年金数理（問題）

この年金数理の問題において特に説明がない限り、以下のとおりとする。

- 「被保険者」とは、在職中の者をいう。
- 「受給権者」とは、年金受給中の者および受給待期中の者をいう。
- 「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。
- 「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいう。
- 「未積立債務」とは、責任準備金から積立金を控除した額をいう。
- 「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年退職時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいい、保険料の払い込みは年 1 回期初払いとする。なお、「Trowbridge モデルの年金制度」は必ずしも定常人口を仮定するものではない。

問題1．次の（1）～（14）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
（70点）

（1）制度の被保険者が脱退した時から、以下の式で表される加入期間に応じた年金額 α_t を終身年金として支払う年金制度がある。制度からの給付を定年脱退時のみとし、単位積立方式により制度を運営しているとする。定常状態となっていたある期末時点において、各年度に割り当てる「単位」の考え方を変更して、加入期間が 1 年伸びることにより増加する年金額を各年度に割り当てる「単位」とした。このとき、従前の標準保険料 ${}^{U}P^{1}{}_{x}$ と、「単位」を変更した後の標準保険料 ${}^{U}P^{2}{}_{x}$ が等しくなる年齢 x として最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、新規加入年齢を x_e 歳、定年年齢を x_r 歳とし、保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期初に行われるものとする。

加入期間 t に応じた年金額：$\alpha_t = \dfrac{t^2}{(x_r - x_e)^2}$

（A）$x_r - x_e + 1$　　（B）$x_r - x_e - 1$

（C）$\dfrac{x_r + x_e}{2} + 1$　　（D）$\dfrac{x_r + x_e}{2} - 1$

（E）$\dfrac{x_r + x_e + 1}{2}$　　（F）$\dfrac{x_r + x_e - 1}{2}$

（G）$x_e + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 - 1}{2}}$　　（H）$x_e + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 + 1}{2}}$

（I）$\dfrac{(x_r - x_e)}{2} + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 - 1}{2}}$　　（J）$\dfrac{(x_r - x_e)}{2} + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 + 1}{2}}$

（2）定常人口が実現している年金制度があり、特別保険料として前期末の未積立債務の 35%を毎年償却することとしている。ここで、設定した予定利率と相違して、毎年の積立金の運用利回りが 1.50%で継続したため、保険料、給付、責任準備金および積立金が一定値に収束し、一定値に収束した後の各期末時点の責任準備金に対する積立金の比率が 96.3%となった。
なお、保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期初に行われるものとする。
このとき、設定した予定利率は、$\boxed{a}.\boxed{b}$ % となる。a、b にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。(計算結果は百分率において小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めなさい。)

（3）次の①～⑤について、誤っているものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

① $i = \dfrac{\ddot{s}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \ddot{s}_{\overline{n}|} - \left(\ddot{s}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{\overline{n}|}\right)}$

（なお、記号 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ は期初払いの n 年確定年金の単位年金額に対する終価を表すものとする）

② $n = \dfrac{(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} + (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

③ $S_{x+n} = \left((Ia)_x - \left(I_{\overline{n}|}a\right)_x\right) \cdot D_x$

④ $\ddot{a}_x \leqq \dfrac{1+i}{q_x + i}$ （ただし、$q_x \leqq q_{x+t}$ のとき $(t = 1, 2, 3 \cdots)$）

⑤ $\ddot{a}_{xy} = \ddot{a}_{\overline{xy}} - \ddot{a}_{\overset{[1]}{xy}}$

（A）①と②　（B）②と③　（C）③と④　（D）④と⑤　（E）①と④
（F）②と⑤　（G）①と②と③　（H）②と③と④　（I）③と④と⑤　（J）①と③と⑤
（K）いずれにも該当しない

（4）Trowbridge モデルの年金制度において、定常状態が成立しているものとする。次の①～⑦の記述について、誤っているものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。

① 単位積立方式における積立金の額は、在職中の被保険者の全加入期間に対応する給付現価に年金受給権者の給付現価を加えたものに等しい。

② １つの加入年齢に対応する標準保険料率を一律に適用する特定年齢方式を採用する場合、脱退率が０でさえなければ標準加入者の標準保険料の積立終価は積立段階のどの時点をとっても、そのときの標準加入者の責任準備金を常に下回ることとなる。

③ 給付現価は、初項：在職中の被保険者の総数、公比：$\dfrac{1}{1+i}$ の無限等比数列の和となる。

④ 平準積立方式は単位積立方式との比較において相対的に制度全体として積立金の利息に対する依存度が高い。したがって、平準積立方式のほうが保険料の額は小さく、積立金の水準は高いということになる。

⑤ 加入時積立方式の積立金の額は、新規加入年齢を除く在職中の被保険者の給付現価に等しい。

⑥ 平準積立方式の定常状態における積立金の額は、在職中の被保険者についての過去の保険料の元利合計と年金受給権者についての給付現価の合計額となる。

⑦ 開放基金方式において、未積立債務の償却を永久償却（未積立債務の予定利息分のみ償却すること）とした場合には、標準保険料および特別保険料の合計額は、開放型総合保険料方式によった保険料と同じとなる。

(A) ①と③と⑤	**(B)** ②と④と⑥	**(C)** ③と⑤と⑦
(D) ①と②と③と⑤	**(E)** ①と②と④と⑥	**(F)** ①と③と④と⑤
(G) ①と③と⑤と⑦	**(H)** ②と③と⑤と⑦	**(I)** ②と④と⑥と⑦
(J) ③と⑤と⑥と⑦	**(K)** ①と②と③と④と⑤	**(L)** ③と④と⑤と⑥と⑦
(M) いずれにも該当しない		

（5）ある年金制度（加入年齢方式、保険料年 1 回期初払い、給付年 1 回期末払い）の$(n-1)$年度末、n 年度末の貸借対照表、n 年度の損益計算書、およびn 年度の不足金増加額の分析表は以下のとおりである。

この年金制度はn 年度の期初において、加入者、受給権者ともにx %の給付改善を行っている。

これにより、n 年度の給付金、標準保険料、特別保険料はn 年度の期初において給付改善を行わなかったときと比べ、全てx %増加したものとなった。

もし仮に、x %の給付改善がなく、実際のn 年度と同様の運用利回りが得られた場合、n 年度の損益計算書の不足金増加額 335 は不足金減少額 565 に変化し、n 年度末貸借対照表の積立金の金額は下表のαから 33 だけ小さな金額となっていたと予想された。なお、給付改善の前後で予定利率は同一であるものとし、n 年度は運用利回りを除いて、年金制度は予定どおりに推移したとする。また、下表のα～ρの値は正の値とする。

このときn 年度の運用利回りは、$\boxed{a}$ $\boxed{b}$．$\boxed{c}$ %となる。a、b、c にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（計算結果は百分率において小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めなさい。また、解答数値が 10.0%未満の数値となった場合にはa の桁は 0 をマークしなさい。）

$(n-1)$年度末貸借対照表（x %の給付改善適用前）

積立金	2,600	責任準備金	3,840
不足金	1,240		
	3,840		3,840

n 年度末貸借対照表

積立金	α	責任準備金	4,665
不足金	β		
	4,665		4,665

n 年度の損益計算書

給付金	510	標準保険料	200
		特別保険料	γ
n 年度末責任準備金	4,665	運用収益	δ
		不足金増加額	335
		$(n-1)$年度末責任準備金	3,840
	5,175		5,175

n 年度の不足金増加額の分析表

利差損益	▲ε
特別保険料	▲γ
特別保険料にかかる予定利息	▲14
給付改善による期初不足金増加額	ζ
期初不足金にかかる予定利息	ρ
不足金増加額	335

（注）上記の分析表では、不足金増加の場合を正の値、
　不足金減少の場合を負の値として表示している。
　また、「▲」は負の値を示すものとする。

（6）年齢 x における死力 μ_x が、 $\mu_x = \dfrac{1}{300-4x}\left(0 \le x < 75\right)$ から $\mu_x = \dfrac{1}{320-4x}\left(0 \le x < 80\right)$ に改善した。
このとき、平均寿命の伸びに最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

(A) 1 歳	(B) 2 歳	(C) 3 歳	(D) 4 歳	(E) 5 歳
(F) 6 歳	(G) 7 歳	(H) 8 歳	(I) 9 歳	(J) 10 歳

（7）ある年度の期初における責任準備金が 500、積立金が 200 となっている年金制度がある。
その年度は実際運用利回りがマイナス 20％となり利差損が発生したものの、その他は予定通りに推移した結果、期末の未積立債務は 311 となった。その年度の保険料（年 1 回期初払い）のうち標準保険料は 30、特別保険料は 70 であり、給付は年 1 回期末払いであるとき、当該年金制度の予定利率は、$\boxed{a}.\boxed{b}$ ％ となる。a、b にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（計算結果は百分率において小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めなさい。）

（8）2 つの年金制度（A および B）が合併することとなった。これらの年金制度は以下の内容となっている。

・ B の規模（被保険者数、給与合計）は A のちょうど 20％である。
・ A と B の被保険者の年齢構成、加入期間構成、給与構成は互いに等しい。
（すなわち、A と B は規模が異なるだけで、被保険者構成は等しい。）
・ A、B ともに受給権者は存在しない。
・ A、B ともに加入年齢方式を採用しており、計算基礎率も等しい。これらについては、合併後も変更しない。
・ B の給付水準は A の一律 2 倍であり、B の積立金は A の 60％であった。
・ A の未積立債務は A の積立金の 80％であり、A の特別保険料率は合併直前における給与合計がその後も一定の前提でちょうど 10 年間一定額を拠出し償却完了する率となっている。

合併後の給付水準を A の$(1+k)$倍とし$(0<k<1)$、A の被保険者については過去の加入期間についても給付を$(1+k)$倍に引き上げ、B の被保険者については過去の加入期間についても$(1+k)/2$ 倍に引き下げることを検討する。償却方式・年数については A の方法から変更しないとするとき、特別保険料率が合併前の A の率の 150％を上回らないようにしたい。k の最大値を求めると、0.$\boxed{a}\,\boxed{b}$ となる。a、b にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（小数点以下第 3 位を<u>切り捨て</u>小数点以下第 2 位まで求めなさい。）

（9）x 歳の被保険者数 l_x が以下のとおりで表される定常状態に達した年金制度があり、新規加入者は 20 歳でのみ加入するものとする。

$l_x = a - x$ （$20 \leq x \leq a$）

今、50 歳以上の被保険者の脱退時平均年齢が 30 歳以上の被保険者の脱退時平均年齢の 1.2 倍のとき、この年金制度における平均年齢として最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

(A) 30　(B) 31　(C) 32　(D) 33　(E) 34
(F) 35　(G) 36　(H) 37　(I) 38　(J) 39

（1 0）次のような年金制度がある。

・x 歳の被保険者の給与は $A \times (1+s)^x$ で表される。（A、s はそれぞれ定数とする。）
・定年年齢 x_r 歳で退職した場合のみ、x_r 歳以降の年齢 x 歳の受給者に年金年額 $A \times (1+s)^x \times \alpha$ を年 1 回期初払いで終身年金として支払う。（α は定数とする。）
・財政方式は加入年齢方式（新規加入年齢 x_e 歳）で、保険料は年 1 回期初払いである。
・予定利率は i とする。

今、s を s' としたとき、標準保険料率を変えないような予定利率 i' を設定したところ、

$1+i' = \boxed{} \times (1+i)$ という関係になった。

$\boxed{}$ に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

(A) $(1+s')$　(B) $\sqrt{1+s'}$　(C) $\sqrt{\dfrac{1}{1+s'}}$　(D) $(1+s')^{(x_r - x_e)}$　(E) $\dfrac{1+s'}{1+s}$

(F) $\sqrt{\dfrac{1+s'}{1+s}}$　(G) $\left(\dfrac{1+s'}{1+s}\right)^{(x_r - x_e)}$　(H) $\dfrac{1+s}{1+s'}$　(I) $\sqrt{\dfrac{1+s}{1+s'}}$　(J) $\left(\dfrac{1+s}{1+s'}\right)^{(x_r - x_e)}$

（１１）「元本の 90％保証」65 歳支給開始終身年金（年 1 回期初払い）を考える。

なお、「元本の 90％保証」とは、既に支払った年金額の合計が元本の 90％に達しない場合に死亡が起きれば、元本の 90％と既に支払った年金額の合計との差額を、死亡年度の期末に支払うことをいう。

元本を 100 とした場合の年金額について下記の計算基数を用いて計算すると、$\boxed{a}\boxed{b}.\boxed{c}$ となる。a、b、c にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めなさい。また、解答数値が 10.0 未満の数値となった場合には a の桁は 0 をマークしなさい。）

x (年齢)	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x	x (年齢)	D_x	N_x	C_x	M_x	R_x
65	3,799	36,395	187	3,261	32,626	75	1,637	8,615	161	1,509	8,112
66	3,556	32,596	184	3,074	29,365	76	1,451	6,978	159	1,348	6,603
67	3,319	29,040	182	2,890	26,291	77	1,271	5,527	157	1,189	5,255
68	3,088	25,721	179	2,708	23,401	78	1,096	4,256	154	1,032	4,066
69	2,864	22,633	176	2,529	20,693	79	925	3,160	152	878	3,034
70	2,645	19,769	174	2,353	18,164	80	760	2,235	150	726	2,156
71	2,432	17,124	171	2,179	15,811	81	599	1,475	147	576	1,430
72	2,225	14,692	169	2,008	13,632	82	442	876	145	429	854
73	2,024	12,467	166	1,839	11,624	83	291	434	143	284	425
74	1,828	10,443	164	1,673	9,785	84	143	143	141	141	141
						85	0	0	0	0	0

（１２）ある Trowbridge モデルの年金制度が、定常人口にある被保険者集団に対し、退職時年金現価積立方式により運営され、定常状態になっているものとする。
この制度において、ある年度から保険料をそれまでの保険料のα倍$(0<\alpha<1)$に変更し、n年間その保険料を継続することにより積立金を減らしていくこととした。そして、その上で、n年後以降は、賦課方式により運営することとしたい。
αを表す式として、最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

なお、ここで、

x_r：定年年齢、　i：予定利率（なお、$v=\dfrac{1}{1+i}$とする。）、

e_{x_r}：x_r歳における略算平均余命（$e_{x_r}=\sum_{t=1}^{\omega-x_r} l_{x_r+t} \Big/ l_{x_r}$）、

a_{x_r}：x_r歳における期末払終身年金現価率

と定義するものとする。

(A) $\dfrac{1}{1-v^{n-1}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$　　(B) $\dfrac{1}{1-v^{n}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$

(C) $-\dfrac{v^{n-1}}{1-v^{n-1}}\cdot\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+\dfrac{1}{1-v^{n-1}}$　　(D) $-\dfrac{v^{n}}{1-v^{n}}\cdot\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+\dfrac{1}{1-v^{n}}$

(E) $\dfrac{v^{n-1}}{1-v^{n-1}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$　　(F) $\dfrac{v^{n}}{1-v^{n}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$

(G) $\dfrac{1}{1-v^{n-1}}\left(-\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+1\right)$　　(H) $\dfrac{1}{1-v^{n}}\left(-\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+1\right)$

(I) $-\dfrac{v^{n-1}}{1-v^{n-1}}\cdot\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+\dfrac{1}{1-v^{n-1}}$　　(J) $-\dfrac{v^{n}}{1-v^{n}}\cdot\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+\dfrac{1}{1-v^{n}}$

（１３）下記の制度内容に基づく年金制度を考える。

○給付内容：加入期間 15 年以上で脱退した場合、翌期初より年金を支給する。
年金は、加入期間t（１年未満の端数期間切捨て）に応じて、脱退時給与のα_t倍を年金支給開始時点における年金原資とし、終身にわたって支給するものとする。

○昇給：年 1 回期初昇給。

○脱退：年 1 回期央脱退。死亡による脱退は発生しないものとする。

○保険料：昇給後の給与の一定割合を、年 1 回期初払い。

○財政方式：個人平準保険料方式。予定利率は 2.0％とする。

今、期初にちょうど 30 歳で加入した者について、在職中の被保険者であった場合の各年齢における「期初時点での昇給後の給与 1 に対する責任準備金」を調べると、44 歳から 45 歳の 1 年で 15％増え、また、45 歳から 46 歳の 1 年で 10％増えることがわかった。

なお、45 歳期初における昇給の予定は 5.0％、46 歳期初における昇給の予定は 2.0％であるものとする。また、44 歳及び 45 歳における脱退の予定は共に 10.0％であるものとする。

この者について、在職中の被保険者であった場合の 45 歳における「期初時点での昇給後の給与 1 に対する責任準備金」は、

α_{15}の $\boxed{a}.\boxed{b}\boxed{c}$ 倍となる。a、b、c にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。（小数点以下第 3 位を四捨五入し小数点以下第 2 位まで求めなさい。）

（１４）予定利率i（$v=\dfrac{1}{1+i}$、$d=1-v$）で開放型総合保険料方式により運営されている Trowbridge モデルの年金制度を考える。

この制度は、積立金F、在職中の被保険者の総数L、及び制度全体の毎年度の給付額Bが下記のような状況で、定常状態にあったものとする。

$$L=\alpha\cdot l_{x_e}\quad(\alpha>n)\quad、\quad B=\beta\cdot l_{x_e}\quad(\beta>0)\quad、\quad F=\gamma\cdot B\quad\left(n<\gamma<\frac{1+i}{i}\right)$$

（新規加入年齢：x_e、x_e歳の被保険者数：l_{x_e}とする。）

なお、この制度では、毎年、保険料を見直すのではなく、n年間$(n\geq 2)$に 1 回のみ保険料を見直すこととしている。しかし、ある保険料見直し時期の後、社会情勢が急変し、次の保険料見直し時期までのn年間、新規加入の被保険者が 0 となった。

そのため、n年後の保険料見直し時期において計算の前提を変更することとし、変更後は、その時点における被保険者構成で定常人口になるものと仮定して、保険料を計算することとした。

このとき、変更後における被保険者 1 人当たりの保険料は変更前の何倍となるか。

最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

なお、被保険者の脱退及び積立金の運用は予定どおりであったものとし、当初の定常状態において、x_e歳から(x_e+n-1)歳までの各年齢における脱退率は0%であったものとする。

(A) $1+\dfrac{1+(n-1)v^n}{(\alpha-n)v^n}$　(B) $1+\dfrac{\beta\{1+(n-1)v^n\}}{(\alpha-n)v^n}$　(C) $1+\dfrac{1-v^n}{(\alpha-n)dv^n}$

(D) $1+\dfrac{\beta(1-v^n)}{(\alpha-n)dv^n}$　(E) $1+\dfrac{1-v^n}{(\alpha-n)d^2v^n}$　(F) $1+\dfrac{\beta(1-v^n)}{(\alpha-n)d^2v^n}$

(G) $1+\dfrac{1+(n-1)v^n}{(\alpha-n)d^2v^n}$　(H) $1+\dfrac{\beta\{1+(n-1)v^n\}}{(\alpha-n)d^2v^n}$　(I) $1+\dfrac{1-v^n-ndv^{n+1}}{(\alpha-n)d^2v^n}$

(J) $1+\dfrac{\beta(1-v^n-ndv^{n+1})}{(\alpha-n)d^2v^n}$

問題２． Trowbridge モデルの年金制度について、開放基金方式における１人あたりの標準保険料についての考察を行う。次の①～⑭の空欄に当てはまる最も適切なものを、①～⑦および⑪～⑬については算式群Ⅰの中から、⑧～⑩については算式群Ⅱの中から、⑭については語群の中からそれぞれ１つずつ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、解答にあたり同じ記号を重複して選んでも良い。なお、x_e：新規加入年齢、x_r：定年年齢とする。（１５点）

単位積立方式における x 歳の１人の被保険者が１年間に払い込む標準保険料を ${}^{U}P_x$、

x 歳の１人の被保険者の将来期間に対応する標準保険料を ${}^{A}P_x$ と定義すると、

${}^{A}P_x$ は ${}^{U}P_x$ を用いて次のように表すことができる。

$$
{}^{A}P_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)}{\left(\boxed{\quad ② \quad}\right)} \quad \cdots\cdots \quad (\text{I})式
$$

ここで、定常人口の場合の開放基金方式における１人あたりの標準保険料を ${}^{OAN}P$ とすると、${}^{OAN}P$ は次のように表すことができる。

$$
{}^{OAN}P = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\dfrac{\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right)}{D_x}\cdot l_x + \dfrac{\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right)\cdot\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right)}{D_{x_e}}\cdot l_{x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\dfrac{\left(\boxed{\quad ② \quad}\right)}{D_x}\cdot l_x + \dfrac{\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right)\cdot\left(\boxed{\quad ⑤ \quad}\right)}{D_{x_e}}\cdot l_{x_e}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{II})式
$$

(Ⅱ)式の分子をまず、${}^{A}P_x$ の定義を用いて変形すると、

$$
(\text{II})式の分子 = \sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{\left(\boxed{\quad ② \quad}\right){}^{A}P_x}{D_x}\cdot l_x + \frac{\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right)\cdot\left(\boxed{\quad ⑤ \quad}\right){}^{A}P_{x_e}}{D_{x_e}}\cdot l_{x_e} \quad \cdots\cdots \quad (\text{III})式
$$

$$
= \sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{\left(\boxed{\quad ⑥ \quad}\right)}{v^x} + \left(\boxed{\quad ④ \quad}\right)\cdot\frac{\left(\boxed{\quad ⑦ \quad}\right)}{v^{x_e}} \quad となる。
$$

ここで、(Ⅱ)式の分子に含まれる算式において、算式 $\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)$ の $y=t(x_e \leqq t \leqq x_r-1)$ にかかる係数は、(Ⅱ)式の分子の第１項は $\frac{1}{v^t}\left(\boxed{\quad ⑧ \quad}\right)$、第２項は $\frac{1}{v^t}\left(\boxed{\quad ⑨ \quad}\right)$ と表すことができる。したがって、その係数の合計値は $\frac{1}{v^t}\left(\boxed{\quad ⑩ \quad}\right)$ となる。

これより、(Ⅱ)式の分子 $= \displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \frac{(\boxed{①})}{v^y} \cdot (\boxed{⑩}) = \frac{(\boxed{⑪})}{(\boxed{⑫})}$ となる。

一方、(Ⅱ)式の分母は開放基金方式の人数現価であるため、

(Ⅱ)式の分母 $= \dfrac{(\boxed{⑬})}{(\boxed{⑫})}$ で表すことができる。

これより、(Ⅱ)式 $= \dfrac{(\boxed{⑪})}{(\boxed{⑬})}$ ・・・・ (Ⅳ)式

したがって、(Ⅰ)式、(Ⅱ)式、(Ⅳ)式の結果から、${}^{A}P_x$、${}^{OAN}P$ は ${}^{U}P_x$ の加重平均で表示できることが示された。また、${}^{U}P_x = {}^{OAN}P$ となる年齢 x が存在し $x = x_1$ であったとすると、

$\boxed{⑭}$ が成立することが導かれる。

算式群Ⅰ (①～⑦、⑪～⑬用)

(A) v (B) d (C) i (D) $\dfrac{1}{i}$ (E) $\ddot{a}_{x_r}$ (F) $\ddot{a}_x$ (G) D_{x_r} (H) D_x (I) N_{x_r}

(J) N_x (K) $N_x - N_{x_r}$ (L) $N_{x_e} - N_x$ (M) $N_{x_e} - N_{x_r}$ (N) ${}^{U}P_y l_y$ (O) ${}^{U}P_y D_y$

(P) $\dfrac{{}^{U}P_y}{l_y}$ (Q) $\dfrac{{}^{U}P_y}{D_y}$ (R) $\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x-1} l_y$ (S) $\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} l_y$ (T) $\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y$ (U) ${}^{U}P_x \cdot \displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} l_y$

(V) ${}^{U}P_x \cdot \displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y$ (W) $\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y l_y$ (X) $\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y l_y$ (Y) $\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y$ (Z) $\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y$

算式群Ⅱ (⑧～⑩用)

(A) $\displaystyle\sum_{s=0}^{t-x_e} v^s$ (B) $\displaystyle\sum_{s=0}^{t} v^s$ (C) $\displaystyle\sum_{s=t-x_e+1}^{t} v^s$ (D) $\displaystyle\sum_{s=t-x_e+1}^{\infty} v^s$ (E) $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty} v^s$ (F) $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} v^s$

(G) $\displaystyle\sum_{s=0}^{t-x_e} \frac{1}{v^s}$ (H) $\displaystyle\sum_{s=0}^{t} \frac{1}{v^s}$ (I) $\displaystyle\sum_{s=t-x_e+1}^{t} \frac{1}{v^s}$ (J) $\displaystyle\sum_{s=t-x_e+1}^{\infty} \frac{1}{v^s}$ (K) $\displaystyle\sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{v^s}$ (L) $\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{v^s}$

語群（⑭用）

（A） $x_e \leqq x \leqq x_1$ において、${}^{A}P_x \leqq {}^{U}P_x \leqq {}^{OAN}P$

（B） $x_1 \leqq x \leqq x_r - 1$ において、${}^{A}P_x \leqq {}^{U}P_x \leqq {}^{OAN}P$

（C） $x_e \leqq x \leqq x_1$ において、${}^{OAN}P \leqq {}^{A}P_x \leqq {}^{U}P_x$

（D） $x_1 \leqq x \leqq x_r - 1$ において、${}^{OAN}P \leqq {}^{A}P_x \leqq {}^{U}P_x$

（E） $x_e \leqq x \leqq x_1$ において、${}^{OAN}P \leqq {}^{U}P_x \leqq {}^{A}P_x$

（F） $x_1 \leqq x \leqq x_r - 1$ において、${}^{OAN}P \leqq {}^{U}P_x \leqq {}^{A}P_x$

（G） $x_e \leqq x \leqq x_1$ において、${}^{U}P_x \leqq {}^{A}P_x \leqq {}^{OAN}P$

（H） $x_1 \leqq x \leqq x_r - 1$ において、${}^{U}P_x \leqq {}^{A}P_x \leqq {}^{OAN}P$

（I） $x_e \leqq x \leqq x_1$ において、${}^{U}P_x \leqq {}^{OAN}P \leqq {}^{A}P_x$

（J） $x_1 \leqq x \leqq x_r - 1$ において、${}^{U}P_x \leqq {}^{OAN}P \leqq {}^{A}P_x$

（K） 該当なし

問題3． Trowbridge モデルの年金制度において、被保険者集団は定常人口を仮定し、期初の被保険者の総数をL、脱退残存表によるx歳の被保険者数をl_x、定年年齢をx_r歳、$e_x = \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} l_y\right) \Big/ l_x$とする。

また、毎年期初にx_1歳とx_2歳で 3:2 の割合で新規加入があるものとし、$x_1 < x_2$とする。このとき、次の（1）～（3）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から1つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 （１５点）

（1） 財政方式として特定年齢x_1歳の加入年齢方式を採用した場合、毎年発生する過去勤務債務PSLの額として適切なものを選びなさい。なお、利差損益および過年度に発生した剰余金または不足金にかかる利息については考慮しないこと。

(A) $\dfrac{2L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}$

(B) $\dfrac{3L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_r}}{N_{x_1}-N_{x_2}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_1}}$

(C) $\dfrac{2L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_1}}$

(D) $\dfrac{2L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}$

(E) $\dfrac{3L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}$

(F) $\dfrac{3L}{5e_{x_1}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}$

(G) $\dfrac{3L}{5e_{x_1}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_r}}{N_{x_1}-N_{x_2}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_1}}$

(H) $\dfrac{3L}{5(e_{x_1}+e_{x_2})} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_1}}$

(I) $\dfrac{3L}{5e_{x_1}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}$

(J) $\dfrac{3L}{5e_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}} \cdot \dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}$

（2） 財政方式として（閉鎖型）総合保険料方式を採用する。定常状態に達した場合の被保険者1人あたりの保険料${}^{C}P_{\infty}$として適切なものを選びなさい。

(A) $\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{N_{x_1}-N_{x_r}}$

(B) $\dfrac{(2D_{x_2}+3D_{x_1})\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{2D_{x_2}\cdot(N_{x_1}-N_{x_r})+3D_{x_1}\cdot(N_{x_2}-N_{x_r})}$

(C) $\dfrac{(3D_{x_2}+2D_{x_1})\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{5D_{x_2}\cdot(N_{x_1}-N_{x_r})}$

(D) $\left(\dfrac{3}{N_{x_1}-N_{x_r}}+\dfrac{2}{N_{x_2}-N_{x_r}}\right)\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{5}$

(E) $\left(\dfrac{2}{N_{x_1}-N_{x_r}}+\dfrac{3}{N_{x_2}-N_{x_r}}\right)\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{5}$

(F) $\dfrac{(3e_{x_1}+2e_{x_2})D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{3e_{x_1}N_{x_1}+2e_{x_2}N_{x_2}-5(e_{x_1}+e_{x_2})N_{x_r}}$

(G) $\dfrac{(2e_{x_1}+3e_{x_2})D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{2e_{x_1}N_{x_1}+3e_{x_2}N_{x_2}-(2e_{x_1}+3e_{x_2})N_{x_r}}$

(H) $\dfrac{(3D_{x_2}+2D_{x_1})\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{3D_{x_2}\cdot(N_{x_1}-N_{x_r})+2D_{x_1}\cdot(N_{x_2}-N_{x_r})}$

(I) $\dfrac{5D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{3N_{x_1}+2N_{x_2}-5N_{x_r}}$

(J) $\left(\dfrac{3}{e_{x_1}(N_{x_1}-N_{x_r})}+\dfrac{2}{e_{x_2}(N_{x_2}-N_{x_r})}\right)\dfrac{L\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{5}$

（3）　（1）で適用する被保険者1人あたりの標準保険料を${}^{E}P_{x_1}$とするとき、$\dfrac{PSL}{{}^{C}P_{\infty}-{}^{E}P_{x_1}}$と等しくなるものとして適切なものを選びなさい。

(A) 被保険者の人数現価
(B) その年度の新規加入者の人数
(C) その年度の新規加入者の人数現価
(D) x_1歳で加入した被保険者の人数現価
(E) x_1歳で加入した被保険者の給付現価
(F) その年度のx_1歳での新規加入者数
(G) その年度のx_1歳での新規加入者の人数現価
(H) x_2歳で加入した被保険者の人数現価
(I) x_2歳で加入した被保険者の給付現価
(J) その年度のx_2歳での新規加入者数
(K) その年度のx_2歳での新規加入者の人数現価
(L) いずれにも該当しない

以上

年金数理(解答例)

問題1.

（1） x 歳時点における、加入期間が1年伸びることにより増加する年金額は、x 歳から $x+1$ 歳までの年金額の増加、すなわち加入期間 $(x-x_e)$ 年から加入期間 $(x+1-x_e)$ 年までの年金額の増加であるから、

$$\alpha_{x+1-x_e}-\alpha_{x-x_e}=\frac{(x+1-x_e)^2}{(x_r-x_e)^2}-\frac{(x-x_e)^2}{(x_r-x_e)^2}=\frac{2(x-x_e)+1}{(x_r-x_e)^2}$$

である。

これより、「単位」を変更した後の標準保険料は、${}^{U}P^{2}{}_{x}=\dfrac{2(x-x_e)+1}{(x_r-x_e)^2}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$ と表わせる。

一方で、通常の単位積立方式による標準保険料 ${}^{U}P^{1}{}_{x}$ は、x_r 歳時の年金額が 1 であることに留意して、

${}^{U}P^{1}{}_{x}=\dfrac{1}{x_r-x_e}\cdot\dfrac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$ となる。

よって、${}^{U}P^{1}{}_{x}={}^{U}P^{2}{}_{x}$ となる x は、

$\dfrac{1}{x_r-x_e}=\dfrac{2(x-x_e)+1}{(x_r-x_e)^2}$ を満たす。

この式を整理すると、$x=\dfrac{x_e+x_r-1}{2}$

・・・解答（F）

（2）責任準備金 V は、標準保険料 C および給付額 B を用いると、予定利率を i として、

$V=(V+C-B)\cdot(1+i)$ ・・・①

となる。

一方で、責任準備金に対する比率が収束した後の積立金 F と V の関係は、運用利回りが 1.5%で継続した場合に、積立比率が 96.3%に収束しているので、$F=0.963V$ ・・・②である。

F に関する漸化式は、特別保険料 C' を用いて、

$F=1.015\cdot(F+C+C'-B)$ ・・・③

となる。$C'=0.35(V-F)$ および①～③の関係を用いて式を整理すると、

$$0.963V=\left\{0.963V-\frac{i}{1+i}V+0.35\cdot(1-0.963)\cdot V\right\}\times 1.015$$

とかけ、これを整理すると、$i=0.027941$

百分率に直し、小数点以下第2位を四捨五入すると $i=2.8\%$ ・・・解答 $a:2$、$b:8$

（3）

① $s_{\overline{n|}}$ を期末払いの n 年確定年金の単位年金額に対する終価を表すものとすると、教科書P203より

$i=\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}-\dfrac{1}{s_{\overline{n|}}}$ である。

したがって、$\dfrac{i}{1+i}=\dfrac{1}{1+i}\cdot\left(\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}-\dfrac{1}{s_{\overline{n|}}}\right)=\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}-\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}=\dfrac{\ddot{s}_{\overline{n|}}-\ddot{a}_{\overline{n|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}\cdot\ddot{s}_{\overline{n|}}}$

$$i\cdot\ddot{a}_{\overline{n|}}\cdot\ddot{s}_{\overline{n|}}=(1+i)\cdot\left(\ddot{s}_{\overline{n|}}-\ddot{a}_{\overline{n|}}\right)$$

$i=\dfrac{\ddot{s}_{\overline{n|}}-\ddot{a}_{\overline{n|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}\cdot\ddot{s}_{\overline{n|}}-\left(\ddot{s}_{\overline{n|}}-\ddot{a}_{\overline{n|}}\right)}$ で正しい。

② $(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}=\dfrac{nN_x-\left(S_{x+1}-S_{x+n+1}\right)}{D_x}$、 $(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}}=\dfrac{S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_x}$、 $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=\dfrac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$

したがって、$n+1=\dfrac{(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}}+(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$ で誤り。

③ $(I\ddot{a})_x=\dfrac{S_x}{D_x}$、$\left(I_{\overline{n|}}\ddot{a}\right)_x=\dfrac{S_x-S_{x+n}}{D_x}$

したがって、$S_{x+n}=\left((I\ddot{a})_x-\left(I_{\overline{n|}}\ddot{a}\right)_x\right)\cdot D_x$ で誤り。

④ 教科書P204より $p_x\geqq p_{x+t}$ のとき $(t=1、2、3\cdots)$、$a_x\leqq\dfrac{p_x}{q_x+i}$ である

したがって、$\ddot{a}_x=(1+i)\cdot a_x\leqq(1+i)\cdot\dfrac{p_x}{q_x+i}\leqq\dfrac{1+i}{q_x+i}$ で正しい。

⑤ 教科書P41より $\ddot{a}_{\overline{xy}}=\ddot{a}_x+\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy}$、$\ddot{a}_{\underset{xy}{[1]}}=\ddot{a}_x+\ddot{a}_y-2\ddot{a}_{xy}$

したがって、$\ddot{a}_{xy}=\ddot{a}_{\overline{xy}}-\ddot{a}_{\underset{xy}{[1]}}$ で正しい。

②と③が誤り・・・解答（B）

（4）

① 誤 教科書P63の記述

単位積立方式における積立金の額は積立不足がない場合、在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価に年金受給権者の給付現価を加えたものに等しい。

② 正　教科書 P83　練習問題 3 の記述

③ 誤　教科書 P59の記述

給付現価は、初項:制度全体の毎年度の給付額、公比: $\frac{1}{1+i}$ の無限等比数列の和となる。

④ 正　教科書 P52 の記述

⑤ 誤　教科書 P65の記述

加入時積立方式の積立金の残高は新規加入年齢を除く在職中の被保険者および年金受給権者の給付現価に等しい

⑥ 正　教科書 P65の記述

⑦ 正　教科書 P94　練習問題 2 の記述

よって誤っているものは①③⑤・・・解答（A）

（5）求める運用利回りを r %とし、予定利率を i %とおく。

まず、n 年度は利差損益以外の差損益は発生しなかったことから、

n 年度末責任準備金＝($(n-1)$年度末責任準備金＋標準保険料)×$(1+i)$－　給付金

$4{,}665=(3{,}840\times(1+x)+200)\times(1+i)-510$・・①

同様に、給付改善がなかった場合を考えると n 年度末責任準備金は

$$\left(3{,}840+\frac{200}{(1+x)}\right)\times(1+i)-\frac{510}{(1+x)}\ \cdot\cdot②$$

②式は①式÷$(1+x)$である。したがって、給付改善があった場合となかった場合の責任準備金の差額は

$$①\text{-}②=4{,}665\left(1-\frac{1}{(1+x)}\right)$$ となる。

給付改善があった場合となかった場合の積立金の差額は 33 であり、不足金増加額と減少額の差額は 565+335＝900 となるため、次式が成立する。

$$900+33=4{,}665\left(1-\frac{1}{(1+x)}\right)$$

$\therefore x=25$ (%)、①式に代入して$\therefore i=3.5$ %を得る。

したがって、特別保険料にかかる予定利息▲14 より、

特別保険料＝14÷3.5%＝400

一方、 n 年度末不足金＝ $(n-1)$ 年度末不足金＋不足金増加額より、

n 年度末不足金＝1,240＋335＝1,575

よって、 n 年度末貸借対照表から、

n 年度末積立金＝4,665－1,575＝3,090

したがって、

n 年度末積立金＝($(n-1)$年度末積立金＋標準保険料＋特別保険料) × $(1+r)$－ 給付金

$3{,}090=(2{,}600+200+400)\times(1+r)-510 \quad \therefore r=12.5\,\%$

よって、解答　$a=1$、$b=2$、$c=5$

（6） $\mu_x=\dfrac{1}{300-4x}$ のとき、

$$l_x=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\mu_t\cdot dt\right\}=l_0\cdot\left(1-\frac{x}{75}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\mathring{e}_x=\left(\int_x^\omega l_t\cdot dt\right)/l_x=75\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(1-\frac{x}{75}\right) \qquad \therefore \mathring{e}_0=60$$

$\mu_x=\dfrac{1}{320-4x}$ のとき、

$$l_x=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\mu_t\cdot dt\right\}=l_0\cdot\left(1-\frac{x}{80}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\mathring{e}_x=\left(\int_x^\omega l_t\cdot dt\right)/l_x=80\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(1-\frac{x}{80}\right) \qquad \therefore \mathring{e}_0=64$$

よって、平均寿命の伸びは、$64-60=4$[歳]。

・・・解答（D）

（7）期初の責任準備金をV、期初の積立金をF、標準保険料をP_0、特別保険料をP_{psl}、予定利率をiとする。利回りを含めすべて予定通り推移していた場合の未積立債務は、

$(V-F-P_{psl})\cdot(1+i)=(500-200-70)\cdot(1+i)=230\cdot(1+i)$

となることから、新たに生じた未積立債務は、

$311-230\cdot(1+i)$

となる。また、利差損は、

$$(F+P_0+P_{psl})\cdot\{(1+i)-0.8\}=(200+30+70)\cdot\{(1+i)-0.8\}=300\cdot(1+i)-240$$

であり、新たに生じた未積立債務は利差損のみであることから、

$311-230\cdot(1+i)=300\cdot(1+i)-240 \qquad \therefore 1+i=1.0396\ldots$

・・・解答　$a=4$、$b=0$

（8）合併後の積立金をF、給与合計をB_{A+B}とし、合併前のAの給付現価、給与合計、標準保険料率、給与現価、積立金、未積立債務をそれぞれS_A，B_A，P_A，G_A，F_A，PSL_Aとすると、

$$F = 1.6F_A$$

$$PSL_A = S_A - P_A \cdot G_A - F_A = 0.8F_A$$

ここで、合併後の標準保険料率が$(1+k)\cdot P_A$であることに注意すると、合併後の未積立債務PSLは

$$PSL = (1+k)\cdot 1.2S_A - (1+k)\cdot P_A \cdot 1.2G_A - F = (2.16(1+k) - 1.6)F_A$$

合併後の特別保険料率P^{PSL}は

$$P^{PSL} = \frac{PSL}{B_{A+B}\cdot(\text{現価率})} = \frac{(2.16(1+k)-1.6)F_A}{1.2\cdot B_A \cdot(\text{現価率})}$$

合併前の制度Aの特別保険料率P_A^{PSL}は

$$P_A^{PSL} = \frac{PSL_A}{B_A\cdot(\text{現価率})} = \frac{0.8F_A}{B_A\cdot(\text{現価率})}$$

$P^{PSL} \leq 1.5\cdot P_A^{PSL}$が条件であるから、解いて、

$$k \leq \frac{3.04}{2.16} - 1 \fallingdotseq 0.407407407407\ldots$$

解答は　$a=4$、$b=0$

（9）

30歳以上の被保険者の脱退時平均年齢

$$= 30 + \frac{T_{30}}{l_{30}}$$

$$T_{30} = \int_{30}^{a}(a-x)dx = \left[ax - \frac{x^2}{2}\right]_{30}^{a} = \frac{(a-30)^2}{2}$$

$$\therefore 30 + \frac{T_{30}}{l_{30}} = 30 + \frac{\frac{(a-30)^2}{2}}{a-30} = 30 + \frac{a-30}{2} = \frac{a+30}{2}$$

同様に、50歳以上の被保険者の脱退時平均年齢

$$= \frac{a+50}{2}$$

題意より、

$\frac{a+50}{2} = 1.2 \times \frac{a+30}{2}$より、$a=70$となる。

最後に当該集団の平均年齢を求めると次のようになる。

$$\frac{\int_{20}^{70} x l_x dx}{\int_{20}^{70} l_x dx} = \frac{\int_{20}^{70} x(70-x)dx}{\int_{20}^{70}(70-x)dx} = \frac{\left[35x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{20}^{70}}{\left[70x - \frac{x^2}{2}\right]_{20}^{70}} = 36.7(36.66\cdots)$$

$\therefore \underline{\underline{(H)}}$

（１０）x_e 歳の被保険者の給付現価を S_{x_e} 、給与現価を G_{x_e} とし、加入年齢方式による標準保険料率を P_{x_e} とする。

$$S_{x_e} = A \times \alpha \times \left\{(1+s)^{x_r} \times \frac{D_{x_r}}{D_{x_e}} + (1+s)^{x_r+1} \times \frac{D_{x_r+1}}{D_{x_e}} + \cdots\right\}$$

$$= A \times \alpha \times \frac{1}{D_{x_e}} \sum_{x=x_r}^{\infty} \left\{(1+s)^x \times D_x\right\}$$

$$G_{x_e} = A \times \left\{(1+s)^{x_e} \times \frac{D_{x_e}}{D_{x_e}} + (1+s)^{x_e+1} \times \frac{D_{x_e+1}}{D_{x_e}} + \cdots + (1+s)^{x_r-1} \times \frac{D_{x_r-1}}{D_{x_e}}\right\}$$

$$= A \times \frac{1}{D_{x_e}} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{(1+s)^x \times D_x\right\}$$

$$\therefore P_{x_e} = \frac{S_{x_e}}{G_{x_e}} = \frac{A \times \alpha \times \frac{1}{D_{x_e}} \sum_{x=x_r}^{\infty} \left\{(1+s)^x \times D_x\right\}}{A \times \frac{1}{D_{x_e}} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{(1+s)^x \times D_x\right\}}$$

$$= \alpha \times \frac{\sum_{x=x_r}^{\infty} \left\{(1+s)^x \times D_x\right\}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{(1+s)^x \times D_x\right\}}$$

$$= \alpha \times \frac{\sum_{x=x_r}^{\infty} \left[\{(1+s)v\}^x \times l_x\right]}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left[\{(1+s)v\}^x \times l_x\right]}$$

$$= \alpha \times \frac{\sum_{x=x_r}^{\infty}\left\{\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^x \times l_x\right\}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left\{\left(\frac{1+s}{1+i}\right)^x \times l_x\right\}}$$

今、sをs'にしたとき、P_{x_e}を変えないためには、$\frac{1+s}{1+i}=\frac{1+s'}{1+i'}$という関係が常に成り立つ必要がある。

$\therefore 1+i' = \frac{1+s'}{1+s} \times (1+i)$となる。

$\therefore \underline{\underline{(E)}}$

（１１）年金額をαとすると、

$$100 = \alpha \cdot \ddot{a}_{65} + \left\{\sum_{t=1}^{\left[90/\alpha\right]} C_{65+t-1} \cdot (90 - t\alpha)\right\} \Big/ D_{65}$$

ここで、$\left[90/\alpha\right]$は$90/\alpha$の整数部を表す。

式を変形すると、

$$\alpha = \frac{100 \cdot D_{65} - 90 \cdot \left(M_{65} - M_{65+\left[90/\alpha\right]}\right)}{N_{65} - \left(R_{65} - R_{65+\left[90/\alpha\right]}\right) + \left[90/\alpha\right] \cdot M_{65+\left[90/\alpha\right]}}$$

元本保証なしの場合の年金額から類推して、$\left[90/\alpha\right] = 8$ と仮定すると、

$\alpha = \frac{100 \times 3{,}799 - 90 \times (3{,}261 - 1{,}839)}{36{,}395 - (32{,}626 - 11{,}624) + 8 \times 1{,}839} \fallingdotseq 8.4$ この場合、$\left[90/\alpha\right] = 10$ となり仮定がおかしいことがわかる。

次に、$\left[90/\alpha\right] = 10$ と仮定すると、

$\alpha = \frac{100 \times 3{,}799 - 90 \times (3{,}261 - 1{,}509)}{36{,}395 - (32{,}626 - 8{,}112) + 10 \times 1{,}509} \fallingdotseq 8.2$ この場合、$\left[90/\alpha\right] = 10$ が成り立ち仮定は正しい。

よって、解答は $a = 0$、$b = 8$ 、$c = 2$

（１２）定常状態であった当初の積立金をF_0、保険料を減らしてからt年後の積立金を$F_t\ (0 \le t \le n)$とすると、 $F_{t-1} + (\alpha \cdot {}^{T}C - B) = v \cdot F_t$ の関係が成立する。

そのため、

$$F_0 + (\alpha \cdot {}^{T}C - B) = v \cdot F_1$$

$$v \cdot F_1 + v \cdot (\alpha \cdot {}^{T}C - B) = v^2 \cdot F_2$$

$$\cdots$$

$$v^{n-1} \cdot F_{n-1} + v^{n-1} \cdot (\alpha \cdot {}^{T}C - B) = v^n \cdot F_n$$

上式の辺々を加えて整理すると、 $F_0 + \dfrac{1-v^n}{1-v}(\alpha \cdot {}^{T}C - B) = v^n \cdot F_n$ となる。

$F_0 = B/d - {}^{T}C/d$ 、 $F_n = 0$ より、 $\alpha = -\dfrac{v^n}{1-v^n} \cdot \dfrac{B}{{}^{T}C} + \dfrac{1}{1-v^n}$

$B = l_{x_r}(e_{x_r} + 1)$ 、 ${}^{T}C = l_{x_r}(a_{x_r} + 1)$ より、 $\alpha = -\dfrac{v^n}{1-v^n} \cdot \dfrac{e_{x_r} + 1}{a_{x_r} + 1} + \dfrac{1}{1-v^n}$

よって、解答は **（J）**

（１３）30歳で加入した者について、在職中の被保険者であった場合のx歳における「期初時点での昇給後の給与１に対する責任準備金」を${}_{x-30}V_{30}$、保険料をP_{30}と表すと、ファクラーの公式により、

$${}_{45-30}V_{30} = \left(\frac{b_{44}}{b_{45}}\right) \cdot \left(\frac{l_{44}}{l_{45}}\right) \cdot (1+i)({}_{44-30}V_{30} + P_{30})$$

$${}_{45-30}V_{30} = \left(\frac{1}{1.05}\right) \cdot \left(\frac{1}{0.9}\right) \cdot (1.02) \cdot \left(\frac{{}_{45-30}V_{30}}{1.15} + P_{30}\right)$$

$$P_{30} = \left(\frac{1.05 \times 0.9}{1.02} - \frac{1}{1.15}\right) \cdot {}_{45-30}V_{30}$$

また、

$${}_{46-30}V_{30} = \left(\frac{b_{45}}{b_{46}}\right) \cdot \left(\frac{l_{45}}{l_{46}}\right) \cdot \left\{ (1+i)({}_{45-30}V_{30} + P_{30}) - \left(\frac{d_{45}}{l_{45}}\right) \cdot \alpha_{15} \right\}$$

$$1.10 \cdot {}_{45-30}V_{30} = \left(\frac{1}{1.02}\right) \cdot \left(\frac{1}{0.9}\right) \cdot \left\{(1.02) \cdot \left({}_{45-30}V_{30} + P_{30}\right) - 0.1 \cdot \alpha_{15}\right\}$$

$$0.1 \cdot \alpha_{15} = (1.02 - 1.02 \times 0.9 \times 1.10) \cdot {}_{45-30}V_{30} + 1.02 \cdot P_{30}$$

よって、

$${}_{45-30}V_{30} \fallingdotseq 1.47 \cdot \alpha_{15}$$

解答は $a = 1$、$b = 4$ 、$c = 7$

（１４）新規加入の被保険者が0となったt年後における積立金をF_tとする。

当初は$\left(F_0+{}^{O}P\cdot L-B\right)(1+i)=F_0$ という関係が成り立つ。（変更前の保険料：${}^{O}P$）

$$F_1=\left\{F_0+{}^{O}P\cdot(L-l_{x_e})-B\right\}(1+i)=F_0-{}^{O}P\cdot l_{x_e}(1+i)$$

$$F_2=\left\{F_1+{}^{O}P\cdot(L-2l_{x_e})-B\right\}(1+i)=\left\{F_0-{}^{O}P\cdot l_{x_e}(1+i)+{}^{O}P\cdot(L-2l_{x_e})-B\right\}(1+i)$$
$$=F_0-{}^{O}P\cdot l_{x_e}\left\{(1+i)^2+2(1+i)\right\}$$

$$F_n=F_0-{}^{O}P\cdot l_{x_e}\left\{(1+i)^n+2(1+i)^{n-1}+\cdots+n(1+i)\right\}=F_0-{}^{O}P\cdot l_{x_e}\left(\frac{1-v^n}{d^2v^n}-\frac{n}{d}\right)$$

変更前の保険料${}^{O}P$は、

$${}^{O}P=\frac{S-F_0}{G}=\frac{\dfrac{B}{d}-F_0}{\dfrac{L}{d}}=\frac{B-dF_0}{L}=\frac{\beta l_{x_e}-d\beta\gamma l_{x_e}}{\alpha l_{x_e}}=\frac{\beta(1-\gamma d)}{\alpha}$$

変更後の保険料${}^{O}P'$は、

$${}^{O}P'=\frac{S-F_n}{G}=\frac{\dfrac{B}{d}-F_n}{\dfrac{L-nl_{x_e}}{d}}=\frac{B-dF_n}{L-nl_{x_e}}=\frac{B-d\left\{F_0-{}^{O}P\cdot l_{x_e}\left(\dfrac{1-v^n}{d^2v^n}-\dfrac{n}{d}\right)\right\}}{L-nl_{x_e}}$$

$$=\frac{\beta l_{x_e}-d\left\{\beta\gamma l_{x_e}-{}^{O}P\cdot l_{x_e}\left(\dfrac{1-v^n}{d^2v^n}-\dfrac{n}{d}\right)\right\}}{\alpha l_{x_e}-nl_{x_e}}$$

$$=\frac{\beta(1-\gamma d)+{}^{O}P\cdot\left(\dfrac{1-v^n}{dv^n}-n\right)}{\alpha-n}=\frac{{}^{O}P\cdot\alpha+{}^{O}P\cdot\dfrac{1}{dv^n}\left(1-v^n-ndv^n\right)}{\alpha-n}$$

$$={}^{O}P\cdot\frac{1-v^n+(\alpha-n)dv^n}{(\alpha-n)dv^n}={}^{O}P\cdot\left\{1+\frac{1-v^n}{(\alpha-n)dv^n}\right\}$$

よって、

$$\frac{{}^{O}P'}{{}^{O}P}=1+\frac{1-v^n}{(\alpha-n)dv^n}$$

解答は（C）

問題2.

教科書 P61-P63、P109-110 および P232-233 参照

単位積立方式における x 歳の1人の被保険者が1年間に払い込む標準保険料を ${}^{U}P_x$ とすると、

$$ {}^{U}P_x = \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_x} $$ と表される。ここで、x_e :新規加入年齢である。

x 歳の1人の被保険者の将来期間に対応する標準保険料を ${}^{A}P_x$ と定義すると、

$$ {}^{A}P_x = \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{N_{x_r}}{N_x - N_{x_r}} $$ と表すことができる。

したがって、${}^{A}P_x$ は ${}^{U}P_x$ を用いて次のように表すことができる。

$$ {}^{A}P_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{N_x - N_{x_r}} \quad \cdots\cdot \text{(Ⅰ)式} $$

ここで、定常人口の場合の開放基金方式における1人あたりの標準保険料を ${}^{OAN}P$ とすると、${}^{OAN}P$ は次のように表すことができる。

$$ {}^{OAN}P = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{\frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot N_{x_r}}{D_x} \cdot l_x + \frac{\frac{1}{i} \cdot N_{x_r}}{D_{x_e}} \cdot l_{x_e}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x} \cdot l_x + \frac{\frac{1}{i} \cdot \left(N_{x_e} - N_{x_r}\right)}{D_{x_e}} \cdot l_{x_e}} \cdots\cdot \text{(Ⅱ)式} $$

(Ⅱ)式の分子をまず、${}^{A}P_x$ の定義を用いて変形すると、

$$ \text{(Ⅱ)式の分子} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{\left(N_x - N_{x_r}\right) {}^{A}P_x}{D_x} \cdot l_x + \frac{\frac{1}{i} \cdot \left(N_{x_e} - N_{x_r}\right) {}^{A}P_{x_e}}{D_{x_e}} \cdot l_{x_e} \quad \cdots\cdot \text{(Ⅲ)式} $$

と表すことができる。

(Ⅰ)式を(Ⅲ)式に代入し、(Ⅱ)式の分子をさらに変形すると、

$$ \text{(Ⅱ)式の分子} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{v^x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{v^{x_e}} $$ となる。

ここで、(Ⅱ)式の分子に含まれる算式において、算式${}^{U}P_{y}D_{y}$の$y=t(x_{e}\leqq t\leqq x_{r}-1)$にかかる係数は、

(Ⅱ)式の分子の第1項は$\dfrac{1}{v^{t}}\sum_{s=0}^{t-x_{e}}v^{s}$、第2項は$\dfrac{1}{v^{t}}\sum_{s=t-x_{e}+1}^{\infty}v^{s}$と表すことができる。したがって、その係数の合

計値は$\dfrac{1}{v^{t}}\sum_{s=0}^{\infty}v^{s}$となる。

これより、(Ⅱ)式の分子$=\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}\dfrac{{}^{U}P_{y}D_{y}}{v^{y}}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}v^{s}=\dfrac{\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}{}^{U}P_{y}l_{y}}{d}$となる。

一方、(Ⅱ)式の分母は開放基金方式の人数現価であるため、

(Ⅱ)式の分母$=\dfrac{\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}l_{y}}{d}$で表すことができる。

これより、(Ⅱ)式$=\dfrac{\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}{}^{U}P_{y}l_{y}}{\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}l_{y}}$ ・・・・ (Ⅳ)式

したがって、(Ⅰ)式、(Ⅱ)式、(Ⅳ)式の結果から、${}^{A}P_{x}$、${}^{OAN}P$は${}^{U}P_{x}$の加重平均で表示できることが示された。また、${}^{U}P_{x}$が単調増加であることから、${}^{U}P_{x}={}^{OAN}P$となる年齢xが存在し$x=x_{1}$であったとすると、

$x_{1}\leqq x\leqq x_{r}-1$において、${}^{OAN}P\leqq{}^{U}P_{x}\leqq{}^{A}P_{x}$が成立することが導かれる。

① (O) ${}^{U}P_{y}D_{y}$	② (K) $N_{x}-N_{x_{r}}$	③ (I) $N_{x_{r}}$	④ (D) $\dfrac{1}{i}$	⑤ (M) $N_{x_{e}}-N_{x_{r}}$
⑥ (Y) $\sum_{y=x}^{x_{r}-1}{}^{U}P_{y}D_{y}$	⑦ (Z) $\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}{}^{U}P_{y}D_{y}$	⑧ (A) $\sum_{s=0}^{t-x_{e}}v^{s}$	⑨ (D) $\sum_{s=t-x_{e}+1}^{\infty}v^{s}$	⑩ (F) $\sum_{s=0}^{\infty}v^{s}$
⑪ (X) $\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}{}^{U}P_{y}l_{y}$	⑫ (B) d	⑬ (T) $\sum_{y=x_{e}}^{x_{r}-1}l_{y}$		
⑭ (F) $x_{1}\leqq x\leqq x_{r}-1$において、${}^{OAN}P\leqq{}^{U}P_{x}\leqq{}^{A}P_{x}$				

問題3．

（1） X，Yをそれぞれx_1歳，x_2歳での新規加入者数とすると、$X:Y=3:2$と$Xe_{x_1}+Ye_{x_2}=L$を解いて、

$$X=\frac{3L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}}$$

x_2歳での新規加入者の責任準備金合計を求める。

$$^{E}P_{x_1}=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{N_{x_1}-N_{x_r}},\ S^a_{x_2}=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}},\ G^a_{x_2}=\frac{N_{x_2}-N_{x_r}}{D_{x_2}},\ Y=\frac{2L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}}$$ より、

$$Y\cdot(S^a_{x_2}-{}^{E}P_{x_1}\cdot G^a_{x_2})=Y\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}\cdot\frac{N_{x_1}-N_{x_r}-N_{x_2}+N_{x_r}}{N_{x_1}-N_{x_r}}=\frac{2L}{3e_{x_1}+2e_{x_2}}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}\cdot\frac{N_{x_1}-N_{x_2}}{N_{x_1}-N_{x_r}}$$

解答は(A)

（2） 教科書 p.77～p.79 と同様の議論により、$^{C}P_{\infty}=\dfrac{S^a+S^p-R}{G^a}$，$R=\dfrac{(S^a+S^p)\cdot L-B\cdot G^a}{L-d\cdot G^a}$へ収束する。

$$^{C}P_{\infty}=\frac{S^a+S^p-\dfrac{(S^a+S^p)\cdot L-B\cdot G^a}{L-d\cdot G^a}}{G^a}$$

$$=\frac{(S^a+S^p)(L-d\cdot G^a)-(S^a+S^p)\cdot L+B\cdot G^a}{G^a(L-d\cdot G^a)}$$

$$=\frac{B-d(S^a+S^p)}{L-d\cdot G^a}$$

S^a+S^p；G^aについてはx_1歳で加入した者とx_2歳で加入した者について分けて計算する。

$$S^a+S^p=\frac{X}{l_{x_1}}\left(\sum_{y=x_1}^{x_r-1}l_y\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_y}+\sum_{z=x_r}^{\omega}l_z\cdot\ddot{a}_z\right)+\frac{Y}{l_{x_2}}\left(\sum_{y=x_2}^{x_r-1}l_y\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_y}+\sum_{z=x_r}^{\omega}l_z\cdot\ddot{a}_z\right)$$

$$=\frac{X}{l_{x_1}}\left(\frac{1}{d}\sum_{z=x_r}^{\omega}l_z-\frac{v}{d}\cdot l_{x_1}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_1}}\right)+\frac{Y}{l_{x_2}}\left(\frac{1}{d}\sum_{z=x_r}^{\omega}l_z-\frac{v}{d}\cdot l_{x_2}\cdot\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{X}{l_{x_1}}+\frac{Y}{l_{x_2}}\right)\sum_{z=x_r}^{\omega}l_z-\frac{v}{d}\cdot\left(\frac{X}{D_{x_1}}+\frac{Y}{D_{x_2}}\right)\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$$

$$=\frac{B}{d}-\frac{v}{d}\cdot\left(\frac{X}{D_{x_1}}+\frac{Y}{D_{x_2}}\right)\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$$

(2 行目は教科書 p.60 (3-20)式から)

$$G^a = \frac{X}{l_{x_1}}\left(\sum_{y=x_1}^{x_r-1} l_y \frac{N_y - N_{x_r}}{D_y}\right) + \frac{Y}{l_{x_2}}\left(\sum_{y=x_2}^{x_r-1} l_y \frac{N_y - N_{x_r}}{D_y}\right)$$

$$= \frac{X}{l_{x_1}}\left(\frac{1}{d}\sum_{z=x_1}^{x_r-1} l_z - \frac{v}{d}\cdot l_{x_1}\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_r}}{D_{x_1}}\right) + \frac{Y}{l_{x_2}}\left(\frac{1}{d}\sum_{z=x_2}^{x_r-1} l_z - \frac{v}{d}\cdot l_{x_2}\cdot\frac{N_{x_2} - N_{x_r}}{D_{x_2}}\right)$$

$$= \frac{X\mathring{e}_{x_1} + Y\mathring{e}_{x_2}}{d} - \frac{v}{d}\cdot X\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_r}}{D_{x_1}} - \frac{v}{d}\cdot Y\cdot\frac{N_{x_2} - N_{x_r}}{D_{x_2}}$$

$$= \frac{L}{d} - \frac{v}{d}\cdot X\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_r}}{D_{x_1}} - \frac{v}{d}\cdot Y\cdot\frac{N_{x_2} - N_{x_r}}{D_{x_2}}$$

（2 行目は教科書 p.60 (3-21)式から）

となるので、

$$^{C}P_{\infty} = \frac{B - d(S^a + S^p)}{L - d\cdot G^a}$$

$$= \frac{v\cdot\left(\frac{X}{D_{x_1}} + \frac{Y}{D_{x_2}}\right)\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{v\cdot X\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_r}}{D_{x_1}} + v\cdot Y\cdot\frac{N_{x_2} - N_{x_r}}{D_{x_2}}}$$

$$= \frac{\left(X\cdot D_{x_2} + Y\cdot D_{x_1}\right)\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{X\cdot D_{x_2}\cdot(N_{x_1} - N_{x_r}) + Y\cdot D_{x_1}\cdot(N_{x_2} - N_{x_r})}$$

$$= \frac{\left(3D_{x_2} + 2D_{x_1}\right)\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{3D_{x_2}\cdot(N_{x_1} - N_{x_r}) + 2D_{x_1}\cdot(N_{x_2} - N_{x_r})}$$

解答は（H）

（3）その年の新規加入者の人数現価と等しいことは以下の通りにしてわかる

$$\frac{PSL}{^{C}P_{\infty} - {}^{E}P_{x_1}} = \frac{Y\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_2}}\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_{x_r}}}{\frac{\left(X\cdot D_{x_2} + Y\cdot D_{x_1}\right)\cdot D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{X\cdot D_{x_2}\cdot(N_{x_1} - N_{x_r}) + Y\cdot D_{x_1}\cdot(N_{x_2} - N_{x_r})} - \frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{N_{x_1} - N_{x_r}}}$$

$$= \frac{\frac{Y}{D_{x_2}}\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_{x_r}}}{\frac{\left(X\cdot D_{x_2} + Y\cdot D_{x_1}\right)}{X\cdot D_{x_2}\cdot(N_{x_1} - N_{x_r}) + Y\cdot D_{x_1}\cdot(N_{x_2} - N_{x_r})} - \frac{1}{N_{x_1} - N_{x_r}}}$$

$$= \frac{Y(N_{x_1} - N_{x_2})}{\frac{\left(X\cdot D_{x_2} + Y\cdot D_{x_1}\right)\cdot D_{x_2}\cdot(N_{x_1} - N_{x_r})}{X\cdot D_{x_2}\cdot(N_{x_1} - N_{x_r}) + Y\cdot D_{x_1}\cdot(N_{x_2} - N_{x_r})} - D_{x_2}}$$

$$= X\cdot\frac{N_{x_1} - N_{x_r}}{D_{x_1}} + Y\cdot\frac{N_{x_2} - N_{x_r}}{D_{x_2}}$$

解答は（C）

以上