損保数理（問題）

問題 1　次の (1) から (10) について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、解答用紙の所定の欄にその記号を記入せよ。(70 点)

(1)　ある年度において、ある保険商品の予定料率構成割合（保険期間 1 年）は下表のとおりであり、年間保険料は 10 であった。次年度以降、クレーム頻度が対前年度比で毎年度 5% ずつ上昇（すなわち 1.05 倍ずつ増加）していくこと、これに伴う損害査定コストの増加により発生経費が毎年度 2% ずつ上昇していくことがそれぞれ見込まれている。ただし、次年度以降も、クレーム単価の変動はないものとする。これらの上昇トレンドを反映するとき、今年度に販売する、この商品の保険期間 5 年の長期一時払契約の保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、代理店手数料と利潤は営業保険料に比例し、予定利率は 3% として計算すること。

予定損害率	50%
予定新契約費率	15%
予定維持費率	15%
代理店手数料率	15%
利潤率	5%

(選択肢)　(A) 41　(B) 43　(C) 45　(D) 47
(E) 49　(F) 51　(G) 53　(H) 55

(2)　ある事故の発生による入院日数に応じて、保険金を支払う保険商品がある。入院日数 X は平均 4 日の指数分布に従うことが分かっており、保険金の支払方法は以下のとおりである。なお、X は正の連続値を取るものとするが、保険金支払は、入院日数の小数点以下を切り上げて判定している。

- 入院日数が 4 日以内の場合、20 の保険金を支払う。
- 入院日数が 4 日を超えた場合、上記の保険金に加え、入院日数 4 日を超過した日数 1 日ごとに保険金 2 を支払う。
- 保険金の支払限度は 60 である。

事故が発生したときの、この保険商品の保険金の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば $e = 2.718$ として計算すること。

(選択肢)　(A) 23.00　(B) 23.05　(C) 23.10　(D) 23.15
(E) 23.20　(F) 23.25　(G) 23.30　(H) 23.35

(3)　ある保険会社において、「火災保険の損害率 X」と「賠償責任保険の損害率 Y」は、それぞれ以下の確率密度関数を持つ確率分布に従うものとする。

火災保険　　$f_1(x) = \dfrac{1}{\Gamma(0.5)} e^{-x}\, x^{-0.5} \quad x \geqq 0$

賠償責任保険　　$f_2(y) = \dfrac{1}{\Gamma(0.6)} e^{-y}\, y^{-0.4} \quad y \geqq 0$

今年度の両種目の年間保険料は等しかったが、将来、賠償責任保険の引受拡大が見込まれており、今年度との契約件数比 Z が、一様分布 $g(z) = 1/2\ (100\% \leqq z < 300\%)$ に従うものとする。また、火災保険の契約件数は変化がないものとする。このとき、将来における両種目合算での年間損害率の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、各クレームの発生はそれぞれ独立であり、種目内の各契約のリスクは同質である。したがって、火災保険 1 契約あたりの保険料は同額であり、賠償責任保険も同様である。また、必要があれば $\log 2 = 0.6931$ として計算すること。

（選択肢）　(A)　56.2%　(B)　56.3%　(C)　56.4%　(D)　56.5%
(E)　56.6%　(F)　56.7%　(G)　56.8%　(H)　56.9%

(4)　ある保険会社において、現在、使用目的に関する料率格差の導入を検討している。下記の実績を用いて、使用目的格差を導入した場合にこの実績のポートフォリオに適用すべき保険料を、次の要領で算出することとする。

①　各使用目的ごとに、有限変動信頼性理論に基づいて、適用すべき保険料を算出する。
②　合計の実績値を基に、合計での適用すべき保険料を有限変動信頼性理論に基づいて算出する。
③　①で求めた保険料の割合から、②で求めた保険料を各使用目的に割り振ることにより、最終的な各使用目的に適用すべき保険料を算出する。

ただし、①、②ともに、実績のクレーム額の合計が真のクレーム額の上下 5% 以内にある確率が 90% であることを全信頼度の基準とすることとし、個々のクレーム額の期待値、標準偏差はそれぞれ 115, 25、クレーム件数はポアソン分布に従うものとして計算することとする。

このとき、使用目的格差を導入した場合に通勤・通学に適用すべき保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、下表の実績には付加保険料は含まれておらず、答えについても付加保険料は考慮しなくてもよい。なお、必要があれば標準正規分布の上側 ε 点を $\mu(0.10) = 1.282, \mu(0.05) = 1.645, \mu(0.025) = 1.960$ として計算すること。

使用目的	保険料	支払保険金	事故件数
業務	59,500	68,500	548
通勤・通学	84,500	87,100	757
日常レジャー	143,300	131,700	1,317
合計	287,300	287,300	2,622

（選択肢）　(A)　87,000　(B)　87,100　(C)　87,200　(D)　87,300
(E)　87,400　(F)　87,500　(G)　87,600　(H)　87,700

(5) ある保険会社の地域別ロス状況は下表のとおりである。

	事故の有無	
	無	有
A 地域	確率＝ 0.8	確率＝ 0.2
B 地域	0.7	0.3
C 地域	0.5	0.5
D 地域	0.2	0.8

今、ある特定の地域を無作為に（確率 1/4 で）選択し、5 件の保険契約を抽出したところ、3 件の事故があった。再度同地域から 5 件を抽出したとき何件の事故件数になるかを、Bühlmann モデルによって推定することにしたとき、それに最も近いものは選択肢のうちのどれか。なお、1 契約につき 2 件以上の事故が発生することはない。

（選択肢） (A) 2.00 (B) 2.10 (C) 2.20 (D) 2.30
(E) 2.40 (F) 2.50 (G) 2.60 (H) 2.70

(6) ある保険会社の住宅火災保険の料率は、構造別 2 区分（木造と非木造）と地区別 2 区分（密集地区と非密集地区）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この保険契約の実績統計を分析したところ、リスク区分ごとのエクスポージャ数と相対クレームコスト指数は下表のとおりであった。今、この複合分類リスクの構造が加法型であるものと仮定して、二つの危険標識についての料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、「木造」に対応する料率係数を 1.000 とした場合の「非密集地区」に対応する料率係数の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

エクスポージャ数

	密集地区	非密集地区	合　計
木　造	1,000	600	1,600
非木造	200	800	1,000
合　計	1,200	1,400	2,600

相対クレームコスト指数

	密集地区	非密集地区	合　計
木　造	1.368	1.026	1.240
非木造	0.342	0.684	0.616
合　計	1.197	0.831	1.000

（選択肢） (A) −0.670 (B) −0.347 (C) −0.154 (D) −0.086
(E) 0.086 (F) 0.154 (G) 0.347 (H) 0.670

(7)　ある保険会社が販売しているある損害保険商品について、以下のようなデータを基に 2005 年度末のＩＢＮＲ備金を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もった場合、それに最も近いものは選択肢のうちのどれか。

単年度支払保険金

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2002	3,500	1,155	772	347
2003	3,990	1,323	926	
2004	3,528	1,158		
2005	3,936			

ただし、すべての保険事故は、発生年度から 4 年後には支払が完了しているものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントの予測値には、対応する事故年度の既知の値を単純平均したものを用い、またインフレ率は過去実績・将来予測とも一律で年率 5% を用いるものとする。なお、計算過程において端数が生じる場合には、そのつど、保険金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数に、係数については小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位に端数処理してから次の計算に移ることとする。

（選択肢） (A)　2,900　(B)　3,100　(C)　3,300　(D)　3,500
(E)　3,700　(F)　3,900　(G)　4,100　(H)　4,300

(8)　積立保険の保険料年払契約において、保険期間中に全損失効が全く発生しない場合の保険会社の損失として正しいものは、選択肢のうちのどれか。ただし、損失とは (支出の現価) − (収入の現価) とし、積立保険料、満期返戻金以外の収入・支出はないものとする。また、満期返戻金を W、保険期間を n 年、予定利率を i、現価率を $v=\dfrac{1}{1+i}$、予定契約消滅率 q を考慮した現価率を $\phi=(1-q)v$ とする。

（選択肢）

(A)　$Wv^n - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\cdot\dfrac{1-v^n}{1-v}$　(B)　$W - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\cdot\dfrac{1-v^n}{1-v}$

(C)　$W\phi^n - W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\cdot\dfrac{1-v^n}{1-v}$　(D)　$Wv^n - Wv^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\cdot\dfrac{1-v^n}{1-v}$

(E)　$W\phi^n - Wv^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\cdot\dfrac{1-v^n}{1-v}$　(F)　$Wv^n - W\phi^n \dfrac{1-v}{1-v^n}\cdot\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$

(G)　$W\phi^n - Wv^n \dfrac{1-v}{1-v^n}\cdot\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$　(H)　$Wv^n - W \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\cdot\dfrac{1-v^n}{1-v}$

(9)　1 年間の事故発生率が 10%、損害額の分布が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{50}\exp\left\{-\dfrac{3}{100}(x-100)\right\} & 0 < x < 100 \\ \dfrac{C}{50}\left(\dfrac{100}{x}\right)^3 & x \geqq 100 \end{cases} \qquad (C \text{ は定数})$$

に従う保険契約を引き受ける（保険料については純保険料のみ考慮することとし、安全割増等のその他の要素は考慮しない。）にあたり、エクセスポイント 100、カバーリミット無制限の超過損害額再保険を 50% 手配する（再保険料についてもネット再保険料のみを考慮するとし、安全割増等のその他の要素は考慮しない。）こととした。たとえば、150 の損害が発生したときは、$(150-100)\times 50\% = 25$ を再保険金として回収することとなる。

保険会社の期首のリザーブが 150 であり、保険料収入、再保険料支払が期首に行われた場合、1 年後にこの保険会社が破産している確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。ただし、事故が 1 件起きるとこの保険契約は終了するものとする。なお、必要があれば $e = 2.718$ として計算すること。

（選択肢）　(A)　0.17%　(B)　0.19%　(C)　0.21%　(D)　0.23%
　　　　　(E)　1.7%　(F)　1.9%　(G)　2.1%　(H)　2.3%

(10)　ある保険会社の賠償責任保険は、1 事故あたりのクレーム額分布が平均 5 千万円の指数分布に従うことが分かっている。この保険会社は、出再割合 20% の比例再保険を特約再保険として手配しており、さらに、保有部分に対してエクセスポイント 1 億円、カバーリミット 2 億円の超過損害額再保険を手配することとした。この場合、元受保険金期待値に対する、両再保険からの再保険金回収期待値合計の割合に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば $e = 2.718$ として計算すること。

（選択肢）　(A)　25.9%　(B)　26.1%　(C)　26.3%　(D)　26.5%
　　　　　(E)　26.7%　(F)　26.9%　(G)　27.1%　(H)　27.3%

問題 2　複数の契約で同時にクレームが発生する事象があり、1 年間にこの事象が起こる回数 N_1 は平均 λ のポアソン分布に従っている。また、ある保険会社のポートフォリオにおいて、この事象が 1 回起こった際に、クレームの発生する契約件数 N_2 の確率関数が次式であることが分かっている。なお、この事象以外の事由では、各契約にはクレームが発生しないものとする。

$$f(n_2) = \frac{1}{n_2 \log(1+\varphi)} \left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)^{n_2} \qquad n_2 = 1, 2, 3, \cdots,\ \varphi > 0 \text{ は定数}$$

このとき、次の各問いに答えよ。　　(16 点)

(1)　1 年間に発生するクレーム件数 N の積率母関数 $M_N(t)$ を求めよ。なお、N は、i 番目の事象でクレームの発生する契約件数を $(N_2)_i$ としたときに、$N = (N_2)_1 + (N_2)_2 + \cdots + (N_2)_{N_1}$ と表すことができる。

(2)　N のキュムラント母関数 $\log M_N(t)$ を用い、$E(N)$ と $V(N)$ を求めよ。

(3)　前問までに加え、さらに 1 事象 1 契約あたりのクレーム額 X の平均を $E(X) = \alpha$、分散を $V(X) = \beta$ とする。このとき、「クレーム総額の実績 T が $100p\%$ の確率で、真のクレームコストの上下 $100\,l\,\%$ に収まれば、T に全信頼を与える」という制約条件を設定したとき、全信頼を与えるのに最低必要となる年間クレーム件数 n_F を求めよ。ただし、$\dfrac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}}$ が標準正規分布に近似的に従うものとし、解答は $\varphi,\ \alpha,\ \beta,\ l,\ y_{\frac{1-p}{2}}$ を用いて表すこととする。なお、$y_{\frac{1-p}{2}}$ は標準正規分布の上側 $100 \cdot \dfrac{1-p}{2}\%$ 点である。

問題 3 ある保険会社の時刻 t 時点でのサープラス U_t は Lundberg モデル、すなわち、

○ 期首サープラス　$u_0(\geqq 0)$

○ クレーム総額過程：

・ 複合ポアソン過程　$\{S_t\}$

・ クレーム件数過程のパラメータ　λ

・ 個々のクレーム額の平均　μ

○ 収入保険料　$P_t = (1 + \theta)\lambda\mu t, \quad \theta\ (>0)$ は安全割増率

として、$U_t = u_0 + (1 + \theta)\lambda\mu t - S_t$ と表せるものとする。また、$M_X(r)$ を個々のクレーム額の積率母関数として、r に関する方程式 $\lambda + (1 + \theta)\lambda\mu r = \lambda M_X(r)$ に正値の解が存在する場合、その解を調整係数 R とする。このとき、次の各問いに答えよ。 (14 点)

(1) n 回目のクレーム発生までに破産する確率を $\varepsilon_n(u_0)$ とした場合、任意の $n(\geqq 1)$ に対して、$\varepsilon_n(u_0) < \exp(-Ru_0)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明したい。なお、破産とはサープラスがマイナスになることをいう。

① $\varepsilon_1(u_0) < \exp(-Ru_0)$ であることを証明せよ。

② $n = k\ (\geqq 1)$ のとき $\varepsilon_n(u_0) < \exp(-Ru_0)$ が成り立つと仮定して、$n = k + 1$ のときにも $\varepsilon_n(u_0) < \exp(-Ru_0)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) このモデルにおいて、期首サープラスが 30、クレーム件数過程のパラメータ λ が 2、個々のクレーム額分布が確率密度関数 $f(x) = \dfrac{2}{\Gamma(10)} \exp(-2x) \cdot (2x)^9,\ x > 0$ で表されるガンマ分布に従うものとする。このとき、破産確率を 5% まで許容できるとした場合に必要な安全割増を、(1) で証明した不等式を用いて求めよ。答えは小数点以下第 3 位を四捨五入して小数点以下第 2 位まで求めよ。なお、必要があれば $\log 0.05 = -3.00$ として計算すること。

以　上

損保数理（解答例）

問題 1

(1)　(B)　　　（テキスト 1-33 ページ参照）

1 年契約の予定損害率、予定新契約費率、予定維持費率をそれぞれ p, α, β とし、代理店手数料率と利潤率をそれぞれ θ, δ とすると、求める保険料 は以下のとおりとなる。

$$P = 10 \cdot \frac{\alpha + p \times \dfrac{1 - V_1^5}{1 - V_1} + \beta \times \dfrac{1 - V_2^5}{1 - V_2}}{1 - (\theta + \delta)}$$

ここで、$V_1 = \dfrac{1 + 0.05}{1 + 0.03}, V_2 = \dfrac{1 + 0.02}{1 + 0.03}$ であり、$p = 0.5, \alpha = \beta = 0.15, \theta = 0.15, \delta = 0.05$ を代入すると、$P = 43.5\ldots$ となる。

(2)　(G)　　　（テキスト 2-5 ページ参照）

支払う保険金は、

$$\begin{cases} 20 & (0 < x \leq 4) \\ 20 + 2k & (3 + k < x \leq 4 + k \text{ のとき、} k = 1, 2, 3, \ldots, 20) \\ 60 & (24 < x) \end{cases}$$

であるから、求める期待値は、

$$\begin{aligned}
&\int_0^4 20 \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx + \sum_{k=1}^{20} \int_{3+k}^{4+k} (20 + 2k) \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx + 60 \int_{24}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx \\
&= \int_0^{\infty} 20 \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} dx + 2 \sum_{k=1}^{20} k(e^{-\frac{3+k}{4}} - e^{-\frac{4+k}{4}}) + 40 \int_{24}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} dx \\
&= 20 + 2 \sum_{k=1}^{20} k(e^{-\frac{3+k}{4}} - e^{-\frac{4+k}{4}}) + 40e^{-6} \\
&= 20 + 2 \sum_{k=1}^{20} e^{-\frac{k+3}{4}} - 40e^{-6} + 40e^{-6} \\
&= 20 + 2e^{-1} \frac{1 - e^{-\frac{20}{4}}}{1 - e^{-\frac{1}{4}}} = 20 + 2 \frac{e^{-1} - e^{-6}}{1 - e^{-0.25}} = 23.304\ldots
\end{aligned}$$

となる。

(3)　(D)　　　（テキスト 2-11 ページ参照）

現時点の両種目の保険料をそれぞれ 1 とすると、賠償責任保険の総ロス分布は $\Gamma(0.6, 1)$ となる。ガンマ分布の再生性から、（現時点の）契約件数を N とした場合の単位契約ごとの総ロス分布は $\Gamma\left(\dfrac{0.6}{N}, 1\right)$ であり、契約件数が NZ となった場合の総ロス分布は $\Gamma(0.6Z, 1)$ とすることができる。したがって、両種目合算での総ロス分布は $\Gamma(0.5 + 0.6Z, 1)$ であり、損害率期待値は $\dfrac{0.5 + 0.6Z}{1 + Z}$ となる。

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{0.5 + 0.6z}{1 + z} \cdot \frac{1}{2} dz &= \frac{1}{2} \int_1^3 (0.6 - \frac{0.1}{1 + z}) dz \\
&= 0.6 - \frac{0.1}{2} \times [\log(1 + z)]_1^3 = 0.6 - \frac{0.1}{2} \times \log 2 = 0.565345\ldots
\end{aligned}$$

となる。

(4) (G) (テキスト 3-20 ページ参照)

全信頼度に必要なクレーム件数を求める。

$$\text{全信頼度に必要なクレーム件数} = \left(\frac{1.645}{0.05}\right)^2 \times \left(1 + \left(\frac{25}{115}\right)^2\right) = 1,133.5636$$

次に、使用目的ごとの信頼度を求める。

$$\text{業務の信頼度} = \sqrt{\frac{548}{1133.5636}} = 0.6953\text{、通勤・通学の信頼度} = \sqrt{\frac{757}{1133.5636}} = 0.8172\text{、}$$

日常レジャーの信頼度および合計の信頼度は、1 である。

次に、手順①、②より各使用目的ごとの保険料を求める。

業務目的の保険料 : $0.6953 \times 68,500 + (1 - 0.6953) \times 59,500 = 65,757.70$

通勤・通学目的の保険料 : $0.8172 \times 87,100 + (1 - 0.8172) \times 84,500 = 86,624.72$

日常レジャー目的の保険料 : $131,700$

合計の保険料 : $287,300$

最後に、手順③より最終的な各使用目的に適用すべき保険料を求める。

$$\text{業務目的に適用すべき保険料} : 287,300 \times \frac{65,757.70}{65,757.70 + 86,624.72 + 131,700} = 66,502.4\ldots$$

$$\text{通勤・通学目的に適用すべき保険料} : 287,300 \times \frac{86,624.72}{65,757.70 + 86,624.72 + 131,700} = \underline{87,605.8\ldots}$$

$$\text{日常レジャー目的に適用すべき保険料} : 287,300 \times \frac{131,700}{65,757.70 + 86,624.72 + 131,700} = 133,191.7\ldots$$

(5) (H) (テキスト 3-30 ページ参照)

5 件抽出したときの事故件数を S、抽出地域の事故有りの確率を Θ とする。

このとき、$E[S\,|\Theta] = 5\Theta,\ V[S\,|\Theta] = 5\Theta(1 - \Theta)$ である。

また、$P(\Theta = 0.2) = P(\Theta = 0.3) = P(\Theta = 0.5) = P(\Theta = 0.8) = \dfrac{1}{4}$ より、

$$\begin{aligned}
E\,[\Theta] &= \frac{0.2 + 0.3 + 0.5 + 0.8}{4} = 0.45 \\
E\left[\Theta^2\right] &= \frac{0.04 + 0.09 + 0.25 + 0.64}{4} = 0.255 \\
V[\Theta] &= 0.255 - 0.45^2 = 0.0525
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
V[E[S\,|\Theta]] &= V[5\Theta] = 25V[\Theta] = 25 \times 0.0525 = 0.3125 \\
E[V[S\,|\Theta]] &= E[5\Theta(1 - \Theta)] = 5E[\Theta] - 5E[\Theta^2] = 5 \times 0.45 - 5 \times 0.255 = 0.975
\end{aligned}$$

したがって、Bühlmann モデルによる信頼度 Z は、$Z = \dfrac{1}{1 + \dfrac{0.975}{1.3125}} = 0.57377\cdots$ となる。

よって、事故件数の推定値は、$0.57377 \times \dfrac{3}{5} \times 5 + (1 - 0.57377) \times 2.25) = 2.68$ となる。

(6) (F) (テキスト 4-12 ページ参照)

＜エクスポージャ数＞

	密 集 地 区	非密集地区
木　造	E_{11}	E_{12}
非木造	E_{21}	E_{22}

＜相対クレームコスト指数＞

	密 集 地 区	非密集地区
木　造	r_{11}	r_{12}
非木造	r_{21}	r_{22}

＜相対クレームコスト指数の推定値＞

	密 集 地 区	非密集地区	合　計
木　造	$\hat{r}_{11}$	$\hat{r}_{12}$	x_1
非木造	$\hat{r}_{21}$	$\hat{r}_{22}$	x_2
合　計	y_1	y_2	-

上記のように定義すると、Minimum Bias 法によれば各 $\hat{r}_{ij}$ は次の連立方程式を満たさなければならない。

$$\begin{cases} E_{11}\ (r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}\ (r_{12}-\hat{r}_{12})=0 \\ E_{21}\ (r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}\ (r_{22}-\hat{r}_{22})=0 \\ E_{11}\ (r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}\ (r_{21}-\hat{r}_{21})=0 \\ E_{12}\ (r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}\ (r_{22}-\hat{r}_{22})=0 \end{cases}$$

ここで $A=r_{11}-\hat{r}_{11}, B=r_{12}-\hat{r}_{12}, C=r_{21}-\hat{r}_{21}, D=r_{22}-\hat{r}_{22}$ とおき、E_{ij} を代入すれば、$A:B:C:D=12:-20:-60:15$ となるので、

$$A=12E, B=-20E, C=-60E, D=15E$$

とおく。ここで、この複合リスクの構造が加法型であることにより、$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j$ であるから、上式は次のように整理できる。

$$\begin{cases} x_1+y_1=r_{11}-12E\cdots\cdots(1) \\ x_1+y_2=r_{12}+20E\cdots\cdots(2) \\ x_2+y_1=r_{21}+60E\cdots\cdots(3) \\ x_2+y_2=r_{22}-15E\cdots\cdots(4) \end{cases}$$

よって $(1)-(2)-(3)+(4)$ より

$$E=\frac{r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22}}{107}=0.00639$$

と求まる。題意により $x_1=1.000$ が与えられているので、(2) に代入することで、

$$y_2=r_{12}+20E-x_1=1.026+20\times 0.00639-1.000=0.154$$

となる。

(7)　(G)　　　(テキスト 5-11 ページ参照)

累計支払保険金（インフレ調整前）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2002	3,500	4,655	5,427	5,774
2003	3,990	5,313	6,239	
2004	3,528	4,686		
2005	3,936			

累計支払保険金（インフレ調整後）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2002	3,500	4,600	5,300	5,600
2003	3,800	5,000	5,800	
2004	3,200	4,200		
2005	3,400			

$$C'_{1,1} = C_{1,1}$$

$$C'_{i,1} = \frac{C_{i,1}}{\prod_{l=1}^{i-1} 1.05} \qquad (l = 2,3,4)$$

$$C'_{i,j} = \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\prod_{i=1}^{i+j-2} 1.05} + C'_{i,j-1} \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ j = 2,3,4 \end{pmatrix}$$

ロスディベロップメントファクター

事故年度	経過年度			
	1→2	2→3	3→4	(※)
2002	1.314	1.152	1.057	1.000
2003	1.316	1.160	1.057	1.057
2004	1.313	1.156	1.057	1.222
2005	1.314	1.156	1.057	1.606

※ 2005 年度末から最終支払完了まで

$$b_j = \frac{1}{4-j+1} \sum_{i=1}^{4-j+1} \frac{C'_{i,j}}{C'_{i,j-1}} \quad (j = 2,3,4)$$

累計保険金予想（インフレ調整後）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終
2002	3,500	4,600	5,300	5,600
2003	3,800	5,000	5,800	6,131
2004	3,200	4,200	4,855	5,132
2005	3,400	4,468	5,165	5,459

累計保険金予想（インフレ調整前）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終
2002	3,500	4,655	5,427	5,774
2003	3,990	4,313	5,239	6,641
2004	3,528	4,686	5,482	5,836
2005	3,936	5,234	6,124	6,518

最終発生損害額予想

事故年度	最終累計発生保険金	IBNR
2002	5,774	0
2003	6,641	402
2004	5,836	1,150
2005	6,518	2,582
		4,134

よって、正解は、(G)。

(8)　(A)　　　　(テキスト 6-6 ページ参照)

年払契約の積立保険料 P_n は、$P_n = W\phi^n \dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}$ である。全損失効が発生しないので、収入積立保険料の現価は、$P_n\left\{1+v+v^2\cdots+v^{n-1}\right\} = P_n\dfrac{1-v^n}{1-v}$ となる。支出の現価は、全損失効しないので、Wv^n である。

よって、損失＝支出－収入＝ $Wv^n - W\phi^n\dfrac{1-\phi}{1-\phi^n}\dfrac{1-v^n}{1-v}$ となる。

(9)　(A)　　　　(テキスト 8-8 ページ参照)

この保険契約の損害額の期待値は、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xf(x)dx &= C\left\{\int_0^{100}\frac{x}{50}\exp\left(-\frac{3x}{100}+3\right)dx + \int_{100}^\infty \frac{x}{50}\left(\frac{100}{x}\right)^3 dx\right\}\\ &= C\left\{\frac{2}{3}e^3\left[-x\exp\left(-\frac{3x}{100}\right)-\frac{100}{3}\exp\left(-\frac{3x}{100}\right)\right]_0^{100} - \frac{100^3}{50}\left[\frac{1}{x}\right]_{100}^\infty\right\}\\ &= \frac{1000+200e^3}{9}C\end{aligned}$$

であるから、この保険契約の純保険料は、$\dfrac{1000+200e^3}{9}C\times 10\% = \dfrac{100+20e^3}{9}C$ となる。一方、再保険料は再保険金の期待値に等しいので、

$$\begin{aligned}10\%\times\int_{100}^\infty 0.5(x-100)f(x)dx &= 0.05C\int_{100}^\infty (x-100)\frac{1}{50}\left(\frac{100}{x}\right)^3 dx\\ &= 1000C\left[\frac{50}{x^2}-\frac{1}{x}\right]_{100}^\infty = 5C\end{aligned}$$

1 年後にこの保険会社が破産するのは、「損害額－再保険金」が「期初のリザーブ＋保険料－再保険料」を超過する場合である。よって、保険会社が破産する損害額を x とすると、期初のリザーブ >100 より $x>100$ は明らかなので、

$$x-0.5(x-100) > 150 + \frac{100+20e^3}{9}C - 5C$$

$$\therefore\quad x > 200 + \frac{110+40e^3}{9}C\ (=A\text{ とおく})$$

となる。一方、$\int_0^\infty f(x)dx = 1$ を満たすことから、

$$\int_0^\infty f(x)dx = C\left\{\int_0^{100} \frac{1}{50}\exp\left(-\frac{3x}{100}+3\right)dx + \int_{100}^\infty \frac{1}{50}\left(\frac{100}{x}\right)^3 dx\right\}$$
$$= C\left\{\frac{2}{3}e^3\left[-\exp\left(-\frac{3x}{100}\right)\right]_0^{100} - 100^2\left[\frac{1}{x^2}\right]_{100}^\infty\right\}$$
$$= \frac{1+2e^3}{3}C = 1$$
$$\therefore \quad C = \frac{3}{1+2e^3}$$

となる。したがって、破産確率は、

$$10\% \times P(X > A) = 0.1 \cdot \int_A^\infty f(x)dx = -\left[\frac{1000C}{x^2}\right]_A^\infty = 0.17\%$$

となる。

(10)　(D)　　　(テキスト 8-11,12 ページ参照)

比例再保険からの保険金回収期待値を α、超過損害額再保険からの保険金回収期待値を β とする。さらに、事故発生率の期待値を λ とすると、

$$\alpha = \lambda \times 0.2 \times 0.5 = 0.1\lambda \text{億円}$$
$$\beta = 0.8\lambda \times \left(\int_{1.25}^{3.75} 2(x-1.25)\exp(-2x)\,dx + 2.5\int_{3.75}^\infty 2\exp(-2x)\,dx\right)$$
$$= 0.8\lambda \times \left([-x\exp(-2x) - 0.5\exp(-2x)]_{x=1.25}^{x=3.75} + [1.25\exp(-2x)]_{x=1.25}^{x=3.75} + 2.5\times[-\exp(-2x)]_{x=3.75}^{x=\infty}\right)$$
$$= 0.8\lambda \times \left([-x\exp(-2x) + 0.75\exp(-2x)]_{x=1.25}^{x=3.75} + 2.5\times[-\exp(-2x)]_{x=3.75}^{x=\infty}\right)$$
$$= 0.8\lambda \times (-3\exp(-7.5) + 0.5\exp(-2.5) + 2.5\exp(-7.5))$$
$$= 0.8\lambda \times (0.5\exp(-2.5) - 0.5\exp(-7.5))$$
$$= \lambda \times 0.032613\ldots \text{億円}$$

となるので、$(\alpha+\beta) \div 0.5\lambda = 0.2652\cdots$ から、正解は (D)。

問題2　　　(テキスト 2-9、3-21 ページ参照)

(1)　N の積率母関数 $M_N(t)$ は、

$$M_N(t) = E(e^{tN}) = E_{N_1}(E(e^{tN}|N_1))$$
$$= E_{N_1}(M_{N_2}(t)^{N_1}) = E_{N_1}(e^{N_1\cdot\log M_{N_2}(t)})$$
$$= M_{N_1}(\log M_{N_2}(t))$$

となる。また、

$$M_{N_1}(t) = \sum_{n_1=0}^\infty e^{tn_1}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n_1}}{n_1!} = \sum_{n_1=0}^\infty \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^t}}\cdot e^{-\lambda e^t}\frac{(\lambda e^t)^{n_1}}{n_1!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda e^t}} = e^{\lambda e^t - \lambda}$$

である。
さらに、

$$M_{N_2}(t) = \sum_{n_2=1}^{\infty} e^{tn_2} \cdot \frac{1}{n_2 \times \log(1+\varphi)} \left(\frac{\varphi}{1+\varphi}\right)^{n_2}$$
$$= \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2 \times \log(1+\varphi)} \left(\frac{\varphi e^t}{1+\varphi}\right)^{n_2}$$

であり、$\alpha = \dfrac{\varphi e^t}{1+\varphi-\varphi e^t}$ とすると、

$$M_{N_2}(t) = \frac{\log(1+\alpha)}{\log(1+\varphi)} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2 \log(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{n_2}$$
$$= \frac{\log(1+\varphi) - \log(1+\varphi-\varphi e^t)}{\log(1+\varphi)}$$

したがって、

$$M_N(t) = \exp\left\{\lambda(\frac{\log(1+\varphi) - \log(1+\varphi-\varphi e^t)}{\log(1+\varphi)} - 1)\right\}$$
$$= \exp\left\{\frac{-\lambda}{\log(1+\varphi)} \log(1+\varphi-\varphi e^t)\right\}$$
$$= (1+\varphi-\varphi e^t)^{\frac{-\lambda}{\log(1+\varphi)}}$$

となる。
(2)　$\log M_N(t) = \dfrac{-\lambda}{\log(1+\varphi)} \log(1+\varphi-\varphi e^t)$ であるから、

$$\frac{d(\log M_N(t))}{dt} = \frac{-\lambda}{\log(1+\varphi)} \cdot \frac{-\varphi e^t}{1+\varphi-\varphi e^t}$$

となる。したがって、

$$E(N) = \left.\frac{d(\log M_N(t))}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\lambda\varphi}{\log(1+\varphi)}$$
$$\frac{d^2(\log M_N(t))}{dt^2} = \frac{-\lambda}{\log(1+\varphi)} \cdot \frac{-\varphi e^t(1+\varphi-\varphi e^t) - \varphi^2 e^{2t}}{(1+\varphi-\varphi e^t)^2}$$

となることから、$V(N) = \left.\dfrac{d^2(\log M_N(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = \dfrac{\lambda\varphi(1+\varphi)}{\log(1+\varphi)}$ となる。
(3)　設問の制約条件は $P(\dfrac{|T-E(T)|}{\sqrt{V(T)}} < \dfrac{lE(T)}{\sqrt{V(T)}}) = p$ と表現することができる。ここで、$\dfrac{T-E(T)}{\sqrt{V(T)}}$ が標準正規分布に近似できるので、$P\left(\dfrac{|T-E(T)|}{\sqrt{V(T)}} < \dfrac{lE(T)}{\sqrt{V(T)}}\right) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{lE(T)}{\sqrt{V(T)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds$ であり、

題意は $\dfrac{lE(T)}{\sqrt{V(T)}} \geq y_{\frac{1-p}{2}}$ を満たすクレーム件数を導くことと同意である。(2) の結果を用い、

$$\frac{lE(T)}{\sqrt{V(T)}} = \frac{lE(N)\cdot E(X)}{\sqrt{E(N)\cdot V(X)+V(N)\cdot E(X)^2}} = \frac{l\sqrt{E(N)}}{\sqrt{\frac{V(X)}{E(X)^2}+\frac{V(N)}{E(N)}}} \geq y_{\frac{1-p}{2}}$$

$$E(N) \geq \left(\frac{y_{\frac{1-p}{2}}}{l}\right)^2\left(\frac{V(X)}{E(X)^2}+\frac{V(N)}{E(N)}\right) = \left(\frac{y_{\frac{1-p}{2}}}{l}\right)^2\left(\frac{\beta}{\alpha^2}+1+\varphi\right)$$

よって、最低必要なクレーム件数 n_F は $\left(\dfrac{y_{\frac{1-p}{2}}}{l}\right)^2\left(\dfrac{\beta}{\alpha^2}+1+\varphi\right)$ となる。

問題3　　　　(テキスト 7-38 ページ参照)

(1)　(i)　$n=1$ のとき

1回目のロスが起こった時刻を表す確率変数を T_1 とすると、T_1 は確率密度関数 $f_T(t)=\lambda\exp(-\lambda t),\ t\geq 0$ を持つ指数分布に従うので、

$$\varepsilon_1(u_0) = \int_0^\infty \varepsilon_1(u_0\,|T_1=t)\ f_T(t)dt = \int_0^\infty\int_{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t}^\infty f(x)dx\cdot\lambda\exp(-\lambda t)dt$$

と書ける。ここで、$x\geq u_0+(1+\theta)\lambda\mu t$ のとき、$\exp\{-R(u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x))\}\geq 1$ であるから、

$$\leq \int_0^\infty\int_{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t}^\infty \exp\left(-R\left(u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x\right)\right)\ f(x)\,dx\cdot\lambda\exp(-\lambda t)\,dt$$

となり、さらに $\exp\{-R(u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x))\}f(x)>0$ より、

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-R\left(u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x\right)\right)\ f(x)\,dx\cdot\lambda\exp(-\lambda t)\,dt\\
&= \exp(-Ru_0)\int_0^\infty \exp(Rx)\ f(x)\,dx\cdot\int_0^\infty\lambda\exp\left(-\left(1+R(1+\theta)\mu\right)\lambda t\right)dt\\
&= \exp(-Ru_0)\cdot\frac{1}{1+R(1+\theta)\mu}\cdot M_x(R) = \exp(-Ru_0)
\end{aligned}$$

$(\because R$ の定義より、$\lambda+(1+\theta)\lambda\mu R=\lambda M_X(R))$

となるので、$n=1$ のとき $\varepsilon_n(u_0)<\exp(-Ru_0)$ が証明された。

(ii)　$n=k(\geq 1)$ のとき $\varepsilon_k(u_0)<\exp(-Ru_0)\ldots$ (※) が成立すると仮定する。

このとき、「$T_1=t$ の条件の下で、$k+1$ 回のクレームが発生し、破産している確率 $\varepsilon_{k+1}(u_0\,|\,T_1=t)$」と「1回目のクレームが $T_1=t$ に発生し破産する確率 $\varepsilon_1(u_0\,|\,T_1=t)$ と、1回目のクレームで破産せず $(0\leq x\leq u_0+(1+\theta)\lambda\mu t)$、次の k 回のクレームで破産する確率の和」は等しい。1回目のクレームで破産せず、次の k 回のクレームで破産する場合に、時刻 t 以降の過程は初期サープラス $u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x$ として考えることができることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{k+1}(u_0\,|\,T_1=t) &= \varepsilon_1(u_0\,|\,T_1=t)+\int_0^{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t}\varepsilon_k(u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x)f(x)dx\\
&= \int_{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t}^\infty f(x)dx+\int_0^{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t}\varepsilon_k(u_0+(1+\theta)\lambda\mu t-x)f(x)dx
\end{aligned}$$

となる。ここで、$x \geq u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t$ のとき、$\exp\{-R(u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - x))\} \geq 1$ および (※) より、

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t}^{\infty} \exp\left(-R\left(u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - x\right)\right) f(x)\, dx \\
&+ \int_{0}^{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t} \exp\left(-R\left(u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - x\right)\right) f(x)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left(-R\left(u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - x\right)\right) f(x)\, dx \\
&= \exp\left(-R\left(u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t\right)\right) M_x(R)
\end{aligned}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{k+1}(u_0) &= \int_0^{\infty} \varepsilon_{k+1}(u_0 | T_1 = t)\, f_T(t)\, dt \\
&\leq \exp(-Ru_0)\, M_x(R) \int_0^{\infty} \exp\left(-R(1+\theta)\lambda\mu t\right)\ \lambda \exp(-\lambda t)\, dt \\
&= \frac{\lambda \exp(-Ru_0)\ M_x(R)}{\lambda + R(1+\theta)\lambda\mu} = \exp(-Ru_0)
\end{aligned}
$$

となるので、$n = k$ のとき $\varepsilon_n(u_0) < \exp(-Ru_0)$ が成り立つことを仮定すると、$n = k+1$ のときにも $\varepsilon_n(u_0) < \exp(-Ru_0)$ が成り立つことが証明された。

(2) 破産確率を 5% まで許容できるのであれば、(1) の不等式より $\varepsilon_n(u_0) < \exp(-Ru_0) = 0.05$ が成立していればよい。したがって、$R = \dfrac{\log 0.05}{-u_0} = 0.1$ が成立していればよい。一方、ガンマ分布の積率母関数 $M_X(r)$ は、

$$
\begin{aligned}
M_X(r) &= \int_0^{\infty} \exp(rx) \cdot f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \exp(rx) \cdot \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x)\,(\beta x)^{\alpha-1}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} \exp(rx) \cdot \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\beta x)\,(\beta x)^{\alpha-1}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-x(\beta - r)\right)(\beta x)^{\alpha-1}\, dx \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\beta - r}{\Gamma(\alpha)} \exp\left(-x(\beta - r)\right)\{(\beta - r)x\}^{\alpha-1}\, dx = \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

であり、平均 μ は $\dfrac{\alpha}{\beta}$ である。

以上を $\lambda + (1+\theta)\lambda\mu R = \lambda M_X(R)$ に代入すると、

$$
2 + 2(1+\theta) \cdot \frac{10}{2} \cdot 0.1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{2 - 0.1}\right)^{10}
$$

$\therefore \theta = 0.34$