料Cを求めると、$100\times(1+1.5\%)+C-25=100$

これを解くと、$C=23.5$

よって、解答は（**H**）

（６）

題意より、$\displaystyle\int_0^1\mu_{x+t}dt=\int_0^1\frac{a}{1+at}dt=\left[\log\left(t+\frac{1}{a}\right)\right]_0^1=\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\log\frac{1}{a}=\log(1+a)$ であり、

p_xは、$p_x=e^{-\int_0^1\mu_{x+t}dt}=e^{-\log(1+a)}=\dfrac{1}{1+a}$ となり、

$a=\dfrac{1-p_x}{p_x}$ となる。

よって、解答は（**B**）

（7）

加入年齢方式の場合の標準保険料率は以下の通り計算される。

$^{E}P=S^{f}/G^{f}=3{,}000{,}000/20{,}000{,}000=0.15$

これを用いて、加入年齢方式の責任準備金を計算すると、

$S^{p}+S^{a}_{PS}+S^{a}_{FS}-{}^{E}P\cdot G^{a}=(1{,}000{,}000+3{,}000{,}000+3{,}000{,}000-0.15\times 12{,}500{,}000)=5{,}125{,}000$

よって、未積立債務＝5,125,000−4,000,000=1,125,000

一方、閉鎖型総合保険料方式の保険料率は以下の通り計算される。

$$^{C}P=\frac{\left(S^{P}+S^{a}_{PS}+S^{a}_{FS}-F\right)}{G^{a}}=\frac{(1{,}000{,}000+3{,}000{,}000+3{,}000{,}000-4{,}000{,}000)}{12{,}500{,}000}=0.24$$

加入年齢方式による年間の標準保険料額は、0.15×1,000,000=150,000

閉鎖型総合保険料方式による年間の保険料額は、0.24×1,000,000=240,000

したがって、150,000+x×1,125,000=240,000、x=0.08

よって、解答は（**D**）

（8）

解答にあたり、$v=\dfrac{1}{1+i}$、$d=\dfrac{i}{1+i}$ を使用している。

第ｔ年度以前における保険料をＣ、給付をＢ、年度期初の積立金をＦとすると、極限方程式は、

$C+dF=B$

となる。$F=13B$、$i=0.04$ であるから、$B=2C$、$F=26C$ が成り立つ。

第ｔ年度期末の積立金を F_t とすると、題意より

$F_t=0.8F=0.8\times 26C$

$F_t+\alpha C-B=vF_{t+1}$

$vF_{t+1}+v(\alpha C-B)=v^2F_{t+2}$

よって

$F_t+(1+v)(\alpha C-B)=v^2F_{t+2}$

題意より $F_t=0.8F$、$F_{t+2}=F$ であるため、式を整理すると

$0.8\times 26C+(1+v)(\alpha-2)C=v^2\times 26C$

$\alpha = \dfrac{v^2 - 0.8}{1+v} \times 26 + 2 = 3.651$

よって、解答は（**H**）

（９）

①40 歳での単位積立方式での保険料は $\dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{D_{60} \cdot \ddot{a}_{60}}{D_{40}}$ であり、加入年齢方式での保険料は

$\dfrac{D_{60} \cdot \ddot{a}_{60}}{N_{20} - N_{60}}$ であるので、$40D_{40} = N_{20} - N_{60}$ であれば正しいが、例えば予定利率＝0%、40 歳までの脱退率＝0 で 40 歳以降の脱退率＞0 の場合は明らかに $40D_{40} > N_{20} - N_{60}$ となるため、誤り。

②年齢 x での単位積立方式での保険料は $\dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{D_{60} \cdot \ddot{a}_{60}}{D_x} = \dfrac{1}{40} \cdot \dfrac{D_{60} \cdot \ddot{a}_{60}}{v^x l_x}$ であるため、予定利率が 0% であっても全ての年齢で脱退率が 0 でなければ l_x が変動し、保険料は年齢によらず一定とならないため、誤り。

③教科書 p64 より、正しい。

④教科書 p69 より、完全積立方式の定常状態における積立金は、年金受給権者、在職中の被保険者および<u>将来加入が見込まれる新規の被保険者</u>の給付現価と一致するため誤り。

よって、解答は（**C**）

（１０）

（x）の受け取る年金の現価＝$100a_{xyz} + 150(a_{y|zx} + a_{z|xy}) + 300a_{\overline{yz}|x}$

＝$300a_x - 150(a_{xy} + a_{zx}) + 100a_{xyz}$

$\because\ a_{y|zx} = a_{zx} - a_{xyz} \quad a_{z|xy} = a_{xy} - a_{xyz} \quad a_{\overline{yz}|x} = a_x - a_{xy} - a_{zx} + a_{xyz}$

よって、解答は（**A**）

（１１）

開放基金方式

標準保険料率＝$\dfrac{2{,}250 + 3{,}000}{5{,}000 + 10{,}000} = 0.350$ ・・・①

責任準備金＝$300 + 2{,}000 + 2{,}250 + 3{,}000 - 0.35 \times (5{,}000 + 10{,}000) = 2{,}300$

特別保険料率＝$\dfrac{2{,}300 - 1{,}500}{8.97 \times 500} = 0.178$ ・・・②

加入年齢方式

標準保険料率＝$\dfrac{3{,}000\times x}{10{,}000}=0.300x$ ・・・③

責任準備金＝$300+2{,}000+2{,}250x-0.30x\times 5{,}000=2{,}300+750x$

特別保険料率＝$\dfrac{2{,}300+750x-1{,}500}{8.97\times 500}$ ・・・④

①＋②＝③＋④から $x=0.748$

よって、解答は（**C**）

（１２）

標準保険料を総合保険料に基づいた場合の制度発足時の保険料率は

$$\frac{S_{FS}^a}{G^a}=\frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)\cdot\frac{N_{x_r}}{D_x}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}\cdot\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y}{D_x}\right)}$$

ここで、加入中は定年以外の脱退および死亡はないことから

$l_{x_e}^{(T)}=l_{x_{e+!}}^{(T)}=\cdots=l_{x_r}^{(T)}$　となる。

$$\frac{S_{FS}^a}{G^a}=\frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_{x_e}^{(T)}\cdot\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)\cdot\frac{l_{x_e}^{(T)}v^{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{l_{x_e}^{(T)}v^x}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_{x_e}^{(T)}\cdot\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}l_{x_e}^{(T)}v^y}{l_{x_e}^{(T)}v^x}\right)}$$

$$=\frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)\cdot\frac{v^{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{v^x}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}v^y}{v^x}\right)}=\frac{\ddot{a}_{x_r}\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)v^{x_r-x}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{1-v^{x_r-x}}{1-v}\right)}=0.199$$

$$\ddot{a}_{x_r}=\frac{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{1-v^{x_r-x}}{1-v}\right)}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)v^{x_r-x}}\cdot 0.199=\frac{\dfrac{1}{1-v}\left(x_r-x_e-v^{x_r}\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}v^{-x}\right)}{\dfrac{x_rv^{x_r}}{x_r-x_e}\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}v^{-x}-\dfrac{v^{x_r}}{x_r-x_e}\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}xv^{-x}}\cdot 0.199$$

$$=\frac{\dfrac{1}{1-0.9804}(60-20-0.3048\cdot 89.7542)}{\dfrac{60\cdot 0.3048}{40}\cdot 89.7542-\dfrac{0.3048}{40}\cdot 3779.682}\cdot 0.199$$

$$=\frac{645.0469}{12.2344}\cdot 0.199=10.492\cdots$$

よって、解答は（**B**）

（１３）

定常人口のため、極限方程式（(Ｆ＋Ｃ－Ｂ)（１＋ｉ）＝Ｆ）により標準保険料を予定利率に応じて算出する。

・予定利率5.0％の場合（①）

定常状態時の積立金は5,000。よって極限方程式から

$(5{,}000 + C - 400) \times 1.05 = 5{,}000$

となり、$C = 162$。

・予定利率2.0％の場合（②③）

定常状態時の積立金は10,000。よって極限方程式から

$(10{,}000 + C - 400) \times 1.02 = 10{,}000$

となり、$C = 204$

また、当初積立金と給付の２年後の数値は共通で以下の通り。（①②で使用）

・当初積立金：$3{,}000 \times 1.02^2 = 3{,}121$、給付：$400 \times 1.02 \times \dfrac{1.02^2 - 1}{1.02 - 1} = 824$

次にそれぞれの方法についての保険料から積立金を計算する

①の方法：

３年間元利均等償却の場合の１年あたりの特別保険料＝$(5{,}000 - 3{,}000) \div 2.8594 = 699$

保険料の２年後の数値：$(162 + 699) \times 1.02 \times \dfrac{1.02^2 - 1}{1.02 - 1} = 1{,}774$

⇒積立金は、$3{,}121 - 824 + 1{,}774 = 4{,}071$

②の方法：

13年間元利均等償却の場合の１年あたりの特別保険料＝$(10{,}000 - 3{,}000) \div 11.5753 = 605$

保険料の２年後の数値：$(204 + 605) \times 1.02 \times \dfrac{1.02^2 - 1}{1.02 - 1} = 1{,}667$

⇒積立金は、$3{,}121 - 824 + 1{,}667 = 3{,}964$

③の方法：１年後積立金＝$(3{,}000 + 204 + (10{,}000 - 3{,}000) \times 0.10 - 400) \times 1.02 = 3{,}574$

２年後積立金＝$(3{,}574 + 204 + (10{,}000 - 3{,}574) \times 0.10 - 400) \times 1.02 = 4{,}101$

よって　③＞①＞②　となり解答は**（Ｅ）**

（１４）

加入年齢方式による標準保険料率が 0.238 であることより、$\dfrac{N_{x_r}}{N_{x_e} - N_{x_r}} = 0.238$　…①だが、

加入中は定年以外の脱退および死亡はないことから

$$N_{x_e}-N_{x_r}=l_{x_e}v^{x_e}+l_{x_e+1}v^{x_e+1}+\ldots+l_{x_r-1}v^{x_r-1}=l_{x_e}v^{x_e}+l_{x_e}v^{x_e+1}+\ldots+l_{x_e}v^{x_r-1}$$
$$=l_{x_e}v^{x_e}\left(1+v+\ldots+v^{x_r-x_e-1}\right)$$
$$=l_{x_e}v^{x_e}\frac{1-v^{x_r-x_e}}{1-v}$$
$$N_{x_r}=l_{x_r}v^{x_r}\ddot{a}_{x_r}=l_{x_e}v^{x_e}v^{x_r-x_e}\ddot{a}_{x_r}$$
$$=l_{x_e}v^{x_e}v^{x_r-x_e}\cdot 0.5\ddot{a}_{\infty}$$
$$=l_{x_e}v^{x_e}v^{x_r-x_e}\cdot 0.5\frac{1}{1-v}$$

である。これを①に代入すると

$$\frac{N_{x_r}}{N_{x_e}-N_{x_r}}=\frac{l_{x_e}v^{x_e}v^{x_r-x_e}\cdot 0.5\dfrac{1}{1-v}}{l_{x_e}v^{x_e}\dfrac{1-v^{x_r-x_e}}{1-v}}=\frac{0.5v^{x_r-x_e}}{1-v^{x_r-x_e}}=\frac{0.5v^{32}}{1-v^{32}}=0.238$$

$$v^{32}=\frac{0.238}{0.738}\fallingdotseq 0.3225$$

与えられた表により $i=3.6\%$ が最も近いことが分かる

よって、解答は（H）

（１５）

①開放型総合保険料方式は標準保険料、特別保険料の区別がないが、開放基金方式は標準保険料、特別保険料の区別がある（教科書 P90～P91 参照）。よって、誤り。

②開放型の財政方式に関する記述であり、開放型総合保険料方式、開放基金方式ともに正しい（教科書 P95 参照）。よって、正しい。

③開放型総合保険料方式では、積立水準が低下した場合、それを回復することはできない（教科書 P95～P96 参照）。一方で、開放基金方式では特別保険料を設定することにより積立水準を回復することができる。よって、誤り。

④単位積立方式の保険料および積立金と一致するのは、定常状態が実現した場合である。よって、誤り。

⇒②が正しい。

よって、解答は（B）

（１６）

平成 25 年度の運用収益 β は以下の通り計算される。

β ＝（4,700+1,000）×0.07=399

これより、平成 25 年度の当年度剰余金は以下の通り計算される。

当年度剰余金＝標準保険料収入＋運用収益＋平成 24 年度末責任準備金

－給付金－平成 25 年度末責任準備金

＝1,000+399+5,500−800−5,900 = 199

平成 25 年度の利差益は以下の通り計算される。

利差益＝（4,700+1,000）×（0.07−0.05）= 114

したがって、利差益以外の当年度剰余金は 199-114=85。よって、**（C）**が正答となる。

（１７）

制度全体の被保険者の責任準備金

＝被保険者の給付現価－被保険者の給与現価×標準保険料率

$$=\sum\left(給与\times給付現価率\right)-\sum\left(給与\times給与現価率\right)$$

×（加入年齢の給付現価率÷加入年齢の給与現価率）

$$=10{,}798{,}250-10{,}708{,}550\times\left(1.518\div6{,}600\right)$$

＝8,335,283.5　⇒　8,335 千円

よって、解答は a ＝8、b ＝3、c ＝3、d ＝5

（１８）

特別保険料 $\dfrac{PSL_0}{\ddot{a}_{\overline{\alpha}|}}$ による償却を m 回行った後（m 年後）の期末の未積立債務の残高は $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{\alpha-m}|}}{\ddot{a}_{\overline{\alpha}|}}PSL_0$ であり、特別保険料 $\dfrac{PSL_0}{X}$ による償却を n 回行った後に未積立債務がちょうど 0 となる場合の償却開始時点における未積立債務の残高は $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{X}PSL_0$ である。

題意のとおり $\alpha=5$ 、$m=3$ 、$n=3$ とし、3 年経過後に第 4 年度以降の償却計画を作成する時点において、以下の式が成り立つ。

$$\frac{\ddot{a}_{\overline{2}|}}{\ddot{a}_{\overline{5}|}}PSL_0=\frac{\ddot{a}_{\overline{3}|}}{X}PSL_0$$

これを解いて、$X=\ddot{a}_{\overline{3}|}\dfrac{\ddot{a}_{\overline{5}|}}{\ddot{a}_{\overline{2}|}}$ となる。

$\ddot{a}_{\overline{2|}}=1.96618$、$\ddot{a}_{\overline{3|}}=2.89969$、$\ddot{a}_{\overline{5|}}=4.67308$を用いて計算すると、$X=6.89178$・・・

よって、解答は（**E**）

（１９）

年金年額を１とすると、現行の終身年金の 60 歳時点の給付現価は

$$\frac{N_{60}-\frac{5}{8}D_{60}+\frac{1}{6}\overline{M}_{60}}{D_{60}}=15.25947$$

と近似される。

変更後の年金年額を x とすると、変更後の 20 年保証終身年金の給付現価は

$$\left(a_{\overline{20|}}^{(4)}+\frac{N_{80}-\frac{5}{8}D_{80}+\frac{1}{6}\overline{M}_{80}}{D_{60}}\right)\times x$$

と表すことができる

ここで、$a_{\overline{20|}}^{(4)}=a_{\overline{1|}}^{(4)}\cdot\ddot{a}_{\overline{20|}}=\frac{1}{4}\left\{v^{\frac{1}{4}}+\cdots+v^{\frac{4}{4}}\right\}\cdot\ddot{a}_{\overline{20|}}=14.39773$ であるから、

$$\left(a_{\overline{20|}}^{(4)}+\frac{N_{80}-\frac{5}{8}D_{80}+\frac{1}{6}\overline{M}_{80}}{D_{60}}\right)\times x$$

$$=\left(14.39773+\frac{49{,}991-\frac{5}{8}\times 6{,}459+\frac{1}{6}\times 4{,}851}{19{,}485}\right)\times x$$

$=16.79766\times x$

問題文より、変更後の 20 年保証終身年金の給付現価は、現行の終身年金の 60 歳時点の給付現価の 50%と等しくなるから、

$16.79766\times x=15.25947\times 50\%$

x=45.42%

よって、解答は（**H**）

（２０）

各理由における損益額は以下のとおり。

①利差損益

運用利回りが予定より大きかったことから、以下の利益（利差益）が発生する。

利差益（＋）＝（期初積立金＋保険料）×（5.75%－2.0%）
＝（23,789,000 円＋314,000 円）×3.75%＝903,862.5 円

②新規加入差損益
年度末加入なので、当該新規加入者の年度末責任準備金額が損失（新規加入差損）となる。
新規加入差損（－）＝新規加入者加入時給与（1 名あたり）×責任準備金率×人数
＝250,000 円×0.13207×2＝66,035 円

③昇給差損益
当該事業年度の保険料、給付金には影響がないこと、給付および保険料は給与に比例して行われる制度であるから年度末責任準備金が 3%増加することから、以下の額が損失（昇給差損）となる。
昇給差損（－）＝　年度末責任準備金×3%
＝（期初責任準備金＋保険料）×1.02×3%
＝（23,789,000 円＋314,000 円）×1.02×3%＝737,551.8 円

したがって、①～③を合計すると 100,275.7 円≒100 千円の利益（＋）である。
よって、解答はa＝1、b＝0、c＝0

以上