損保数理（問題）

次の問題１～問題４の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、消費税については考慮しないこととし、特に断りがないかぎり、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、また、各クレームは独立であるものとする。

問題１．（28 点）

Ⅰ．ある年度において、ある保険商品の予定料率構成割合（保険期間１年）は下表のとおりであり、年間営業保険料は 10 であった。次年度以降、クレーム頻度が対前年度比で毎年度 4%ずつ上昇（すなわち 1.04 倍ずつ増加）していくこと、これに伴う損害査定コストの増加により発生経費が毎年度 1%ずつ上昇していくことがそれぞれ見込まれている。ただし、次年度以降も、クレーム単価の変動はないものとする。これらの上昇トレンドを反映して、今年度に販売する、この商品の保険期間５年の長期一時払契約の営業保険料を求めたい。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、代理店手数料および利潤は営業保険料に比例し、予定利率は 2%として計算すること。

予定損害率	50%
予定新契約費率	20%
予定維持費率	15%
予定代理店手数料率	10%
利潤率	5%

（１）この長期一時払契約の営業保険料の計算における、予定損害保険金の現価に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）25.7　（B）25.8　（C）25.9　（D）26.0　（E）26.1
（F）26.2　（G）26.3　（H）26.4　（I）26.5　（J）26.6

（２）この長期一時払契約の営業保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）41.4　（B）41.6　（C）41.8　（D）42.0　（E）42.2
（F）42.4　（G）42.6　（H）42.8　（I）43.0　（J）43.2

Ⅱ．ある保険会社の火災保険の料率は、地域（地域Ａか地域Ｂか）と構造（Ｃ構造かＤ構造か）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この火災保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。

＜エクスポージャ（E_{ij}）＞

	Ｃ構造	Ｄ構造	計
地域Ａ	$E_{11}=2{,}000$	$E_{12}=1{,}000$	$E_{1.}=3{,}000$
地域Ｂ	$E_{21}=500$	$E_{22}=1{,}000$	$E_{2.}=1{,}500$
計	$E_{.1}=2{,}500$	$E_{.2}=2{,}000$	$E_{..}=4{,}500$

＜クレーム総額（C_{ij}）＞

	Ｃ構造	Ｄ構造	計
地域Ａ	$C_{11}=1{,}200$	$C_{12}=1{,}400$	$C_{1.}=2{,}600$
地域Ｂ	$C_{21}=200$	$C_{22}=1{,}200$	$C_{2.}=1{,}400$
計	$C_{.1}=1{,}400$	$C_{.2}=2{,}600$	$C_{..}=4{,}000$

この複合リスクの構造が加法型であると仮定して、2 つの危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。
なお、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（1）地域「地域Ｂ」、構造「Ｃ構造」に対応する相対クレームコスト指数の実績値 r_{21} に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.300　（Ｂ）0.350　（Ｃ）0.400　（Ｄ）0.450　（Ｅ）0.500
（Ｆ）0.550　（Ｇ）0.600　（Ｈ）0.650　（Ｉ）0.700　（Ｊ）0.750

（2）地域「地域Ａ」に対応する料率係数 x_1 の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、構造「Ｃ構造」に対応する料率係数 y_1 はそれに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものとする。

（Ａ）0.045　（Ｂ）0.055　（Ｃ）0.065　（Ｄ）0.075　（Ｅ）0.085
（Ｆ）0.095　（Ｇ）0.105　（Ｈ）0.115　（Ｉ）0.125　（Ｊ）0.135

Ⅲ. ある保険会社が販売しているある損害保険商品について、次の実績データを基に 2011 年度末のＩＢＮＲ備金（＝（最終支払保険金累計予測値）－（2011 年度末支払保険金累計））を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もることとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

＜事故年度別　単年度支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 400	1, 480	1, 150
2010	4, 200	1, 200	
2011	3, 700		

ただし、全ての保険事故は年度末に起こり、その支払は事故発生時（経過年度１）、その翌年度末（経過年度２）およびその翌々年度末（経過年度３）にのみ行われる。また、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用い、また、インフレ率は過去実績・将来予測とも一律で年率５％を用いることとする。
なお、計算の途中において、保険金・支払備金については全て小数点以下第１位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては全て小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位までの数値を用いることとする。

（1）経過年度１→２のロスディベロップメントファクター予測値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、ロスディベロップメントファクターの計算にあたっては、インフレの要素を分離した修正ロスディベロップメントを用いることとする。

（A）1.200　（B）1.222　（C）1.244　（D）1.266　（E）1.288
（F）1.300　（G）1.322　（H）1.344　（I）1.366　（J）1.388

（2）2011 年度末のＩＢＮＲ備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）2,900　（B）3,000　（C）3,100　（D）3,200　（E）3,300
（F）3,400　（G）3,500　（H）3,600　（I）3,700　（J）3,800

Ⅳ. 4 月 1 日から翌年 3 月 31 日までを事業年度としている保険会社がある。この保険会社が販売した 2011 年 8 月期央契約で満期返戻金 100、保険期間 8 年の年払積立保険について、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

なお、予定契約消滅率を考慮した現価率を 0.95 とする。

（1）平準式積立保険料を採用した場合、2017 年 3 月事業年度末の払戻積立金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

(A) 68.3	(B) 68.5	(C) 68.7	(D) 68.9	(E) 69.1
(F) 69.3	(G) 69.5	(H) 69.7	(I) 69.9	(J) 70.1

（2）チルメル式保険料を採用した場合、第 6 保険年度末の払戻積立金が、前問の払戻積立金（平準式積立保険料を採用した場合の 2017 年 3 月事業年度末の払戻積立金）と等しくなった。この時の第 2 保険年度以降各年度のチルメル式積立保険料に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

(A) 9.3	(B) 9.5	(C) 9.7	(D) 9.9	(E) 10.1
(F) 10.3	(G) 10.5	(H) 10.7	(I) 10.9	(J) 11.1

V．確率変数 X が下表の確率分布に従うとき、次の（1）から（4）の各リスク尺度の値に最も近いものは、それぞれの選択肢のうちのどれか。

x	0	10	20	30	40	50
$P(X=x)$	0. 40	0. 25	0. 15	0. 10	0. 06	0. 04

（1）$VaR_{85\%}(X)$

（A）0　（B）10　（C）15　（D）20　（E）25
（F）30　（G）35　（H）40　（I）45　（J）50

（2）$ES_{85\%}(X)$

（A）0　（B）0.40　（C）0.80　（D）1.00　（E）1.20
（F）1.40　（G）2.00　（H）2.40　（I）4.00　（J）7.40

（3）$TVaR_{85\%}(X)$

（A）5.90　（B）7.40　（C）10.00　（D）12.00　（E）22.00
（F）27.33　（G）29.50　（H）37.00　（I）39.33　（J）44.00

（4）$CTE_{85\%}(X)$

（A）2.00　（B）2.73　（C）3.93　（D）4.40　（E）8.00
（F）20.00　（G）27.33　（H）39.33　（I）44.00　（J）80.00

問題２．（34 点）

Ⅰ．ある保険商品ＡおよびＢの料率検証を、ある会計年度末の下表のデータをもとに実施した。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、料率検証には会計年度ベース損害率（アーンドベーシス損害率）を用い、クレーム件数はポアソン分布に従うものとする。

保険商品	A	B
当年度収入営業保険料	150,000 千円	200,000 千円
当年度支払保険金	90,000 千円	140,000 千円
当年度末未経過保険料	80,000 千円	100,000 千円
前年度末未経過保険料	60,000 千円	95,000 千円
当年度末支払備金	40,000 千円	60,000 千円
前年度末支払備金	30,000 千円	35,000 千円
予定損害率	60%	70%
契約件数	20,000 件	25,000 件
クレーム発生頻度	2.0%	3.0%
保険金の平均	200 千円	180 千円
保険金の標準偏差	100 千円	120 千円
社費	27,000 千円	26,000 千円
予定代理店手数料率	15%	10%
利潤率	5%	5%

（１）保険商品Ａについて、有限変動信頼性理論を用いて、ある一定条件のもとで損害率を算出したところ、69.50%となった。この保険商品Ａの料率検証において、全信頼度（フル・クレディビリティー）を与えるのに必要なクレーム件数に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）384　（Ｂ）663　（Ｃ）1,015　（Ｄ）1,082　（Ｅ）1,269
（Ｆ）1,350　（Ｇ）1,466　（Ｈ）1,537　（Ｉ）1,835　（Ｊ）2,012

（２）有限変動信頼性理論における、保険商品Ｂの全信頼度を与えるのに必要なクレーム件数を求めるための条件が、上記（１）の保険商品Ａの場合と同一である場合、保険商品Ｂの営業保険料の料率改定率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、社費率は実績値をもとに算出することとし、代理店手数料および利潤は営業保険料に比例するものとし上表の率をもとに算出しなさい。

（Ａ）±0%　（Ｂ）+3%　（Ｃ）+5%　（Ｄ）+10%　（Ｅ）+15%
（Ｆ）−3%　（Ｇ）−5%　（Ｈ）−8%　（Ｉ）−10%　（Ｊ）−15%

（注）「+○%」とは○%の料率引上げ、「−○%」とは○%の料率引下げを意味する。

Ⅱ．次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ある保険契約は、10%の確率で保険期間中に事故が発生し、事故が発生した際に支払われる保険金はガンマ分布 $f(y)=\frac{3}{\Gamma(4)}e^{-3y}(3y)^3 \quad (y \geq 0)$ に従うことがわかっている。

この保険契約において、保険期間中に支払われる保険金総額 X に対する保険料をエッシャー原理 $P(X)=\frac{E\left(Xe^{hX}\right)}{E\left(e^{hX}\right)}$ で算出したとき、この値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、$h=0.5$ とする。

（A）0.260　（B）0.265　（C）0.270　（D）0.275　（E）0.280
（F）0.285　（G）0.290　（H）0.295　（I）0.300　（J）0.305

（２）ある保険契約の保険金 Z は、対数正規分布 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{8\pi}z}e^{-\frac{(\log z-0.5)^2}{8}} \quad (z \geq 0)$ に従うことがわかっている。

ワンの保険料算出原理 $P(Z)=E^{\Omega}(Z)$ $(F_Z^{\Omega}(z)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(F_Z(z)\right)-h\right))$ を用い、この保険契約の保険料を算出したとき、この値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、$h=0.5$ とし、必要があれば $e=2.718$ を使用すること。

（A）28.5　（B）29.0　（C）29.5　（D）30.0　（E）30.5
（F）31.0　（G）31.5　（H）32.0　（I）32.5　（J）33.0

Ⅲ. ある保険商品の保険期間は 1 年であり、年間に発生するクレーム件数の分布は次表のとおりである。また、個々のクレーム額は平均 3 の指数分布に従っている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e=2.718$を使用すること。

年間発生クレーム件数：n	0	1	2
確率	0.4	0.4	0.2

（1）この保険商品に保険期間（1 年）における通算の支払限度額 3 を設定した場合、純保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）1.1　（B）1.2　（C）1.3　（D）1.4　（E）1.5
（F）1.6　（G）1.7　（H）1.8　（I）1.9　（J）2.0

（2）この保険商品の保険期間を 2 年とし、保険期間（2 年）における通算の支払限度額 6 を設定した場合、純保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、純保険料の算出において金利は考慮しない。

（A）2.8　（B）2.9　（C）3.0　（D）3.1　（E）3.2
（F）3.3　（G）3.4　（H）3.5　（I）3.6　（J）3.7

Ⅳ. 保険事故が発生した場合に、保険金Xと保険金Yをそれぞれ支払う保険商品がある。
この商品のポートフォリオにおける年間事故発生件数は、平均 10 のポアソン分布に従っている。また、保険金Xと保険金Yは、それぞれ次の確率密度関数となることがわかっている。

$$f(x)=\frac{\alpha}{e}\left(\frac{e}{x}\right)^{\alpha+1} \quad e\leq x \qquad\qquad f(y)=\frac{\beta}{e^2}\left(\frac{e^2}{y}\right)^{\beta+1} \quad e^2\leq y$$

この商品のポートフォリオで、直近観測された保険金が下表のとおりであるとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば$e=2.718$、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$を使用すること。

事故発生日	4月5日	5月30日	6月7日	8月20日	10月13日	12月20日
X	9	3	6	8	4	12
Y	8	9	12	18	16	24

（1）直近観測された保険金データを用い、最尤法でαとβを推定すると、αは $\boxed{①}$ になる。
更に、この保険商品のポートフォリオにおける1年間の発生保険金をSとし、上記のとおり推定したαとβを用いて$E(S)$を計算すると $\boxed{②}$ になる。
①、②に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

＜①の選択肢＞

（A）1.2　（B）1.3　（C）1.4　（D）1.5　（E）1.6
（F）1.7　（G）1.8　（H）1.9　（I）2.0　（J）2.1

＜②の選択肢＞

（A）320　（B）325　（C）330　（D）335　（E）340
（F）345　（G）350　（H）355　（I）360　（J）365

（2）保険金Xと保険金Yの従属性を調査するために、直近観測された保険金からスピアマンのρを算出したとき、この値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.34　（B）0.37　（C）0.40　（D）0.43　（E）0.46
（F）0.49　（G）0.52　（H）0.55　（I）0.58　（J）0.61

問題3．（20 点）

Ⅰ．ある保険会社が販売している保険商品は、免責金額を設定しない場合、1 契約あたりの年間のクレーム件数は平均 0.3 のポアソン分布に従い、1 事故あたりのクレーム額は平均 100 万円の指数分布に従うことがわかっている。この商品に 1 回目の事故には 20 万円、2 回目以降の事故には 30 万円の免責金額をエクセス方式で適用する場合、免責金額を設定しない場合と比較して、純保険料は $\boxed{}$ 倍になる。

$\boxed{}$ に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば $e^{-0.1}=0.905$ を使用すること。

（A）0.530　（B）0.570　（C）0.610　（D）0.650　（E）0.690
（F）0.730　（G）0.770　（H）0.810　（I）0.850　（J）0.890

Ⅱ. ある保険商品では、保険期間 1 年間の事故の有無により翌年度契約の保険料が割増または割引となる等級制度を導入している。具体的には、等級 1（保険料割増率 20%）、等級 2（保険料割増引率 0%）、および等級 3（保険料割引率 10%）の 3 つの等級から構成され、1 年間クレーム請求が無かった契約者の等級は 1 つ上がり、クレーム請求があった契約者の等級は請求件数分だけ下がる。なお、等級 1 で 1 件以上、等級 2 で 2 件以上、等級 3 で 3 件以上の事故が発生した場合は等級 1 に、等級 3 で無事故の場合は等級 3 になるものとする。

また、契約者の年間クレーム件数は、等級によらず平均 0.1 件のポアソン分布に従い、1 件あたりのクレーム額が、パラメータ $\mu=3.5$、$\sigma^2=1.0$ の対数正規分布に従うことが判明している。

この契約集団の件数が常に一定（つまり、新規契約の流入、流出が発生しない）と仮定した場合、この契約集団が定常状態に達しかつ収支バランスが 5%の収入超過の状態であるとき、最も契約件数が大きい等級の保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

なお、必要があれば $e^{-0.1}=0.905$、$e=2.718$ を使用すること。

（A）5.4　（B）5.6　（C）5.8　（D）6.0　（E）6.2
（F）6.4　（G）6.6　（H）6.8　（I）7.0　（J）7.2

Ⅲ. ある契約集団について、直近の過去 1 年間に発生するクレーム件数 N がパラメータ Θ のポアソン分布に従い、また Θ の確率密度関数が $g_{\Theta}(\mu)=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{54} e^{-\frac{1}{2}\mu}\mu^{53}}{\Gamma(54)}$ $(\mu \geq 0)$ であることがわかっている。また、この契約集団の個々のクレーム額 X が一様分布 $U(0,6)$ に従うこともわかっている。
この契約集団に対して次の前提に基づき料率改定を実施し純保険料を算出した場合、改定後の契約集団の純保険料総額に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜前提＞
- 純保険料総額 P はパーセンタイル原理により $P=\min\{p|F_S(p)\geq 99\%\}$ とする。
（ここで、$S=X_1+X_2+\cdots+X_N$ とし、$F_S(y)$ は S の分布関数とする。）
- 料率改定後に契約件数が 10%減少する。
- $\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}$ は近似的に標準正規分布に従う。

＜表＞標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.005	0.010	0.015	0.020
$u(\varepsilon)$	2.5758	2.3263	2.1701	2.0537

（A）400　（B）410　（C）420　（D）430　（E）440
（F）450　（G）460　（H）470　（I）480　（J）490

Ⅳ. 無作為に抽出した契約者のクレーム件数は幾何分布 $P(N=n)=p(1-p)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ に従い、さらに、幾何分布のパラメータ p は契約者ごとにばらつきがあり、$0.1 \le p \le 0.5$ の一様分布に従うものとする。なお、契約者単位の時系列で観察した場合、同一の契約者の p は同一であるとする。

このとき、過去1年間のクレーム件数が 10 件の契約者の翌年度のクレーム件数を、ビュールマン・モデルを用いて推定した値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば $\log 5 = 1.609$ を使用すること。

（A） 2.0 （B） 2.8 （C） 3.6 （D） 4.4 （E） 5.2

（F） 6.0 （G） 6.8 （H） 7.6 （I） 8.4 （J） 9.2

問題４．（18 点）

Ｉ．ある保険商品のポートフォリオは、個々のクレーム額 X が平均２の指数分布に従い、クレーム件数過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ が以下の条件を満たすような、連続時間型のクレーム総額過程 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ に従うものとする。

※　$0 \leq s < t \leq u < v \Rightarrow N_t - N_s$ と $N_v - N_u$ は独立

※　同一時刻に２件以上のクレームが発生することはない

※　オペレーショナル・タイム $\tau(t) = -\log P(N_t = 0)$ は次のとおり表わされる

$$\tau(t) = \begin{cases} 5t - 2k & (k \leq t < k + 0.5) \\ t + 2k + 2 & (k + 0.5 \leq t < k + 1) \end{cases} \qquad (k = 0,1,2\cdots)$$

このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ある時刻 t における破産確率を求めたい。収入保険料を、$k \leq t < k+1$ における平均クレーム件数をもとに、安全割増率 θ を加味して設定する場合、初期サープラス u_0 を用いてサープラスの推移 U_t は次のように表わすことができる。

$$U_t = u_0 + \boxed{\text{①}} \times t - S_t$$

ここで、このポートフォリオの契約集団が十分大きく、かつクレーム額 X の分布がさほど歪んでいないとみなせるとすると、中心極限定理により、S_t の分布は近似的に正規分布に従うと考えることができる。$E(S_t) = \boxed{\text{②}}$、$V(S_t) = \boxed{\text{③}}$ であり、S_t を標準化した $\dfrac{S_t - E(S_t)}{\sqrt{V(S_t)}}$ は近似的に標準正規分布に従うと考えられる。

①から③の空欄に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）$8(1+\theta)$	（B）$6(1+\theta)$	（C）$2(1+\theta)$
（D）$8\tau(t)^2$	（E）$6\tau(t)^2$	（F）$2\tau(t)^2$
（G）$8\tau(t)$	（H）$6\tau(t)$	（I）$2\tau(t)$
（J）$8t$	（K）$6t$	（L）$2t$
（M）いずれにも該当しない		

（2） $u_0=10$、$\theta=0.5$ の場合、破産確率が最も大きくなるのは、$t=\boxed{\text{④}}$のときであり、その時の破産確率は、標準正規分布の下側 ε 点 $u(\varepsilon)=\boxed{\text{⑤}}$を用いて、$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{u(\varepsilon)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ と表わすことができる。

④、⑤に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

＜④の選択肢＞

（A） 0.5	（B） 1.0	（C） 1.5	（D） 2.0	（E） 2.5
（F） 3.0	（G） 3.5	（H） 4.0	（I） 4.5	（J） 5.0

＜⑤の選択肢＞

（A） 1.880	（B） 1.884	（C） 1.929	（D） 1.996	（E） 2.071
（F） 2.124	（G） 2.147	（H） 2.224	（I） 2.301	（J） 2.376

II．ある保険商品のポートフォリオでは、1 年間に発生する事故件数が 1 件である確率が 20%、2 件である確率が 5%、事故が発生しない確率が 75%となっている。また、事故が発生した場合の保険金 X は、平均 50 の指数分布に従うことがわかっている。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。なお、必要があれば $e^{-1}=0.368$ を使用すること。

（1）エクセスポイントが 50、カバーリミットが α の超過損害額再保険を手配することで、$VaR_{95\%}(S)=50$ としたい（S は 1 年間の保有保険金）。このとき、$\alpha=-50\log\boxed{}$ と表わすことができる。

$\boxed{}$ に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.03　（B）0.08　（C）0.13　（D）0.18　（E）0.23
（F）0.28　（G）0.33　（H）0.38　（I）0.43　（J）0.48

（2）前問の超過損害額再保険を手配した場合のポートフォリオで、1 年間の保有保険金の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）10.05　（B）10.15　（C）10.25　（D）10.35　（E）10.45
（F）10.55　（G）10.65　（H）10.75　（I）10.85　（J）10.95

以上

損保数理（解答例）

問題１．

Ⅰ．

(1) **(D)**　(2) **(B)**

１年契約の予定損害率、予定新契約費率、予定維持費率をそれぞれp, α, βとし、代理店手数料率と利潤率をそれぞれ θ, δとすると、求める保険料は以下のとおりとなる。

$$P = 10 \cdot \frac{\alpha + p \times \dfrac{1-V_1^5}{1-V_1} + \beta \times \dfrac{1-V_2^5}{1-V_2}}{1-(\theta+\delta)}$$

ここで、$V_1 = \dfrac{1+0.04}{1+0.02}$、$V_2 = \dfrac{1+0.01}{1+0.02}$である。各問の解答は次のとおり。

(1)

$10 \times p \times \dfrac{1-V_1^5}{1-V_1}$に、$p = 0.5$を代入すると、25.99980...となる。

(2)

保険料の算式に、$p = 0.5, \alpha = 0.2, \beta = 0.15, \theta = 0.1, \delta = 0.05$を代入すると、$P = 41.593\ldots$となる。

問題１．

Ⅱ．

（１）**（D）**　（２）**（A）**

（１）

各リスク区分ごとのクレームコスト$R_{ij} = \dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$　および相対クレームコスト指数$r_{ij} = \dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$　を計算すると、

＜クレームコストR_{ij}＞

	b1	b2	計
a1	0.600	1.400	0.867
a2	0.400	1.200	0.933
計	0.560	1.300	0.889

＜相対クレームコスト指数r_{ij}＞

	b1	b2	計
a1	0.675	1.575	0.975
a2	0.450	1.350	1.049
計	0.630	1.462	1

よって、相対クレームコスト指数の実績値$r_{21} = 0.450$

（２）

相対クレームコスト指数の推定値 $\hat{r}_{ij}$としたとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$$
$$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$
$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$$
$$E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$

　この連立方程式において、C を定数として、

$$E_{11}\cdot(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}\cdot(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$$
$$E_{21}\cdot(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}\cdot(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$$

と表すことができる。この複合分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j\ \ (i=1,2\quad j=1,2)$と表される。

これを、上記連立方程式に代入して整理すると、

$x_1 + y_1 = r_{11} - C/E_{11} \cdots(a)$, $x_1 + y_2 = r_{12} + C/E_{12} \cdots(b)$

$x_2 + y_1 = r_{21} + C/E_{21} \cdots(c)$, $x_2 + y_2 = r_{22} - C/E_{22} \cdots(d)$

となる。

$(a)+(d)=(b)+(c)$ より、

$$(r_{11} - \frac{C}{E_{11}}) + (r_{22} - \frac{C}{E_{22}}) = (r_{12} + \frac{C}{E_{12}}) + (r_{21} + \frac{C}{E_{21}})$$

であり、各 E_{ij} , r_{ij} を代入して C について解くと、$C = 0$。

$\therefore x_1 = r_{11} - y_1 = 0.675 - 0.630 = 0.0450$

問題1.

Ⅲ

（1）**(H)**　（2）**(J)**

単年度（インフレ調整前）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 400	1, 480	1, 150
2010	4, 200	1, 200	
2011	3, 700		

単年度（インフレ調整後。基準は 2011 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 749	1, 554	1, 150
2010	4, 410	1, 200	
2011	3, 700		

例）事故年度 2009、経過年度 2
　＝ 1, 480 × 1. 05
　＝ 1, 554

累計（インフレ調整後。基準は 2011 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 749	5, 303	6, 453
2010	4, 410	5, 610	
2011	3, 700		

ロスディベロップメントファクター

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2009	1. 415	1. 217
2010	1. 272	1. 217
2011	1. 344	1. 217

例）経過年度 1→2 のロスディベロップメントファクター
　＝ (1, 415 ＋ 1. 272) ÷ 2
　＝ 1. 344

累計（インフレ調整後。基準は 2011 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 749	5, 303	6, 453
2010	4, 410	5, 610	6, 827
2011	3, 700	4, 973	6, 052

単年度（インフレ調整後。基準は 2011 年度。）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 749	1, 554	1, 150
2010	4, 410	1, 200	1, 217
2011	3, 700	1, 273	1, 079

単年度（インフレ調整前）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2009	3, 400	1, 480	1, 150
2010	4, 200	1, 200	1, 278
2011	3, 700	1, 337	1, 190

よって、ＩＢＮＲ備金 ＝ 1, 278 ＋ 1, 337 ＋ 1, 190 ＝ 3, 805

問題１.

Ⅳ

（１）**（H）**　（２）**（G）**

（１）

$$ {}_{t}V_{m} = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\phi^{\frac{2m+1}{24}} = 100\left(1-\frac{1-0.95^{2}}{1-0.95^{8}}\right)0.95^{\frac{3}{8}} = 69.678\ldots $$

（２）

$$ W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\phi^{\frac{2m+1}{24}} = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)-\alpha\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} $$

$$ \alpha\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\left(1-\phi^{\frac{2m+1}{24}}\right) $$

$$ \alpha\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|} = W\left(\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}-\ddot{a}_{(q)\overline{n-t}|}\right)\left(1-\phi^{\frac{2m+1}{24}}\right) $$

$$ \alpha\left(1-0.95^{2}\right) = 100\left(0.95^{2}-0.95^{8}\right)\left(1-0.95^{\frac{3}{8}}\right) $$

$\alpha = 4.67\ldots$ となるので、求める保険料は $\dfrac{\alpha+W\phi^{8}}{\ddot{a}_{(q)\overline{8}|}} = 10.549\ldots$

問題１．

V

（1）**（F）**　（2）**（F）**　（3）**（I）**　（4）**（I）**

（1）

$$VaR_{85\%}(X) = \min\{x \mid F_X(x) \geq 0.85\} = 30$$

（2）

$$ES_{85\%}(X) = E\left[\left(X - VaR_{85\%}(X)\right)_+\right]$$
$$= (30-30)\times 0.10 + (40-30)\times 0.06 + (50-30)\times 0.04 = 1.40$$

（3）

$$TVaR_{85\%}(X) = \frac{1}{1-0.85}\int_{0.85}^{1} VaR_t(X)dt$$
$$= \frac{1}{1-0.85}\left\{30\int_{0.85}^{0.90} dt + 40\int_{0.90}^{0.96} dt + 50\int_{0.96}^{1.00} dt\right\} = 39.3\cdots$$

（4）

$$CTE_{85\%}(X) = E\left[X \mid X > VaR_{85\%}(X)\right]$$
$$= \frac{40\times 0.06 + 50\times 0.04}{0.06+0.04} = 44.00$$

問題２.

Ⅰ.

(1)(E)　(2)(D)

(1)

保険商品Aの会計年度ベース損害率（アーンドベーシス損害率。以下「I/E 損害率」)、予定損害率および有限変動信頼性理論より算出した損害率から信頼度Z_Aを求め、実際の事故件数、全信頼度を与える事故件数であるn_{AF}およびZ_Aの関係からn_{AF}を求める。

保険商品AのI/E 損害率 $= \dfrac{90{,}000+40{,}000-30{,}000}{150{,}000-80{,}000+60{,}000} = 76.92\%$

$76.92\% \times Z_A + 60\% \times (1-Z_A) = 69.50\%$ であることより、$Z_A = 0.5614$

よって、$Z_A = \sqrt{\dfrac{20{,}000 \times 2\%}{n_{AF}}}$ から、$n_{AF} = 1{,}269$ となる。

(2)

保険商品Bの全信頼度を与えるのに必要な事故件数を求めるための条件が、保険商品Aの場合と同じであるため、(1) で求めたn_{AF}より前提条件となる事故件数n_0を求めると、

$n_0 \times \left(1+\left(\dfrac{\sigma_A}{m_A}\right)^2\right) = n_{AF}$ であることから、n_0=1,015（$\sigma_A = 100$、$m_A = 200$）となる。

このn_0から全信頼度を与える事故件数であるn_{BF}を求めると、

$n_0 \times \left(1+\left(\dfrac{\sigma_B}{m_B}\right)^2\right) = n_{BF}$ であることから、n_{BF}=1,466（$\sigma_B = 120$、$m_B = 180$）となる。

実際の事故件数、n_{BF}およびZ_Bの関係からZ_Bを求めると、

$Z_B = \sqrt{\dfrac{25{,}000 \times 3\%}{n_{BF}}} = 0.7153$ となる。

保険商品Bの I/E 損害率は、$\dfrac{140{,}000+60{,}000-35{,}000}{200{,}000-100{,}000+95{,}000} = 84.62\%$であることから、有限変動信頼性理論より算出した保険商品Bの改定損害率は、$84.62\% \times Z_B + 70\% \times (1-Z_B) = 80.45\%$ である。

保険商品Bの実績社費率は$\dfrac{26{,}000}{200{,}000} = 13\%$であり、代理店手数料率と利潤率は予定の率を使うことから、求める料率改定率は以下の通りとなる。

$\dfrac{80.45\%+13\%}{1-(10\%+5\%)} - 1 =$ **9.94%**（料率引上げ）

問題２．

Ⅱ．

（１）**（Ｉ）**　（２）**（Ｊ）**

（１）

$$M_Y(t)=\int_0^\infty e^{ty}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta y}(\beta y)^{\alpha-1}dy=\int_0^\infty\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-(\beta-t)y}(\beta y)^{\alpha-1}dy$$

$$=\frac{\beta}{\beta-t}\cdot\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha-1}\int_0^\infty\frac{\beta-t}{\Gamma(\alpha)}e^{-(\beta-t)y}((\beta-t)y)^{\alpha-1}dy=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}$$

ここで、1 保険期間中の事故発生件数Nの積率母関数は、1 保険期間中の事故発生確率をpとすると、

$M_N=\sum_{n=0}^{1}e^{tn}p^n(1-p)^{1-n}=(1-p)+pe^t$　と表すことができる。

よって、$M_X(t)=M_N(\log M_Y(t))$となるので、

$$M_X(t)=pe^{\log\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}}+(1-p)=p\left(1-\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}+(1-p)$$

$$P(X)=\frac{E\left(Xe^{hX}\right)}{E\left(e^{hX}\right)}=\frac{M'_X(h)}{M_X(h)}$$

$$=\frac{p\dfrac{\alpha}{\beta}\left(1-\dfrac{h}{\beta}\right)^{-\alpha-1}}{p\left(1-\dfrac{h}{\beta}\right)^{-\alpha}+(1-p)}=\frac{0.1\times\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2.5}{3}\right)^{-5}}{0.1\times\left(\dfrac{2.5}{3}\right)^{-4}+0.9}=0.29961\ldots$$

（２）

$$F_Z^{\Omega}(z)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{\log z-\mu}{\sigma}\right)\right)-h\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\log z-\mu}{\sigma}-h\right)=\Phi\left(\frac{\log z-(\mu+h\sigma)}{\sigma}\right)$$

よって、$P(Z)=e^{(\mu+h\sigma)+0.5\times\sigma^2}=e^{(0.5+1)+0.5\times4}=e^{3.5}=33.10\ldots.$

問題２．

Ⅲ．

（１）**（C）**　（２）**（F）**

（１）

指数分布$\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}\ (0 \le x < \infty)$はガンマ分布$\Gamma(1,\frac{1}{3})$で表すことができるので、ガンマ分布の再生性より、

クレーム件数がｎ件のときの年間発生クレーム額は$\Gamma(n,\frac{1}{3})$、すなわち$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{1}{3}z}$の確率密度関数をもつ。よって、通算支払限度額設定後の純保険料p_1は次のとおり表せる。

$$p_1 = \sum_{n=1}^{2}\Pr(N=n)\left(\int_0^3 z\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{z}{3}}dz + \int_3^\infty 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{z}{3}}dz\right)$$

ここで、$n=1$のとき、　$\int_0^3 \frac{1}{3}ze^{-\frac{z}{3}}dz + \int_3^\infty e^{-\frac{z}{3}}dz = \left[-ze^{-\frac{z}{3}} - 3e^{-\frac{z}{3}}\right]_0^3 + \left[-3e^{-\frac{z}{3}}\right]_3^\infty = 3-3e^{-1}$

$n=2$のとき、$\int_0^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 z^2 e^{-\frac{z}{3}}dz + \int_3^\infty \frac{1}{3}ze^{-\frac{z}{3}}dz$

$$= \left[-\frac{1}{3}z^2e^{-\frac{z}{3}} - 2ze^{-\frac{z}{3}} - 6e^{-\frac{z}{3}}\right]_0^3 + \left[-ze^{-\frac{z}{3}} - 3e^{-\frac{z}{3}}\right]_3^\infty$$

$$= 6-3e^{-1}-6e^{-1}-6e^{-1}+3e^{-1}+3e^{-1} = 6-9e^{-1}$$

よって、$p_1 = 0.4(3-3e^{-1}) + 0.2(6-9e^{-1}) = 2.4-3e^{-1} = 1.3$

（２）

保険期間２年の発生クレーム件数ごとの確率は次のとおり。

$n=0$の場合：0.4×0.4=0.16

$n=1$の場合：0.4×0.4＋0.4×0.4=0.32

$n=2$の場合：0.4×0.2＋0.4×0.4＋0.2×0.4=0.32

$n=3$の場合：0.4×0.2＋0.2×0.4=0.16

$n=4$の場合：0.2×0.2=0.04

発生クレーム件数：n	0	1	2	3	4
確率	0.16	0.32	0.32	0.16	0.04

よって、保険期間２年・通算支払限度額設定後の純保険料p_2は次のとおり表せる。

$$p_2=\sum_{n=1}^{4}\Pr(N=n)\left(\int_0^6 z\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{z}{3}}dz+\int_6^\infty 6\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\frac{z}{3}}dz\right)$$

ここで、$n=1$のとき、 $\int_0^6\frac{1}{3}ze^{-\frac{z}{3}}dz+2\int_6^\infty e^{-\frac{z}{3}}dz=3-3e^{-2}$

$n=2$のとき、$\int_0^6\left(\frac{1}{3}\right)^2 z^2e^{-\frac{z}{3}}dz+2\int_6^\infty\frac{1}{3}ze^{-\frac{z}{3}}dz=6-12e^{-2}$

$n=3$のとき、$\int_0^6\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 z^3e^{-\frac{z}{3}}dz+\int_6^\infty\left(\frac{1}{3}\right)^2 z^2e^{-\frac{z}{3}}dz$

$$=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^2 z^3e^{-\frac{z}{3}}+3\left(-\frac{1}{3}z^2e^{-\frac{z}{3}}-2ze^{-\frac{z}{3}}-6e^{-\frac{z}{3}}\right)\right]_0^6+\left[-\frac{1}{3}z^2e^{-\frac{z}{3}}-2ze^{-\frac{z}{3}}-6e^{-\frac{z}{3}}\right]_6^\infty$$

$$=\frac{1}{2}\left(-24e^{-2}+3\left(6-30e^{-2}\right)\right)+\left(12e^{-2}+12e^{-2}+6e^{-2}\right)$$

$$=9-27e^{-2}$$

$n=4$のとき、$\int_0^6\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^4 z^4e^{-\frac{z}{3}}dz+2\int_6^\infty\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^3 z^3e^{-\frac{z}{3}}dz$

$$=\frac{1}{6}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 z^4e^{-\frac{z}{3}}+4\left(-\left(\frac{1}{3}\right)^2 z^3e^{-\frac{z}{3}}+3\left(-\frac{1}{3}z^2e^{-\frac{z}{3}}-2ze^{-\frac{z}{3}}-6e^{-\frac{z}{3}}\right)\right)\right]_0^6$$

$$+\frac{2}{6}\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^2 z^3e^{-\frac{z}{3}}+3\left(-\frac{1}{3}z^2e^{-\frac{z}{3}}-2ze^{-\frac{z}{3}}-6e^{-\frac{z}{3}}\right)\right]_6^\infty$$

$$=\frac{1}{6}\left(-48e^{-2}+4\left(-24e^{-2}+18-90e^{-2}\right)\right)+\frac{2}{6}\left(24e^{-2}+90e^{-2}\right)$$

$$=12-46e^{-2}$$

よって、

$$p_2=0.32\left(3-3e^{-2}\right)+0.32\left(6-12e^{-2}\right)+0.16\times\left(9-27e^{-2}\right)+0.04\times\left(12-46e^{-2}\right)=3.3164$$

問題２.

Ⅳ.

（1）①（A）②（H）　（2）（B）

（1）

$$L(\alpha)=\prod\frac{\alpha\cdot e^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}}=\frac{\alpha^6\cdot e^{6\alpha}}{\prod x_i^{\alpha+1}}$$

$$\log L(\alpha)=6\log\alpha+6\alpha-\sum\log x_i^{\alpha+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\log L(\alpha)=\frac{6}{\alpha}+6-\sum\log x_i$$

$$\hat{\alpha}=\frac{1}{\frac{\sum\log x_i}{6}-1}=\frac{1}{\frac{8\log 2+5\log 3}{6}-1}=1.191$$

同様に、$\hat{\beta}=\dfrac{1}{\frac{13\log 2+6\log 3}{6}-2}=1.665$

従って、　$E(X+Y)=\dfrac{1.191e}{1.191-1}+\dfrac{1.665e^2}{1.665-1}$

$E(S)=10\times E(X+Y)=354.4$

※ 問題文において、解答過程の端数処理を指示していない場合、端数処理せず計算することを想定して出題をしている。
そのため、本問①において α に近い値（1.2）を問うているものの、②では上記のように $\alpha=1.191\cdots$ として計算することを想定していた。しかしながら、$\alpha=1.2$ として②を計算していると思われる解答が少なからず見られたことから、$\alpha=1.2$、$\beta=1.665\cdots$ として計算した場合 $E(S)=348.0$ となることや $\alpha=1.2$、$\beta=1.7$ として計算した場合 $E(S)=342.5$ となることを踏まえ、採点にあたっては、選択肢（E）（$E(S)=340$）、（F）（$E(S)=345$）、（G）（$E(S)=350$）についても正解として取り扱った。

（2）

事故発生日	4月5日	5月30日	6月7日	8月20日	10月13日	12月20日
X	9	3	6	8	4	12
Y	8	9	12	18	16	24
Rank（X）	2	6	4	3	5	1
Rank（Y）	6	5	4	2	3	1

上表から、Rank（X）と Rank（Y）のピアソンの積率相関係数を算出すると、$\rho=0.37\cdots$ となる。

問題3．

Ⅰ．

（H）

1件目の事故の支払額の期待値は

$$\int_{20}^{\infty}(x-20)\frac{1}{100}e^{-\frac{1}{100}x}dx=100e^{-\frac{20}{100}}$$

2件目以降の事故の支払額の期待値は

$$\int_{30}^{\infty}(x-30)\frac{1}{100}e^{-\frac{1}{100}x}dx=100e^{-\frac{30}{100}}$$

よって、年間の事故件数をN、合計支払額をSとすると、

$$E(S\mid N=k)=\begin{cases}0 & k=0\\ 100e^{-\frac{20}{100}}+100e^{-\frac{30}{100}}(k-1) & 1\le k\end{cases}$$

が成り立ち、

$$E(S)=E(E(S\mid N))=\sum_{k=1}^{\infty}E(S\mid N=k)e^{-0.3}\frac{0.3^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{100e^{-\frac{20}{100}}+100e^{-\frac{30}{100}}(k-1)\right\}e^{-0.3}\frac{0.3^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{100e^{-\frac{30}{100}}k+(100e^{-\frac{20}{100}}-100e^{-\frac{30}{100}})\right\}e^{-0.3}\frac{0.3^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$$

$$=100e^{-\frac{30}{100}}\times0.3+(100e^{-\frac{20}{100}}-100e^{-\frac{30}{100}})\times\left(1-e^{-0.3}\frac{0.3^{0}}{0!}\right)$$

$$=30\times0.905^{3}+100\times\left(0.905^{2}-0.905^{3}\right)\times\left(1-0.905^{3}\right)=24.250$$

一方、免責金額を導入しない場合の合計支払額の期待値は、

$0.3\times100=30$

であるため、免責金額を設定した場合、純保険料は　$24.250\div30=0.808$倍になる。

問題３．

Ⅱ．

（Ｂ）

各契約の年間クレーム請求件数がポアソン分布$P(X=k)=e^{-0.1}\dfrac{0.1^k}{k!}$に従うことから、

１年間クレーム請求が無い確率　　$p_0=e^{-0.1}=0.905$

１年間に１回クレーム請求がある確率　$p_1=0.1e^{-0.1}=0.091$

よって、推移確率は以下の通り表すことができる。

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{翌年の等級} \\
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\text{現在の等級} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 \\ 1-p_0 & 0 & p_0 \\ 1-p_0-p_1 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.095 & 0.905 & 0 \\ 0.095 & 0 & 0.905 \\ 0.004 & 0.091 & 0.905 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

この契約集団が定常状態にあるときの等級iの契約構成割合をx_iとすると、次の式が成り立つ。

$$
\begin{cases}
x_1=0.095x_1+0.095x_2+0.004x_3 \\
x_2=0.905x_1+0.091x_3 \\
x_3=0.905x_2+0.905x_3 \\
x_1+x_2+x_3=1
\end{cases}
$$

これを解くと、各等級の契約構成割合は以下の通りとなる。

$x_1=0.013$、$x_2=0.094$、$x_3=0.893$

ここで、定常状態における保険料と保険金の収支相等を考える。

①保険料収入

割増引率が０である等級２の年間保険料をPとすると、定常状態でこのポートフォリオから得られる保険料は、

$1.2P\times0.013+P\times0.094+0.9P\times0.893=0.9133\mathrm{P}$

②保険金支出

１クレーム請求の平均値は、１クレーム請求額が対数正規分布に従うことから、

$e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}=e^{3.5+0.5}=e^4=54.600$（対数正規分布の平均値）

年間クレーム請求件数の平均値は0.1なので、１年間の総支払保険金の期待値は、

$0.1\times54.600=5.46$

収支バランスが5%の収入超過であることから、等級２の保険料は以下の通りとなる。

$0.9133\mathrm{P}=5.46\times1.05$　　$\therefore P=6.2772$

最も契約構成割合が大きい等級は３等級（保険料割引率 10%）なので、その保険料は$6.2772\times0.9=5.6495$となる。

問題３．

Ⅲ．

（Ｃ）

クレーム総額を表す確率変数をSとすると、純保険料総額は次のとおり表すことができる。

$$\text{純保険料総額} = E(S) + u(0.99)\sqrt{V(S)}$$

まず、クレーム件数が従う分布および契約件数が 10%減少することから、クレーム件数Nは負の二項分布$NB\left(54 \times 0.9, \dfrac{1}{3}\right)$に従うことがわかる。

よって、$E(N) = \dfrac{k(1-p)}{p} = \dfrac{48.6\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}{\dfrac{1}{3}} = 97.2$、$V(N) = \dfrac{k(1-p)}{p^2} = \dfrac{48.6\left(1-\dfrac{1}{3}\right)}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = 291.6$

次に、クレーム金額Xが一様分布に従うことから、

$$E(X) = \frac{6}{2} = 3、V(X) = \frac{6^2}{12} = 3、E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 12$$

よって、

$$E(S) = E(N)E(X) = 97.2 \times 3 = 291.6$$

$$V(S) = V(X)E(N) + E(X)^2 V(N) = 3 \times 97.2 + 3^2 \times 291.6 = 2{,}916$$

以上から、純保険料総額$= E(S) + u(0.99)\sqrt{V(S)} = 291.6 + 2.3263 \times \sqrt{2{,}916} = 417.22$

問題３.

Ⅳ.

<u>（D）</u>

契約者ごとのクレーム件数をX、契約者ごとのポアソンパラメータを表わす確率変数をP、全体のクレーム件数の平均をμ、分散をσ^2とすると、

$$\mu = E(E(X \mid P)) = E\left(\frac{1-p}{p}\right) = \int_{0.1}^{0.5} \frac{1}{0.4}\frac{1-p}{p}dp = 2.5\log 5 - 1 = 3.022$$

$$E(V(X \mid P)) = E\left(\frac{1-p}{p^2}\right) = \int_{0.1}^{0.5} \frac{1}{0.4}\frac{1-p}{p^2}dp = 20 - 2.5\log 5 = 15.978$$

$$V(E(X \mid P)) = V\left(\frac{1-p}{p}\right) = E\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2\right) - E\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = 21 - 5\log 5 - (2.5\log 5 - 1)^2 = 3.819$$

よって、信頼度は

$$Z = \frac{1}{1 + \dfrac{E(V(X \mid P))}{V(E(X \mid P))}} = 0.193$$

$$\therefore (1-Z)\mu + Z \times 10 = 4.369$$

問題４．

Ⅰ．

（１）①（B）②（I）③（G）　　（２）④（E）⑤（A）

（１）

①問題のクレーム件数過程は、$k \le t < k+0.5(k=0,1,2\cdots)$ の間はポアソンパラメータ 5、$k+0.5 \le t < k+1$ の間はポアソンパラメータ 1 のポアソン過程に従う。したがって、$k \le t < k+1$ の間の平均クレーム件数は 3 である。よって、①に入るのは、$2 \times 3 \times (1+\theta) = 6(1+\theta)$

②、③ N_t と X は独立であり、N_t は平均 $\tau(t)$ のポアソン分布に従うので、

$$E(S_t) = E(X)E(N_t) = 2\tau(t)$$

$$E(S_t) = E(X)^2 V(N_t) + V(X)E(N_t) = \tau(t)\left(E(X)^2 + V(X)\right) = \tau(t)E(X^2) = 8\tau(t)$$

（２）

$u_0 = 10$、$\theta = 0.5$ のとき、時間 t のサープラスが負になる確率は、

$$P(u_0 + 6(1+\theta)t - S_t < 0) = P\left(\frac{S_t - E(S_t)}{\sqrt{V(S_t)}} > \frac{u_0 + 6(1+\theta)t - E(S_t)}{\sqrt{V(S_t)}}\right)$$

$$= P\left(\frac{S_t - E(S_t)}{\sqrt{V(S_t)}} > \frac{10 + 9t - 2\tau(t)}{\sqrt{8\tau(t)}}\right)$$

と書けるので、$f(t) \equiv \dfrac{10+9t-2\tau(t)}{\sqrt{8\tau(t)}}$ が最小値をとる t、およびその最小値を求めればよい。$f(t)$ を微分すると、

$$f'(t) = \frac{1}{8\tau(t)\sqrt{8\tau(t)}} \times \begin{cases} -20t - 64k - 200 & (k \le t < k+0.5) \\ 28t + 128k + 88 & (k+0.5 \le t < k+1) \end{cases}$$

となり、これは、$k \le t < k+0.5(k=0,1,2\cdots)$ の間は負、$k+0.5 \le t < k+1$ の間は正である。したがって、$f(t)$ は $t = k+0.5$ において極小値をとるため、$g(k) \equiv f(k+0.5)$　$(k=0,1,2\cdots)$ を定義し、その最小値を求めればよい。

$$g(k) = f(k+0.5) = \frac{3k+9.5}{\sqrt{24k+20}}$$

であるから、これを k についての連続関数とみなして微分すると、

$$g'(k) = \frac{36k-54}{(24k+20)\sqrt{24k+20}}$$

となる。これは、$k \le 1$ で負、$k \ge 2$ では正であるから、$g(k)$ は $k=1$ または $k=2$ の時に最小値をとる。実際に計算すると、$g(1) = 12.5/\sqrt{44} = 1.884446$、$g(2) = 15.5/\sqrt{68} = 1.879651$ となるので、以上をまとめると、$t = 2.5$ のとき、$f(t)$ が最小値1.879651をとり、このとき破産確率が最大になる。

問題４.

Ⅱ.

（1）①（D）　（2）（E）

（1）

①事故が 1 件発生し、かつ保有保険金額が 50 を超過する確率は、次のとおり算出できる（保有保険金額が 50 を超過する確率は、元受保険金が 50+α を超過する確率と等しい）。

$$0.2\times\int_{50+\alpha}^{\infty}\frac{1}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx=0.2\times\left[-e^{-\frac{x}{50}}\right]_{50+\alpha}^{\infty}=0.2\times e^{-\frac{50+\alpha}{50}}$$

②事故が 2 件発生し、かつ保有保険金額が 50 を超過しない確率は、次のとおり算出できる。

$$P(X_1+X_2<50|X_1<50,X_2<50)+P(X_1+X_2<50|X_1\ge 50,X_2<50)+$$

$$P(X_1+X_2<50|X_1<50,X_2\ge 50)+P(X_1+X_2<50|X_1\ge 50,X_2\ge 50)$$

$X_1+X_2=Z$ とすると、Z は $f(z)=\left(\frac{1}{50}\right)^2 ze^{-\frac{z}{50}}$ に従う。よって、

$$P(Z<50)=\int_0^{50}\left(\frac{1}{50}\right)^2 ze^{-\frac{z}{50}}dz=\left[1-e^{-\frac{z}{50}}-\frac{z}{50}e^{-\frac{z}{50}}\right]_0^{50}=\left(1-2e^{-1}\right)$$

従って、事故が 2 件発生し、かつ保有保険金額が 50 を超過する確率は、

$$0.05\times\left(1-\left(1-2e^{-1}\right)\right)=0.1e^{-1}=0.0368$$

①・②と題意から、$0.0368+0.2e^{-\frac{50+\alpha}{50}}=0.05$ となる α を求めればよい。

$$e^{-\frac{50+\alpha}{50}}=0.066$$

$$e^{-\frac{\alpha}{50}}=0.1793\cdots$$

従って、近似的に　$\alpha=-50\log 0.18$　となる。

（2）

事故 1 件あたりの保有保険金の期待値は、以下のとおり算出できる。

$$\int_0^{50}\frac{x}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx+\int_{50}^{50+\alpha}\frac{50}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx+\int_{50+\alpha}^{\infty}\frac{(x-\alpha)}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx$$

$$=\left[-xe^{-\frac{x}{50}}-50e^{-\frac{x}{50}}\right]_0^{50}+\left[-50e^{-\frac{x}{50}}\right]_{50}^{50+\alpha}+\left[-(x-\alpha)e^{-\frac{x}{50}}-50e^{-\frac{x}{50}}\right]_{50+\alpha}^{\infty}$$

$$=\left(50-100e^{-1}\right)+\left(50e^{-1}-50e^{-\frac{50+\alpha}{50}}\right)+\left(50e^{-\frac{50+\alpha}{50}}+50e^{-\frac{50+\alpha}{50}}\right)$$

$$=50-50e^{-1}+50e^{-\frac{50+\alpha}{50}}$$

また、年間事故発生件数の期待値は$1\times 0.2+2\times 0.05=0.3$　となるので、

年間保有保険金の期待値は$(50-50e^{-1}+50e^{-\frac{50+\alpha}{50}})\times 0.3=10.47....$