年金数理（問題）

この年金数理の問題において特に説明がない限り、以下のとおりとする。

・「被保険者」とは、在職中の者をいう。
・「受給権者」とは、年金受給中の者および受給待期中の者をいう。
・「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。
・「責任準備金」とは、給付現価から標準保険料収入現価を控除した額をいう。
・「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年退職時より単位年金額の終身年金を年１回期初に支払う年金制度をいい、保険料の払い込みは年１回期初払いとする。

問題１． 次の(1)～(14)について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（７０点）

（１） Trowbridge モデルの年金制度を考える。以下の前提において、年齢 x 歳 $(x_e \leq x < x_r)$ の被保険者が１年間に払い込む単位積立方式の標準保険料と加入年齢方式の標準保険料が等しくなる時、x について最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。

（前提）
新規加入年齢：x_e 歳
定年年齢：x_r 歳
新規加入年齢から定年年齢まで、定年以外の生存脱退および死亡脱退はゼロとする。
予定利率：i、$v=\dfrac{1}{1+i}$ とする。

(A) $\dfrac{\log(x_r-x_e)-\log a_{\overline{x_r-x_e}|}}{\log v}$　　(B) $\dfrac{\log(x_r-x_e)-\log \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|}}{\log v}$

(C) $\dfrac{\log a_{\overline{x_r-x_e}|}-\log(x_r-x_e)}{\log v}$　　(D) $\dfrac{\log \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|}-\log(x_r-x_e)}{\log v}$

(E) $\dfrac{\log a_{\overline{x_r-x_e}|}-\log(x_r-x_e)}{\log(1+i)}$　　(F) $\dfrac{\log \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|}-\log(x_r-x_e)}{\log(1+i)}$

(G) $x_e+\dfrac{\log(x_r-x_e)-\log a_{\overline{x_r-x_e}|}}{\log v}$　　(H) $x_e+\dfrac{\log(x_r-x_e)-\log \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|}}{\log v}$

(I) $x_e+\dfrac{\log a_{\overline{x_r-x_e}|}-\log(x_r-x_e)}{\log v}$　　(J) $x_e+\dfrac{\log \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|}-\log(x_r-x_e)}{\log v}$

(2) 初年度の給付額が 1 で、以降は「1+（初年度から前年度までの給付の合計の 2.0%)」を期初に給付する n 年年金現価（予定利率 i %、$n>1$）が、同じ n 年間各期初に 1 を給付する年金現価（予定利率 5.0%）と等しくなった。このとき、t 年度の給付額 t（$t \geq 1$）を期初に給付する永久年金現価（$I\ddot{a}_{\overline{m}|}$ において $m \to \infty$ としたもの、予定利率は i %）は $\boxed{a}\ \boxed{b}\ \boxed{c}$（小数点以下第 1 位を四捨五入し整数で求めなさい。）となる。a、b、c にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。

(3) x 歳の昇給率 R_x が以下のとおりとする。20 歳の給与が、100,000 円の時、40 歳の給与に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

$$R_x = \frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)} - x\cdot f_{(x)}}{x\cdot f_{(x)}}$$

但し、$f_{(x)} = \begin{cases} 20 & (x<30) \\ 30 & (30 \leq x) \end{cases}$

(A) 410,000 円　(B) 420,000 円　(C) 430,000 円　(D) 440,000 円　(E) 450,000 円
(F) 460,000 円　(G) 470,000 円　(H) 480,000 円　(I) 490,000 円　(J) 500,000 円

(4) 次のうち、誤っているものの番号の組み合わせとして最も適切なものを次の選択肢の中から 1 つ選びなさい。

① $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} - \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} = 1 - v$

（なお、記号 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ は期初払いの n 年確定年金の単位年金額に対する終価を表すものとする）

② $\bar{a}_{x|y} \fallingdotseq a_{xy} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12}\cdot\left(\mu_x + \mu_y + \delta\right)$

③ $\dfrac{dD_x}{dx} = -(\mu_x + \delta)\cdot D_x$

④ $\left(D\ddot{a}\right)_{x:\overline{n}|} - \left(D\ddot{a}\right)_{x:\overline{n-1}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

⑤ $Ia_{\overline{n}|} = \dfrac{1}{i}\left(a_{\overline{n}|} - nv^n\right)$

(A) ①と②　(B) ②と③　(C) ③と④　(D) ④と⑤　(E) ①と④
(F) ②と⑤　(G) ①と②と③　(H) ②と③と④　(I) ③と④と⑤　(J) ①と③と⑤
(K) いずれにも該当しない

(5) x 歳の被保険者数 l_x が以下のとおりで表される定常状態に達した年金制度があり、新規加入者は a 歳（$a>0$）でのみ加入するものとする。被保険者の平均年齢が脱退者の平均年齢より 11 歳小さいとき、a に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

$$l_x = \begin{cases} 3a-x & (a \le x \le 2a) \\ 0 & (x<a、x>2a) \end{cases}$$

(A) 20　(B) 22　(C) 24　(D) 26　(E) 28
(F) 30　(G) 32　(H) 34　(I) 36　(J) 38

(6) 定常状態にある Trowbridge モデルの年金制度が、単位積立方式により運営されている。
ある期末時点において、財政方式を加入時積立方式に変えるとともに、制度に積立不足が生じないように制度変更を行い、被保険者の過去分の給付を一律 α 倍 $(0<\alpha<1)$、将来分（及び将来加入が見込まれる被保険者）の給付を一律 β 倍 $(0<\beta<1)$ にすることとした。
β と α の関係を表す式として、最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

なお、この年金制度においては、被保険者全員が同一の加入年齢で加入するものとし、加入年齢から定年年齢までの年数を n 年 $(n \ge 10)$ とする。また、予定利率を i とし、$v=\dfrac{1}{1+i}$ とする。

(A) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-(1-v^n)}{1-v^n}$

(B) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-(1-v^n)}{(1-v^n)-n\,v^{n-1}(1-v)}$

(C) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-(1-v^n)}{(1-v^n)-n\,v^n(1-v)}$

(D) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-(1-v^n)}{(1-v^n)-n\,v^{n-1}(1-v)^2}$

(E) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-(1-v^n)}{(1-v^n)-n\,v^n(1-v)^2}$

(F) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-v(1-v^n)}{v(1-v^n)}$

(G) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-v(1-v^n)}{v(1-v^n)-n\,v^n(1-v)}$

(H) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-v(1-v^n)}{v(1-v^n)-n\,v^{n+1}(1-v)}$

(I) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-v(1-v^n)}{v(1-v^n)-n\,v^n(1-v)^2}$

(J) $\beta=(1-\alpha)\dfrac{n(1-v)-v(1-v^n)}{v(1-v^n)-n\,v^{n+1}(1-v)^2}$

（7）Trowbridge モデルの年金制度があり、定常状態に達しているものとする。財政方式を加入年齢方式とした場合の標準保険料を ${}^{E}P_{x_e}$ とし、財政方式を加入時積立方式とした場合の標準保険料を ${}^{In}P_{x_e}$ とすると ${}^{E}P_{x_e}=0.254$、${}^{In}P_{x_e}=4.774$ であった。さて、この年金制度の新規加入年齢を x_e 歳から x_e+1 歳へと変更したとする。このとき、財政方式を加入年齢方式とした場合の新しい標準保険料 ${}^{E}P_{x_e+1}$ は 0. $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{c}$ となる。（小数点以下第 4 位を四捨五入）なお、この変更に伴い脱退率などのその他の基礎率については変更がないものとする。a, b, c にそれぞれ当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。

（8）定年退職者（定年年齢 60 歳）に年額 1 の終身年金を期初に支給する年金制度（保険料は年 1 回期初払）を考える。財政方式は加入年齢方式（特定年齢 55 歳）とし、受給者はいないものとする。

今般、財政再計算を実施した結果、脱退率が変動したため、財政再計算後の標準保険料率が財政再計算前の標準保険料率の 0.95 倍となった。再計算前の脱退残存表 l_x^A、再計算後の脱退残存表を l_x^B とすると、両者に次の関係があったとき k に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

なお、財政再計算により脱退率以外に基礎率の変更はないものとする。

$$l_x^B = l_x^A (55 \le x \le 58)$$
$$l_x^B = k \times l_x^A (x \ge 59)$$

＜再計算前の脱退残存表に基づく基数＞

x	D_x	N_x
55	6,274.3	87,495.7
56	5,933.5	81,221.4
57	5,607.6	75,287.9
58	5,296.5	69,680.3
59	4,999.6	64,383.8
60	4,716.3	59,384.2

（A） 0.90　（B） 0.92　（C） 0.94　（D） 0.96　（E） 0.98
（F） 1.02　（G） 1.04　（H） 1.08　（I） 1.10　（J） 1.12

（9）ある年金制度のt年度末における責任準備金がV_t、積立金がF_tであった（$V_t < F_t$）。t年度末の剰余金を解消するため、以下の予定利率引下げを検討したが適用しなかった。

(予定利率引下げ内容)

・予定利率を、iからi'に引下げる

・この予定利率引下げにより、$t+1$年度の年間標準保険料収入はCからC'となる。

・予定利率引下げ後の、責任準備金V_t'はF_tと等しくなる。

翌年度において、運用利回りがj（$j>i$）となり更に剰余が拡大したため、$t+1$年度末において制度変更後の責任準備金と積立金が等しくなるように、予定利率をiからi'へ引下げた上で、$1+k$倍に給付増額をおこなうこととした。このとき、kを表す算式として最も適切なものを選択肢の中から1つ選びなさい。

なお、$t+1$年度における保険料収入C、給付額B（共に期末発生）は、予定通りであり、$t+1$年度において利差以外の剰余不足は発生していないものとする。また、t年度末、$t+1$年度末において年金受給権者はいないものとする。

(A) $\dfrac{F_t\cdot(j-i)}{F_t\cdot(1+i)+(C-B)}$ (B) $\dfrac{F_t\cdot(j-i)+(C-C')}{F_t\cdot(1+i)+(C'-B)}$

(C) $\dfrac{F_t\cdot(j-i')}{F_t\cdot(1+i')+(C-B)}$ (D) $\dfrac{F_t\cdot(j-i')+(C-C')}{F_t\cdot(1+i')+(C'-B)}$

(E) $\dfrac{1}{F_t\cdot(1+j)+(C-B)}$ (F) $\dfrac{C-C'}{F_t\cdot(1+j)+(C'-B)}$

(G) $\dfrac{F_t\cdot(i-j)}{F_t\cdot(1+j)+(C-B)}$ (H) $\dfrac{F_t\cdot(i-j)+(C-C')}{F_t\cdot(1+j)+(C'-B)}$

(I) $\dfrac{F_t\cdot(i'-j)}{F_t\cdot(1+j)+(C-B)}$ (J) $\dfrac{F_t\cdot(i'-j)+(C-C')}{F_t\cdot(1+j)+(C'-B)}$

（10）ある年度の年金制度における期初の責任準備金は 1,200、期初の積立金は 650 であった。その年度の財政は予定通りに推移し、期末の責任準備金は 1,350 となった。その年度の給付（期末払い）が 240、保険料（期初払い）のうち標準保険料が 300、資産運用収入が 60 であるとき、期末の積立金に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

(A) 770 (B) 780 (C) 790 (D) 800 (E) 810
(F) 820 (G) 830 (H) 840 (I) 850 (J) 860

（１１）予定利率iで開放型総合保険料方式により財政運営を行っている年金制度（保険料年 1 回期末払い、給付年 1 回期末払い）を考える。
この制度は、年金資産が制度全体の毎年度の給付額のm倍（$m<1/i$）ある状況で、定常状態にあったものとする。
その後、ある年度から運用環境が悪化して、実際の運用利回りが継続してi'（$i'<i$）で推移し、掛金も増加してきたため、n年後に給付を一律$(1-\alpha)$倍に引下げることとした。
給付引下げ後の掛金が、運用利回り悪化前の当初の掛金に等しくなったとした場合、αを表す算式として、最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

なお、保険料は、毎期初、予定利率をiとして算定するものとする。
また、当初の制度（給付引下げ前）において、予定利率iで定常状態にある場合の制度全体の保険料をCとし、また、予定利率のみをi'に変更した場合の制度全体の保険料をC'と表すものとする。

(A) $im\left[1-\left\{1-\dfrac{1-im}{m}\left(\dfrac{C}{C'}-1\right)\right\}^n\right]$

(B) $im\left[1-\left\{1-\dfrac{1-im}{m}\left(\dfrac{C'}{C}-1\right)\right\}^n\right]$

(C) $\dfrac{im}{1+i}\left\{1-\dfrac{1+i-im}{m}\left(\dfrac{C}{C'}-1\right)\right\}^n$

(D) $\dfrac{im}{1+i}\left\{1-\dfrac{1+i-im}{m}\left(\dfrac{C'}{C}-1\right)\right\}^n$

(E) $\dfrac{im}{1+i}\left[1-\left\{1-\dfrac{1+i-im}{m}\left(\dfrac{C}{C'}-1\right)\right\}^n\right]$

(F) $\dfrac{im}{1+i}\left[1-\left\{1-\dfrac{1+i-im}{m}\left(\dfrac{C'}{C}-1\right)\right\}^n\right]$

(G) $i(1-im)\left(\dfrac{C}{C'}-1\right)\dfrac{1-\dfrac{1}{m^n}\left\{1+m-(1-im)\dfrac{C}{C'}\right\}^n}{\dfrac{1}{m}\left\{1-(1-im)\dfrac{C}{C'}\right\}}$

(H) $i(1-im)\left(\dfrac{C'}{C}-1\right)\dfrac{1-\dfrac{1}{m^n}\left\{1+m-(1-im)\dfrac{C'}{C}\right\}^n}{\dfrac{1}{m}\left\{1-(1-im)\dfrac{C'}{C}\right\}}$

(I) $\dfrac{i(1+i-im)}{1+i}\left(\dfrac{C}{C'}-1\right)\dfrac{1-\dfrac{1}{m^n(1+i)^n}\left\{1+m(1+i)-(1+i-im)\dfrac{C}{C'}\right\}^n}{\dfrac{1}{m(1+i)}\left\{1-(1+i-im)\dfrac{C}{C'}\right\}}$

(J) $\dfrac{i(1+i-im)}{1+i}\left(\dfrac{C'}{C}-1\right)\dfrac{1-\dfrac{1}{m^n(1+i)^n}\left\{1+m(1+i)-(1+i-im)\dfrac{C'}{C}\right\}^n}{\dfrac{1}{m(1+i)}\left\{1-(1+i-im)\dfrac{C'}{C}\right\}}$

（１２）下記の制度内容に基づく年金制度を考える。このとき、次のa～dのそれぞれに当てはまる数字を解答欄にマークしなさい。

○制度内容

加入時期	年 1 回期初加入
給付内容	加入期間 10 年以上で脱退した場合、「加入期間 1 年につき年額 10,000 円」の年金額を、脱退時から年 1 回期初払の 10 年確定年金として支給する。
脱退時期	年 1 回期初脱退（死亡による脱退は発生しない） 定年退職は定年到達時の期初に脱退
保険料の拠出時期	年 1 回期初拠出（期初脱退者の拠出はなし、定年退職時の拠出もなし）
定年年齢	60 歳
財政方式	加入年齢方式（特定年齢 40 歳）

この制度の脱退残存表は以下のとおりである。

年齢	生存者数（l_x）	脱退者数（d_x）
40 歳	100,000	0
41 歳～49 歳	100,000	0
50 歳	50,000	50,000
51 歳～59 歳	50,000	0
60 歳（定年）	0	50,000

上記以外の年齢では脱退の見込はないものとする。

- ちょうど 40 歳で期初に加入し、現在、年齢が 45 歳の被保険者：10 名
- ちょうど 40 歳で期初に加入し、現在、年齢が 55 歳の被保険者：10 名
- 年金受給権者は存在しない。

このとき、年金制度の 1 人あたりの標準保険料は $\boxed{a}$ $\boxed{b}$ 千円（千円未満四捨五入）、責任準備金は $\boxed{c}$ $\boxed{d}$ 百万円（百万円未満四捨五入）となる。

なお、予定利率iは年 2.5%とし、$v=\dfrac{1}{1+i}$として、年金現価率等の諸数値は次のとおりとする。

v^5=0.8839、v^{10}=0.7812、v^{15}=0.6905、v^{20}=0.6103、$\ddot{a}_{\overline{5|}}$=4.762、$\ddot{a}_{\overline{10|}}$=8.971

また、責任準備金の算出の際に用いる標準保険料については、その計算過程において端数が生ずる場合、千円未満を四捨五入した千円単位の標準保険料の金額を用いて、計算を行うものとすること。

（１３）下記の制度内容に基づく年金制度を考える。

○給付内容：脱退の翌期初より n 年間の確定年金を支給する。

加入期間 τ 年（1 年未満の端数切捨て）の退職者への年金額は $\alpha_\tau = \tau(1+i)^{\tau+1}$ とする。

○拠出：年 1 回期初拠出。

○財政方式：加入年齢方式。予定利率を i とし、$v=\dfrac{1}{1+i}$ とする。

財政再計算を実施し、再計算前後の脱退残存表（特定年齢 x_e 歳における被保険者数 l_{x_e} 人）を比較したところ、x_e+t 歳の予定脱退者数が再計算前よりも $0.01\,l_{x_e}$ 人増える一方で、x_e+2t 歳の予定脱退者数が再計算前よりも $0.01\,l_{x_e}$ 人減っていた。なお、その他の年齢における予定脱退者数に変わりはなかった。

今、財政再計算の前後で、標準保険料率 P_{x_e} が変わらなかったとすると、この場合に P_{x_e} を表す式として、最も適切なものを 1 つ選びなさい。

(A) $\dfrac{t(1-v^n)}{v^{t-1}(1-v^{t+1})}$　　(B) $\dfrac{t(1-v^n)}{v^t(1-v^t)}$

(C) $\dfrac{t(1-v^n)}{v^t(1-v^{t+1})}$　　(D) $\dfrac{t(1-v^n)}{v^{t+1}(1-v^{t-1})}$

(E) $\dfrac{t(1-v^n)}{v^{t+1}(1-v^t)}$　　(F) $\dfrac{2t(1-v^n)}{v^{t-1}(1-v^{t+1})}$

(G) $\dfrac{2t(1-v^n)}{v^t(1-v^t)}$　　(H) $\dfrac{2t(1-v^n)}{v^t(1-v^{t+1})}$

(I) $\dfrac{2t(1-v^n)}{v^{t+1}(1-v^{t-1})}$　　(J) $\dfrac{2t(1-v^n)}{v^{t+1}(1-v^t)}$

（１４）Trowbridge モデルの年金制度における各種財政方式の記述について、誤っているものの組み合わせとして最も適切なものを次の選択肢の中から１つ選びなさい。

① 単位積立方式の標準保険料は年齢 x の関数として示した場合、人員の減少、利息の両方の効果により、年齢 x に関して単調増加となる。

② 定常状態が実現している場合、加入年齢方式の積立金の額は、在職中の被保険者についての過去の保険料の元利合計と年金受給権者についての給付現価の合計額と一致するが、個人平準保険料方式については一致しない。

③ 定常状態が実現している場合、閉鎖型総合保険料方式の保険料および積立金の残高は加入年齢方式の保険料と積立金の残高と完全に一致する。

④ 到達年齢方式は閉鎖型総合保険料方式と異なり、標準保険料しか存在しない。

⑤ 開放型総合保険料方式を制度発足時に採用する場合、発足時点の保険料として「在職中の被保険者の過去勤務期間は通算するが、既に退職した従業員には給付を行わない」とすると、この場合の保険料は保険料の払込にかかる 1 年分の割引時間の差を考慮すれば、退職時年金現価積立方式の標準保険料と一致する。

⑥ 開放基金方式では、たとえ定常人口でなくとも新規加入者、脱退者が当初の見込みどおりであり、資産運用による積立不足が生じなければ、差損益が生じることはない。

⑦ 加入年齢方式、開放基金方式の保険料（標準保険料および特別保険料）は単位積立方式の各年齢の保険料の加重平均の形で表現することができる。

(A) ①と②と③　　(B) ①と③と⑤　　(C) ②と④と⑥
(D) ②と⑤と⑦　　(E) ③と④と⑥　　(F) ④と⑤と⑥
(G) ①と②と③と④　　(H) ①と③と⑤と⑦　　(I) ②と④と⑥と⑦
(J) ②と③と⑤と⑦　　(K) ③と④と⑥と⑦　　(L) ④と⑤と⑥と⑦
(M) いずれにも該当しない

問題２．次の①～⑮の空欄に当てはまる最も適切なものを算式群からそれぞれ１つずつ選びなさい。
なお、解答にあたり同じ記号を算式群から重複して選んでも良い。（１５点）

脱退・昇給・保険料の払込・給付の支払いが連続的に起こる年金制度を考える。
この年金制度は定常状態にあり、被保険者はいずれもx_e歳で加入し、定年年齢はx_r歳とする。
なお、この年金制度における給付は、加入期間が$\frac{n}{2}$年以上（$n=x_r-x_e$）で脱退した場合に行うものとし、脱退時給与をs倍した額（sは加入期間にかかわらず定率とする。）を原資に、脱退時から確定年金を支給する。
また、財政方式は加入年齢方式（特定年齢x_e歳）とする。

ここで、

δ ：予定利率による利力
μ_x ：年齢xにおける脱退力
β_x ：年齢xにおける昇給指数
λ_x ：年齢xにおける昇給力（$\lambda_x = \frac{d(\log \beta_x)}{dx}$）
n ：加入年齢から定年年齢までの年数（$n=x_r-x_e$）

とする。

今、加入年齢から定年年齢まで、脱退力及び昇給力が年齢によらず一定であるものとする（それぞれμ及びλと定義し、$\mu>\lambda>\delta$であるものとする）と、保険料率${}^EP$は、次のように表せる。

$$ {}^EP = \frac{\int_{\boxed{①}}^{n} \left(\boxed{②} \cdot A^\tau \right) d\tau + \boxed{③}}{\int_0^n A^\tau \, d\tau} $$

なお、ここで、$A=$ $\boxed{④}$ とする。
式を変形すると、

$$ {}^EP = \frac{\boxed{⑤} + \boxed{⑥}}{1-\boxed{⑦}} $$ と表すことができる。

また、加入期間t年の被保険者にかかる単位給与あたりの責任準備金${}_tV_{x_e}$は、$t \geq \frac{n}{2}$の場合、上記のA及び${}^EP$を用いて次のように表せる。

$$ {}_tV_{x_e} = \frac{1}{A^{\boxed{⑧}}} \left\{ \int_t^n \left\{ \left(\boxed{\quad ⑨ \quad} - {}^EP \right) \cdot A^{\tau} \right\} d\tau + \boxed{\quad ⑩ \quad} \right\} $$

式を変形すると、

$$ {}_tV_{x_e} = \frac{1}{\boxed{\quad ⑪ \quad}} \left\{ \left(\boxed{\quad ⑨ \quad} - {}^EP \right) + \frac{1}{1-\boxed{\quad ⑫ \quad}} \left\{ \boxed{\quad ⑬ \quad} + \boxed{\quad ⑭ \quad} \right\} A^{\boxed{⑮}} \right\} $$

よって、($\boxed{\quad ⑬ \quad} + \boxed{\quad ⑭ \quad}$) <0 の場合、${}_tV_{x_e}$ は $t \geq \frac{n}{2}$ で単調減少となる。

<u>算式群</u>

(A) 0　(B) n　(C) $\frac{n}{2}$　(D) t　(E) $n-t$　(F) $\frac{n}{2}-t$

(G) δ　(H) $\delta+\mu-\lambda$　(I) $\left(-\frac{1}{\delta+\mu-\lambda}\right)$

(J) $\left\{-\frac{1}{\mu-\lambda}\exp(-\delta)\right\}$　(K) $\left\{-\frac{1}{\delta}\exp(-(\mu-\lambda))\right\}$　(L) $\exp(-(\delta+\mu-\lambda))$

(M) s　(N) $s\mu$　(O) $\{-s(\lambda-\delta)\}$　(P) $s(\delta+\mu-\lambda)$

(Q) A^n　(R) $s\cdot A^n$　(S) $s\mu\cdot A^n$　(T) $\{-s(\lambda-\delta)\cdot A^n\}$　(U) $s(\delta+\mu-\lambda)\cdot A^n$

(V) $A^{\frac{n}{2}}$　(W) $s\cdot A^{\frac{n}{2}}$　(X) $s\mu\cdot A^{\frac{n}{2}}$　(Y) $\{-s(\lambda-\delta)\cdot A^{\frac{n}{2}}\}$　(Z) $s(\delta+\mu-\lambda)\cdot A^{\frac{n}{2}}$

問題3． Trowbridge モデルの年金制度について、2009 年度における 1 年間の財政運営の状況について考察する。

責任準備金と積立金の推移について、被保険者、年金受給権者および積立金から生じる運用収益を区分した＜分析表＞の空欄 a から s のそれぞれに当てまはる数値を解答欄にマークしなさい。

なお、分析上は、年度末積立金残高の予定と実績との差額はすべて、運用収益の予定と実績との差により生じた損益（ $\boxed{m}$ $\boxed{n}$ ）に区分するものとする。

積立方式は加入年齢方式を採用しており、2009 年度の 1 年間において特別保険料は存在せず、新たに年金受給権者になったものはいなかったとする。

また、表の中の各項目について、「▲」は負の値を示すものとし、計算過程において小数点以下の端数が生じた場合には、小数点以下第 1 位を四捨五入し整数値として計算しなさい。（１５点）

＜資料Ｉ＞　年度末の財政状況に関する資料

項目		2008 年度末	2009 年度末
S^p	年金受給権者の給付現価	5,000	4,700
S^a	在職中の被保険者に対応する給付現価	15,000	16,000
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	6,000	5,750
G^a	在職中の被保険者の給与現価	36,000	37,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	24,000	23,000
F	積立金残高	11,000	11,500
${}^{E}P$	標準保険料	0.25	
i	予定利率	3.0%	

＜資料Ⅱ＞　1 年間の資金収支（キャッシュフロー）

B	受給者に対する年金給付額（期初払）	500
C	年金制度への保険料拠出額（期初払）	600
ΔF	積立金に対する運用収益	？

＜分析表＞

被保険者等の区分		(1) 責任準備金の変動(予定額)	(2) 積立金の変動(予定額)	(3) 予定と実績との差損益	合計損益 (2)＋(3)－(1)
①被保険者	現在の被保険者	$\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\boxed{c}$	?	$\boxed{k}$ $\boxed{l}$	?
	将来の被保険者	?	$\boxed{g}$	?	?
②年金受給権者		▲ $\boxed{d}$ $\boxed{e}$ $\boxed{f}$	?	?	▲ $\boxed{o}$ $\boxed{p}$ $\boxed{q}$
③積立金から生じる運用収益		－	330	$\boxed{m}$ $\boxed{n}$	?
合計損益 (①＋②＋③)		?	$\boxed{h}$ $\boxed{i}$ $\boxed{j}$	?	$\boxed{r}$ $\boxed{s}$

※　？の項目は各自推測すること

以上

年金数理(解答例)

問題1.

（1）加入年齢方式による標準保険料${}^{E}P$および単位積立方式による標準保険料${}^{U}P_x$は

$$ {}^{U}P_x = \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} 、 {}^{E}P = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} $$

題意より${}^{U}P_x = {}^{E}P$であるから

$$ \frac{1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} $$

$$ \frac{1}{(x_r - x_e) \cdot D_x} = \frac{1}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} $$

$$ (x_r - x_e) \cdot D_x = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x $$

$$ (x_r - x_e) \cdot v^x \cdot l_x = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} (v^x \cdot l_x) $$

定年まで、定年以外の脱退および死亡脱退はいないものとするから、定年年齢以前については、常に$l_x = l_{x_e}$。よって

$$ (x_r - x_e) \cdot v^x \cdot l_{x_e} = l_{x_e} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^x = l_{x_e} \cdot v^{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{x_r - x_e}|} $$

$$ v^x = \frac{v^{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{x_r - x_e}|}}{(x_r - x_e)} $$

よって、$x = x_e + \dfrac{\log \ddot{a}_{\overline{x_r - x_e}|} - \log (x_r - x_e)}{\log v}$

・・・解答（J）

（2）初年度の給付額が１で、以降は「1＋（初年度から前年度までの給付の合計の 2.0%）」を期初に給付する n 年年金現価（予定利率 i %）は、t 年度の給付額を B_t とすると、$B_1 = 1$、$B_2 = 1.02$、$B_3 = 1 + (B_1 + B_2) \times 0.02 = 1.02^2$ ・・より

$B_k = 1.02^{k-1}$ と仮定すると、$B_{k+1} = 1 + \left(\sum_{t=1}^{k} B_t \right) \times 0.02 = 1 + \dfrac{1 - 1.02^k}{1 - 1.02} \times 0.02 = 1.02^k \therefore B_t = 1.02^{t-1}$

よって、この年金の現価は、$\displaystyle \sum_{t=1}^{n} 1.02^{t-1} \times \left(\frac{1}{1+i} \right)^{t-1} = \frac{1 - \left(\frac{1.02}{1+i} \right)^n}{1 - \left(\frac{1.02}{1+i} \right)}$ ・・・（ア）

n 年間各期初に１を給付する年金現価（予定利率 5.0%）は、$\dfrac{1 - \left(\frac{1}{1.05} \right)^n}{1 - \left(\frac{1}{1.05} \right)}$ ・・・（イ）

（ア）＝（イ）より、$\dfrac{1}{1.05} = \dfrac{1.02}{1+i}$　　$i = 7.1\,\%$ ・・・（ウ）

t 年度の給付額 t （$t \geq 1$）を期初に給付する永久年金現価（$I\ddot{a}_{\overline{m|}}$ において $m \to \infty$ としたもの、予定利率は i %とする）は、

①t 年度の給付額が t （$t \geq 1$）である期初払 m 年年金現価（予定利率 i %）

$$I\ddot{a}_{\overline{m|}} = \left(1 + \frac{1}{i} \right) \ddot{a}_{\overline{m|}} - \frac{n\,v^{m-1}}{i} \qquad \text{（ただし} v = \frac{1}{1+i}\text{）}$$

②m 年間各期初に１を給付する年金現価（予定利率 i %）

$$\ddot{a}_{\overline{m|}} = \frac{1 - v^m}{d} \qquad \text{（ただし} d = 1 - v\text{）}$$

において、$m \to \infty$ として求めると、$I\ddot{a}_{\infty} = \left(1 + \dfrac{1}{i} \right) \dfrac{1}{d}$ ・・・（エ）

ゆえに、（エ）に（ウ）を代入すると $I\ddot{a}_{\infty} = \left(1 + \dfrac{1}{i} \right) \dfrac{1}{d} = \left(1 + \dfrac{1}{i} \right) \dfrac{1+i}{i} = 227.5\cdots$

解答　$abc = 228$

（3）x 歳の給与を B_x とすると、y 歳（$x < y$）の給与は

$B_y = B_x \times (1 + R_x) \times (1 + R_{x+1}) \times \cdots \times (1 + R_{y-1})$

となる。

ここで、

$$1+R_x=1+\frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)}-x\cdot f_{(x)}}{x\cdot f_{(x)}}=\frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)}}{x\cdot f_{(x)}}$$

であるから、

$$B_y=B_x\times\frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)}}{x\cdot f_{(x)}}\times\frac{1.02(x+2)\cdot f_{(x+2)}}{(x+1)\cdot f_{(x+1)}}\times\cdots\times\frac{1.02y\cdot f_{(y)}}{(y-1)\cdot f_{(y-1)}}$$

$$=B_x\times\frac{1.02^{(y-x)}\cdot y\cdot f_{(y)}}{x\cdot f_{(x)}}$$

よって、$B_{40}=100{,}000\times\dfrac{1.02^{(40-20)}\cdot 40\cdot 30}{20\cdot 20}=445{,}784$ ・・・解答（E）

（4） 正しくは以下のとおり

①③④ 正

② $\bar{a}_{xy}\fallingdotseq a_{xy}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\cdot(\mu_x+\mu_y+\delta)$

⑤ $Ia_{\overline{n|}}=\frac{1}{i}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}}-nv^n\right)$・・解答（F）

（5） $\int_a^{2a} l_y dy=(3/2)\cdot a^2$、$\int_a^{2a} y\cdot l_y dy=(13/6)\cdot a^3$ により、

被保険者の平均年齢$=(13/9)\cdot a$、脱退者の平均年齢$=a+(3/2)\cdot a^2/(2a)=(7/4)\cdot a$

これより $a=36$ ・・・解答（I）

（6）（制度変更前における年金受給権者の給付現価をS^p、被保険者の将来期間分の給付現価をS^a_{FS}、被保険者の過去期間分の給付現価をS^a_{PS}とする。また、退職時年金現価積立方式、単位積立方式、加入時積立方式における定常状態の保険料を${}^TC$、${}^UC$、${}^{In}C$とする。）

制度変更前の単位積立方式による責任準備金は、${}^UV=S^p+S^a_{PS}$

一方、制度変更後の加入時積立方式による責任準備金は、${}^{In}V'=S^p+\alpha\cdot S^a_{PS}+\beta\cdot S^a_{FS}-\beta\cdot{}^{In}C$

${}^UV={}^{In}V'$ より、$(1-\alpha)\cdot S^a_{PS}=\beta\cdot(S^a_{FS}-{}^{In}C)$

$$\beta=(1-\alpha)\cdot\frac{S^a_{PS}}{S^a_{FS}-{}^{In}C}\quad\cdots①$$

ここで、教科書(3-47)式、(3-26)式、(3-29)式より $S^a_{PS}=\dfrac{1}{d}(v\cdot{}^TC-{}^UC)$、${}^TC=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$、

${}^UC=\dfrac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\cdot\dfrac{v(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}$ であるため、

$$S^a_{PS} = \frac{1}{d}(v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} - \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \cdot \frac{v(1-v^{x_r - x_e})}{1-v})$$

$$= \frac{v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{d(x_r - x_e)(1-v)} \left\{ (x_r - x_e)(1-v) - (1-v^{x_r - x_e}) \right\} \cdot\cdot\cdot ②$$

また、教科書(3-48)式、(3-29)式、(3-38)式より $S^a_{FS} = \frac{1}{d}({}^UC - v \cdot {}^{In}C)$、

$${}^UC = \frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \cdot \frac{v(1-v^{x_r - x_e})}{1-v}、\ {}^{In}C = v^{x_r - x_e} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$ であるため、

$$S^a_{FS} - {}^{In}C = \frac{1}{d}({}^UC - v \cdot {}^{In}C) - {}^{In}C = \frac{1}{d}({}^UC - {}^{In}C)$$

$$= \frac{1}{d}(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e} \cdot \frac{v(1-v^{x_r - x_e})}{1-v} - v^{x_r - x_e} \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r})$$

$$= \frac{v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{d(x_r - x_e)(1-v)} \left\{ (1-v^{x_r - x_e}) - (x_r - x_e)v^{x_r - x_e - 1}(1-v) \right\} \cdot\cdot\cdot ③$$

①、②、③および、題意より $n = x_r - x_e$ であることから、

$$\beta = (1-\alpha) \frac{n(1-v) - (1-v^n)}{(1-v^n) - n v^{n-1}(1-v)}$$ ・・・解答 **(B)**

（7） ${}^EP_{x_e} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r - 1} D_x}$、 ${}^{In}P_{x_e} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$ であるから、

$${}^EP_{x_e+1} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e+1}^{x_r - 1} D_x} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{-D_{x_e} + \sum_{x=x_e}^{x_r - 1} D_x} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{-\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{{}^{In}P_{x_e}} + \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{{}^EP_{x_e}}} = \frac{1}{-\frac{1}{{}^{In}P_{x_e}} + \frac{1}{{}^EP_{x_e}}} \fallingdotseq 0.26827$$

解答 $abc = 268$

（8） 再計算前の標準保険料率を P_A、再計算後の標準保険料率を P_B とすると

$$P_A = \frac{\ddot{a}_{60} \times D_{60} / D_{55}}{(N_{55} - N_{60}) / D_{55}} = \frac{\ddot{a}_{60} \times D_{60}}{N_{55} - N_{60}} \cdot\cdot\cdot ①$$

$$P_B = \frac{k \times \ddot{a}_{60} \times D_{60} / D_{55}}{(N_{55} - N_{59} + k \times D_{59}) / D_{55}} = \frac{k \times \ddot{a}_{60} \times D_{60}}{N_{55} - N_{59} + k \times D_{59}} \cdot\cdot\cdot ②$$

$P_B = 0.95 \times P_A$ であるので①、②から

$$\frac{k \times \mathrm{D}_{60}}{N_{55} - N_{59} + k \times D_{59}} = \frac{\mathrm{D}_{60}}{N_{55} - N_{60}} \times 0.95$$

これを k について解くと

$$k = \frac{0.95 \times (N_{55} - N_{59})}{N_{55} - N_{60} - 0.95 \times D_{59}} = 0.9398$$ ・・・解答 **(C)**

(9) 仮に予定利率引下げをおこなった場合の$t+1$年度における予定保険料収入はC'、予定給付額はBである（予定給付額は予定利率変更前後で変わらない）から、$t+1$年度における予定利率引下げ後の責任準備金は

$$V'_{t+1} = V'_t \cdot (1+i') + (C'-B) = F_t \cdot (1+i') + (C'-B) \qquad (\because V'_t = F_t)$$

となる

よって、$1+k$倍の給付増額後の責任準備金は

$$(1+k) \cdot V'_{t+1} = (1+k) \cdot \{F_t \cdot (1+i') + (C'-B)\}$$

となる。

一方、$t+1$年度における積立金は

$$F_{t+1} = F_t \cdot (1+j) + (C-B)$$

であるから

$$(1+k) \cdot V'_{t+1} = F_{t+1}$$

$$(1+k) \cdot \{F_t \cdot (1+i') + (C'-B)\} = F_t \cdot (1+j) + (C-B)$$

$$1+k = \frac{F_t \cdot (1+j) + (C-B)}{F_t \cdot (1+i') + (C'-B)}$$

$$k = \frac{F_t \cdot (1+j) + (C-B)}{F_t \cdot (1+i') + (C'-B)} - 1 = \frac{F_t \cdot (1+j) + (C-B) - F_t \cdot (1+i') - (C'-B)}{F_t \cdot (1+i') + (C'-B)}$$

$$= \frac{F_t \cdot (j-i') + (C-C')}{F_t \cdot (1+i') + (C'-B)}$$

・・・解答 (**D**)

(10) 責任準備金の推移に注目すると、

1,200＋300＋責任準備金に対する予定利息－240＝1,350より、

責任準備金に対する予定利息は90であるから、

予定利率は90／(1,200＋300)＝6%。

財政が予定通りに推移したことから、資産運用収入に注目して

60＝(650＋300＋特別保険料)×6%より特別保険料は50。

したがって期末の積立金は650＋300＋50＋60－240＝820。

・・・解答(**F**)

（１１）当初の定常状態において、極限方程式 $iF+C-B=0$ ・・・① が成立する。

$F=mB$ より、$imB+C-B=0$

よって、$B=\dfrac{1}{1-im}C$、$F=\dfrac{m}{1-im}C$

一方、予定利率のみをi'に変更した場合は、$i'F+C'-B=0$ ・・・② が成立する。

①－②より $(i-i')F+(C-C')=0$

$$i-i'=\frac{C'-C}{F}=\frac{C'-C}{\dfrac{m}{1-im}C}=\frac{1-im}{m}\left(\frac{C'}{C}-1\right)\quad \cdots ③$$

ところで、運用環境が悪化して1年後の年金資産 F_1 は、

$F_1=F(1+i')+C-B=F(1+i')-iF=F\{1-(i-i')\}$ ・・・④

F_1 と１年後に洗い替えた掛金 C_1 との間には $iF_1+C_1-B=0$ が成立し、④と同様にして、

$F_2=F_1(1+i')+C_1-B=F_1(1+i')-iF_1=F_1\{1-(i-i')\}=F\{1-(i-i')\}^2$

よって、$F_n=F\{1-(i-i')\}^n$

また、F_n と n 年後に給付を一律 $(1-\alpha)$ 倍に引下げた後の掛金 C_n^α の間には、

$iF_n+C_n^\alpha-(1-\alpha)B=0$ が成立する。

$C_n^\alpha=C$ より、$iF_n+C-(1-\alpha)B=0$ ・・・⑤

①－⑤より $i(F-F_n)-\alpha B=0$

よって、$\alpha=\dfrac{i(F-F_n)}{B}=\dfrac{iF}{B}\left[1-\{1-(i-i')\}^n\right]$

$F=mB$ および③より、$\alpha=im\left[1-\left\{1-\dfrac{1-im}{m}\left(\dfrac{C'}{C}-1\right)\right\}^n\right]$ ・・・解答 **（B）**

（１２）

●1 人あたりの標準保険料（P_{nc}）は題意より、

$$P_{nc}=\frac{\text{給付現価}}{\text{人数現価}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{50{,}000}{100{,}000}\times v^{10}\times 10{,}000\times 10+\dfrac{50{,}000}{100{,}000}\times v^{20}\times 10{,}000\times 20\right)\times \ddot{a}_{\overline{10}|}}{\left(1+\dfrac{50{,}000}{100{,}000}v^{10}\right)\times \ddot{a}_{\overline{10}|}}\fallingdotseq 71{,}974\text{円}\to 72\text{千円}$$

●制度全体の責任準備金（V）は題意より、

$V=$総給付現価$-P_{nc}\times$総人数現価

$=10\times(\dfrac{50{,}000}{100{,}000}\times v^5\times 10{,}000\times 10+\dfrac{50{,}000}{100{,}000}\times v^{15}\times 10{,}000\times 20)\times \ddot{a}_{\overline{10}|}+10\times(v^5\times 10{,}000\times 20)\times \ddot{a}_{\overline{10}|}$

$\quad -P_{nc}\times\{10\times(\ddot{a}_{\overline{5}|}+\dfrac{50{,}000}{100{,}000}\times v^5\times \ddot{a}_{\overline{10}|})+10\times \ddot{a}_{\overline{5}|}\}$

$=26{,}018{,}142.75-72{,}000$(72千円)$\times 134.8873345$

$=26{,}018{,}142.75-9{,}711{,}888.084$

$=16{,}306{,}254.666$円$\rightarrow 16$百万円

・・解答　$ab=72$、$cd=16$

（１３）${}_{\tau|}q_{x_e}$ を再計算前の脱退残存表に基づくもの、${}_{\tau|}q'_{x_e}$ を再計算後の脱退残存表に基づくものとする。

x_e+t 歳においては ${}_{t|}q'_{x_e}={}_{t|}q_{x_e}+0.01$、$x_e+2t$ 歳においては ${}_{2t|}q'_{x_e}={}_{2t|}q_{x_e}-0.01$、その他の年齢においては${}_{\tau|}q'_{x_e}={}_{\tau|}q_{x_e}$（$\tau\neq t$、$\tau\neq 2t$）かつ${}_{x_r-x_e}p'_{x_e}={}_{x_r-x_e}p_{x_e}$

教科書　第Ⅱ編実務編の(2-30)式より、

$$\sum_{y=x_e}^{x_r-1}v^{y-x_e+1}\ {}_{y-x_e|}q_{x_e}\left(\alpha_{y-x_e}\ \ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\ \ddot{s}_{\overline{y-x_e+1}|}\right)+v^{x_r-x_e}\ {}_{x_r-x_e}p_{x_e}\left(\alpha_{x_r-x_e}\ \ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\ \ddot{s}_{\overline{x_r-x_e}|}\right)=0$$

・・・①

$$\sum_{y=x_e}^{x_r-1}v^{y-x_e+1}\ {}_{y-x_e|}q'_{x_e}\left(\alpha_{y-x_e}\ \ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\ \ddot{s}_{\overline{y-x_e+1}|}\right)+v^{x_r-x_e}\ {}_{x_r-x_e}p'_{x_e}\left(\alpha_{x_r-x_e}\ \ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\ \ddot{s}_{\overline{x_r-x_e}|}\right)=0$$

・・・②

（$\ddot{s}_{\overline{n}|}$　:期初払いの n 年確定年金の単位年金額に対する終価）

②－①より、

$$v^{t+1}\ 0.01\left(\alpha_t\ \ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\ \ddot{s}_{\overline{t+1}|}\right)-v^{2t+1}\ 0.01\left(\alpha_{2t}\ \ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\ \ddot{s}_{\overline{2t+1}|}\right)=0$$

$$\left(0.01\,\alpha_t\ v^{t+1}-0.01\,\alpha_{2t}\ v^{2t+1}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\left(0.01\,\ddot{a}_{\overline{t+1}|}-0.01\,\ddot{a}_{\overline{2t+1}|}\right)=0$$

$$\left(0.01\times t-0.01\times 2t\right)\frac{1-v^n}{1-v}-P_{x_e}\left(0.01\frac{1-v^{t+1}}{1-v}-0.01\frac{1-v^{2t+1}}{1-v}\right)=0$$

$$P_{x_e} = \frac{-t\,(1-v^n)}{(1-v^{t+1})-(1-v^{2t+1})} = \frac{t\,(1-v^n)}{v^{t+1}\left(1-v^t\right)}$$ ・・・解答（E）

（１４）

① 正　教科書Ｐ６３の記述

② 誤　教科書Ｐ６５の記述とＰ７４の記述の組合せ

加入年齢方式も個人平準保険料方式も平準積立方式に属する財政方式であり、定常状態においては在職中の被保険者の過去の保険料の元利合計と年金受給権者の給付現価の合計は積立金に一致する。

③ 正　教科書Ｐ７７の記述

④ 誤　教科書Ｐ７６の記述、Ｐ７９の記述

総合保険料方式が標準保険料と特別保険料とを区別しておらず、到達年齢方式では標準保険料に加え、特別保険料の設定を行う。

⑤ 正　教科書Ｐ９０

⑥ 誤　教科書Ｐ９２

開放基金方式では、将来の被保険者を見込むため、年金制度が定常人口でなければ、計算基礎率どおりに人員が推移しても、被保険者などの人員規模が変化するため、差損益が生じてしまう。

⑦ 誤　教科書Ｐ１１０

加入年齢方式、開放基金方式の標準保険料については単位積立方式の各年齢の保険料の加重平均の形で表現することが出来るが、特別保険料についてはあくまで過年度の過去勤務債務や生じた差損益に対する保険料であるため、加重平均の形で表現することができない。

・・解答（Ｉ）

問題2.

$$v^{\tau}=\exp(-\delta\tau)$$

$$l_{x_e+\tau}=l_{x_e}\exp(-\int_{x_e}^{x_e+\tau}\mu_y dy)=l_{x_e}\exp(-\mu\tau)$$

$$b_{x_e+\tau}=b_{x_e}\exp(\int_{x_e}^{x_e+\tau}\lambda_y dy)=b_{x_e}\exp(\lambda\tau)$$

よって、

$$^{E}P=\frac{\int_{n/2}^{n}\left(v^{\tau}\cdot s\mu\frac{l_{x_e+\tau}b_{x_e+\tau}}{l_{x_e}b_{x_e}}\right)d\tau+v^{n}\cdot s\frac{l_{x_e+n}b_{x_e+n}}{l_{x_e}b_{x_e}}}{\int_{0}^{n}\left(v^{\tau}\cdot\frac{l_{x_e+\tau}b_{x_e+\tau}}{l_{x_e}b_{x_e}}\right)d\tau}$$

$$=\frac{\int_{n/2}^{n}(s\mu\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)\tau\})d\tau+s\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)n\}}{\int_{0}^{n}(\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)\tau\})d\tau}=\frac{\int_{n/2}^{n}(s\mu\cdot A^{\tau})d\tau+s\cdot A^{n}}{\int_{0}^{n}(A^{\tau})d\tau}$$

ここで、$A=\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)\}$

積分計算を行うと、

$$^{E}P=\frac{-\frac{1}{\mu+\delta-\lambda}s\mu\left(A^{n}-A^{n/2}\right)+s\cdot A^{n}}{-\frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left(A^{n}-1\right)}=\frac{s\left\{\mu\left(A^{n/2}-A^{n}\right)+(\mu+\delta-\lambda)A^{n}\right\}}{1-A^{n}}$$

$$=\frac{s\left\{\mu\cdot A^{n/2}+(\delta-\lambda)A^{n}\right\}}{1-A^{n}}$$

また、$t\geq\frac{n}{2}$ の場合の責任準備金についても同様に、

$${}_tV_{x_e}=\int_{t}^{n}\left[(s\mu-{}^{E}P)\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)(\tau-t)\}\right]d\tau+s\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)(n-t)\}$$

$$=\frac{1}{A^{t}}\left\{\int_{t}^{n}\{(s\mu-{}^{E}P)\cdot A^{\tau}\}d\tau+s\cdot A^{n}\right\}$$

積分計算を行うと、

$$
{}_tV_{x_e} = -\frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\frac{1}{A^t}(s\mu - {}^EP)\left(A^n - A^t\right) + \frac{1}{A^t}\cdot s\cdot A^n
$$

$$
= \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left\{(s\mu - {}^EP)\left(1-\frac{A^n}{A^t}\right) + s(\mu+\delta-\lambda)\cdot\frac{A^n}{A^t}\right\}
$$

$$
= \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left[(s\mu - {}^EP) + \left\{{}^EP + s(\delta-\lambda)\right\}\cdot\frac{A^n}{A^t}\right]
$$

$$
= \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left[(s\mu - {}^EP) + \left\{\frac{s\left\{\mu\cdot A^{n/2} + (\delta-\lambda)A^n\right\}}{1-A^n} + s(\delta-\lambda)\right\}\cdot\frac{A^n}{A^t}\right]
$$

$$
= \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left[(s\mu - {}^EP) + \frac{1}{1-A^n}\left\{s\mu\cdot A^{n/2} + s(\delta-\lambda)\right\}\cdot A^{n-t}\right]
$$

$\mu > \lambda > \delta$ より $\mu+\delta-\lambda > 0$ であり、$A < 1$

そのため、$\left\{s\mu\cdot A^{n/2} + s(\delta-\lambda)\right\} < 0$ のとき、${}_tV_{x_e}$ は $t \geq \dfrac{n}{2}$ で単調減少となる。

解答　①(C)　②(N)　③(R)　④(L)　⑤(X)　⑥(T)　⑦(Q)

⑧(D)　⑨(N)　⑩(R)　⑪(H)　⑫(Q)　⑬(X)　⑭(O)　⑮(E)

（注）⑤と⑥及び⑬と⑭の解答は、それぞれ逆でも正解。

問題３．

＜解答＞

被保険者等の区分		（１）責任準備金の変動（予定額）	（２）積立金の変動（予定額）	（３）予定と実績との差損益	合計損益 （２）＋（３）－（１）
①被保険者	現在の被保険者	(A)　798	618	(E)　48	▲132
	将来の被保険者	0	(C)　0	0	0
②年金受給権者		(B)　▲365	▲515	▲65	(G)　▲215
③積立金から生じる運用収益		－	330	(F)　67	397
合計損益（①＋②＋③）		433	(D)　433	50	(H)　50

(A)　2008 年度末の現在の被保険者責任準備金は資料より 15,000－36,000×0.25＝6,000

責任準備金の変動予定額は 6,000×0.03＋600×1.03＝798

(B)　2008 年度末の受給権者責任準備金は資料より 5,000

責任準備金の変動予定額は 5,000×0.03－500×1.03＝▲365

(C) 将来の被保険者に係る積立金の変動はないため 0

(D) 積立金の予定運用収益は資料より 11,000×0.03＝330
変動額の合計額は保険料収入 600×1.03－給付支払 500×1.03＋予定運用収益 330＝433

(E) 2009 年度末の現在の被保険者責任準備金は資料より 16,000－37,000×0.25＝6,750
被保険者の責任準備金予定変動額は①より 798、
予定と実績との差損益は 798－（6,750－6,000）＝48

(F) 2009 年度末積立金は資料より 11,500
予定運用収益は③より 330、年間の積立金変動額は 11,500－11,000＝500、（保険料収入 600－給付支払 500）×1.03＝103 より、予定と実績との差損益は 500－103－330＝67

(G) 2009 年度末の受給権者責任準備金は資料より 4,700
被保険者の責任準備金予定変動額は②より▲365、予定と実績との差損益は▲365－（4,700－5,000）＝▲65、積立金変動額が▲515 より、▲515－▲365＋▲65＝▲215

(H) 現在の被保険者の合計数値▲132＋受給権者の合計数値▲215＋積立金から生じる運用収益 397＝50

したがって、・・解答 $abc = 798$、$def = 365$、$g = 0$、$hij = 433$、$kl = 48$、$mn = 67$、
$opq = 215$、$rs = 50$

以上