生 保 数 理 （ 問 題 ）

問題1． 次の（1）～（10）の各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から1つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（60点）

（1）被保険者の生死に関係なく、第1保険年度末に年金額20を、第2保険年度末に年金額19を支払い、以降毎年1ずつ支払年金額が減少する支払期間20年の期末払累減年金について、予定利率 $i=1.50\%$ のとき、年金現価の値に最も近いものは次のうちどれか。必要であれば、$v^{20}=0.7425$ を用いなさい。

（A） 168	（B） 171	（C） 174	（D） 177	（E） 180
（F） 183	（G） 186	（H） 189	（I） 192	（J） 195

（2）ある定常社会が以下の条件を満たす場合、$\mathring{e}_{20}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

・$\mathring{e}_0=42$、$\mathring{e}_{60}=15$
・20歳未満の死亡者数、20歳以上60歳未満の死亡者数、60歳以上の死亡者数がすべて等しい。
・20歳以上60歳未満の人口が総人口の半分とする。
ただし、この社会への加入は出生のみとし、脱退は死亡のみとする。

（A） 37.0	（B） 37.5	（C） 38.0	（D） 38.5	（E） 39.0
（F） 39.5	（G） 40.0	（H） 40.5	（I） 41.0	（J） 41.5

（3）ある集団が原因A、B、Cによって減少していく3重脱退残存表を考える。各脱退はそれぞれ独立に発生し、一年を通じて一様に発生するものとする。
ここで、C脱退の絶対脱退率を2倍にし、他の脱退の絶対脱退率は変えない新たな3重脱退残存表を作成した。
もとの脱退残存表において、$q_x^A=0.04$、$q_x^B=0.05$、$q_x^C=0.07$ であるとき、新たな脱退残存表における x 歳の1年後の残存率の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A） 0.758	（B） 0.760	（C） 0.762	（D） 0.764	（E） 0.766
（F） 0.768	（G） 0.770	（H） 0.772	（I） 0.774	（J） 0.776

（4）死力が年齢に関係なく定数 $\mu(>0)$ であるとき、$(IA)_x$ を表す式は次のうちどれか。

（A） $\dfrac{\delta}{\delta+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-(\delta+\mu)}}$	（B） $\dfrac{\mu}{\delta+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-(\delta+\mu)}}$	（C） $\dfrac{v}{\delta+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-(\delta+\mu)}}$
（D） $\dfrac{\delta}{\delta+\mu}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-2\cdot(\delta+\mu)}}$	（E） $\dfrac{v\cdot(1-e^{-\mu})}{1-e^{-2\cdot(\delta+\mu)}}$	（F） $\dfrac{d\cdot e^{-\mu}}{1-e^{-2\cdot(\delta+\mu)}}$
（G） $\dfrac{v\cdot(1-e^{-\mu})}{\{1-e^{-(\delta+\mu)}\}^2}$	（H） $\dfrac{d\cdot e^{-\mu}}{\{1-e^{-(\delta+\mu)}\}^2}$	（I） $\dfrac{v\cdot\mu}{\{1-e^{-(\delta+\mu)}\}^2}$
（J） $\dfrac{\mu}{(\delta+\mu)^2}$		

（5）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険期間 n 年の次の給付を行う保険について、その年払平準純保険料が、n 年後に積立金が 1 となる予定利率 $h\ (\neq 0)$ の定期積金の年払保険料に等しいことが分かっている。このとき、h を表す式は次のうちどれか。

【給付内容】
・満期時に被保険者が生存している場合、満期保険金 1 を支払う。
・被保険者が災害で死亡した場合、死亡した年度末に、その年度末の平準純保険料式責任準備金の $(1+k)$ 倍を支払う。
・被保険者が災害以外で死亡した場合、死亡した年度末に、その年度末の平準純保険料式責任準備金を支払う。

ここで、この保険の予定利率を i とし、災害による死亡率は年齢によらず q' とする。

（A）$\dfrac{i+q'\cdot k}{1+q'\cdot k}$　（B）$\dfrac{i-q'\cdot k}{1-q'\cdot k}$　（C）$\dfrac{i+q'\cdot k}{1-q'\cdot k}$　（D）$\dfrac{i-q'\cdot k}{1+q'\cdot k}$

（E）$\dfrac{i}{1-q'\cdot k}$　（F）$\dfrac{i}{1+q'\cdot k}$　（G）$\dfrac{i+q'\cdot(1+k)}{1+q'\cdot(1+k)}$　（H）$\dfrac{i-q'\cdot(1+k)}{1-q'\cdot(1+k)}$

（I）$\dfrac{i+q'\cdot(1+k)}{1-q'\cdot(1+k)}$　（J）$\dfrac{i-q'\cdot(1+k)}{1+q'\cdot(1+k)}$

（6）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年の養老保険において、年払平準純保険料を $P_{x:\overline{n|}}$、第 t 保険年度末平準純保険料式責任準備金を ${}_tV_{x:\overline{n|}}$ とし、各年齢の予定死亡率を $(1+k)$ 倍（$(1+k)$ 倍したどの年齢の予定死亡率も 1 を下回る）して計算した年払平準純保険料を $P'_{x:\overline{n|}}$、第 t 保険年度末平準純保険料式責任準備金を ${}_tV'_{x:\overline{n|}}$ とした場合、下記の等式が成り立つ。

$$\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)\cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = k\cdot\sum_{t=0}^{n-1}\boxed{\quad ② \quad}\cdot\left(1-\boxed{\quad ③ \quad}\right)$$

このとき、①～③の空欄に当てはまる記号の組み合わせとして正しいものは次のうちどれか。
なお、①＝a、②＝b、③＝c の場合、(a,b,c) と記載している。

（A）$\left(P_{x:\overline{n|}}-P'_{x:\overline{n|}},\ v^{t}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_tV_{x:\overline{n|}}\right)$　（B）$\left(P_{x:\overline{n|}}-P'_{x:\overline{n|}},\ v^{t}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_tV'_{x:\overline{n|}}\right)$

（C）$\left(P_{x:\overline{n|}}-P'_{x:\overline{n|}},\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_tV'_{x:\overline{n|}}\right)$　（D）$\left(P_{x:\overline{n|}}-P'_{x:\overline{n|}},\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}\right)$

（E）$\left(P_{x:\overline{n|}}-P'_{x:\overline{n|}},\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}}\right)$　（F）$\left(P'_{x:\overline{n|}}-P_{x:\overline{n|}},\ v^{t}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_tV_{x:\overline{n|}}\right)$

（G）$\left(P'_{x:\overline{n|}}-P_{x:\overline{n|}},\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_tV_{x:\overline{n|}}\right)$　（H）$\left(P'_{x:\overline{n|}}-P_{x:\overline{n|}},\ v^{t}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_tV'_{x:\overline{n|}}\right)$

（I）$\left(P'_{x:\overline{n|}}-P_{x:\overline{n|}},\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}\right)$　（J）$\left(P'_{x:\overline{n|}}-P_{x:\overline{n|}},\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x,\ {}_{t+1}V'_{x:\overline{n|}}\right)$

（7）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年 $(n \geqq 3)$ の養老保険で、予定事業費は以下のとおりとする。

予定新契約費	・新契約時にのみ、営業保険料 1 に対し 1.00 ・第 2 回目の保険料払込時に、営業保険料 1 に対し 0.10 ・第 3 回目以降の保険料払込のつど、営業保険料 1 に対し 0.05
予定維持費	・毎保険年度始に、保険金額 1 に対し 0.002 ・死亡保険金支払時に、保険金額 1 に対し 0.010 ・満期時の生存保険金支払時に、保険金額 1 に対し 0.005
予定集金費	・保険料払込のつど、営業保険料 1 に対し 0.03

このとき、この保険の年払平準営業保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

必要であれば、割引率 $d = 0.02$ 、$\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|} = 15.07$ 、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 15.40$ 、$\ddot{a}_{x:\overline{n+1}|} = 15.70$ 、$\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = 15.00$ を用いなさい。

（A） 0.0551　（B） 0.0552　（C） 0.0553　（D） 0.0554　（E） 0.0555
（F） 0.0556　（G） 0.0557　（H） 0.0558　（I） 0.0559　（J） 0.0560

（8）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年 $(n \geqq 2)$ の養老保険において、全期チルメル式で責任準備金を積み立てる。第 t 保険年度末の全期チルメル式責任準備金を ${}_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|}$ で表し、チルメル割合 α は ${}_1V^{[z]}_{x:\overline{n}|} = 0$ となるよう定めるものとする。

ここで $q_x = q_{x+1} = q_{x+2} = \cdots = q_{x+n-1}$ が成り立つとき、上記のチルメル割合 α を用いると、$2 \leqq t \leqq n$ において ${}_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\alpha}{\boxed{}}$ と表すことができる。

$\boxed{}$ に該当する式は次のうちどれか。

（A） $\ddot{a}_{x+1:\overline{t-1}|}$　（B） $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$　（C） $A_{x+1:\overline{t-1}|}$　（D） $A_{x+1:\overset{1}{\overline{t-1}|}}$　（E） $A_{x+t:\overline{n-t}|}$
（F） $A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}$　（G） $P_{x+1:\overline{t-1}|}$　（H） $P_{x+1:\overset{1}{\overline{t-1}|}}$　（I） $P_{x+t:\overline{n-t}|}$　（J） $P_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}$

（9）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年の養老保険において、t 年経過時点$(t>0)$で、保険期間 m 年$(t<m<n)$に変更する場合の変更後保険料の算出方法として、以下の 2 とおりの方法を考える。

方法 1	x 歳加入、保険期間 m 年（注）の保険料に、変更時点における責任準備金の差額を変更以降満期までの間平準化して加算した保険料とする方法
方法 2	変更の時点で $x+t$ 歳加入、保険期間 $m-t$ 年（注）に新規に加入するものとした保険料から、元の契約の変更時点における責任準備金を変更以降満期までの間平準化して減算した保険料とする方法

（注）保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の養老保険を指す。

また、予定事業費は以下のとおりとする。

予定新契約費	新契約時にのみ、保険金額 1 に対し α
予定維持費	毎保険年度始に、保険金額 1 に対し γ
予定集金費	保険料払込のつど、営業保険料 1 に対し β

このとき、変更後の年払平準営業保険料の差額（方法1－方法2）を表す式は次のうちどれか。
なお、平準化して加減する部分については、予定事業費を考慮しないものとする。
ここで、「保険料」とは年払平準営業保険料、「責任準備金」とは平準純保険料式責任準備金とする。また、保険年度末に保険期間を変更するものとする。

（A）$\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$　　（B）$-\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$

（C）$\dfrac{\alpha-\beta}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$　　（D）$-\dfrac{\alpha-\beta}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$

（E）$\dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$　　（F）$-\dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$

（G）$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$　　（H）$-\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$

（I）$\dfrac{1-\alpha-\gamma}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$　　（J）$-\dfrac{1-\alpha-\gamma}{1-\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)$

（１０）60 歳の親と 30 歳の子を被保険者とし、次の給付を行う親子連生保険の一時払純保険料を表す式は次のうちどれか。なお、付加保険料は一時払純保険料の 6.5%とする。

【給付内容】

・親の死亡前または死亡後 5 年以内に子が死亡すれば、保険金 1 を即時に支払って契約は消滅する。

・親の死亡から 5 年経過時に子が生存していれば、その時点で一時払営業保険料を利息を付けないで返還して契約は消滅する。

（A）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}+\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1+1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（B）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}+\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（C）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}-\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（D）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}-\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1+1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（E）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}+1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（F）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}-\frac{\bar{C}_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（G）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}+\frac{\bar{C}_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（H）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}+1.065\cdot\frac{\bar{C}_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1-1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（I）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}-1.065\cdot\frac{\bar{C}_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1+1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

（J）$$\frac{\bar{A}_{\overset{1}{30}:\overline{5|}}+1.065\cdot\frac{\bar{C}_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1+1.065\cdot\frac{D_{35}}{D_{30}}\cdot\bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

問題2． 次の（1）、（2）の各問について答えなさい。（１２点）

（1）介護不要者である x 歳の被保険者が次の給付を行う保険に加入する場合を考える。ここで、$x<65$ とする。

【給付内容】

・65 歳までに要介護者になれば、その年度末から毎年度末に年額 1 の終身年金を支払う。

・要介護者にならずに 65 歳に到達すれば、その時点から毎年度始に年額 1 の終身年金を支払う。（65 歳以降は要介護者か否かを問わない。）

・被保険者が死亡した場合、死亡保険金 3 を即時に支払う。

保険料は被保険者が介護不要者である限り、65 歳到達前まで毎年度始に払い込むものとした場合、年払平準純保険料は次の算式で表される。なお、要介護者でない者は介護不要者であることとし、要介護者が回復して介護不要者に復帰することはないものとする。

$$\frac{1}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x}|}}\cdot\left\{\boxed{\text{①}}+\frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_{x}}\cdot\boxed{\text{②}}+3\cdot\left(\frac{\boxed{\text{③}}}{D^{aa}_{x}}-\frac{\boxed{\text{④}}}{D^{aa}_{x}}\cdot\frac{\boxed{\text{⑤}}}{\boxed{\text{⑥}}}\right)\right\}$$

このとき、①～⑥の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

(A) $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x}\mid}$	(B) $\ddot{a}^{a}_{x:\overline{65-x}\mid}$	(C) $a^{ai}_{x:\overline{65}\mid}$	(D) $a^{ai}_{x:\overline{65-x}\mid}$	(E) $a_x^{a(i:\overline{65}\mid)}$
(F) $a_x^{a(i:\overline{65-x}\mid)}$	(G) $\ddot{a}^{aa}_{65}$	(H) $\ddot{a}^{a}_{65}$	(I) a^{ai}_{x}	(J) a^{ai}_{65}
(K) D_x	(L) D^{aa}_x	(M) D^{ii}_x	(N) D^{i}_x	(O) $\overline{M}_x$
(P) $\overline{M}^{aa}_x$	(Q) $\overline{M}^{ii}_x$	(R) $\overline{M}^{i}_x$	(S) N_x	(T) N^{aa}_x
(U) N^{ii}_x	(V) N^{i}_x			

（2）就業者である x 歳の被保険者が次の給付を行う保険期間 n 年の就業不能保険に加入する場合を考える。

【給付内容】
- 被保険者が満期まで就業不能にならずに生存した場合、満期保険金 S を支払う。
- 被保険者が保険期間中に就業不能にならずに死亡した場合、その年度末に就業者の保険年度末平準純保険料式責任準備金を支払う。
- 被保険者が保険期間中に就業不能となった場合、その年度末に被保険者の生死にかかわらず就業者の保険年度末平準純保険料式責任準備金を支払う。
- 被保険者が保険期間中に就業不能となった場合、その年度末から満期まで毎年度末（満期時を含む）に生存している限り、年金1を支払う。

保険料は年払とし、保険期間中に被保険者が就業している限り、毎年度始に払い込むものとする。なお、就業不能でない者は就業者であることとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

このとき、次の①～⑥の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

この保険の年払平準純保険料 P を責任準備金の再帰式を用いて求める。
就業者の第 t 保険年度末平準純保険料式責任準備金を ${}_tV^{aa}$ とすると、責任準備金の再帰式は

$$l_{x+t}^{aa}\cdot{}_tV^{aa}+l_{x+t}^{aa}\cdot P=v\cdot{}_{t+1}V^{aa}\cdot\left(l_{x+t+1}^{aa}+\boxed{①}+\boxed{②}\right)+v\cdot\left(\boxed{③}-\boxed{④}\right)\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}$$

となる。両辺を l_{x+t}^{aa} で割って整理すると

$${}_tV^{aa}+P=v\cdot{}_{t+1}V^{aa}+v\cdot\boxed{⑤}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}$$

となる。この両辺に v^t を乗じたものを $t=0,1,2,\cdots,n-1$ について辺々加えて整理すると、

$${}_0V^{aa}+P\cdot\boxed{⑥}=v^n\cdot{}_nV^{aa}+\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot\boxed{⑤}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}$$

となる。ここで、${}_0V^{aa}=0$、${}_nV^{aa}=S$ であるから、

$$P=\frac{v^n\cdot S+\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot\boxed{⑤}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}}{\boxed{⑥}}$$

となる。

(A)	l_{x+t}^{ii}	(B)	l_{x+t+1}^{ii}	(C)	l_{x+t}^{i}	(D)	l_{x+t+1}^{i}	(E)	d_{x+t}^{aa}
(F)	d_{x+t+1}^{aa}	(G)	d_{x+t}^{ii}	(H)	d_{x+t+1}^{ii}	(I)	i_{x+t}	(J)	i_{x+t+1}
(K)	p_{x+t}^{i}	(L)	p_{x+t+1}^{i}	(M)	p_{x+t}^{ai}	(N)	p_{x+t+1}^{ai}	(O)	$l_{x+t}^{ii}\cdot p_{x+t}^{i}$
(P)	$l_{x+t}^{ii}\cdot q_{x+t}^{i}$	(Q)	$\ddot{a}_{\overline{n}|}$	(R)	$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$	(S)	$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}$	(T)	$a_{x:\overline{n}|}^{ai}$

問題3．次の（1）、（2）の各問について答えなさい。（１４点）

（1）x 歳加入、保険料連続払込、保険金即時払、保険金額 1 の終身保険について、Thiele の微分方程式を導く。$P_x^{(\infty)}$ は連続払保険料、${}_tV_x^{(\infty)}$ は経過 t における責任準備金、予定利率 i に対して δ は利力、μ_x は x 歳の死力とする。付加保険料は考慮しない。

このとき、次の①～⑨の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

まず、1 年を微小な単位保険期間 $\frac{1}{k}$ に分けて、保険料は各単位保険期間の期始に被保険者が生存している限り払い込み、保険金は単位保険期間の期末で支払う終身保険を考える。t をある単位保険期間の期始とすると、区間 $\left[t, t+\frac{1}{k}\right]$ での責任準備金の再帰式は次のようになる。ただし、$P_x^{(k)}$ は年 k 回払込の分割払真保険料、${}_tV_x^{(k)}$ は経過 t における平準純保険料式責任準備金、予定利率 i に対して $i^{(k)}$ は転化回数 k の名称利率とする。

$$l_{x+t}\cdot\left({}_tV_x^{(k)}+\boxed{①}\right)\cdot\left(1+\boxed{②}\right)=\left(l_{x+t}-\boxed{③}\right)+\boxed{③}\cdot{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}$$

両辺を l_{x+t} で割って整理すると

$${}_tV_x^{(k)}+\boxed{①}+\boxed{②}\cdot{}_tV_x^{(k)}+\boxed{④}\cdot P_x^{(k)}=\frac{l_{x+t}-\boxed{③}}{l_{x+t}}+\frac{\boxed{③}}{l_{x+t}}\cdot{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}$$

$${}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}-{}_tV_x^{(k)}=\boxed{①}+\boxed{②}\cdot{}_tV_x^{(k)}+\boxed{④}\cdot P_x^{(k)}-\frac{l_{x+t}-\boxed{③}}{l_{x+t}}\cdot\left(1-{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}\right)$$

両辺を $\frac{1}{k}$ で割ると

$$\frac{{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}-{}_tV_x^{(k)}}{\frac{1}{k}}=\boxed{⑤}+\boxed{⑥}\cdot{}_tV_x^{(k)}+\boxed{②}\cdot P_x^{(k)}-\frac{l_{x+t}-\boxed{③}}{\frac{1}{k}\cdot l_{x+t}}\cdot\left(1-{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}\right)$$

ここで $k\to\infty$ とすると $\frac{1}{k}\to 0$ となることから、両辺の極限をとると次の式となる。

$$\frac{d}{dt}{}_tV_x^{(\infty)}=\boxed{⑦}+\boxed{⑧}\cdot{}_tV_x^{(\infty)}-\boxed{⑨}\cdot\left(1-{}_tV_x^{(\infty)}\right)$$

これは、保険料連続払込、保険金即時払の終身保険における Thiele の微分方程式である。

(A) i	(B) $i^{(k)}$	(C) $\frac{i^{(k)}}{k}$	(D) $\frac{i^{(k)}}{k^2}$	(E) δ
(F) l_{x+t}	(G) $l_{x+t+\frac{1}{k}}$	(H) μ_x	(I) μ_{x+t}	(J) $\mu_{x+t+\frac{1}{k}}$
(K) $P_x^{(k)}$	(L) $\frac{P_x^{(k)}}{k}$	(M) $\frac{P_x^{(k)}}{k^2}$	(N) $P_x^{(\infty)}$	(O) $A_x^{(k)}$
(P) $A_{x+t}^{(k)}$	(Q) $A_{x+t+\frac{1}{k}}^{(k)}$	(R) $\ddot{a}_x^{(k)}$	(S) $\ddot{a}_{x+t}^{(k)}$	(T) $\ddot{a}_{x+t+\frac{1}{k}}^{(k)}$

（2）年k回期末払のn年有期完全年金$\overset{\circ}{a}{}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$と連続払の$n$年有期年金$\bar{a}_{x:\overline{n}|}$との間に、よい近似により、$i^{(k)}\cdot\overset{\circ}{a}{}^{(k)}_{x:\overline{n}|}\fallingdotseq\delta\cdot\bar{a}_{x:\overline{n}|}$が成り立つことを確認したい。予定利率$i$に対して$i^{(k)}$は転化回数$k$の名称利率、$\delta$は利力、$\mu_x$は$x$歳の死力とする。

このとき、次の①～⑦の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から1つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

期末払生命年金において、期中の死亡に対しては前期末から死亡までの端数期間に比例した額を死亡直後に追加して支払う年金を完全年金といい$\overset{\circ}{a}$で表す。例えば、年k回期末払のn年有期完全年金は

$$\overset{\circ}{a}{}^{(k)}_{x:\overline{n}|}=a^{(k)}_{x:\overline{n}|}+\alpha \quad 、\alpha=\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}}s\cdot v^{\frac{t}{k}+s}\cdot{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds$$ と書ける。

いま、$a^{(k)}_{x:\overline{n}|}=\displaystyle\sum_{t=0}^{nk-1}\boxed{①}\cdot\left({}_{\frac{t}{k}}p_x-{}_{\frac{t+1}{k}}p_x\right)+\boxed{②}$ であるから、

$$\overset{\circ}{a}{}^{(k)}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{nk-1}\boxed{①}\cdot\left({}_{\frac{t}{k}}p_x-{}_{\frac{t+1}{k}}p_x\right)+\boxed{②}+\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}}s\cdot v^{\frac{t}{k}+s}\cdot{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds$$ （ただし、$a^{(k)}_{\overline{0}|}=0$とする）

ここで、${}_{\frac{t}{k}}p_x-{}_{\frac{t+1}{k}}p_x=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{k}}{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds$ であるから

$$\overset{\circ}{a}{}^{(k)}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}}\left(\boxed{①}+s\cdot v^{\frac{t}{k}+s}\right)\cdot{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds+\boxed{②}\cdots\text{(i)}$$

さて、$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\displaystyle\int_0^n\boxed{③}\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\,dt+\boxed{④}$ より

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}}\boxed{⑤}\cdot{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds+\boxed{④}\cdots\text{(ii)}$$

$i^{(k)}\cdot a^{(k)}_{\overline{n}|}=\delta\cdot\bar{a}_{\overline{n}|}$ より、$\bar{a}_{\overline{n}|}=\dfrac{i^{(k)}}{\delta}\cdot a^{(k)}_{\overline{n}|}\cdots\text{(iii)}$

また、$\bar{a}_{\overline{n}|}=\dfrac{1-v^n}{\delta}$ より、$\boxed{⑤}=\boxed{⑥}+\dfrac{v^{\frac{t}{k}}-v^{\frac{t}{k}+s}}{\delta}=\boxed{⑦}\cdot\boxed{①}+\dfrac{v^{\frac{t}{k}+s}}{\delta}\cdot\left\{(1+i)^s-1\right\}$

$i^{(k)}\fallingdotseq i$ とすると、$(1+i)^s-1\fallingdotseq s\cdot i\fallingdotseq s\cdot i^{(k)}$ より、$\boxed{⑤}\fallingdotseq\boxed{⑦}\cdot\left(\boxed{①}+s\cdot v^{\frac{t}{k}+s}\right)\cdots\text{(iv)}$

以上より、(iii)、(iv)を(ii)に代入し、(i)と比較すれば、$i^{(k)}\cdot\overset{\circ}{a}{}^{(k)}_{x:\overline{n}|}\fallingdotseq\delta\cdot\bar{a}_{x:\overline{n}|}$が成り立つ。

(A) $a_{\overline{t}|}$	(B) $a^{(k)}_{\overline{t}|}$	(C) $\bar{a}_{\overline{t}|}$	(D) $a_{\overline{t+1}|}$	(E) $a^{(k)}_{\overline{t+1}|}$
(F) $\bar{a}_{\overline{t+1}|}$	(G) $a_{\overline{n}|}$	(H) $a^{(k)}_{\overline{n}|}$	(I) $\bar{a}_{\overline{n}|}$	(J) $a_{\overline{\frac{t}{k}}|}$
(K) $a^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}}|}$	(L) $\bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}}|}$	(M) $a_{\overline{\frac{t+1}{k}}|}$	(N) $a^{(k)}_{\overline{\frac{t+1}{k}}|}$	(O) $\bar{a}_{\overline{\frac{t+1}{k}}|}$
(P) $a_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}$	(Q) $a^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}$	(R) $\bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}$	(S) $a_{\overline{n}|}\cdot{}_np_x$	(T) $a^{(k)}_{\overline{n}|}\cdot{}_np_x$
(U) $\bar{a}_{\overline{n}|}\cdot{}_np_x$	(V) $i^{(k)}$	(W) δ	(X) $\dfrac{i^{(k)}}{\delta}$	(Y) $\dfrac{\delta}{i^{(k)}}$

問題４． 夫x歳、妻y歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険期間n年の次の給付を行う夫婦連生保険を考える。

【給付内容】

・第t保険年度において、夫が妻の生存中に死亡した場合、保険金$\frac{t}{n}$を支払い、その後の保険料の払込を免除する。
・妻が死亡した場合、夫の生死にかかわらず保険金 1 を支払い、契約は消滅する。
・妻が満期まで生存した場合、夫の生死にかかわらず満期保険金 1 を支払う。

ただし、予定死亡率は夫婦とも同一の生命表に従うものとし、付加保険料は考慮しない。
この保険に関する次の（1）～（3）の各問について、①～⑭の空欄に当てはまる最も適切なものを 11 ページの選択肢の中から 1 つ選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。
（１４点）

（1）この保険の年払平準純保険料Pおよび保険料払込免除後における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_t\tilde{V}$を表す式はそれぞれ、

$$P=\frac{\frac{1}{n}\cdot\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\cdot v^{t+1}\cdot{}_tp_{xy}\cdot\boxed{①}+A_{y:\overline{n}|}}{\boxed{②}}\quad、\ {}_t\tilde{V}=\boxed{③}$$

となる。

（2）夫婦とも生存の場合における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_tV$を過去法で表した場合の式を次のとおり求める。

契約時から第t保険年度末までの収支を、契約時点における現価で考えると、

$$（収入現価）=P\cdot\boxed{④}\quad、（支出現価）=\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{⑤}+\boxed{⑥}$$

となる。
また、夫婦とも生存の場合における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_tV$と保険料払込免除後における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_t\tilde{V}$の確率加重平均を契約時点まで割り引いた額は、契約時から第t保険年度末までの収支の契約時点における現価と等しくなることから、

$$v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot{}_tV+v^t\cdot\left(1-\boxed{⑦}\right)\cdot\boxed{⑧}\cdot{}_t\tilde{V}=P\cdot\boxed{④}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{⑤}-\boxed{⑥}$$

が成り立つ。したがって、

$$v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\left({}_tV-{}_t\tilde{V}\right)=P\cdot\boxed{④}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{⑤}-\left(\boxed{⑥}+v^t\cdot\boxed{⑧}\cdot{}_t\tilde{V}\right)$$

となる。ここで、$\boxed{⑥}+v^t\cdot\boxed{⑧}\cdot{}_t\tilde{V}=\boxed{⑨}$より、

$${}_tV=\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\left\{P\cdot\boxed{④}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{⑤}-\boxed{⑨}\right\}+{}_t\tilde{V}$$

と表せる。

（3）夫婦とも生存の場合における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_tV$を将来法で表した上で、（2）で求めた過去法による式と一致することを、$1 \leqq t \leqq n-1$において、次のとおり証明する。

夫婦とも生存の場合における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_tV$を将来法で表すと、

$$ {}_tV = \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} (t+s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{x+t,y+t} \cdot \boxed{\text{⑩}} + \boxed{\text{⑪}} - P \cdot \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}} $$

となる。

次に、将来法の責任準備金と過去法の責任準備金が等しいことを証明する。

まず、$\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1} (s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{xy} \cdot \boxed{\text{⑤}}$

$$ = \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{xy} \cdot \boxed{\text{⑤}} - v^t \cdot \boxed{\text{⑫}} \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} (t+s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{x+t,y+t} \cdot \boxed{\text{⑬}} $$

また、$\dfrac{1}{v^t \cdot {}_t p_{xy}} \cdot \boxed{\text{④}} = \dfrac{1}{v^t \cdot {}_t p_{xy}} \cdot \boxed{\text{⑭}} - \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$、${}_t\tilde{V} = \boxed{\text{③}}$ に注意すれば、

$$ \text{過去法の } {}_tV = \frac{1}{v^t \cdot {}_t p_{xy}} \cdot \left\{ P \cdot \boxed{\text{④}} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{t-1} (s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{xy} \cdot \boxed{\text{⑤}} - \boxed{\text{⑨}} \right\} + {}_t\tilde{V} $$

$$ = \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-t-1} (t+s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{x+t,y+t} \cdot \boxed{\text{⑬}} + \boxed{\text{③}} - P \cdot \ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}} $$

$$ + \frac{1}{v^t \cdot {}_t p_{xy}} \cdot \left\{ P \cdot \boxed{\text{⑭}} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \cdot v^{s+1} \cdot {}_s p_{xy} \cdot \boxed{\text{⑤}} - \boxed{\text{⑨}} \right\} $$

となる。ここで、（1）より最後の等式の第 4 項の｛　｝内は 0 となることから、過去法の${}_tV =$ 将来法の${}_tV$が示される。

【選択肢】

（A） $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$	（B） $\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$	（C） $\ddot{a}_{x:\overline{t|}}$	（D） $\ddot{a}_{xy:\overline{t|}}$	（E） $A_{y:\overline{n|}}$
（F） $A_{xy:\overline{n|}}$	（G） $A_{y:\overline{t|}}$	（H） $A^{\ 1}_{y:\overline{t|}}$	（I） $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$	（J） $\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$
（K） $A_{y+t:\overline{n-t|}}$	（L） $A^{\ 1}_{y+t:\overline{n-t|}}$	（M） $A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$	（N） $A_{x+t,\overset{1}{y+t}:\overline{n-t|}}$	（O） ${}_t p_x$
（P） ${}_t p_y$	（Q） ${}_t p_{xy}$	（R） p_{x+t}	（S） p_{y+t}	（T） $p_{x+t,y+t}$
（U） ${}_{t\mid}q_{xy}$	（V） $q_{\overset{1}{x+t},y+t}$	（W） ${}_{s\mid}q_{xy}$	（X） $q_{\overset{1}{x+s},y+s}$	（Y） ${}_{t+s\mid}q^{1}_{xy}$
（Z） $q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}$				

以　上

生 保 数 理 （ 解 答 例 ）

問題１．

（１）	**(H)**	（２）	**(E)**
（３）	**(I)**	（４）	**(G)**
（５）	**(D)**	（６）	**(J)**
（７）	**(C)**	（８）	**(H)**
（９）	**(F)**	（１０）	**(B)**

（１）題意の年金現価を$(Da)_{\overline{20}|}$とすると、

$$(Da)_{\overline{20}|} = 20v + 19v^2 + 18v^3 + \cdots + v^{20} \cdots (\mathrm{i})$$

$$v \cdot (Da)_{\overline{20}|} = 20v^2 + 19v^3 + 18v^4 + \cdots + v^{21} \cdots (\mathrm{ii})$$

$(\mathrm{i}) - (\mathrm{ii})$より

$$(1-v)\cdot(Da)_{\overline{20}|} = 20v - \left(v^2 + v^3 + \cdots + v^{21}\right)$$

$$= 20v - v^2 \cdot \left(1 + v + v^2 + \cdots + v^{19}\right)$$

$$(Da)_{\overline{20}|} = \frac{20v}{1-v} - \frac{v^2 \cdot \left(1-v^{20}\right)}{(1-v)^2}$$

$$= \frac{20}{i} - \frac{1-v^{20}}{i^2}$$

$i = 0.015$、$v^{20} = 0.7425$より

$$(Da)_{\overline{20}|} = 188.88\cdots$$

解答：**(H)**

（２）ある観察年度における死亡者数を$3a$とする。

20 歳未満の死亡者数、20 歳以上 60 歳未満の死亡者数、60 歳以上の死亡者数がすべて等しいため、

$l_0 = 3a$、$l_{20} = 2a$、$l_{60} = a$

また、$\overset{\circ}{e}_0 = \dfrac{T_0}{l_0} = 42$、$\overset{\circ}{e}_{60} = \dfrac{T_{60}}{l_{60}} = 15$より、

$T_0 = 42 \times 3a = 126a$、$T_{60} = 15a$

最後に、20 歳以上 60 歳未満の人口が総人口の半分なので、

$$0.5T_0 = T_{20} - T_{60}$$

式変形すると、

$$T_{20} = 0.5T_0 + T_{60}$$

$$= 0.5 \times 126a + 15a = 78a$$

よって、

$$\overset{\circ}{e}_{20} = \frac{T_{20}}{l_{20}} = \frac{78a}{2a} = 39$$

解答：**(E)**

（3）もとの脱退残存表において、各脱退の絶対脱退率を求める。

$$q_x^{A*}=\frac{q_x^A}{1-\frac{1}{2}q_x^B-\frac{1}{2}q_x^C}=\frac{0.04}{1-\frac{1}{2}\times 0.05-\frac{1}{2}\times 0.07}=0.042553\cdots$$

同様に

$$q_x^{B*}=\frac{0.05}{1-\frac{1}{2}\times 0.04-\frac{1}{2}\times 0.07}=0.052910\cdots、\quad q_x^{C*}=\frac{0.07}{1-\frac{1}{2}\times 0.04-\frac{1}{2}\times 0.05}=0.073298\cdots$$

各脱退は独立に発生するので、q_x^{C*}のみ2倍にした新たな脱退残存表におけるx歳の1年後の残存率は次の通り。

$$\begin{aligned}p_x^* &= \left(1-q_x^{A*}\right)\cdot\left(1-q_x^{B*}\right)\cdot\left(1-2q_x^{C*}\right)\\ &= (1-0.04255)\cdot(1-0.05291)\cdot(1-2\times 0.07330)\\ &= 0.77385\cdots\end{aligned}$$

解答：（I）

（4）$(IA)_x=\sum_{t=0}^{\infty}v^{t+1}\cdot(t+1)\cdot{}_{t|}q_x$ であり、

$${}_{t|}q_x=\int_t^{t+1}{}_sp_x\cdot\mu_{x+s}ds=\int_t^{t+1}e^{-\int_0^s\mu du}\cdot\mu ds=\mu\cdot\int_t^{t+1}e^{-\mu\cdot s}ds=(1-e^{-\mu})\cdot e^{-\mu\cdot t}$$

である。

よって、

$$(IA)_x=v\cdot(1-e^{-\mu})\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\cdot e^{-(\delta+\mu)\cdot t}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\cdot e^{-(\delta+\mu)\cdot t} &= 1+2\cdot e^{-(\delta+\mu)}+3\cdot e^{-2\cdot(\delta+\mu)}+\cdots\\ e^{-(\delta+\mu)}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\cdot e^{-(\delta+\mu)\cdot t} &= \phantom{1+{}}1\cdot e^{-(\delta+\mu)}+2\cdot e^{-2\cdot(\delta+\mu)}+\cdots\\ \{1-e^{-(\delta+\mu)}\}\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\cdot e^{-(\delta+\mu)\cdot t} &= 1+e^{-(\delta+\mu)}+e^{-2\cdot(\delta+\mu)}+\cdots\end{aligned}$$

より、$\sum_{t=0}^{\infty}(t+1)\cdot e^{-(\delta+\mu)\cdot t}=\frac{1}{\{1-e^{-(\delta+\mu)}\}^2}$ であることから、

$$(IA)_x=\frac{v\cdot(1-e^{-\mu})}{\{1-e^{-(\delta+\mu)}\}^2}$$

解答：（G）

（5）年払平準純保険料をP、第t保険年度末平準純保険料式責任準備金を${}_tV$とする。給付内容を表す再帰式は、

$${}_tV+P-v\cdot\left(q_{x+t}-q'\right)\cdot{}_{t+1}V-v\cdot q'\cdot(1+k)\cdot{}_{t+1}V=v\cdot\left(1-q_{x+t}\right)\cdot{}_{t+1}V$$

となる。これを整理すれば、

$${}_tV+P=v\cdot\left(1+q'\cdot k\right)\cdot{}_{t+1}V$$

ここで、$j=v\cdot\left(1+q'\cdot k\right)$とおくと、

$${}_tV+P=j\cdot{}_{t+1}V$$

両辺にj^tを乗じて、$t=0,1,\cdots,n-1$について辺々加えて整理すれば、

$${}_0V+\left(1+j+\cdots+j^{n-1}\right)\cdot P=j^n\cdot{}_nV$$

となる。題意より、${}_0V=0$、${}_nV=1$なので、

$$j^n=\left(1+j+\cdots+j^{n-1}\right)\cdot P$$

よって、$j\neq 1$の場合、$P=\dfrac{j^n}{\dfrac{1-j^n}{1-j}}=\dfrac{j^n\cdot(1-j)}{1-j^n}$ となる。

一方、n年後に積立金が1となる予定利率$h(\neq 0)$の定期積金の年払保険料は、

$$\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}=\frac{1}{\dfrac{(1+h)\cdot\{(1+h)^n-1\}}{h}}=\frac{\dfrac{1}{(1+h)^n}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+h}\right)}{1-\dfrac{1}{(1+h)^n}}$$

であることから、$j=\dfrac{1}{1+h}$

したがって、$j=v\cdot(1+q'\cdot k)=\dfrac{1}{1+h}$より、$h=\dfrac{1+i}{1+q'\cdot k}-1=\dfrac{i-q'\cdot k}{1+q'\cdot k}$

なお、$j=1$と仮定した場合、$P=\dfrac{1}{n}$となる。これは、n年後に積立金が1となる予定利率0の定期積金の年払保険料$\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}=\dfrac{1}{n}$に等しい。これは、$h\neq 0$という前提に矛盾する、したがって、$j\neq 1$が成り立つ。

解答：(D)

(6) 養老保険の責任準備金の再帰式より

$$\left({}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|}\right)\cdot(1+i)=q_{x+t}+p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}\cdots(\mathrm{i})$$

$$\left({}_tV'_{x:\overline{n}|}+P'_{x:\overline{n}|}\right)\cdot(1+i)=q'_{x+t}+p'_{x+t}\cdot{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\cdots(\mathrm{ii})$$

(i)−(ii)を行い、${}_tV_{x:\overline{n}|}-{}_tV'_{x:\overline{n}|}=\Delta_tV\ \ (t=0,1,\cdots,n)$と表せば、

$$\left(P_{x:\overline{n}|}-P'_{x:\overline{n}|}\right)\cdot(1+i)-(q_{x+t}-q'_{x+t})\cdot\left(1-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\right)=p_{x+t}\cdot\Delta_{t+1}V-(1+i)\cdot\Delta_tV$$

この左辺をR_{t+1}とおき、両辺に$v\cdot D_{x+t}$を乗ずると

$$v\cdot D_{x+t}\cdot R_{t+1}=D_{x+t+1}\cdot\Delta_{t+1}V-D_{x+t}\cdot\Delta_tV$$

両辺を$t=0$から$t=n-1$まで加えると、$\Delta_nV=\Delta_0V=0$より、

$$\sum_{t=0}^{n-1}v\cdot D_{x+t}\cdot R_{t+1}=D_{x+n}\cdot\Delta_nV-D_x\cdot\Delta_0V=0$$

$$\left(P_{x:\overline{n}|}-P'_{x:\overline{n}|}\right)\cdot\sum_{t=0}^{n-1}D_{x+t}-\sum_{t=0}^{n-1}v\cdot(q_{x+t}-q'_{x+t})\cdot\left(1-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\right)\cdot D_{x+t}=0$$

よって

$$P'_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|}=\frac{\sum_{t=0}^{n-1}v\cdot(q'_{x+t}-q_{x+t})\cdot\left(1-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\right)\cdot D_{x+t}}{\sum_{t=0}^{n-1}D_{x+t}}$$

条件より、$q'_{x+t}-q_{x+t}=k\cdot q_{x+t}$であるから

$$P'_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|}=\frac{k\cdot\sum_{t=0}^{n-1}v\cdot q_{x+t}\cdot D_{x+t}\cdot\left(1-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\right)}{\sum_{t=0}^{n-1}D_{x+t}}$$

$$=\frac{k\cdot\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x\cdot\left(1-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

よって、$\left(P'_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|}\right)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=k\cdot\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_x\cdot\left(1-{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}\right)$

解答：（J）

（7）営業保険料を P^* とすると、

$$P^*\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\ A_{x:\overline{n}|}+\{1.00+0.10\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{2}|}-\ddot{a}_{x:\overline{1}|})+0.05\cdot(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{2}|})\}\cdot P^*$$
$$+0.002\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+0.010A^1_{x:\overline{n}|}+0.005A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}+0.03P^*\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

であり、

$$P^*=\frac{1.010A^1_{x:\overline{n}|}+1.005A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}+0.002\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{0.92\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-0.90-0.05\ddot{a}_{x:\overline{2}|}}$$

ここで、

$$\ddot{a}_{x:\overline{2}|}=1+v\cdot p_x=1+\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}=1+\frac{15.40-1}{15.00}=1.96$$

$$A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}=\ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=15.70-15.40=0.30$$

$$A^1_{x:\overline{n}|}=1-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}}=1-0.02\times15.40-0.30=0.392$$

より、 $P^*=0.05529\cdots$

解答：（C）

（8）初年度定期式の責任準備金を積み立てるので、

$$P_1=v\cdot q_x \quad 、\quad P_2=P_{x+1:\overline{n-1}|}$$

$$\alpha=P_2-P_1=P_{x+1:\overline{n-1}|}-v\cdot q_x \quad\cdots(\text{i})$$

$${}_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|}={}_{t-1}V_{x+1:\overline{n-1}|}=\frac{P_{x+1:\overline{n-1}|}-P^{\ 1}_{x+1:\overline{t-1}|}}{P_{x+1:\overset{\ 1}{\overline{t-1}|}}}\quad(2\leqq t\leqq n)\quad\cdots(\text{ii})$$ （以上、教科書下巻 p.18～19 参照）

ここで、

$$P^{\ 1}_{x+1:\overline{t-1}|}=\frac{A^{\ 1}_{x+1:\overline{t-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{t-1}|}}$$

仮定より $q=q_x=q_{x+1}=q_{x+2}=\cdots=q_{x+n-1}$ とすると、

$$A^{\ 1}_{x+1:\overline{t-1}|}=\sum_{k=1}^{t-1}v^k\cdot{}_{k-1|}q_{x+1}$$
$$=v\cdot q+v^2\cdot(1-q)\cdot q+v^3\cdot(1-q)^2\cdot q+\cdots+v^{t-1}\cdot(1-q)^{t-2}\cdot q$$
$$=v\cdot q\cdot\left\{1+v\cdot(1-q)+v^2\cdot(1-q)^2+\cdots+v^{t-2}\cdot(1-q)^{t-2}\right\}$$

$$\ddot{a}_{x+1:\overline{t-1}|}=\sum_{k=1}^{t-1}v^{k-1}\cdot{}_{k-1}p_{x+1}$$
$$=1+v\cdot(1-q)+v^2\cdot(1-q)^2+\cdots+v^{t-2}\cdot(1-q)^{t-2}$$

よって

$$P^{\ 1}_{x+1:\overline{t-1}|}=\frac{A^{\ 1}_{x+1:\overline{t-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{t-1}|}}=v\cdot q\quad\cdots(\text{iii})$$

(i)より

$$P_{x+1:\overline{n-1}|}=\alpha+v\cdot q_x=\alpha+v\cdot q\quad\cdots(\text{iv})$$

(iii)、(iv)を(ii)に代入すると

$${}_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|}=\frac{\alpha+v\cdot q-v\cdot q}{P_{x+1:\overset{\ 1}{\overline{t-1}|}}}=\frac{\alpha}{P_{x+1:\overset{\ 1}{\overline{t-1}|}}}$$

解答：（H）

(9) x 歳加入、保険期間 m 年の年払平準営業保険料を $P^*_{x:\overline{m}|}$、$x+t$ 歳加入、保険期間 $m-t$ 年の年払平準営業保険料を $P^*_{x+t:\overline{m-t}|}$、方法 1、方法 2 による年払平準営業保険料を、それぞれ P_1、P_2 とすると、

$$P_1 = P^*_{x:\overline{m}|} + \frac{{}_tV_{x:\overline{m}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}、\quad P_2 = P^*_{x+t:\overline{m-t}|} - \frac{{}_tV_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned}
P_1 - P_2 &= \frac{A_{x:\overline{m}|} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - \frac{A_{x+t:\overline{m-t}|} + \alpha + \gamma \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} + \frac{1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} \\
&= \frac{1+\alpha}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \frac{\gamma - d}{1-\beta} - \frac{1+\alpha}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{\gamma - d}{1-\beta} + \frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \quad (A_{x:\overline{m}|} = 1 - d\cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|} \text{より})
\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
P_1 - P_2 &= \frac{1+\alpha}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - \frac{1+\alpha}{(1-\beta)\cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} + \frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \\
&= -\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right) + \frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \\
&= \left(1 - \frac{1+\alpha}{1-\beta}\right)\cdot\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right) \\
&= -\frac{\alpha+\beta}{1-\beta}\cdot\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)
\end{aligned}$$

解答：(F)

(10) 保険金 1 が支払われるのは、(i)契約から 5 年以内に子が死亡、(ii)契約から 5 年経過以後に子が死亡しかつその 5 年前に親が生存、の場合でありそれぞれの給付現価は以下のとおり。

(i) $\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{5}|}$

(ii) $\displaystyle\int_5^\infty v^t \cdot {}_{t-5}p_{60} \cdot {}_tp_{30} \cdot \mu_{30+t}\,dt = v^5 \cdot {}_5p_{30} \cdot \int_0^\infty v^s \cdot {}_sp_{60} \cdot {}_sp_{35} \cdot \mu_{35+s}\,ds = \frac{D_{35}}{D_{30}} \cdot \bar{A}_{\overset{1}{35},60}$

一時払営業保険料が返還されるのは、(iii)親の死亡から 5 年間子が生存、の場合でありその給付現価は、一時払純保険料を A として

(iii) $\displaystyle 1.065A \cdot \int_0^\infty v^{t+5} \cdot {}_tp_{60} \cdot {}_{t+5}p_{30} \cdot \mu_{60+t}\,dt = 1.065A \cdot \frac{D_{35}}{D_{30}} \cdot \bar{A}_{35,\overset{1}{60}}$

以上(i)から(iii)の和が A に等しいとして、A について解けば

$$A = \frac{\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{5}|} + \dfrac{D_{35}}{D_{30}} \cdot \bar{A}_{\overset{1}{35},60}}{1 - 1.065 \cdot \dfrac{D_{35}}{D_{30}} \cdot \bar{A}_{35,\overset{1}{60}}}$$

解答：(B)

問題２．（（１）④と⑤は順不同、（２）①と②は順不同）

（１）	①	(F)	②	(H)	③	(O)	④	(M)	⑤	(R)	⑥	(N)
	①	(I)	②	(G)								
（２）	①	(E)	②	(I)	③	(B)	④	(O)	⑤	(M)	⑥	(Q)

（１）求める年払平準純保険料をPとして収支相等の算式を書くと、

$$P\cdot\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x|}} = a_x^{a\left(i:\overline{65-x|}\right)} + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\ddot{a}^{a}_{65} + 3\bar{A}^a_x$$

よって、$P = \dfrac{1}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x|}}}\cdot\left(a_x^{a\left(i:\overline{65-x|}\right)} + \dfrac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\ddot{a}^{a}_{65} + 3\bar{A}^a_x\right)$

ただし、$\bar{A}^a_x = \displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} v^{t+\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{d^{aa}_{x+t}}{l^{aa}_x} + \frac{d^{ii}_{x+t} - l^{ii}_x\cdot{}_{t|}q^i_x}{l^{aa}_x}\right) = \frac{\bar{M}_x}{D^{aa}_x} - \frac{D^{ii}_x}{D^{aa}_x}\cdot\frac{\bar{M}^i_x}{D^i_x}$

よって、$P = \dfrac{1}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x|}}}\cdot\left\{\boxed{\text{①}\,a_x^{a\left(i:\overline{65-x|}\right)}} + \dfrac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\boxed{\text{②}\,\ddot{a}^{a}_{65}} + 3\cdot\left(\dfrac{\boxed{\text{③}\,\bar{M}_x}}{D^{aa}_x} - \dfrac{\boxed{\text{④}\,D^{ii}_x}}{D^{aa}_x}\cdot\dfrac{\boxed{\text{⑤}\,\bar{M}^i_x}}{\boxed{\text{⑥}\,D^i_x}}\right)\right\}$ …(i)

（別解）上記(i)の右辺｛　｝内の第１項および第２項（終身年金に関する給付現価を表す項）は、被保険者が65歳時点で要介護者か否かに着目し、第１項は65歳までに要介護者になる被保険者に対する給付現価を、第２項は65歳時点で介護不要者のままである被保険者に対する給付現価を表している。

一方、（65歳時点の状態にかかわらず）終身年金を要介護状態で受け取る年金と、介護不要状態で受け取る年金とに分類した場合、その給付現価は$a^{ai}_x + \dfrac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\ddot{a}^{aa}_{65}$と表すことができる。実際、

$a_x^{a\left(i:\overline{65-x|}\right)} = a^{ai}_x - v^{65-x}\cdot{}_{65-x}p^{aa}_x\cdot a^{ai}_{65} = a^{ai}_x - \dfrac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot a^{ai}_{65}$であることから、

$$\boxed{\text{①}\,a_x^{a\left(i:\overline{65-x|}\right)}} + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\boxed{\text{②}\,\ddot{a}^{a}_{65}} = a^{ai}_x - \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot a^{ai}_{65} + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\ddot{a}^{a}_{65}$$

$$= a^{ai}_x + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\left(\ddot{a}^{a}_{65} - a^{ai}_{65}\right) = a^{ai}_x + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\left(1 + a^{a}_{65} - a^{ai}_{65}\right)$$

ここで、$a^{a}_{65} - a^{ai}_{65} = a^{aa}_{65}$より

$$a_x^{a\left(i:\overline{65-x|}\right)} + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\ddot{a}^{a}_{65} = a^{ai}_x + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\left(1 + a^{aa}_{65}\right) = a^{ai}_x + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\ddot{a}^{aa}_{65}$$

となる。よって、この保険の年払平準純保険料は、

$$P = \frac{1}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{65-x|}}}\cdot\left\{\boxed{\text{①}\,a^{ai}_x} + \frac{D^{aa}_{65}}{D^{aa}_x}\cdot\boxed{\text{②}\,\ddot{a}^{aa}_{65}} + 3\cdot\left(\frac{\boxed{\text{③}\,\bar{M}_x}}{D^{aa}_x} - \frac{\boxed{\text{④}\,D^{ii}_x}}{D^{aa}_x}\cdot\frac{\boxed{\text{⑤}\,\bar{M}^i_x}}{\boxed{\text{⑥}\,D^i_x}}\right)\right\}$$

と表すこともできる。

解答：①（F）、②（H）、③（O）、④（M）、⑤（R）、⑥（N）
または①（I）、②（G）、③（O）、④（M）、⑤（R）、⑥（N）
（④と⑤は順不同）

（2） この保険の年払平準純保険料 P を責任準備金の再帰式を用いて求める。

就業者の第 t 保険年度末平準純保険料式責任準備金を ${}_tV^{aa}$ とすると、責任準備金の再帰式は

$$l_{x+t}^{aa}\cdot{}_tV^{aa}+l_{x+t}^{aa}\cdot P=v\cdot{}_{t+1}V^{aa}\cdot\left(l_{x+t+1}^{aa}+\boxed{①\ d_{x+t}^{aa}}+\boxed{②\ i_{x+t}}\right)+v\cdot\left(\boxed{③\ l_{x+t+1}^{ii}}-\boxed{④\ l_{x+t}^{ii}\cdot p_{x+t}^{i}}\right)\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}$$

となる。両辺を l_{x+t}^{aa} で割って整理すると

$$\begin{aligned}{}_tV^{aa}+P&=v\cdot{}_{t+1}V^{aa}\cdot\frac{l_{x+t+1}^{aa}+\boxed{①\ d_{x+t}^{aa}}+\boxed{②\ i_{x+t}}}{l_{x+t}^{aa}}+v\cdot\frac{1}{l_{x+t}^{aa}}\cdot\left(\boxed{③\ l_{x+t+1}^{ii}}-\boxed{④\ l_{x+t}^{ii}\cdot p_{x+t}^{i}}\right)\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}\\&=v\cdot{}_{t+1}V^{aa}+v\cdot\boxed{⑤\ p_{x+t}^{ai}}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}\end{aligned}$$

となる。

この両辺に v^t を乗じたものを $t=0,1,2,\cdots,n-1$ について辺々加えて整理すると、

$${}_0V^{aa}+P\cdot\boxed{⑥\ \ddot{a}_{\overline{n}|}}=v^n\cdot{}_nV^{aa}+\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot\boxed{⑤\ p_{x+t}^{ai}}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}$$

となる。ここで、${}_0V^{aa}=0$、${}_nV^{aa}=S$ であるから、

$$P=\frac{v^n\cdot S+\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}\cdot\boxed{⑤\ p_{x+t}^{ai}}\cdot\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t}|}^{i}}{\boxed{⑥\ \ddot{a}_{\overline{n}|}}}$$

となる。

解答：① **(E)**、② **(I)**、③ **(B)**、④ **(O)**、⑤ **(M)**、⑥ **(Q)**

(①と②は順不同)

問題３．

（1）	①	(L)	②	(C)	③	(G)	④	(D)	⑤	(K)
	⑥	(B)	⑦	(N)	⑧	(E)	⑨	(I)		
（2）	①	(K)	②	(T)	③	(C)	④	(U)	⑤	(R)
	⑥	(L)	⑦	(X)						

（1）区間$\left[t, t+\frac{1}{k}\right]$での責任準備金の再帰式は次のようになる。

$$l_{x+t}\cdot\left({}_tV_x^{(k)}+\boxed{①\ \frac{P_x^{(k)}}{k}}\right)\cdot\left(1+\boxed{②\ \frac{i^{(k)}}{k}}\right)=\left(l_{x+t}-\boxed{③\ l_{x+t+\frac{1}{k}}}\right)+\boxed{③\ l_{x+t+\frac{1}{k}}}\cdot{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}$$

両辺をl_{x+t}で割って整理すると

$${}_tV_x^{(k)}+\boxed{①\ \frac{P_x^{(k)}}{k}}+\boxed{②\ \frac{i^{(k)}}{k}}\cdot{}_tV_x^{(k)}+\boxed{④\ \frac{i^{(k)}}{k^2}}\cdot P_x^{(k)}=\frac{l_{x+t}-\boxed{③\ l_{x+t+\frac{1}{k}}}}{l_{x+t}}+\frac{\boxed{③\ l_{x+t+\frac{1}{k}}}}{l_{x+t}}\cdot{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}$$

$${}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}-{}_tV_x^{(k)}=\boxed{①\ \frac{P_x^{(k)}}{k}}+\boxed{②\ \frac{i^{(k)}}{k}}\cdot{}_tV_x^{(k)}+\boxed{④\ \frac{i^{(k)}}{k^2}}\cdot P_x^{(k)}-\frac{l_{x+t}-\boxed{③\ l_{x+t+\frac{1}{k}}}}{l_{x+t}}\cdot\left(1-{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}\right)$$

両辺を$\frac{1}{k}$で割ると

$$\frac{{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}-{}_tV_x^{(k)}}{\frac{1}{k}}=\boxed{⑤\ P_x^{(k)}}+\boxed{⑥\ i^{(k)}}\cdot{}_tV_x^{(k)}+\boxed{②\ \frac{i^{(k)}}{k}}\cdot P_x^{(k)}-\frac{l_{x+t}-\boxed{③\ l_{x+t+\frac{1}{k}}}}{\frac{1}{k}\cdot l_{x+t}}\cdot\left(1-{}_{t+\frac{1}{k}}V_x^{(k)}\right)$$

ここで$k\to\infty$とすると$\frac{1}{k}\to 0$となることから、両辺の極限をとると次の式となる。

$$\frac{d}{dt}{}_tV_x^{(\infty)}=\boxed{⑦\ P_x^{(\infty)}}+\boxed{⑧\ \delta}\cdot{}_tV_x^{(\infty)}-\boxed{⑨\ \mu_{x+t}}\cdot\left(1-{}_tV_x^{(\infty)}\right)$$

これは、保険料連続払込、保険金即時払の終身保険における Thiele の微分方程式である。

解答：① (L)、② (C)、③ (G)、④ (D)、⑤ (K)、⑥ (B)、⑦ (N)、⑧ (E)、⑨ (I)

（2）期末払生命年金において、期中の死亡に対しては前期末から死亡までの端数期間に比例した額を死亡直後に追加して支払う年金を完全年金といい$\mathring{a}$で表す。例えば、年k回期末払のn年有期完全年金は

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)}=a_{x:\overline{n}|}^{(k)}+\alpha \quad、\ \alpha=\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}}s\cdot v^{\frac{t}{k}+s}\cdot{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds \quad と書ける。$$

いま、$a_{x:\overline{n}|}^{(k)}=\sum_{t=0}^{nk-1}\boxed{①\ a_{\overline{\frac{t}{k}}|}^{(k)}}\cdot\left({}_{\frac{t}{k}}p_x-{}_{\frac{t+1}{k}}p_x\right)+\boxed{②\ a_{\overline{n}|}^{(k)}\cdot{}_np_x}$ であるから、

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)}=\sum_{t=0}^{nk-1}\boxed{①\ a_{\overline{\frac{t}{k}}|}^{(k)}}\cdot\left({}_{\frac{t}{k}}p_x-{}_{\frac{t+1}{k}}p_x\right)+\boxed{②\ a_{\overline{n}|}^{(k)}\cdot{}_np_x}+\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}}s\cdot v^{\frac{t}{k}+s}\cdot{}_{\frac{t}{k}+s}p_x\cdot\mu_{x+\frac{t}{k}+s}\,ds$$

（ただし、$a_{\overline{0}|}^{(k)}=0$とする）

ここで、 ${}_{\frac{t}{k}}p_x - {}_{\frac{t+1}{k}}p_x = \int_0^{\frac{1}{k}} {}_{\frac{t}{k}+s}p_x \cdot \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\, ds$ 　であるから

$$\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{nk-1} \int_0^{\frac{1}{k}} \left(\boxed{① \; a^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}}|}} + s \cdot v^{\frac{t}{k}+s} \right) \cdot {}_{\frac{t}{k}+s}p_x \cdot \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\, ds + \boxed{② \; a^{(k)}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x} \cdots (\mathrm{i})$$

さて、 $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \boxed{③ \; \bar{a}_{\overline{t}|}} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt + \boxed{④ \; \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x}$ より

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{nk-1} \int_0^{\frac{1}{k}} \boxed{⑤ \; \bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}} \cdot {}_{\frac{t}{k}+s}p_x \cdot \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\, ds + \boxed{④ \; \bar{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x} \cdots (\mathrm{ii})$$

$i^{(k)} \cdot a^{(k)}_{\overline{n}|} = \delta \cdot \bar{a}_{\overline{n}|}$ より、 $\bar{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{i^{(k)}}{\delta} \cdot a^{(k)}_{\overline{n}|} \cdots (\mathrm{iii})$

また、 $\bar{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1-v^n}{\delta}$ より、 $\boxed{⑤ \; \bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}} = \boxed{⑥ \; \bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}}|}} + \dfrac{v^{\frac{t}{k}} - v^{\frac{t}{k}+s}}{\delta} = \boxed{⑦ \; \dfrac{i^{(k)}}{\delta}} \cdot \boxed{① \; a^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}}|}} + \dfrac{v^{\frac{t}{k}+s}}{\delta} \cdot \left\{ (1+i)^s - 1 \right\}$

$i^{(k)} \fallingdotseq i$ とすると、 $(1+i)^s - 1 \fallingdotseq s \cdot i \fallingdotseq s \cdot i^{(k)}$ より、 $\boxed{⑤ \; \bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}} \fallingdotseq \boxed{⑦ \; \dfrac{i^{(k)}}{\delta}} \cdot \left(\boxed{① \; a^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}}|}} + s \cdot v^{\frac{t}{k}+s} \right) \cdots (\mathrm{iv})$

以上より、(iii)、(iv)を(ii)に代入し、(i)と比較すれば、 $i^{(k)} \cdot \mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq \delta \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|}$ が成り立つ。

解答：①（K）、②（T）、③（C）、④（U）、⑤（R）、⑥（L）、⑦（X）

問題4.

(1)	①	(V)	②	(B)	③	(K)						
(2)	④	(D)	⑤	(X)	⑥	(H)	⑦	(O)	⑧	(P)	⑨	(E)
(3)	⑩	(Z)	⑪	(K)	⑫	(Q)	⑬	(Z)	⑭	(B)		

(1) この保険の年払平準純保険料Pおよび保険料払込免除後における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_t\tilde{V}$(将来法)を表す式はそれぞれ、

$$P=\frac{\dfrac{1}{n}\cdot\displaystyle\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\cdot v^{t+1}\cdot{}_tp_{xy}\cdot\boxed{^{①}q_{\overset{1}{x+t},y+t}}+A_{y:\overline{n}|}}{\boxed{^{②}\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}}}\quad、\quad{}_t\tilde{V}=\boxed{^{③}A_{y+t:\overline{n-t}|}}$$

となる。

解答:① (V)、② (B)、③ (K)

(2) 契約時から第t保険年度末までの収支を、契約時点における現価で考えると、

$$(\text{収入現価})=P\cdot\boxed{^{④}\ddot{a}_{xy:\overline{t}|}}$$

$$(\text{支出現価})=\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{^{⑤}q_{\overset{1}{x+s},y+s}}+\boxed{^{⑥}A_{\overset{1}{y}:\overline{t}|}}$$

となる。

また、夫婦とも生存の場合における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_tV$と保険料払込免除後における第t保険年度末平準純保険料式責任準備金${}_t\tilde{V}$の確率加重平均を契約時点まで割り引いた額は、契約時から第t保険年度末までの収支の契約時点における現価と等しくなることから、

$$v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot{}_tV+v^t\cdot\left(1-\boxed{^{⑦}{}_tp_x}\right)\cdot\boxed{^{⑧}{}_tp_y}\cdot{}_t\tilde{V}$$

$$=P\cdot\boxed{^{④}\ddot{a}_{xy:\overline{t}|}}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{^{⑤}q_{\overset{1}{x+s},y+s}}-\boxed{^{⑥}A_{\overset{1}{y}:\overline{t}|}}$$

が成り立つ。したがって、

$$v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\left({}_tV-{}_t\tilde{V}\right)$$

$$=P\cdot\boxed{^{④}\ddot{a}_{xy:\overline{t}|}}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{^{⑤}q_{\overset{1}{x+s},y+s}}-\left(\boxed{^{⑥}A_{\overset{1}{y}:\overline{t}|}}+v^t\cdot\boxed{^{⑧}{}_tp_y}\cdot{}_t\tilde{V}\right)$$

となる。ここで、$\boxed{^{⑥}A_{\overset{1}{y}:\overline{t}|}}+v^t\cdot\boxed{^{⑧}{}_tp_y}\cdot{}_t\tilde{V}=A_{\overset{1}{y}:\overline{t}|}+v^t\cdot{}_tp_y\cdot A_{y+t:\overline{n-t}|}=\boxed{^{⑨}A_{y:\overline{n}|}}$より、

$$v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\left({}_tV-{}_t\tilde{V}\right)=P\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{t}|}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}-A_{y:\overline{n}|}$$

よって、

$${}_tV=\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\left\{P\cdot\boxed{^{④}\ddot{a}_{xy:\overline{t}|}}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{^{⑤}q_{\overset{1}{x+s},y+s}}-\boxed{^{⑨}A_{y:\overline{n}|}}\right\}+{}_t\tilde{V}$$

と表せる。

解答:④ (D)、⑤ (X)、⑥ (H)、⑦ (O)、⑧ (P)、⑨ (E)

(3)夫婦とも生存の場合における第t保険年度末の平準純保険料式責任準備金${}_tV$を将来法で表すと、

$${}_tV=\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-t-1}(t+s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{x+t,y+t}\cdot\boxed{^{⑩}q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}}+\boxed{^{⑪}A_{y+t:\overline{n-t}|}}-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}$$

となる。

次に将来法の責任準備金と過去法の責任準備金が等しいことを証明する。

まず、$\displaystyle\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{\text{⑤}\,q_{\overset{1}{x+s},y+s}}$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}-\sum_{s=t}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}\\
&=\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}-\sum_{s=0}^{n-t-1}(t+s+1)\cdot v^{t+s+1}\cdot{}_{t+s}p_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}\\
&=\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{\text{⑤}\,q_{\overset{1}{x+s},y+s}}-v^t\cdot\boxed{\text{⑫}\,{}_tp_{xy}}\cdot\sum_{s=0}^{n-t-1}(t+s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{x+t,y+t}\cdot\boxed{\text{⑬}\,q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}}
\end{aligned}
$$

より、$\displaystyle\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}$

$$
=\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-t-1}(t+s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{x+t,y+t}\cdot q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}
$$

また、$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}=\ddot{a}_{xy:\overline{t|}}+v^t\cdot{}_tp_{xy}\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$ より、$\displaystyle\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\boxed{\text{④}\,\ddot{a}_{xy:\overline{t|}}}=\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\boxed{\text{⑭}\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}-\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$

および ${}_t\tilde{V}=\boxed{\text{③}\,A_{y+t:\overline{n-t|}}}$ に注意すれば、

$$
\begin{aligned}
\text{過去法の}\ {}_tV&=\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\left\{P\cdot\boxed{\text{④}\,\ddot{a}_{xy:\overline{t|}}}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{t-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{\text{⑤}\,q_{\overset{1}{x+s},y+s}}-\boxed{\text{⑨}\,A_{y:\overline{n|}}}\right\}+{}_t\tilde{V}\\
&=\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot P\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}\\
&\quad-\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}+\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-t-1}(t+s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{x+t,y+t}\cdot q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}\\
&\quad-\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot A_{y:\overline{n|}}+A_{y+t:\overline{n-t|}}\\
&=\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-t-1}(t+s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{x+t,y+t}\cdot\boxed{\text{⑬}\,q_{\overset{1}{x+t+s},y+t+s}}+\boxed{\text{③}\,A_{y+t:\overline{n-t|}}}-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}\\
&\quad+\frac{1}{v^t\cdot{}_tp_{xy}}\cdot\left\{P\cdot\boxed{\text{⑭}\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}-\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot\boxed{\text{⑤}\,q_{\overset{1}{x+s},y+s}}-\boxed{\text{⑨}\,A_{y:\overline{n|}}}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、（1）より $\displaystyle P\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\cdot v^{s+1}\cdot{}_sp_{xy}\cdot q_{\overset{1}{x+s},y+s}+A_{y:\overline{n|}}$ であることから、最後の等式の第4項の｛　｝内は0となる。このことから過去法の ${}_tV$ = 将来法の ${}_tV$ が示される。

解答：⑩（Z）、⑪（K）、⑫（Q）、⑬（Z）、⑭（B）