年金数理(問題)

この年金数理の問題における「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年年齢 x_r 歳時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいう。

また、「被保険者」とは、特に説明がない場合は在職中の者をいい、「加入年齢方式」とは、「特定年齢方式」のことをいう。

問題1．次の(1)～(6)については、それぞれの選択肢から設問の答えとして正しいものを選んでその記号を、また(7)～(10)については、必要に応じて指示に従った端数処理を行った上で設問の解答のみを、それぞれ解答用紙の所定の欄に記入せよ。 (45 点)

(1) 定常状態にある Trowbridge モデルの年金制度における給付現価 S を示した以下の算式のうち、正しい算式はいくつあるか、正しいものの記号を選べ。ただし、算式の記号の意味は次のとおりである。

左肩添字は財政方式を表し、P :賦課方式、T :退職時年金現価積立方式、In :加入時積立方式、U :単位積立方式であり、C は制度全体の毎年度の保険料総額、v は割引率、$d=1-v$ とする。

また、S^f :将来加入が見込まれる被保険者の給付現価、S^p :年金受給権者の給付現価、S^a :在職中の被保険者の給付現価、S^a_{PS} :在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価、S^a_{FS} :在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価 とする。

①$S=\dfrac{{}^{P}C}{d}$　　②$S^p=\dfrac{{}^{P}C-v\cdot{}^{T}C}{d}$　　③$S^a=\dfrac{v\cdot{}^{T}C-{}^{In}C}{d}$

④$S^f=\dfrac{{}^{In}C}{d}$　　⑤$S^p+S^a_{PS}=\dfrac{{}^{P}C-v\cdot{}^{U}C}{d}$　　⑥$S^a_{FS}=\dfrac{v\cdot{}^{U}C-{}^{In}C}{d}$

(A) 1個　(B) 2個　(C) 3個　(D) 4個　(E) 左記以外

(2) ある年金制度において、年度末時点の積立金が年度末時点の責任準備金を下回る場合、その下回る額の一定割合 r に相当する額を、翌年度末に特別保険料として拠出するものとする。この年金制度が定常状態である場合の、「年度末時点の積立金÷年度末時点の責任準備金」を表す算式の記号を選べ。

なお、予定利率を i 、運用利回りを j 、$0<j<i<r<1$ とし、標準保険料・給付ともに期初払いとする。また、「年度末時点の積立金」には、年度末時点で拠出される特別保険料を含むものとする。

(A) $\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot i}{r-i}$　(B) $\dfrac{r-\dfrac{1+i}{1+j}\cdot j}{r-i}$　(C) $\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot j}{r-i}$

(D) $\dfrac{r-\dfrac{1+i}{1+j}\cdot j}{r-j}$　(E) $\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot i}{r-j}$

(3) 以下の文章のうち正しいものはいくつあるか、正しいものの記号を選べ。

①Trowbridge モデルの年金制度において財政方式として加入年齢方式を採用した場合、特定年齢を超える年齢における新規加入者の加入時における責任準備金は必ずプラスとなる。

②定常人口にある Trowbridge モデルの年金制度において財政方式として開放型総合保険料方式を採用した場合、制度発足時に在職中の被保険者の過去勤務期間を通算し、かつ既に退職した被保険者にも年金給付を行う場合の保険料は退職時年金現価積立方式の保険料と一致する。

③財政方式として(閉鎖型)総合保険料方式を採用した場合、定常人口にあるのであれば、期間の経過につれ、積立金は加入年齢方式の責任準備金に収束する。(保険料は定期的に洗い替えるものとする)

④財政方式として開放型総合保険料方式を採用した場合、定常状態にある制度がなんらかの理由により積立金に不足が発生した場合でも、保険料の洗い替えによって、発生した積立金不足の回復が可能である。

⑤定額式の年金制度において財政方式として開放基金方式を採用した場合、定常人口となっていない場合でも予定死亡率・予定脱退率どおりに人員推移した場合は財政上差損益(ただし、利差損益は除く)は発生しない。

(A) 1個　(B) 2個　(C) 3個　(D) 4個　(E) 5個

(4) 生存脱退と死亡脱退を脱退事由とする2重脱退残存表を考える。それぞれの原因による脱退は独立に発生し、かつ、それぞれの脱退は1年を通じて一様に発生するものとする。この2重脱退残存表におけるx歳の記号を次のように定義する。

$l_x^{(T)}$:残存者数　$d_x^{(w)}$:生存脱退数　$d_x^{(d)}$:死亡脱退数　$q_x^{(w)}$:生存脱退率　$q_x^{(d)}$:死亡脱退率

今、生存脱退と死亡脱退が単独の脱退事由とするそれぞれの脱退残存表におけるx歳の生存脱退率、死亡脱退率を$q_x^{(w)*}$、$q_x^{(d)*}$とするとき、$q_x^{(d)}$を$q_x^{(w)*}$、$q_x^{(d)*}$を用いて表す算式の記号を選べ。

(A) $\dfrac{q_x^{(d)*}(1-\frac{1}{2}q_x^{(w)*})}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}$　(B) $\dfrac{q_x^{(d)*}}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}$　(C) $\dfrac{q_x^{(d)*}(1+\frac{1}{2}q_x^{(w)*})}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}$

(D) $\dfrac{q_x^{(w)*}(1+\frac{1}{2}q_x^{(d)*})}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}$　(E) $\dfrac{q_x^{(w)*}(1-\frac{1}{2}q_x^{(d)*})}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}$

(5) ある年金制度では期初に保険料Cが払い込まれ、期末に給付Bが支払われる。また、給付支払い後の積立金はFで定常状態になっている(ここに予定利率はiとする)。
ある年度の運用利回りが$j\ (0<j<i)$となったため、その年度末の積立金残高がFより少なくなってしまった。そのため、翌年度の保険料を$(C+\Delta C)$とすることにより、翌年度末の積立金残高をFに回復させることにした。翌年度の運用利回りは予定利率どおりであるとして、追加保険料ΔCを表す算式の記号を選べ。

(A) $\Delta C=B-(1+i)C-jF$　　(B) $\Delta C=B-(1+j)C-jF$

(C) $\Delta C=B-(1+j)C-iF$　　(D) $\Delta C=B-(1+j)C+jF$

(E) $\Delta C=B-(1+j)C+iF$

(6) ある年金制度の初期過去勤務債務を以下に示す3通りの償却方法(①～③)による年1回期初払いの特別保険料で償却することを考えた。第2年度末の未償却過去勤務債務が償却方法①の場合と同じになる償却方法②、③におけるxおよびyに最も近い数値の記号をそれぞれ選べ。

(A) 18%　(B) 20%　(C) 22%　(D) 24%　(E) 26%　(F) 28%　(G) 30%　(H) 32%

＜前提＞
・この年金制度の被保険者数は増加傾向にあり各期初の被保険者数は前期初より5%増加する。
・①および②の場合で被保険者1人あたりの特別保険料の算定は、被保険者数が発足時から変化しない前提で計算する。
・後発過去勤務債務は(被保険者数の変動に関わらず)発生しない。
・予定利率は2.5%とし、期初払確定年金現価率($\ddot{a}_{\overline{n}|}$)としては以下の数値を使用すること。

n	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	n	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$
1	1.00	6	5.65
2	1.98	7	6.51
3	2.93	8	7.35
4	3.86	9	8.17
5	4.76	10	8.97

＜償却方法＞
① 被保険者1人あたりの特別保険料を設定することにより5年間で元利均等償却する方法
② 被保険者1人あたりの特別保険料を、第1年度 : P とすると、
第2年度 : (1＋x)×P、第3年度 : (1＋2×x)×P、第4年度 : (1＋3×x)×P
と、第1年度の特別保険料の一定割合xずつ増加する特別保険料により4年間で償却する方法
③ 前年度末未償却過去勤務債務(第1年度は初期過去勤務債務)の一定割合yを償却する方法

(7) ある年金制度は定常人口で、毎年 18 歳で 80 人の新規加入があり、定年年齢は 60 歳であるという。この制度における脱退者の平均年齢が 46.5 歳であるとき、この制度の被保険者の総数($\int_{18}^{60} l_x dx$)を求めよ。

なお、被保険者数(l_x)は年齢(x)に関して微分可能な関数とする。
(小数点以下第1位を四捨五入し整数で答えよ。)

(8) $\overset{\circ}{e}_x = 0.75(64 - x)$ とする。$l_0 = 100,000$ のとき、$l_x = 75,000$ となる x を求めよ。
なお、被保険者数(l_x)は年齢(x)に関して微分可能な関数とする。
(小数点以下第1位を四捨五入し整数で答えよ。)

(9) 定常状態に達している次のような財政状況の年金制度に関して、利差益が生じたことにより、ある年度の期末積立金 F' が期初積立金 F を上回ったため、剰余金を使って給付改善を行うことにした。保険料を変更することなく剰余金全額を取崩して一律 2%の給付改善が可能であった場合、この年度の期末積立金 F' はいくらであったか求めよ。
なお、財政方式は開放型総合保険料方式、予定利率は 3.5%、保険料と給付は年 1 回期初払いとする。
(小数点以下第1位を四捨五入し整数で答えよ。)

【財政状況】
・期初責任準備金:10,764　・期初積立金:10,764　・保険料:500

(10) 定常人口のもとにある年金制度の現時点での諸数値は以下のとおりである。

①年金受給権者の給付現価		:	500 百万円
②在職中の被保険者の給付現価	将来期間対応分	:	300 百万円
	過去期間対応分	:	400 百万円
	合　計	:	700 百万円
③将来加入が見込まれる被保険者の加入時の給付現価(単年度分)		:	7 百万円
④在職中の被保険者の給与現価		:	3,000 百万円
⑤将来加入が見込まれる被保険者の加入時の給与現価(単年度分)		:	140 百万円
⑥積立金残高		:	800 百万円
⑦給与総額		:	300 百万円
⑧予定利率		:	2.5%
⑨10 年確定年金現価率		:	8.97
⑩財政方式		:	加入年齢方式

現時点で計算した標準保険料率と特別保険料率(10 年償却)により、1年間財政運営をした後に、給付水準(将来期間分、過去期間分)を一律 30%カットする給付減額を行うこととした。ただし、この給付減額は年金受給権者には適用しないものとする。この給付減額実施後の標準保険料率と特別保険料率(10 年償却)を求めよ。なお、給付減額前の1年間の運用利回りは年 4%、保険料と給付は年1回期初払いとする。
(本問での各保険料率は、パーセント単位で小数点以下第2位を四捨五入し小数点以下第1位とすること。)

問題2. 次の①～⑮の空欄に当てはまる適当な算式を求め、解答用紙の所定の欄に記入せよ。 (15 点)

ただし、算式の解答にあたっては以下の記号を用いること。

S^a ： 在職中の被保険者の給付現価

S^a_{FS} ： 在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価

S^a_{PS} ： 在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価

S^p ： 年金受給権者の給付現価

S^f ： 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価

G^a ： 在職中の被保険者の人数現価

G^f ： 将来加入が見込まれる被保険者の人数現価

i ： 予定利率

v ： $\dfrac{1}{1+i}$

d ： $1-v$

B ： 制度全体の毎年度の給付額(期初払い)

L ： 在職中の被保険者の総数

${}^{A}P_n$ ： 到達年齢方式での第 n 年度の1人あたり標準保険料(期初払い)

${}^{A}C_n$ ： 到達年齢方式での第 n 年度の標準保険料(期初払い)

${}^{A}C'_n$ ： 到達年齢方式での第 n 年度の特別保険料(期初払い)

${}^{A}F_n$ ： 到達年齢方式での第 n 年度初の積立金

${}^{A}U_n$ ： 到達年齢方式での第 n 年度初の未償却過去勤務債務

到達年齢方式は、制度発足時の各到達年齢毎に将来勤務期間に対応する給付のための費用を標準保険料として積み立て、過去勤務期間を通算する制度にあっては、制度発足時の過去勤務期間に対応する給付現価を未償却過去勤務債務として特別保険料により償却する財政方式である。

以下では、到達年齢方式が適用される定常人口にある Trowbridge モデルの年金制度において、制度発足時の未償却過去勤務債務を償却した後の積立金が加入年齢方式の責任準備金に収束することを示す。

制度発足時の標準保険料および未償却過去勤務債務は

$$ {}^{A}C_1 = {}^{A}P_1 \cdot L = \frac{\boxed{①}}{\boxed{②}} \cdot L $$

$$ {}^{A}U_1 = S^p + \boxed{③} $$

第 n 年度における標準保険料は

$$ {}^{A}C_n = {}^{A}P_n \cdot L = \frac{\boxed{④} - \left({}^{A}F_n + \boxed{⑤} \right)}{\boxed{②}} \cdot L $$

が成り立つ。

また、定常人口を仮定していることから、

$$ {}^{A}F_{n+1} = \left({}^{A}F_n + {}^{A}C_n + \boxed{⑥} \right)(1+i) - \boxed{⑦} \quad \cdots(ア) $$

$$ {}^{A}U_{n+1} = \left({}^{A}U_n - \boxed{⑥} \right)(1+i) \quad \cdots(イ) $$

が成り立つ。

そこで(ア)(イ)をそれぞれ合計し、${}^{A}V_n = {}^{A}F_n + {}^{A}U_n$ としてまとめると、

$$ {}^{A}V_{n+1} = \left({}^{A}V_n + {}^{A}C_n \right)(1+i) - \boxed{⑦} \quad \cdots(ウ) $$

また、第 n 年度における標準保険料を ${}^{A}V_n$ を用いて表すと

$$ {}^{A}C_n = \frac{\boxed{⑧}}{\boxed{②}} \cdot L \quad \cdots(エ) $$

(ウ)(エ)より ${}^{A}C_n$ を消去すれば

$$ {}^{A}V_n = \left(1 - \frac{L}{\boxed{②}} \right)(1+i) \cdot {}^{A}V_{n-1} + \left(\boxed{⑨} \right)(1+i) \quad \cdots(オ) $$

ここで右辺第1項の係数について検討してみると、

$$ \left(1 - \frac{L}{\boxed{②}} \right)(1+i) = 1 - \frac{d \cdot \boxed{⑩}}{v \cdot \boxed{⑪}} < 1 $$

一方、$\boxed{②} > L$ であるから

$$ 0 < \left(1 - \frac{L}{\boxed{②}} \right)(1+i) < 1 $$

これより、数列 $\{ {}^{A}V_n \}$ は収束することがわかる。

ここで R を次の条件を満たす値とする。

$$ R = \left(1 - \frac{L}{\boxed{②}} \right)(1+i) \cdot R + \left(\boxed{⑨} \right)(1+i) \quad \cdots(カ) $$

この式を R について解くと

$$R = \frac{\left(\boxed{⑫}\right) \cdot L - \boxed{⑬}}{\boxed{⑭}}$$

(オ)(カ)より

$$ {}^{A}V_n - R = \left(1 - \frac{L}{\boxed{②}}\right)(1+i) \cdot \left({}^{A}V_{n-1} - R\right)$$

従って、数列 $\{{}^{A}V_n - R\}$ は、公比 $\left(1 - \frac{L}{\boxed{②}}\right)(1+i)$ の等比数列であり、0 に収束する。

このことから、数列 $\{{}^{A}V_n\}$ は R に収束することがわかる。

この R は $B = d(S^p + S^a + S^f)$ という関係式を用いると

$$R = S^p + S^a - \boxed{⑮} \cdot G^a$$

となり、$\boxed{⑮}$ が加入年齢方式の標準保険料を表しているので、${}^{E}V$ を加入年齢方式の責任準備金とすれば、

$$\lim_{n \to \infty} {}^{A}V_n = R = {}^{E}V$$

従って、到達年齢方式の積立金は、制度発足時の未償却過去勤務債務の償却を終了した場合、定常状態において加入年齢方式の責任準備金に収束することが確認できた。

問題3. 以下の制度内容の年金制度を実施している集団が2種類の給与体系を検討している。

≪制度内容≫

・加入時期	年 1 回期初加入
・給付内容	「定年到達時給与×α」の年金年額を、定年到達時から年1回期初払いで終身にわたって支給する(定年以外の事由による脱退には給付なし)
・昇給時期	年 1 回期初昇給
・脱退時期	年 1 回期末脱退(ただし、定年退職は定年到達時の期初に脱退)
・拠出方法	「昇給後給与合計×保険料率」を年 1 回期初払い
・財政方式	加入年齢方式 (加入年齢x_e歳)

検討している2種類の給与体系の年齢別給与b_x ($x_e \leqq x \leqq x_r$)が次のとおりである場合、以下の各問に答えよ。 (20 点)

○ 給与体系A : $b^A_{x_e} = 1$、$b^A_{x+1} - b^A_x = 1 \ (x \neq s)$、$b^A_{x+1} - b^A_x = n+1 \ (x = s)$

○ 給与体系B : $b^B_{x_e} = 1$、$b^B_{x+1} - b^B_x = \dfrac{x_r - x_e + n}{x_r - x_e}$

ただし、$x_e \leqq s < x_r - 1$、$0 < n$ とする。

解答にあたり必要であれば以下の記号および計算基数を用いよ。

x_e : 加入年齢　　x_r : 定年年齢

$\ddot{a}_x$: x歳支給開始期初払終身年金現価率

D_x、C_x 等 : 期初拠出、期末脱退に応じた計算基数

また、設問(3)における責任準備金は、期初の昇給直後・加入直後・保険料の拠出直前のものと考えること。

(1) 2種類の給与体系におけるそれぞれの標準保険料率$P^A_{x_e}$、$P^B_{x_e}$ (年1回期初払い)を求めよ。

(解答はb^A_xおよびb^B_xは使用せずに、nを用いて表すこと)

(2) $P^A_{x_e} \leqq P^B_{x_e} \ (s = \beta)$、$P^A_{x_e} > P^B_{x_e} \ (s = \beta + 1)$ となる β ($x_e \leqq \beta < x_r - 2$) が、ただ1つ存在することを示せ。

(3) $s = \gamma$のとき、$P^A_{x_e} = P^B_{x_e}$となったとする。

この時、被保険者の責任準備金は、給与体系Aと給与体系Bのどちらが大きくなるかを示せ。

問題4．　Trowbridge モデルの年金制度（加入時期は年1回期初、保険料は年1回期初払い）において、予定新規加入年齢を次の算定方法で求めるものとして、以下の問いに答えよ。　(20 点)

＜予定新規加入年齢の算定方法＞

過去一定期間に加入した被保険者の集団で収支相等する保険料を算出し、加入年齢毎の個人平準保険料のうち当該保険料と近似する保険料となる加入年齢を、予定新規加入年齢とする方法

x_e :年金制度に加入できる最低年齢

x_r :定年年齢

S_x :加入年齢 x 歳の被保険者1人あたりの加入時給付現価

G_x :加入年齢 x 歳の被保険者1人あたりの加入時人数現価

P_x :加入年齢 x 歳の被保険者1人あたりの個人平準保険料 $(= S_x / G_x)$

L_x :過去一定期間に x 歳で加入した被保険者の人数

（S_x、 G_x、 P_x、 L_x はいずれも、$x_e \leqq x \leqq x_r - 1$ である正の整数 x で定義されるものとする。）

$\overline{P}$:過去一定期間に加入した被保険者の集団 $\{L_x\}$ で収支相等する保険料 $\left(= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x S_x \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x G_x \right)$

このとき、$x_e \leqq x \leqq x_r - 1$ である正の整数 x のうち、$P_x \leqq \overline{P}$ を満たすものの最大値 x_N を予定新規加入年齢とする。

解答には次の記号を用いること。

i ： 予定利率　　v ： 割引率 $(= 1/(1+i))$	l_x ： 脱退残存表に基づく残存数
D_x、 N_x ： 予定利率 i の脱退残存表に基づく計算基数	$\ddot{a}_x$ ： x 歳支給開始期初払終身年金現価率

なお、各問の①については、解答を導く過程は記載しなくてもよい。

(1)　① P_x、$\overline{P}$ それぞれを、計算基数および定年年齢における年金現価率（$\ddot{a}_{x_r}$）を用いて表せ。

② $\overline{P}$ が $P_{x_e}, P_{x_e+1}, \cdots, P_{x_r-1}$ の加重平均値であることを示した上で、x_N が必ず存在することを示せ。

(2)　以下、$x_e \leqq x \leqq x_r$ である正の整数 x について $l_x = mp^x$ $(0 < m$ 、$0 < p < 1)$ であるものとする。

① D_x、$N_x - N_{x_r}$ それぞれを、 v、m、p を用いて表せ。

② 過去一定期間に加入した被保険者の平均加入年齢 $\bar{x}$ $\left(\bar{x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} x L_x \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \right)$ $(x_e \leqq \bar{x} \leqq x_r - 1)$ が正の整数であるものとする。

このとき、 $\bar{x}$ が $P_{\bar{x}} \leqq \overline{P}$ を満たすことを示すことにより、 $\bar{x} \leqq x_N$ であることを示せ。

＜ヒント＞

一般に、正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, w_1, w_2, \cdots, w_n$ について、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} \geqq \left(a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot \cdots \cdot a_n^{w_n} \right)^{\frac{1}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}} \quad \text{（相加平均 ≧ 相乗平均）}$$

以上

年 金 数 理（解答例）

問題１.

番号	(1)	(2)	(3)	(4)
記号	(B)	(E)	(B)	(A)
番号	(5)	(6)		(7)
記号 数値	(B)	x ： (F)	y ： (D)	2,280 人 （整数）
番号	(8)	(9)	(10)	
数値	37 歳 （整数）	11,275 （整数）	標準保険料率 3.5 % （小数１位）	特別保険料率 1.7 % （小数１位）

(1)

①は、教科書(3-42)より正しい。

②は、教科書(3-43)より正しい。

③は、教科書(3-45)より誤り、正しくは、$S^a = \dfrac{v \cdot {}^{T}C - v \cdot {}^{In}C}{d}$

④は、教科書(3-46)より誤り、正しくは、$S^f = \dfrac{v \cdot {}^{In}C}{d}$

⑤は、教科書(3-46)の次の説明より誤り、正しくは、$S^p + S^a_{PS} = \dfrac{{}^{P}C - {}^{U}C}{d}$

⑥は、教科書(3-48)より誤り、正しくは、$S^a_{FS} = \dfrac{{}^{U}C - v \cdot {}^{In}C}{d}$

よって、正しい算式は2個 ・・・ 解答(B)

(2) 定常状態における責任準備金をV、年金資産をF、標準保険料をP_N、給付をSとする。

責任準備金について $(V + P_N - S)\cdot(1+i) = V$ ・・・ ①

年金資産について $(F + P_N - S)\cdot(1+j) + (V - F)\cdot r = F$ ・・・ ②

が成り立つ。①より$P_N - S = -\dfrac{i}{1+i}V$

これを②に代入して変形すると、$\dfrac{F}{V} = \dfrac{r - \dfrac{1+j}{1+i}\cdot i}{r-j}$ ・・・ 解答(E)

(3)

① ○

② ×（退職時年金現価積立方式 ⇒ 賦課方式 ： 教科書 P89）

③ ○

④ ×（積立不足の解消はできない ： 教科書 P92～93）

⑤ ×（将来加入者の見込みが変わるため差損益が発生する ： 教科書 P92）

よって、正しいものは2個 ・・・ 解答(B)

(4)

$$q_x^{(w)*}=\frac{d_x^{(w)}}{l_x^{(T)}-\frac{1}{2}d_x^{(d)}} \quad \cdots①$$

$$q_x^{(d)*}=\frac{d_x^{(d)}}{l_x^{(T)}-\frac{1}{2}d_x^{(w)}} \quad \cdots②$$

なので、①②から

$$d_x^{(w)}=q_x^{(w)*}(l_x^{(T)}-\frac{1}{2}d_x^{(d)}) \quad \cdots③$$

$$d_x^{(d)}=q_x^{(d)*}(l_x^{(T)}-\frac{1}{2}d_x^{(w)}) \quad \cdots④$$

③を④に代入して整理すると

$$d_x^{(d)}=\frac{1-\frac{1}{2}q_x^{(w)*}}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}q_x^{(d)*}\cdot l_x^{(T)}$$

したがって、$q_x^{(d)}=\dfrac{d_x^{(d)}}{l_x^{(T)}}=\dfrac{q_x^{(d)*}(1-\frac{1}{2}q_x^{(w)*})}{1-\frac{1}{4}q_x^{(d)*}q_x^{(w)*}}$ ・・・ 解答(A)

(5) この年金制度は極限方程式 $C+\dfrac{i}{1+i}F=\dfrac{1}{1+i}B$ が成立している。

ここで、運用利回りが低下した年度では、積立金の減少額をΔFとすると

$(C+F)\times(1+j)-B=F-\Delta F \quad \cdots①$

一方、翌年度末は題意より

$\{(F-\Delta F)+(C+\Delta C)\}\times(1+i)-B=F \quad \cdots②$

が成立しているので、①、②からΔFを消去すると

$\{(C+F)\times(1+j)-B+(C+\Delta C)\}\times(1+i)-B=F$

$\therefore\ \Delta C=B-(1+j)C-jF$ ・・・ 解答(B)

(6) 初期PSL＝A，初期人数をNとする

①の場合

特別P＝A／(N・4.76)

第1年度末PSL＝A×(1－1/4.76)×1.025

第2年度末PSL／1.025＝A×(1.025－1.025/4.76－1.05/4.76)

＝0.5890756303A

②の場合

xが乗じられる階段状の現価率を求める

現価率＝((1/1.025+1.98)/1.025+2.93)/1.025＝5.6717285007

特別P＝A／N／(3.86+5.6717285007x)

ここで、g(x)＝(3.86+5.6717285007x) とおくと

第1年度末PSL＝A×(1－1/g(x))×1.025

第2年度末PSL／1.025

＝A×{1.025－1.025/g(x) －1.05×(1+x)/g(x)}

③の場合

第1年度末PSL＝A×(1－y)×1.025

第2年度末PSL／1.025＝A×((1－y)×1.025)×(1－y)

上記結果の、①の場合＝②の場合と、①の場合＝③の場合を解くと、
x＝27.5815％＝28％ ・・・ 解答(F)
y＝24.1905％＝24％ ・・・ 解答(D)

(7) 新規加入年齢をx_e歳、定年年齢をx_r歳とすると、年間の脱退者数は

$$\int_{x_e}^{x_r} l_x \mu_x dx + l_{x_r} \qquad \text{ここで、} \mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$$

一方、脱退者の加入年数の総計は、$\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\cdot l_x\mu_x dx + (x_r - x_e)\cdot l_{x_r}$

ここで、 $\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\cdot l_x\mu_x dx = \int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\cdot l_x\left(-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}\right)dx = -(x_r - x_e)l_{x_r} + \int_{x_e}^{x_r} l_x dx$

よって、脱退者の加入年数の総計は、$\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\cdot l_x\mu_x dx + (x_r - x_e)\cdot l_{x_r} = \int_{x_e}^{x_r} l_x dx$

ここで、定常状態を仮定していることから、年間の脱退者数＝新規加入者数＝80 人
一方、脱退者の平均加入年数は 46.5－18＝28.5 年なので

$$\frac{\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\cdot l_x\mu_x dx + (x_r - x_e)\cdot l_{x_r}}{\int_{x_e}^{x_r} l_x \mu_x dx + l_{x_r}} = 28.5$$

$$\frac{\int_{x_e}^{x_r} l_x dx}{80} = 28.5$$

$$\therefore \quad \int_{x_e}^{x_r} l_x dx = 28.5 \times 80 = \underline{2{,}280\text{ 人}} \quad \cdots(\text{解答})$$

(8) $\dfrac{d\mathring{e}_x}{dx} = -0.75$

一方、 $\dfrac{d\mathring{e}_x}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\int_x^\infty l_y dy}{l_x}\right) = \dfrac{-l_x^2 - \frac{dl_x}{dx}\int_x^\infty l_y dy}{l_x^2} = \mathring{e}_x \cdot \mu_x - 1$ より、 $\mu_x = \dfrac{1}{3(64-x)}$

ここで、$_xp_0 = e^{-\int_0^x \mu_t dt} = e^{-\int_0^x \frac{1}{3(64-t)}dt} = e^{\left[\frac{1}{3}\log(64-t)\right]_0^x} = \left(\dfrac{64-x}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

これを、$_xp_0 = \dfrac{l_x}{l_0} = \dfrac{75{,}000}{100{,}000}$ とあわせてxについて解くと、 $x = \underline{37\text{ 歳}}$ ・・・ (解答)

(9) 定常状態に達しているため、保険料をC、期初積立金をF、給付改善前の給付額をB、予定利率をiとすると、極限方程式 $C + dF = B$

$$\therefore B = 500 + \frac{0.035}{1.035} \times 10{,}764 = 864$$

ここで、剰余金$= F' - F$を原資として給付の一律 2%の改善を行うので、

$$B \times 2\% \times \frac{1}{d} = F' - F$$

$$\therefore \quad F' = 864 \times 0.02 \times \frac{1.035}{0.035} + 10{,}764 = 11{,}274.99\cdots$$

よって 11,275 ・・・ (解答)

(10) 現時点での標準保険料率＝7/140＝5.0%
現時点でのPSL＝500+700-3000×5.0%-800＝250 百万円
現時点での特別保険料率＝250/(300×8.97)＝9.290%⇒9.3%
定常人口を仮定しているため、
単年度給付額＝(500+700+7/0.025)÷(1.025/0.025)＝36.0976 百万円
標準保険料額＝5.0%×300＝15.0 百万円
特別保険料額＝9.3%×300＝27.9 百万円
1年後の資産＝(800+15+27.9-36.0976)×1.04＝839.0745 百万円
1年後の標準保険料率＝(7×0.7)/140＝3.5%
1年後のPSL＝500+(700×0.7)-3000×3.5%-839.0745＝45.9255 百万円
1年後の特別保険料率＝45.9255/(300×8.97)＝1.70663%⇒1.7%
よって、標準保険料率:3.5%、特別保険料率:1.7% ･･･ (解答)

（別解）

平成17年度資格試験 年金数理 問題1.(10)は、いくつかの前提数値を与え、その数値を用いて解答を導く問題ですが、出題文に記載した「給与総額」の前提数値を直接用いず、他の前提数値からその値を求めこれに基づき計算した場合に、次のとおり異なる解答となることが判明しました。

(10) 現時点での標準保険料率＝7/140＝5.0%
現時点でのＰＳＬ＝500＋700－3000×5.0%－800＝250 百万円
定常人口を仮定しているため、
給与総額＝（3000＋140/0.025）÷(1.025/0.025)＝209.7561 百万円
現時点での特別保険料率＝250/（209.7561×8.97）＝13.287%⇒13.3%
定常人口を仮定しているため、
単年度給付額＝(500＋700＋7/0.025）÷(1.025/0.025）＝36.0976 百万円
標準保険料額＝5.0%×209.7561＝10.4878 百万円
特別保険料額＝13.3%×209.7561＝27.8976 百万円
1年後の資産＝（800＋10.4878＋27.8976－36.0976）×1.04＝834.3793 百万円
1年後の標準保険料率＝(7×0.7）/140＝3.5%
1年後のＰＳＬ＝500＋（700×0.7）－3000×3.5%－834.3793＝50.6207 百万円
1年後の特別保険料率＝50.6207/（209.7561×8.97）＝2.690%⇒2.7%
よって、標準保険料率：3.5%、特別保険料率：2.7% ・・・ （解答）

前提数値については問題を解くにあたっての簡便性等を勘案し、（概算数値で）設定しているものであり、これを用いて解いた解答が「正答」と考えますが、前提数値の設定として必ずしも十分とはいえない面があったことも否めず、上記解答についても別解として「正答」といたします。なお、別解による解答者は１１名でしたが、合否結果には影響はありませんでした。

問題２.

教科書 79 頁～81 頁（78 頁～79 頁の置き換え部分あり）

番号	①	②	③	④
算式	S_{FS}^{a}	G^{a}	S_{PS}^{a}	$S^{p}+S^{a}$
番号	⑤	⑥	⑦	⑧
算式	${}^{A}U_{n}$	${}^{A}C'_{n}$	$B(1+i)$	$S^{p}+S^{a}-{}^{A}V_{n}$
番号	⑨	⑩	⑪	⑫
算式	$\dfrac{S^{p}+S^{a}}{G^{a}}L-B$	G^{f}	G^{a}	$S^{p}+S^{a}$
番号	⑬	⑭	⑮	
算式	$B\cdot G^{a}$	$d\cdot G^{f}$	$\dfrac{S^{f}}{G^{f}}$	

(注)算式の分子・分母である「⑩⑪」と「⑫⑬⑭」は、すべて正解の場合に配点した。なお、上の解答例に限らず、分母・分子を合わせた算式として正誤を判断した。

問題3.

(1) b_x^A、b_x^B の定義より、

$$b_x^A=\begin{cases}(x-x_e)+1 & (x_e\leqq x\leqq s)\\(x-x_e)+1+n & (s<x\leqq x_r)\end{cases}$$

$$b_x^B=\frac{x_r-x_e+n}{x_r-x_e}(x-x_e)+1$$

よって、

$$P_{x_e}^A=\frac{D_{x_r}\cdot b_{x_r}^A\cdot\ \alpha\ \cdot\ddot{a}_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot b_x^A}=\frac{D_{x_r}\cdot(x_r-x_e+n+1)\cdot\ \alpha\ \cdot\ddot{a}_{x_r}}{\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot(x-x_e+1)+\sum_{x=s+1}^{x_r-1}D_x\cdot n}$$

$$P_{x_e}^B=\frac{D_{x_r}\cdot b_{x_r}^B\cdot\ \alpha\ \cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\ b_x^B}=\frac{D_{x_r}\cdot\left(x_r-x_e+n+1\right)\cdot\ \alpha\ \cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1+\frac{n}{x_r-x_e}\cdot\left(x-x_e\right)\right)}$$

(2)

① $P_{x_e}^A$ は s に関して単調増加である。また、$P_{x_e}^B$ は s によらない。

② $s=x_e$の場合、

$$P_{x_e}^B-P_{x_e}^A=\frac{D_{x_r}\cdot\left(x_r-x_e+n+1\right)\cdot\ \alpha\ \cdot\ddot{a}_{x_r}}{\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1\right)+\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}D_x\cdot\ n\right)\cdot\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1+\frac{n}{x_r-x_e}\cdot\left(x-x_e\right)\right)\right)}\times$$

$$\left\{\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1\right)+\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}D_x\cdot\ n\right)-\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1+\frac{n}{x_r-x_e}\cdot\left(x-x_e\right)\right)\right)\right\}$$

ここで、{　}内を整理すると

$$\{\quad\}=D_{x_e+1}\cdot\left(n-\frac{n}{x_r-x_e}\right)+D_{x_e+2}\cdot\left(n-\frac{2n}{x_r-x_e}\right)+\cdots+D_{x_r-1}\cdot\left(n-\frac{(x_r-x_e-1)n}{x_r-x_e}\right)$$

この(　)内は、逓減するが、最小値である$\left(n-\frac{(x_r-x_e-1)n}{x_r-x_e}\right)=\frac{n}{x_r-x_e}\ >\ 0\ (\because\ n>0\ )$

$\therefore\ \{\quad\}\ >\ 0$

$\therefore\ P_{x_e}^B\ >\ P_{x_e}^A$

③ $s=x_r-2$ の場合、

$$P_{x_e}^B-P_{x_e}^A=\frac{D_{x_r}\cdot\left(x_r-x_e+n+1\right)\cdot\ \alpha\ \cdot\ddot{a}_{x_r}}{\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1\right)+\sum_{x=x_r-1}^{x_r-1}D_x\cdot\ n\right)\cdot\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1+\frac{n}{x_r-x_e}\cdot\left(x-x_e\right)\right)\right)}\times$$

$$\left\{\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1\right)+\sum_{x=x_r-1}^{x_r-1}D_x\cdot\ n\right)-\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot\left(x-x_e+1+\frac{n}{x_r-x_e}\cdot\left(x-x_e\right)\right)\right)\right\}$$

ここで{　}内を整理すると

$$\{\quad\}=D_{x_e+1}\cdot\left(-\frac{n}{x_r-x_e}\right)+\cdots+D_{x_r-2}\cdot\left(-\frac{(x_r-x_e-2)n}{x_r-x_e}\right)+D_{x_r-1}\cdot\left(n-\frac{(x_r-x_e-1)n}{x_r-x_e}\right)$$

この最終項以外は明らかに負であり、最終項は、$D_{x_r-1}\cdot\left(n-\frac{(x_r-x_e-1)n}{x_r-x_e}\right)=D_{x_r-1}\cdot\left(\frac{n}{x_r-x_e}\right)$

よって、初項と最終項の和 ＝

$$D_{x_e+1}\cdot\left(-\frac{n}{x_r-x_e}\right)+D_{x_r-1}\cdot\left(\frac{n}{x_r-x_e}\right)=\left(D_{x_r-1}-D_{x_e+1}\right)\cdot\left(\frac{n}{x_r-x_e}\right)<0\ (\because\ D_{x_r-1}<D_{x_e+1}、n>0)$$

$\therefore\ \{\quad\}\ <\ 0$

$\therefore\ P_{x_e}^B\ <\ P_{x_e}^A$

①②③より、

$P_{x_e}^A\leqq P_{x_e}^B\ (s=\beta)$、$P_{x_e}^A>P_{x_e}^B\ (s=\beta+1)$ となる $\beta\ (x_e\leqq\beta<x_r-2)$ が、ただ1つ存在する。

(3)

$P_{x_e}^A = P_{x_e}^B = P$とすると、

給与体系Aのx歳一人あたりの責任準備金は

$$V_x^A = \begin{cases} \dfrac{D_{x_r} \cdot (x_r - x_e + n + 1) \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} - P \cdot \dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot (y - x_e + 1) + \sum_{y=\gamma+1}^{x_r-1} D_y \cdot n}{D_x} & (x_e \leqq x \leqq \gamma) \\ \dfrac{D_{x_r} \cdot (x_r - x_e + n + 1) \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} - P \cdot \dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot (y - x_e + 1 + n)}{D_x} & (\gamma < x \leqq x_r - 1) \end{cases}$$

給与体系Bのx歳一人あたりの責任準備金は

$$V_x^B = \frac{D_{x_r} \cdot (x_r - x_e + n + 1) \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} - P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left(\frac{x_r - x_e + n}{x_r - x_e} (y - x_e) + 1 \right)}{D_x}$$

① $x_e < x \leqq \gamma$ の場合

$$V_x^B - V_x^A = P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left((y - x_e + 1) - \frac{x_r - x_e + n}{x_r - x_e} (y - x_e) - 1 \right) + \sum_{y=\gamma+1}^{x_r-1} D_y \cdot n}{D_x}$$

$$= P \cdot \frac{\sum_{y=\gamma+1}^{x_r-1} D_y \cdot n - \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left(\frac{n}{x_r - x_e} (y - x_e) \right)}{D_x}$$

ここで、γは$P_{x_e}^A = P_{x_e}^B$を満たすため、

(1)より、$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \cdot (x - x_e + 1) + \sum_{x=\gamma+1}^{x_r-1} D_x \cdot n = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \cdot \left(x - x_e + 1 + \frac{n}{x_r - x_e} \cdot (x - x_e) \right)$

すなわち、

$$\sum_{x=\gamma+1}^{x_r-1} D_x \cdot n = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \cdot \left(\frac{n}{x_r - x_e} \cdot (x - x_e) \right)$$

よって

$$V_x^B - V_x^A = P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left((y - x_e + 1) - \frac{x_r - x_e + n}{x_r - x_e} (y - x_e) - 1 \right) + \sum_{y=\gamma+1}^{x_r-1} D_y \cdot n}{D_x}$$

$$= P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left(- \frac{n}{x_r - x_e} (y - x_e) \right) + \sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y \cdot \left(\frac{n}{x_r - x_e} \cdot (y - x_e) \right)}{D_x} = P \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x-1} D_y \cdot \left(\frac{n}{x_r - x_e} (y - x_e) \right)}{D_x} > 0$$

② $\gamma < x \leqq x_r - 1$の場合、

$$V_x^B - V_x^A = P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left((y - x_e + 1 + n) - \frac{x_r - x_e + n}{x_r - x_e} (y - x_e) - 1 \right)}{D_x}$$

$$= P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot \left(n - \frac{n}{x_r - x_e} (y - x_e) \right)}{D_x} > 0$$

よって、①②より、$x_e < x \leqq x_r - 1$ について $V_x^B > V_x^A$ が言えるので、被保険者の責任準備金は、給与体系Aよりも給与体系Bの方が大きい。(なお、$V_{x_e}^A = V_{x_e}^B = 0$ は明らか)

問題4.

(1)

①

$$S_x = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}、G_x = \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x} \text{ より、}$$

$$P_x = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_x - N_{x_r}}、\quad \overline{P} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x}}$$

②

$$\overline{P} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot S_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot G_x} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot G_x \cdot P_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot G_x}$$

であり、$\overline{P}$ は $P_{x_e}, P_{x_e+1}, \cdots, P_{x_r-1}$ の加重平均値として表すことができる。・・・(ア)

また、

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \frac{\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_{x+1} - N_{x_r}}}{\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_x - N_{x_r}}} = 1 + \frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x_r}} > 1$$

より、$P_x \ (x_e \leqq x \leqq x_r - 1)$ は x の増加関数であり $P_{x_e} \leqq P_x$ ・・・(イ)

(ア)、(イ)より、$P_{x_e} \leqq \overline{P}$ であるから、$P_x \leqq \overline{P}$ となる正の整数 x が $x_e \leqq x \leqq x_r - 1$ の間で存在する(少なくとも、x_e はこの条件を満たす)。このため、それらのうちの最大値 x_N が存在することが言える。

(注) P_x が x の増加関数であることを示さなくとも、背理法を用いて x_N が存在することを示すこともできる。
(x_N が存在しないと仮定すると、$\overline{P} < P_{x_e}, P_{x_e+1}, \cdots, P_{x_r-1}$ であり、$\overline{P}$ が $P_{x_e}, P_{x_e+1}, \cdots, P_{x_r-1}$ の加重平均値であることと矛盾)

(2)

①

$$D_x = v^x m p^x = m(vp)^x \quad 、\quad N_x - N_{x_r} = \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y = \sum_{y=x}^{x_r-1} m(vp)^y = m \cdot \frac{(vp)^x - (vp)^{x_r}}{1 - vp}$$

②

前提より、$\overline{x}$ は $x_e \leqq \overline{x} \leqq x_r - 1$ を満たす正の整数 ・・・(ウ)

よって、$P_{\overline{x}}$ が定義され、$P_{\overline{x}} = \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_{\overline{x}} - N_{x_r}}$

ここで、(2)①の結果を用いると、

$$\frac{\overline{P}}{P_{\bar{x}}}-1=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{N_x-N_{x_r}}{D_x}}\cdot\frac{N_{\bar{x}}-N_{x_r}}{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}-1=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{N_{\bar{x}}-N_{x_r}}{D_x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{N_x-N_{x_r}}{D_x}}-1=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{m(vp)^{\bar{x}}-m(vp)^{x_r}}{(1-vp)\cdot m(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{m(vp)^x-m(vp)^{x_r}}{(1-vp)\cdot m(vp)^x}}-1$$

$$=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{(vp)^{\bar{x}}-(vp)^{x_r}}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{(vp)^x-(vp)^{x_r}}{(vp)^x}}-1=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{(vp)^{\bar{x}}-(vp)^x}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{(vp)^x-(vp)^{x_r}}{(vp)^x}}\cdots(\text{エ})$$

(エ)の分子$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{(vp)^{\bar{x}}-(vp)^x}{(vp)^x}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{(vp)^{\bar{x}}}{(vp)^x}-\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x=\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\right)\cdot\left((vp)^{\bar{x}}\cdot\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{1}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x}-1\right)\cdots(\text{オ})$

ここで、

$$\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot\frac{1}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x}\geqq\prod_{x=x_e}^{x_r-1}\left[\left\{\frac{1}{(vp)^x}\right\}^{L_x}\right]^{\frac{1}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}L_y}}$$ （ ∵ 相加平均 ≧ 相乗平均 ）

$$=\left(\frac{1}{vp}\right)^{\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}xL_x}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}L_y}}=\frac{1}{(vp)^{\bar{x}}}$$

より、(オ)≧0、つまり $P_{\bar{x}}\leqq\overline{P}$ …(カ)

(ウ)、(カ)と、x_N の定義から、$\bar{x}\leqq x_N$ であることが示せた。