数学（問題）

〔問題１から問題３を通じて必要であれば（付表）に記載された数値を用いよ。〕

問題１．次の各問の空欄に入る解答を、それぞれの選択肢の中から一つ選んで記号を解答用紙の所定の欄に記入せよ。　（６０点）

（１）
$$f(x,y)=\begin{cases}120xy(1-x-y) & (0<x<1,\quad 0<y<1,\quad x+y<1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

を密度関数とする確率変数(X,Y)の相関係数$\rho(X,Y)$は $\boxed{}$ である。

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{1}{4}$　（D）$\frac{1}{6}$

（E）$-\frac{1}{2}$　（F）$-\frac{1}{3}$　（G）$-\frac{1}{4}$　（H）$-\frac{1}{6}$

（２）確率変数X,Yは独立で、共に平均λの指数分布に従う。

このとき$X+Y$の歪度$\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)$は $\boxed{①}$ 、尖度$\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4}\right)$は $\boxed{②}$ である。

ここに、μ_k : $X+Y$の平均μのまわりのk次積率、

σ : $X+Y$の標準偏差　とする。

(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) $2\sqrt{2}$　(E) 3　(F) $3\sqrt{2}$

(G) 6　(H) $6\sqrt{2}$　(I) 24　(J) $24\sqrt{2}$　(K) 30　(L) $30\sqrt{2}$

（３）ＡとＢの２人がサイコロを用いた次のようなゲームをする。

・ＡとＢは１回のゲームで共にサイコロを投げる。
・Ａは、１回のゲームで２つのサイコロを投げ、出た目の合計を獲得点数とする。
・Ｂは、１回のゲームで１つのサイコロを投げ、出た目の２倍を獲得点数とする。

中心極限定理を用いた場合、Ａの獲得点数とＢの獲得点数との差の平均が 0.4 以下となる確率が 0.95 以上となるためには、最低 $\boxed{}$ 回ゲームを行わなければならない。

(A) 419　(B) 421　(C) 423　(D) 425

(E) 427　(F) 429　(G) 431　(H) 433

（4）確率変数 X,Y,Z が独立にそれぞれ一様分布 $U(0,2)$, $U(-1,1)$, $U(-2,0)$ に従うとき、

$S=X+Y+Z$ の密度関数は、$\begin{cases} \boxed{①} & (-3 \le s \le -1) \\ \boxed{②} & (-1 < s \le 1) \\ \boxed{③} & (1 < s \le 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ である。

(A) $\dfrac{(s+3)^2}{4}$　(B) $\dfrac{(s+3)^2}{8}$　(C) $\dfrac{(s+3)^2}{16}$　(D) $\dfrac{(s-3)^2}{4}$　(E) $\dfrac{(s-3)^2}{8}$　(F) $\dfrac{(s-3)^2}{16}$

(G) $\dfrac{3+s^2}{4}$　(H) $\dfrac{3+s^2}{8}$　(I) $\dfrac{3+s^2}{16}$　(J) $\dfrac{3-s^2}{4}$　(K) $\dfrac{3-s^2}{8}$　(L) $\dfrac{3-s^2}{16}$

（5）半径 1 の円周上に 3 点 A、B、C を無作為にとる。このとき、3 点を結んでできる三角形の面積の期待値は $\boxed{}$ である。

(A) $\dfrac{3}{2\pi}$　(B) $\dfrac{5}{3\pi}$　(C) $\dfrac{2}{\pi}$　(D) $\dfrac{5}{2\pi}$

(E) $\dfrac{\pi}{8}$　(F) $\dfrac{\pi}{6}$　(G) $\dfrac{\pi}{5}$　(H) $\dfrac{\pi}{4}$

（6）ある都市から無作為に N 世帯を抽出したとき、そのうち家庭用ゲーム機を保有する世帯数は、二項分布 $Bi(N,p)$ に従うものとする。

この都市において、15 人の調査員がおのおの 30 世帯を回ってアンケートを実施した結果、全世帯から回答が得られ、家庭用ゲーム機を保有している世帯の数は調査員別に以下のとおりであった。なお、各調査員は全世帯から無作為に抽出した世帯に対してアンケートを実施しており、各調査員の調査結果は独立であるものとする。

調査員	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
ゲーム機を保有する世帯数	7	4	9	5	13	5	11	6	7	10	5	10	5	7	8

このとき、p の最尤推定値として適当なものは $\boxed{}$ である。

（小数点以下第 3 位を四捨五入し、小数点以下第 2 位まで求めるものとする。）

(A)　0.21　(B)　0.22　(C)　0.23　(D)　0.24

(E)　0.25　(F)　0.26　(G)　0.27　(H)　0.28

（7）ある試行において、事象Eが起こる確率を p とする。この試行を独立に 10 回繰り返して、p に関する次の仮定を検定したい。

帰無仮説 H_0 ：$0.4 \leq p \leq 0.6$　対立仮説 H_1 ：$p < 0.4$ または $p > 0.6$

棄却域を W= {0,1,9,10} とするとき、帰無仮説が棄却される確率が最大となるように p $(0.4 \leq p \leq 0.6)$ を選ぶとする。このとき、帰無仮説が棄却される確率は $\boxed{}$ となる。

（小数点以下第４位を四捨五入して、小数点以下第３位まで求めるものとする。）

(A) 0.042　(B) 0.044　(C) 0.046　(D) 0.048
(E) 0.050　(F) 0.052　(G) 0.054　(H) 0.056

（8）ある電気部品の製造工程がよく管理できているかを調べたい。
いま、この工程からランダムに 5 個の標本を取り出して抵抗を測定したら、

26.3,　25.5,　24.3,　26.1,　23.7（単位　Ω（オーム））

であった。
真の母分散に基づき求めた母平均の信頼係数 95％の信頼区間の幅が、母分散を未知として求めた母平均の信頼係数 95％の信頼区間の幅よりもせまくなっていることをもって、「製造工程がよく管理できている」と定義したとすると、「製造工程がよく管理できている」と言えるためには、真の母分散は少なくとも $\boxed{}$ 以下でなければならない。
（母標準偏差が必要な場合は、小数点以下第３位を四捨五入して小数点以下第２位まで求めるものとする。）

(A) $(1.55)^2$　(B) $(1.57)^2$　(C) $(1.59)^2$　(D) $(1.61)^2$
(E) $(1.63)^2$　(F) $(1.65)^2$　(G) $(1.67)^2$　(H) $(1.69)^2$

(9) 企業の信用度を表す格付には、[AAA], [AA], [A], [BBB] の 4 つの状態があるものとし、ある企業の 1 年間の格付の推移は以下の推移行列 P に従うものとする。(状態はこの 4 つのみで倒産、破綻等は発生せず、格付は常に 1 年前のこの企業の格付のみに依存するものとして取り扱うこととする。)

$$P = \begin{array}{c} \\ [\mathrm{AAA}] \\ [\mathrm{AA}] \\ [\mathrm{A}] \\ [\mathrm{BBB}] \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [\mathrm{AAA}] & [\mathrm{AA}] & [\mathrm{A}] & [\mathrm{BBB}] \end{array} \leftarrow 1\text{年後の格付} \\ \begin{pmatrix} 0.95 & 0.04 & 0.01 & 0.00 \\ 0.04 & 0.90 & 0.04 & 0.02 \\ 0.02 & 0.04 & 0.92 & 0.02 \\ 0.00 & 0.02 & 0.04 & 0.94 \end{pmatrix} \end{array}$$

↑
ある時点での格付

(例えば、ある時点でこの企業の格付が [AAA] だった場合、1 年後の格付が [A] になっている確率は 0.01 (1%) である。)

ここで、現在の格付が [AA] であるこの企業の 2 年後の格付が [A] になっているとしたとき、この企業の 1 年後の格付が [AA] である確率は $\boxed{}$ となる。
(小数点以下第 4 位を四捨五入して、小数点以下第 3 位まで求めるものとする。)

(A) 0.481	(B) 0.482	(C) 0.483	(D) 0.484
(E) 0.485	(F) 0.486	(G) 0.487	(H) 0.488

(10) AR(2)モデル $Y_t = 1.0 + 0.5Y_{t-1} - 0.4Y_{t-2} + \varepsilon_t$ $(E(\varepsilon_t)=0、V(\varepsilon_t)=0.3)$ に対し、$\{Y_t\}$ の分散 $\gamma_0 = \boxed{①}$ 、時差2の自己共分散 $\gamma_2 = \boxed{②}$ である。
(γ_0、γ_2 の全てが求められるまでは小数点以下 6 桁以上を持って計算するものとし、γ_0、γ_2 の最終計算結果について、小数点以下第 3 位を四捨五入して小数点以下第 2 位まで求めるものとする。)

(A) −0.09	(B) −0.06	(C) −0.03	(D) 0.15	(E) 0.18
(F) 0.23	(G) 0.28	(H) 0.41	(I) 0.49	(J) 0.55

（１１）株価の変動をシミュレートした。

１．時間の単位は各ステップごとに１とする。

２．ある時点 t（t≧0）における株価を S_t とおくと、S_{t+1} は次式で表される。

$S_{t+1} = S_t \cdot \exp(\mu + Z_{t+1} \cdot \sigma)$

ここに、Z_{t+1} は標準正規分布に従う確率変数とする。

３．価格変動は、分布の逆関数法によるものとする。

４．t＝0 における価格は 100 とする。

５．[0,1]区間上の一様分布の変数が、

0.9332,　0.3085,　0.9938,　0.1587,　0.9772

の順であったとする。

$\mu = 0.01$、$\sigma = 0.02$ のとき、t＝5 における価格は $\boxed{}$ となる。

（各時点における株価は、小数点以下第３位を四捨五入して小数点以下第２位まで求めるものとする。）

（A）114.99　（B）115.00　（C）115.01　（D）115.02

（E）115.03　（F）115.04　（G）115.05　（H）115.06

（１２）(p,q,y) なる５個のデータ（2.3，－3.0，4.2）（－1.8，3.4，－0.7）（－5.1，－1.9，－3.8）（4.6，1.1，5.1）（3.7，2.5，2.9）が与えられている。

y を p,q で線型回帰 $(y = \alpha + \beta_1 \cdot p + \beta_2 \cdot q)$ するとき、

α，β_1，β_2 の最小二乗法による推定値はそれぞれ $\boxed{①}$ ，$\boxed{②}$ ，$\boxed{③}$ である。

（α，β_1，β_2 の全てが求められるまでは小数点以下６桁以上を持って計算するものとし、α，β_1，β_2 の最終計算結果について、小数点以下第４位を四捨五入して小数点以下第３位まで求めるものとする。）

（A）－0.329　（B）－0.219　（C）－0.107　（D）－0.012　（E）0.438

（F）0.478　（G）0.584　（H）0.876　（I）0.913　（J）0.956

問題２．Ａチームと Ｂチームがサッカーで対戦する。最初はＡチームがボールを持ちゲームを開始する。ボールを持っているチームから相手チームにボールが渡る方法及び得点のルールは、以下の表の２通りのみとし、それらの発生確率は、Ａチーム、Ｂチームともに以下の表に記載している確率に従うものとする。

ボールを持っているチームから相手チームにボールが渡る方法及び得点のルール	発生確率
・相手チームにボールを奪われずにゴールを決める。 この場合は、ゴールを決めたチームが１点獲得し、ゴールを決められたチーム（相手チーム）にボールが渡りゲームを再開する。	$p\ (0<p<1)$
・ゴールを決められずに相手チームにボールを奪われる。 この場合は、得点は入らず、ボールを奪ったチーム（相手チーム）にボールが渡りゲームを再開する。	$1-p$

（注）・この問題においては、ボールを持っているチームから相手チームにボールが渡る方法は上記の表に記載している２通りの方法のみとし、これら２通り以外の方法（例えば、ハンド等の反則やラインアウトによって相手チームにボールが渡る方法など）は発生しないものとする。
・また、得点の方法についても上記の表に記載している方法に限定し、これ以外の方法（例えば、オウンゴールなど）では得点は入らないものとする。

Ａチームが、両チームの合計得点が n 点目となるゴールを決める確率を P_n^A で表すとき、次の問いに解答せよ。なお、試合時間に制限はないものとする。

（20 点）

(1) P_1^A を求めよ。

(2) P_2^A を求めよ。

(3) $P_\infty^A=\lim_{n\to\infty}P_n^A$ を求めよ。

問題3．平均値$\dfrac{1}{\lambda}$（$\lambda > 0$）をもつ指数分布の母集団から、大きさnの標本を抽出し、帰無仮説H_0：$\lambda = \lambda_0$を対立仮説H_1：$\lambda = \lambda_1 (< \lambda_0)$に対して検定することを考える。
このとき、次の問いに解答せよ。

（20 点）

(1)　標本値$x_1, x_2, \cdots x_n$を観測し、検定の棄却域として以下の領域を考える。

$$R_k = \left\{ (x_1, x_2 \cdots x_n); \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \lambda_0)} \geq k \right\}$$

（$f(x, \lambda)$は、平均値$\dfrac{1}{\lambda}$の指数分布の確率密度関数とする。）

この棄却域に入る標本値$(x_1, x_2, \cdots x_n)$の標本平均$\bar{x}$の範囲を、$n, \lambda_0, \lambda_1, k$を用いて表せ。

(2)　標本和$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$は、以下の確率密度関数をもつガンマ分布に従うことを示せ。
$$f_{x_1 + x_2 + \cdots x_n}(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!} \lambda^n u^{n-1} e^{-\lambda u} & (u > 0) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases}$$

(3)　$a > 0$のとき、$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-u} du = 1 - \sum_{t=0}^{n-1} \frac{e^{-a} a^t}{t!}$を証明せよ。

(4)　(2)（3）を利用し、$n = 3$,　$\lambda_0 = 1$,　$\lambda_1 = 0.5$,　$k = 12.5$としたときの（1）の棄却域による検定の有意水準を求めよ。答えは％表示で小数点以下第 3 位を四捨五入して小数点以下第 2 位まで求めよ。（例えば 6.238%の場合 6.24%）

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon) \to \varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

II.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi_{\varphi}^{2}(\varepsilon)$

φ \ ε	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

Ⅲ．分母の自由度m、分子の自由度nのF分布の上側ε点 $F_m^n(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon = 0.050$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon = 0.025$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon = 0.010$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon = 0.005$

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ. 自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ. 自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ. 指数関数表

x	$\exp(x)$
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052

数学（解答例）

問題１

解答を選択肢から選び記号を所定の欄に記入せよ。

(1)	(E)					
(2)	①	(B)	②	(G)		
(3)	(B)					
(4)	①	(C)	②	(K)	③	(F)
(5)	(A)					
(6)	(E)					
(7)	(D)					
(8)	(D)					
(9)	(F)					
(10)	①	(H)	②	(A)		
(11)	(C)					
(12)	①	(J)	②	(I)	③	(B)

（1）

$$E(X)=120\int_0^1\int_0^{1-x} x^2 y(1-x-y)dydx=120\int_0^1 x^2\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}dx$$

$$=20\int_0^1 x^2(1-x)^3dx=20\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$E(X^2)=120\int_0^1\int_0^{1-x} x^3 y(1-x-y)dydx=20\int_0^1 x^3(1-x)^3dx$$

$$=20\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}x^6-\frac{1}{7}x^7\right]_0^1=\frac{1}{7}$$

ゆえに、$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{2}{63}$

同様に、$V(Y)=\dfrac{2}{63}$

$$E(XY)=120\int_0^1\int_0^{1-x} x^2 y^2(1-x-y)dydx=10\int_0^1 x^2(1-x)^4dx$$

$$=10\left[\frac{1}{3}x^3-x^4+\frac{6}{5}x^5-\frac{2}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7\right]_0^1=\frac{2}{21}$$

ゆえに、$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{2}{21}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{63}$

したがって、$\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}=\dfrac{-\frac{1}{63}}{\sqrt{\frac{2}{63}}\sqrt{\frac{2}{63}}}=-\dfrac{1}{2}$

よって<u>解答は（E）</u>

【補足】

解答における積分については、次のベータ関数の特性を利用してもよい。

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

（2）

X,Y の確率密度関数をそれぞれ

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\ ,\ g(y)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y}{\lambda}}\quad (0<x<\infty\ ,\ 0<y<\infty)$$ とする。

X と Y は互いに独立であるから、$U=X+Y$ の積率母関数 $M_{X+Y}(t)$ は、X，Y それぞれの積率母関数 $M_X(t)$，$M_Y(t)$ の積に等しくなる。

$$\begin{aligned}\therefore M_{X+Y}(t)&=M_X(t)\cdot M_Y(t)\\&=\int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}dx\cdot\int_0^\infty e^{ty}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\frac{y}{\lambda}}dy\\&=\left\{\int_0^\infty e^{tx}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}dx\right\}^2\\&=\left\{\left[-\frac{1}{1-\lambda t}e^{-\frac{1-\lambda t}{\lambda}x}\right]_0^\infty\right\}^2\\&=\frac{1}{(1-\lambda t)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore M'(t)&=2\lambda(1-\lambda t)^{-3}\\M''(t)&=6\lambda^2(1-\lambda t)^{-4}\\M^{(3)}(t)&=24\lambda^3(1-\lambda t)^{-5}\\M^{(4)}(t)&=120\lambda^4(1-\lambda t)^{-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore M'(0)&=2\lambda\\M''(0)&=6\lambda^2\\M^{(3)}(0)&=24\lambda^3\\M^{(4)}(0)&=120\lambda^4\end{aligned}$$

以上を用いると、$X+Y$ の平均 $\mu=\mu_1=2\lambda$

$X+Y$ の分散 $\sigma^2=\mu_2-\mu_1^2=6\lambda^2-4\lambda^2=2\lambda^2$ より、$\sigma=\sqrt{2}\lambda$

$$\begin{aligned}\mu_3=E\left[(U-\mu)^3\right]&=E(U^3)-3\mu E(U^2)+3\mu^2E(U)-\mu^3\\&=M^{(3)}(0)-3\cdot2\lambda\cdot M''(0)+3\cdot(2\lambda)^2\cdot2\lambda-(2\lambda)^3\end{aligned}$$

$$= 24\lambda^3 - 36\lambda^3 + 24\lambda^3 - 8\lambda^3$$
$$= 4\lambda^3$$

$$\mu_4 = E\left[(U-\mu)^4\right] = E(U^4) - 4\mu E(U^3) + 6\mu^2 E(U^2) - 4\mu^3 E(U) + \mu^4$$
$$= M^{(4)}(0) - 4\cdot 2\lambda \cdot M^{(3)}(0) + 6\cdot(2\lambda)^2 \cdot M''(0) - 4\cdot(2\lambda)^3 \cdot 2\lambda + (2\lambda)^4$$
$$= 120\lambda^4 - 192\lambda^4 + 144\lambda^4 - 64\lambda^4 + 16\lambda^4$$
$$= 24\lambda^4$$

以上から、$\dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = \dfrac{4\lambda^3}{2\sqrt{2}\lambda^3} = \sqrt{2}$, $\dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = \dfrac{24\lambda^4}{4\lambda^4} = 6$

よって解答は ① (B) ② (G)

（3）

i 回目のゲームにおける A の獲得点数を$a_i = a_{1i} + a_{2i}$（a_{1i} ：1 つ目のサイコロ、a_{2i} ：2 つ目のサイコロ）、B の獲得点数をb_iとし、A の獲得点数から B の獲得点数を差し引いたものを$X_i = a_i - b_i$で表す。

$$E(a_{1i}) = E(a_{2i}) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$

$$E(b_i) = \frac{1}{6}(2+4+6+8+10+12) = 7$$

$$E(a_{1i}^2) = E(a_{2i}^2) = \frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{6}$$

$$E(b_i^2) = \frac{1}{6}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2) = \frac{182}{3}$$

上記の$E(a_{1i}), E(a_{2i}), E(b_i), E(a_{1i}^2), E(a_{2i}^2), E(b_i^2)$を用いて、$E(X_i), V(X_i)$を計算すると、

$$E(X_i)=E(a_{1i})+E(a_{2i})-E(b_i)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}-7=0$$

$$\begin{aligned}V(X_i)\ &=E(X_i{}^2)-\{E(X_i)\}^2\\&=E\{(a_{1i}+a_{2i}-b_i)^2\}-0\\&=E(a_{1i}{}^2+a_{2i}{}^2+2\cdot a_{1i}\cdot a_{2i}-2\cdot a_{1i}\cdot b_i-2\cdot a_{2i}\cdot b_i+b_i{}^2)\\&=\frac{91}{6}+\frac{91}{6}+2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2}-2\cdot\frac{7}{2}\cdot 7-2\cdot\frac{7}{2}\cdot 7+\frac{182}{3}\\&=\frac{35}{2}\end{aligned}$$

中心極限定理より、$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots X_n}{n}$は平均 0、分散$\dfrac{35}{2n}$の正規分布に従う。

題意より、

$$P(|\overline{X}-0|\le 0.4)\ge 0.95 \Rightarrow P\left(\frac{|\overline{X}-0|}{\sqrt{35/2n}}\le\frac{0.4}{\sqrt{35/2n}}\right)\ge 0.95$$

$$\frac{0.4}{\sqrt{35/2n}}\ge 1.96 \quad \therefore n\ge 420.175$$

ゆえに<u>解答は、(B)の 421</u>

（4）

X,Y,Z の確率密度関数はそれぞれ以下のとおり表せる。

$$f(x)=\frac{1}{2}\ \ (0\le x\le 2),\ \ g(y)=\frac{1}{2}\ \ (-1\le y\le 1),\ \ h(z)=\frac{1}{2}\ \ (-2\le z\le 0)$$

$R=X+Y$ の密度関数を$m(r)$とする。

$r=x+y,\ \ p=x$ とすると、$x=p,\ \ y=r-p$ より、$|J|=1$ であるから、

$$\begin{aligned}m(r)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(p)\cdot g(r-p)dp\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot g(r-x)dx\end{aligned}$$

ここで $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le r - x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ r - 1 \le x \le r + 1 \end{cases}$ であるから、この共通範囲で積分すると

$$m(r) = \begin{cases} \int_0^{r+1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} dx = \frac{r+1}{4} & (-1 \le r \le 1) \\ \int_{r-1}^{2} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} dx = \frac{3-r}{4} & (1 < r \le 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$S = X + Y + Z = R + Z$ の密度関数を $n(s)$ として同様に考えると、

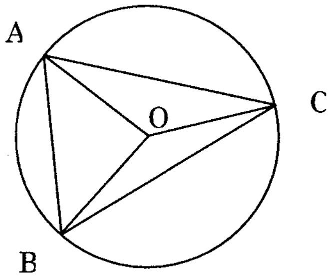
$$n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} m(r) \cdot h(s - r) dr$$

また $\begin{cases} -1 \le r \le 3 \\ -2 \le s - r \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le r \le 3 \\ s \le r \le s + 2 \end{cases}$ であるから、この共通範囲で積分すると

$$n(s) = \begin{cases} \int_{-1}^{s+2} \frac{r+1}{4} \times \frac{1}{2} dr = \frac{(s+3)^2}{16} & (-3 \le s \le -1) \\ \int_{s}^{1} \frac{r+1}{4} \times \frac{1}{2} dr + \int_{1}^{s+2} \frac{3-r}{4} \times \frac{1}{2} dr = \frac{3-s^2}{8} & (-1 < s \le 1) \\ \int_{s}^{3} \frac{3-r}{4} \times \frac{1}{2} dr = \frac{(s-3)^2}{16} & (1 < s \le 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

よって解答は　①（C）　②（K）　③（F）

（5）



△ABC は、円の中心を O とすると、△AOB、△BOC、△COA の 3 つの三角形に分けることができる。問題の内容を言い換えれば、区間$(0,2\pi)$から任意に 2 点を選び、それらを小さい順に並べたものを、$\theta_1,\theta_2,(0<\theta_1<\theta_2<2\pi)$とすれば、△ABC の面積は、

$\frac{1}{2}\cdot\sin\theta_1+\frac{1}{2}\cdot\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\pi-\theta_2)$であらわせ、この期待値を求めることになる。

そこで、△ABC 面積の期待値は、θ_1,θ_2の同時密度関数

$f(\theta_1,\theta_2)=2\cdot\frac{1}{(2\pi)^2},(0<\theta_1<\theta_2<2\pi)$をもちいて、下記のとおり計算できる。

$$E\left[\frac{1}{2}\cdot\sin\theta_1+\frac{1}{2}\cdot\sin(\theta_2-\theta_1)+\frac{1}{2}\cdot\sin(2\pi-\theta_2)\right]$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_2}\left\{\sin\theta_1+\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(2\pi-\theta_2)\right\}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}d\theta_1 d\theta_2$$

$$=\int_0^{2\pi}\left\{2-2\cos\theta_2+\theta_2\cdot\sin(2\pi-\theta_2)\right\}\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}d\theta_2$$

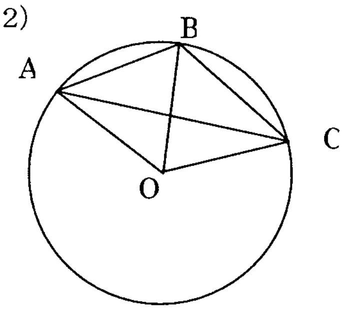
$$=\frac{3}{2\pi}$$

ゆえに解答は、(A)

（補足1）上記では点 ABC のうち、1 つの点（例えば A)を区間$\left[0,2\pi\right]$の中の 0（又は 2π）とし、区間$\left(0,2\pi\right)$から任意に残りの 2 点(例えば B、C)を選ぶこととしている。
区間$\left[0,2\pi\right)$から、任意に 3 点選び、それらを小さい順に並べたものを、
$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\left(0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi\right)$とし、△ABC の面積を、
$\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)+\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\theta_3-\theta_2\right)+\frac{1}{2}\cdot\sin\left\{\left(2\pi-\theta_3\right)+\theta_1\right\}$であらわし、$\theta_1,\theta_2,\theta_3$の同時密度関数

$f\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3\right)=3\cdot2\cdot\frac{1}{(2\pi)^3},\left(0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi\right)$を用いて、期待値をとった場合も同様の結果$\frac{3}{2\pi}$が得られる。

（補足2）



上記の図のように、△ABC が円の中心 O を内存しない場合においても、△AOB、△BOC、△COA の 3 つの三角形の面積の和

$\frac{1}{2}\cdot\sin\theta_1+\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\theta_2-\theta_1\right)+\frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\pi-\theta_2\right)$　（△COA に該当するものは負となる）

であらわすことができる。

（6）
全世帯のうち家庭用ゲーム機を保有する世帯の割合（母集団比率）をpとすると、各調査員がN世帯を回り、そのうちk世帯が家庭用ゲーム機を保有している確率の確率分布$f(k)$は、

$$f(k)={}_N C_k p^k (1-p)^{N-k}$$

である。

n 人の調査員がアンケートを実施し、i 番目の調査員のアンケートの結果ゲームを保有する世帯が k_i 世帯であったとすると、各調査員の調査結果が独立であることから、尤度関数 $L(p)$ は

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} {}_N C_{k_i} p^{k_i}(1-p)^{N-k_i}$$

となる。この尤度関数を最大にする p が、最尤推定値である。

$$\log L(p)=\sum_{i=1}^{n}\{\log {}_N C_{k_i}+k_i\log p+(N-k_i)\log(1-p)\}$$

$\dfrac{\partial}{\partial p}\log L(p)=0$ となる p を求めればよい。

$$\frac{\partial}{\partial p}\log L(p)=\sum_{i=1}^{n}\{\frac{k_i}{p}-\frac{(N-k_i)}{1-p}\}=0$$

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}k_i-\frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n}(N-k_i)=0$$

$$(1-p)\sum_{i=1}^{n}k_i-p\sum_{i=1}^{n}(N-k_i)=0$$

$$\therefore p=\frac{\sum_{i=1}^{n}k_i}{nN}$$

ここに、$n=15$、$N=30$、$\{k_i\}=\{7,4,9,5,13,5,11,6,7,10,5,10,5,7,8\}$ を代入して計算すると、

$$p=\frac{7+4+9+5+13+5+11+6+7+10+5+10+5+7+8}{15\times 30}=\frac{112}{450}=0.248888\cdots\Rightarrow 0.25$$

ゆえに、解答は（E）

（7）

第ｉ回目の試行でＥが起これば１、起こらなければ０を対応させる確率変数を X_i とすれば、

$$X=X_1+X_2+\cdot\ \cdot\ \cdot+X_{10}$$

は 2 項分布 $Bi(10,p)$ に従う。したがって、$X\in W$ となる確率は、

$$P(W|p) = (1-p)^{10} + 10p(1-p)^9 + 10p^9(1-p) + p^{10} \quad \cdot\cdot\cdot (1)$$

これを、$\varphi(p)$として、$0.4 \le p \le 0.6$であるときの最大値を求めるために、$\varphi(p)$をpで微分する。

$$\varphi'(p) = -10(1-p)^9 + 10(1-p)^9 - 90p(1-p)^8 + 90p^8(1-p) - 10p^9 + 10p^9$$
$$= 90p(1-p)\{p^7 - (1-p)^7\}$$

$\varphi'(p)$は$p = 0.5$の前後で符号をマイナスからプラスに変えるから、$\varphi(p)$は$p = 0.5$で最小値をとる。したがって、$0.4 \le p \le 0.6$であるとき、$\varphi(p)$は$p = 0.4$または$p = 0.6$で最大値をとる。

（1） に$p = 0.6$を代入すると、

$$\varphi(0.6) = \varphi(0.4) = 0.4^{10} + 10 \cdot 0.6 \cdot 0.4^9 + 10 \cdot 0.6^9 \cdot 0.4 + 0.6^{10} = 0.0480 \Rightarrow 0.048$$

よって 解答は（D）

（8）

n を標本数、$\overline{X}$を標本平均、s^2を標本不偏分散、Z_αを標準正規分布の上側確率 100α％のパーセント点、$t_\alpha(k)$を自由度 k の t 分布 t(k)の上側確率 100α％のパーセント点、真の母分散をσ_0^2とすると、母分散が既知、未知の場合の母平均の信頼係数（1-α）の信頼区間はそれぞれ

$$[\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0/\sqrt{n},\ \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0/\sqrt{n}]$$

$$[\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n},\ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}]$$

だから、信頼区間の幅はそれぞれ

$$2Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0/\sqrt{n}$$

$$2t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}$$

となる。

題意から、

$$2Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0/\sqrt{n} \le 2t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s/\sqrt{n}$$

$\Leftrightarrow Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_0 \leq t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s$

$\Leftrightarrow \sigma_0 \leq t_{\alpha/2}(n-1) \cdot s / Z_{\alpha/2}$ ・・・(1)

を満たすようなσ_0^2を求めればよい。

ここで、n=5, $Z_{0.025} = 1.96$，$t_{0.025}(4) = 2.7764$

$\overline{X} = (26.3 + 25.5 + 24.3 + 26.1 + 23.7)/5 = 25.18$

$$s^2 = \{(26.3-25.18)^2 + (25.5-25.18)^2 + (24.3-25.18)^2 + (26.1-25.18)^2 + (23.7-25.18)^2\}/(5-1)$$

=1.292

を（1）に代入して、σ_0を求めると、

$\sigma_0 \leq 2.7764 \cdot (1.292)^{0.5} / 1.96 = 1.610116 \Rightarrow 1.61$　よって 解答は（D）

（9）

この企業の現在、1年後、2年後の格付を表す確率変数をそれぞれX_0, X_1, X_2とすると、求める確率は、$P_{X_0=[AA]}(X_1 = [AA] | X_2 = [A])$である。また2年間の格付推移を表す推移行列は、与えられた行列を2乗したもので、以下で与えられる。

$$P^2 = \begin{array}{c} \\ [AAA] \\ [AA] \\ [A] \\ [BBB] \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [AAA] & [AA] & [A] & [BBB] \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9043 & 0.0744 & 0.0203 & 0.0010 \\ 0.0748 & 0.8136 & 0.0740 & 0.0376 \\ 0.0390 & 0.0740 & 0.8490 & 0.0380 \\ 0.0016 & 0.0384 & 0.0752 & 0.8848 \end{pmatrix} \end{array}$$

ここで、$P_{X_0=[AA]}(X_1 = [AA] | X_2 = [A]) = \dfrac{P_{X_0=[AA]}(X_1 = [AA], X_2 = [A])}{P_{X_0=[AA]}(X_2 = [A])}$であるが、この式の分母は$P^2$の（2,3）成分の0.074である。一方、分子は$P$の（2,2）成分と（2,3）成分の

積で 0.9×0.04＝0.036 である。よって

$$P_{X_0=[AA]}(X_1=[AA]\mid X_2=[A])=\frac{0.036}{0.074}=0.48649\cdots \qquad \Rightarrow 0.486$$

よって<u>解答は　(F)</u>

（１０）

$\{Y_t\}$の分散、時差１、２の自己共分散をそれぞれγ_0、γ_1、γ_2とし、E（Y_t）＝μとする。

$Y_t=1.0+0.5Y_{t-1}-0.4Y_{t-2}+\varepsilon_t$　・・・①　の期待値を取ることにより、

$E(Y_t)=1.0+0.5E(Y_{t-1})-0.4E(Y_{t-2}) \Leftrightarrow \mu=1.0+0.5\mu-0.4\mu$　・・・②

①－②を行い、$Y_t-\mu$、$Y_{t-1}-\mu$、$Y_{t-2}-\mu$　を両辺に掛けて期待値を取ることで次式が得られる。

$\gamma_0=0.5\gamma_1-0.4\gamma_2+0.3$

$\gamma_1=0.5\gamma_0-0.4\gamma_1$

$\gamma_2=0.5\gamma_1-0.4\gamma_0$

この式を解くと、

$$\gamma_0=\frac{(1+0.4)0.3}{(1-0.4)\{(1+0.4)^2-0.5^2\}}=0.4093\cdots=\boxed{0.41}$$

$$\gamma_1=\gamma_0\times\frac{0.5}{(1+0.4)}=0.1461\cdots=0.15$$

$$\gamma_2=0.5\gamma_1-0.4\gamma_0=-0.0906\cdots=\boxed{-0.09}$$

よって、<u>解答は、① (H)、② (A)。</u>

（１１）

付表から、

t	U_t	$Z_t = F^{-1}(U_t)$
1	0.9332	1.5
2	0.3085	-0.5
3	0.9938	2.5
4	0.1587	-1.0
5	0.9772	2.0

よって、時点 t=0～5 における株価S_tの推移は次のとおりとなる。

t=0：$S_0 = 100$

t=1：$S_1 = S_0$・exp(0.01+ z_1 ・0.02)=100・exp(0.04)=104.08

t=2：$S_2 = S_1$・exp(0.01+ z_2 ・0.02)=104.08・exp(0)=104.08

t=3：$S_3 = S_2$・exp(0.01+ z_3 ・0.02)=104.08・exp(0.06)=110.5121⇒110.51

t=4：$S_4 = S_3$・exp(0.01+ z_4 ・0.02)=110.51・exp(-0.01)=109.4049⇒109.40

t=5：$S_5 = S_4$・exp(0.01+ z_5 ・0.02)=109.40・exp(0.05)=115.0122⇒115.01

よって解答は（C）

（１２）

α, β_1, β_2 の推定値をそれぞれ $\hat{\alpha}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ とする。

最小二乗法による回帰係数は、誤差の二乗和である下式Qを最小にするものとして推定される。

$$Q = \sum_{i=1}^{5} \{y_i - (\alpha + \beta_1 \cdot p_i + \beta_2 \cdot q_i)\}^2$$

これは、$\dfrac{\partial Q}{\partial \alpha} = \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_1} = \dfrac{\partial Q}{\partial \beta_2} = 0$ なる場合であるから、

正規方程式 $\begin{pmatrix} 1 & \overline{p} & \overline{q} \\ \overline{p} & \overline{p^2} & \overline{pq} \\ \overline{q} & \overline{pq} & \overline{q^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{py} \\ \overline{qy} \end{pmatrix}$ が成立する。

$\overline{p}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_i=0.74$, $\overline{q}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}q_i=0.42$, $\overline{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=1.54$,

$\overline{py}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_iy_i=12.898$, $\overline{qy}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}q_iy_i=1.02$, $\overline{pq}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_iq_i=2.196$,

$\overline{p^2}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}p_i^2=13.878$, $\overline{q^2}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}q_i^2=6.326$ であるから、これを代入して解くと、

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.95639\cdots\\ 0.91307\cdots\\ -0.21922\cdots\end{pmatrix}$$

よって解答は ① (J) ② (I) ③ (B)

問題２.

(1)A が最初の1点目を獲得する確率は、「ボールを奪われずにゴールを決める」＋「ボールを奪われるが、再度ボールを奪い返し、ゴールを決める」＋・・・・となる。これを算式であらわすと下記のとおりとなる。

$$p+(1-p)^2\cdot p+(1-p)^4\cdot p+(1-p)^6\cdot p+\cdots$$
$$=\frac{p}{1-(1-p)^2}=\frac{1}{2-p}$$

(2)各チーム間でのボールの移動回数をｋ回(ゴールを奪われた後のゲーム再開時も含む)とすると、2 点目を A が獲得する確率は、1 回目～k-1 回目の中で 1 回 A または B がゴールを決め、最後のｋ回目に A がゴールを決める。

ABA *ABABA* *ABABABA* …

△△○ △△△△○ △△△△△△○

(各△のうち 1 つゴールを決める。残りはゴールを決められずにボールを奪われる。)

算式で表すと、下記のとおりとなる。

$$\left\{{}_2C_1\cdot p\cdot(1-p)\right\}\cdot p+\left\{{}_4C_1\cdot p\cdot(1-p)^3\right\}\cdot p+\left\{{}_6C_1\cdot p\cdot(1-p)^5\right\}\cdot p+\cdots$$
$$=2\cdot p^2\cdot(1-p)\left\{1+2\cdot(1-p)^2+3\cdot(1-p)^4+\cdots\right\}$$

$f=1+2\cdot(1-p)^2+3\cdot(1-p)^4+\cdots$ とした場合、

$$
\begin{aligned}
f-(1-p)^2\cdot f &= 1+2\cdot(1-p)^2+3\cdot(1-p)^4+\cdots \\
&\quad -\left\{1\cdot(1-p)^2+2\cdot(1-p)^4+\cdots\right\} \\
&= 1+(1-p)^2+(1-p)^4+\cdots \\
&= \frac{1}{1-(1-p)^2}
\end{aligned}
$$

となり、$f=\dfrac{1}{p^2\cdot(2-p)^2}$をもちいて、確率は、

$$
\begin{aligned}
&2\cdot p^2\cdot(1-p)\left\{1+2\cdot(1-p)^2+3\cdot(1-p)^4+\cdots\right\} \\
&=\frac{2\cdot p^2\cdot(1-p)}{p^2\cdot(2-p)^2}=\frac{2\cdot(1-p)}{(2-p)^2}
\end{aligned}
$$

(3)

(1)の答えより、

最初の 1 点を A が獲得する確率は、$\dfrac{1}{2-p}$

最初の 1 点を B が獲得する確率は、$1-\dfrac{1}{2-p}=\dfrac{1-p}{2-p}$

これを言い換えると、

「ボールを持っているチーム」が「ボールを持っていないチーム」より先にゴールする確率は$\dfrac{1}{2-p}$

「ボールを持っていないチーム」が「ボールを持っているチーム」より先にゴールする確率は$\dfrac{1-p}{2-p}$

となる。また、2 点目以降については、ゴールを決められたチームがボールを持ち、ゲームを再開することから、

「k−1 点目を決められた(ボールを持っている)チーム」が「k−1 点目を決めた(ボールを持っていない)チーム」より先に k 点目を決める確率は$\dfrac{1}{2-p}$

「k−1 点目を決めた(ボールを持っていない)チーム」が「k−1 点目を決められた(ボールを持っている)チーム」より先にゴールする確率は$\dfrac{1-p}{2-p}$

となる。算式で書けば、P_k^A、P_k^B はP_{k-1}^A、P_{k-1}^B ($k\geq 2$)を用いて下記のようになる。

$$P_k^A = \frac{1-p}{2-p} \cdot P_{k-1}^A + \frac{1}{2-p} \cdot P_{k-1}^B$$

$$P_k^B = \frac{1}{2-p} \cdot P_{k-1}^A + \frac{1-p}{2-p} \cdot P_{k-1}^B$$

$P_k^A + P_k^B = 1$を用いて整理すると、$P_k^A = \frac{-p}{2-p} \cdot P_{k-1}^A + \frac{1}{2-p}$となり、

$$\begin{aligned} P_k^A - \frac{1}{2} &= \left(\frac{-p}{2-p}\right) \cdot \left(P_{k-1}^A - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-p}{2-p}\right)^{k-1} \cdot \left(P_1^A - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-p}{2-p}\right)^{k-1} \cdot \frac{p}{2(2-p)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-p}{2-p}\right)^k \end{aligned}$$

$0 < p < 1$より、$0 < \left|\frac{-p}{2-p}\right| < 1$となり、k→∞の時、$-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-p}{2-p}\right)^k \to 0$となる。

つまり、$P_\infty^A = \frac{1}{2}$

（補足）

$$\begin{pmatrix} P_k^A & P_k^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k-1}^A & P_{k-1}^B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-p}{2-p} & \frac{1}{2-p} \\ \frac{1}{2-p} & \frac{1-p}{2-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^A & P_1^B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-p}{2-p} & \frac{1}{2-p} \\ \frac{1}{2-p} & \frac{1-p}{2-p} \end{pmatrix}^{k-1}$$ となる。

$\lim_{k \to \infty} \begin{pmatrix} \frac{1-p}{2-p} & \frac{1}{2-p} \\ \frac{1}{2-p} & \frac{1-p}{2-p} \end{pmatrix}^k$ が固有値、固有ベクトル等用いて、$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$に収束することを用いて、

$\begin{pmatrix} P_\infty^A & P_\infty^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_l^A & P_l^B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (l:任意の整数)と計算することも可能。

問題3.

(1)　平均値が$\dfrac{1}{\lambda}$となる指数分布の確率密度関数は$\lambda e^{-\lambda x}(x>0)$なので、棄却域は

$$R_k=\left\{(x_1,x_2\cdots x_n);\frac{{\lambda_1}^n e^{-\lambda_1(x_1+x_2+\cdots x_n)}}{{\lambda_0}^n e^{-\lambda_0(x_1+x_2+\cdots x_n)}}\ge k\right\}$$ となり、式中の不等式を変形すると

$$\frac{{\lambda_1}^n e^{-\lambda_1(x_1+x_2+\cdots x_n)}}{{\lambda_0}^n e^{-\lambda_0(x_1+x_2+\cdots x_n)}}\ge k\Leftrightarrow\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n e^{-(\lambda_1-\lambda_0)(x_1+x_2+\cdots x_n)}\ge k$$ となる。

両辺の対数をとると　$\Leftrightarrow n\log\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)-(\lambda_1-\lambda_0)(x_1+x_2+\cdots x_n)\ge\log k$ で、仮定より$\lambda_1-\lambda_0<0$なので$x_1+x_2+\cdots x_n\ge\dfrac{\log k\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_0-\lambda_1}$

よって、$\bar{x}=\dfrac{(x_1+x_2+\cdots x_n)}{n}\ge\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\log k\left(\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_0-\lambda_1}\right)$

(2)　$X_1+X_2+\cdots+X_n$の確率密度関数$f_{x_1+x_2+\cdots x_n}(u)$を求める。

$n=1$の場合、X_1の確率密度関数は$f_{x_1}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-1)!}\lambda^1u^{1-1}e^{-\lambda u}\ (u>0)\\ 0\qquad(u\le 0)\end{cases}$であり、題意の条件を満たす。

ここで$f_{x_1+x_2+\cdots x_n}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1}e^{-\lambda u}\ (u>0)\\ 0\qquad(u\le 0)\end{cases}$が成り立つと仮定すると、このとき

$X_1+X_2+\cdots+X_n,X_{n+1}$の同時密度関数は

$$f_{x_1+x_2+\cdots x_n}(x)f(x_{n+1})=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}\right)\lambda e^{-\lambda x_{n+1}}\ (x>0、x_{n+1}>0)\\ 0\qquad(x\le 0、\text{または}x_{n+1}\le 0)\end{cases}$$ となる。ここで

$u=x+x_{n+1}, v=x_{n+1}$とすると、$x=u-v, x_{n+1}=v$、$\left|\dfrac{\partial(x,x_{n+1})}{\partial(u,v)}\right|=1$なので、$u,v$の同時確率密度関数$g_{n+1}(u,v)$は、

$$g_{n+1}(u,v)=f_{x_1+x_2+\cdots x_n}(u-v)f(v)=\frac{1}{(n-1)!}\lambda^n(u-v)^{n-1}e^{-\lambda(u-v)}\lambda e^{-\lambda v}$$

$=\dfrac{1}{(n-1)!}\lambda^{n+1}(u-v)^{n-1}e^{-\lambda u}(u-v>0, v>0)$、$0(u\leq 0$、または$u-v\leq 0)$　　　よって

$$f_{x_1+x_2+\cdots x_n+x_{n+1}}(u)=\int_0^u\frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n+1}(u-v)^{n-1}e^{-\lambda u}dv=\left[\frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n+1}\frac{(u-v)^n}{(-1)n}e^{-\lambda u}\right]_0^u=\frac{1}{(n)!}\lambda^{n+1}(u)^n e^{-\lambda u}$$

$(u>0)$となり、数学的帰納法により、すべてのn $(n\geq 1)$について、$f_{x_1+x_2+\cdots x_n}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1}e^{-\lambda u}(u>0)\\ 0 \qquad (u\leq 0)\end{cases}$（ガンマ分布）が成り立つ。

（２）の別解

各$X_i(i=1,2,\cdot\cdot\cdot n)$は指数分布に従い、その積率母関数は

$E(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tu}\lambda e^{-\lambda u}du=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}(\lambda>t)$となること、また各$X_i(i=1,2\cdot\cdot\cdot n)$は互いに独立であることから$X_1+X_2+\cdots+X_n$の積率母関数$m(t)$は

$m(t)=E(e^{t(X_1+X_2+\cdot\cdot\cdot X_n)})=E(e^{tX_1})E(e^{tX_2})\cdot\cdot\cdot E(e^{tX_n})=\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$となる。

一方、確率密度関数が$f_{x_1+x_2+\cdots x_n}(u)$である確率分布の積率母関数$m'(t)$は、

$$m'(t)=\int_0^\infty e^{tu}\frac{1}{(n-1)!}\lambda^n u^{n-1}e^{-\lambda u}du=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty u^{n-1}e^{-(\lambda-t)u}du$$

$\lambda>t$に対して、$(\lambda-t)u=s(s>0)$と置換して、

$m'(t)$

$$=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty\left(\frac{s}{\lambda-t}\right)^{n-1}e^{-s}\frac{1}{\lambda-t}ds=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{1}{\lambda-t}\right)^n\int_0^\infty s^{n-1}e^{-s}ds=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left(\frac{1}{\lambda-t}\right)^n(n-1)!=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n$$

よって、$m(t)=m'(t)$となり題意が成り立つ。

(3)　$n=1$の場合、$\int_0^a e^{-u}du=1-e^{-a}$となり題意を満たす。

また、$\int_0^a \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-u}du=1-\sum_{t=0}^{n-1}\frac{e^{-a}a^t}{t!}$が成り立つと仮定すると、このとき

$$\int_0^a \frac{1}{n!}u^n e^{-u}du=$$

$$\left[\frac{1}{n!}u^n(-e^{-u})\right]_0^a+\int_0^a \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-u}du=-\frac{1}{n!}a^n e^{-a}+\int_0^a \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-u}du$$

$$=-\frac{1}{n!}a^n e^{-a}+1-\sum_{t=0}^{n-1}\frac{e^{-a}a^t}{t!}$$

$$=1-\sum_{t=0}^{n}\frac{e^{-a}a^t}{t!}$$

よって数学的帰納法により、$\int_0^a \frac{1}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-u}du=1-\sum_{t=0}^{n-1}\frac{e^{-a}a^t}{t!}$は、すべての$n$ $(n\geq 1)$について成り立つ。

(4) $\int_{\frac{\log k\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_0-\lambda_1}}^{\infty} f_{x_1+x_2+\cdots+x_n}(u,\lambda_0)du=1-\int_0^{\frac{\log k\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_0-\lambda_1}} f_{x_1+x_2+\cdots+x_n}(u,\lambda_0)du$が求める有意水準となる。

$n=3,\lambda_0=1$のとき、$f_{x_1+x_2+x_3}(u)=\frac{1}{(3-1)!}u^{3-1}e^{-u}$となり、これはガンマ分布$Ga(3,1)$の確率密度関数となっている。また$k=12.5,\lambda_1=0.5$より

$$\frac{\log k\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n}{\lambda_0-\lambda_1}=\frac{\log 12.5\left(\frac{1}{0.5}\right)^3}{1-0.5}=2\log(100)=4\log 10$$ だが、$4\log 10=a$とすると、(2) (3)

より

$$\int_0^{\frac{\log k\left(\frac{\lambda_0}{\lambda 1}\right)^n}{\lambda_0-\lambda_1}} f_{x_1+x_2+\cdots+x_n}(u,\lambda_0)du=\int_0^a \frac{1}{2!}u^2e^{-u}du=1-\sum_{t=0}^{2}\frac{e^{-a}a^t}{t!}$$

となるので、求める有意水準は$\sum_{t=0}^{2}\frac{e^{-a}a^t}{t!}$となる

$\log_e 10 = 2.3026$、$e^{-4\log 10} = \dfrac{1}{10000}$ を用いて、これを項別に計算すると

t	0	1	2	合計 (0～2)
$\dfrac{e^{-a}a^t}{t!}$	0.0001	0.000921	0.004241	0.005262

よって、求める有意水準は 0.53%