数学（問題）

解答にあたっての注意事項

- 問題 1 から問題 3 を通じて、必要であれば 8 ページ以降の（付表）に記載された数値を用いること。
- 解答が数値となる場合は、整数となる場合を除き、既約分数、または小数点以下第 5 位を四捨五入した小数点以下第 4 位までの小数とすること。ただし、問題文において別に指示するものを除く。
- 解答が数式となる場合は、できるだけ整理された形で表記すること。
- 円周率は π 、自然対数の底は e と表記し、数値に置き換えないこと。
- 問題 2、問題 3 は汎用の解答用紙に問題番号を記入の上解答すること。解答に至る式または過程は解答用紙に残すこと。

問題 1. 次の各問の空欄に入る解答を、解答用紙の所定の欄に記入せよ。 (5 点×12＝60 点)

(1) 赤、青、黄の 3 色のランプが 1 つずつある。常に、そのうち 1 つのランプだけが点灯しているものとする。また、どのランプも点灯するとその 1 秒後に消え、消えると同時に残る 2 つのランプのうちどちらか一方が、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ でランダムに点灯するものとする。今、赤い色のランプが点灯しているとすると、n 秒後に赤い色のランプが点灯している確率 $p(n)$ は、$\boxed{}$ である。

(2) ある正規母集団（母平均は未知）から以下の 8 個の標本を無作為に抽出した。

3.1　3.6　1.9　2.8　2.6　3.1　2.1　4.0

ここで、

$f(a,b) \equiv$「母分散の信頼係数 a %の信頼区間の幅」－「母分散の信頼係数 b %の信頼区間の幅」

と定義すると、$f(99,95)-f(95,80)=\boxed{}$ である。

(「信頼係数」は「信頼度」とも言う。信頼区間の「幅」は「長さ」とも言う。)

(3) 時系列モデル$\{S_t\}$が以下を満たすとき、時点$t-h$と時点tの自己共分散 $Cov(S_{t-h}, S_t)$ は、$\boxed{\quad\quad}$ である。ただし、時差hは正の整数とする。

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_t = S_{t-1} + \mu + \varepsilon_t \quad (t = 1,2,3,\cdots) \\ \quad \text{ここで、}\mu\text{は}t\text{によらない定数、} \\ \quad\quad \varepsilon_t\text{は平均0、分散}\sigma^2\text{の同一の分布に従う互いに独立な確率変数} \end{cases}$$

(4) X_1とX_2を、同一の確率密度関数 $f(x) = e^{-x}$ (定義域は、$x > 0$) に従う互いに独立な確率変数とするとき、以下のとおりとなる。

$Y = X_1 - X_2$ の確率密度関数は、 $f_1(y) = \boxed{\quad ① \quad}$ $(-\infty < y < \infty)$

$Z = \dfrac{X_1}{X_2}$ の確率密度関数は、 $f_2(z) = \boxed{\quad ② \quad}$ $(z > 0)$

(5) ある計算アルゴリズムでは、変数の個数xと計算時間yとの間に以下の関係があることがわかった。

個 数 x	1	10	100	1,000	10,000
計算時間 y	7.4	8.0	9.1	11.5	14.1

明らかに線形回帰分析では良く当てはまりそうもない。そこで、説明変数xを適当に変換し、変換後の説明変数x'と被説明変数yの回帰式を最小二乗法により推定する。ここで、xの変換として、$x' = log_{10} x$ と $x' = \sqrt{x}$ の２つを考えるが、そのいずれが優れているかを、決定係数を用い、回帰式 $y = a + bx'$ のいずれが良く当てはまっているかで判定する。判定の結果、優れているほうの変換による回帰式 $y = a + bx'$ の

aは $\boxed{\quad ① \quad}$ 、bは $\boxed{\quad ② \quad}$ 、決定係数は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

(6) あるデパートではある種のカブトムシを大量に販売しているが、その価格は日々変化する。日々のカブトムシ 1 匹の価格(以下、単に「価格」という)の前日比は、10%上昇、5%下落のいずれかをとる互いに独立な確率変数であり、その発生確率は 10%上昇が 60%、5%下落が 40%である。本日の価格が 1,000 円であるとき、n 日後の価格が 2,000 円以上となる確率が 90%以上となることが保証されるのは、$n \geq$ $\boxed{}$ であるときである。ただし、n は十分に大きいものとして考えること。(整数で解答せよ。)

(7) ある企業の社員の翌日（1 日後）の出社・病欠を予測するモデルを考える。社員の翌日の出社・病欠は、本日および前日の出社・病欠にのみ依存しているものとし、本日および前日の出社・病欠と、翌日の出社・病欠の関係は、以下のとおりである。

(ⅰ) 前日、本日ともに出社した社員が、翌日出社する確率は 0.98

(ⅱ) 前日は病欠したが本日は出社した社員が、翌日出社する確率は α

(ⅲ) 前日は出社したが本日は病欠した社員が、翌日出社する確率は 0.8

(ⅳ) 前日、本日ともに病欠した社員が、翌日出社する確率は β

ここで、

・前日も本日も病欠した社員が、翌々日（2 日後）も病欠である確率が 0.29

・前日は出社したが本日は病欠の社員が、翌々日（2 日後）出社する確率が 0.836

であるとすると、$\alpha =$ $\boxed{①}$ 、$\beta =$ $\boxed{②}$ となる。$(0<\alpha, \beta<1)$

(8) ある企業の毎月の弔慰金支払額は、平均 2,000 万円、標準偏差 750 万円の正規分布に従うものとする。その企業は、弔慰金支払い集中に備えて、月間の弔慰金支払額が 2,500 万円を超えた場合に、以下の（i）と（ii）のいずれか小さい金額を保険金として保険会社から受け取る契約を結ぶこととした。

（i）2,500 万円を超える部分の金額の 1.1 倍

（ii）2,000 万円を超える部分の全額

この契約からの保険会社の 1 年間の利益（＝「累積保険料」－「累積保険金支払額」、事業費や利息は考慮しないこととする）の期待値が 200 万円となるように、企業が保険会社に支払う毎月の保険料(定額)をシミュレーションで求めると $\boxed{}$ 万円（千円単位を四捨五入して万円単位とせよ）となる。シミュレーションは、$[0,1]$ 区間の一様分布として次の確率変数を用い、累積密度関数の逆関数を用いる方法で実施すること。

（小なる確率変数は、少額の支払額に対応するものとせよ。）

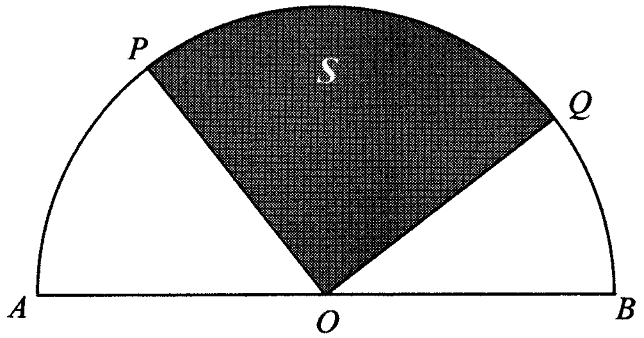
0.916　0.442　0.778　0.424　0.058　0.859　0.516　0.632　0.024　0.098　0.992　0.398

（注）本問の趣旨は、シミュレーション方法を理解しているかどうかを単純に問うものである。上記の乱数は、万円単位の保険料を求めるには充分な個数であるとはいえないものの、問題の便宜上、少数としているものであり、精度にはこだわらず、単純にシミュレーションを行って保険料を求めよ。（正規分布の理論値計算や、シミュレーション上の分散減少の工夫等を行う必要はない。）

(9) あるホームページへの 1 時間あたりのアクセス数は、平均 15 のポアソン分布に従うものとする。このとき、α 時間あたりのアクセス数は ①$\boxed{\text{平均 _____ の _____ 分布}}$ に従う。また、アクセスの間隔を T 時間とすると、T は ②$\boxed{\text{平均 _____ の _____ 分布}}$ に従う。最新のアクセスが今から 3 分前にあったことが判明しているとすると、今から 5 分以内にアクセスがある確率は $\boxed{\text{③}}$ である。

(10) 下図のような半径 1 の半円周 $\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P 、点 Q を無作為に選ぶ。このとき、円の中心 O と点 P 、点 Q からなる扇型 POQ の面積 S は確率変数となるが、S の確率密度関数は、

$f(s)=$ $\boxed{}$ $\left(0 \le s < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。



(11) 確率過程 $\{X_t\}$ が標準ブラウン運動に従うものとする。

このとき、条件付確率 $P[X_2 > 0 | X_1 > 0]$ は、$\boxed{}$ となる。

注：ブラウン運動はガウス過程とも呼ばれる。標準ブラウン運動はウィーナー過程とも呼ばれる。

(12) 成功確率 $\frac{1}{3}$ の試行を繰り返し行い（異なる回の試行が成功するかどうかは互いに独立とする)、成功するごとに、つぼに玉を 1 個入れるというゲームを行う。3 個の玉が入った状況でつぼに玉を入れると玉があふれ、つぼに入った玉は 3 個に戻る仕組みになっている。つぼからあふれた玉の個数を得点とすると、ゲーム終了時の得点の期待値は $\boxed{}$ である。ただし、つぼに玉が入っていない状況から始め、試行が通算で 3 回失敗したときに、このゲームは終了するものとする。

問題 2. X_1、X_2を確率変数Xからの標本とし、Xの確率密度関数が、未知の母数θを含む、

$$f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{4}{\theta^2}\right)x & \left(0 \le x \le \dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{4}{\theta}-\left(\dfrac{4}{\theta^2}\right)x & \left(\dfrac{\theta}{2} < x \le \theta\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられるとする。このとき、次の問いに解答せよ。 (10 点×2＝20 点)

(1) 統計量$S=C_1\cdot(X_1+X_2)$ 、 $T=C_2\cdot Max(X_1,X_2)$ がともにθの不偏推定量となるように、定数C_1 およびC_2 を定めよ。

(2) (1)で定めたθの不偏推定量S 、Tのどちらがより有効かを示せ。

問題 3. 成功するとそれぞれ点数 1、2、3 を加算する 3 種類のゲームがある。各々のゲームの成功確率はそれぞれ$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$であり、失敗の場合は加算点を 0 とする。今、開始時の持ち点を 0 とし、3 種類のゲームのうち 1 種類をランダムに選び（どの種類のゲームを選ぶかは、各々$\frac{1}{3}$の確率とする)、そのゲームを行い、成功すれば持ち点にゲームごとに上記で定めた点数を加算し、あらかじめ定めた目標点n $(n>0)$ にちょうど到達した場合のみ終了、そうでなければ、次のゲームを選ぶところから繰り返す。ゲームに成功した場合であっても、上記で定めた点数を加算した結果、目標点nを上回る場合は加算点を 0 とする。目標点nへの到達までのゲームの実施回数（加算点が 0 となった回を含む）を確率変数X_nとし、その期待値を$E[X_n]$とあらわす。このとき、次の問いに解答せよ。 (5 点×4＝20 点)

(1) $E[X_1]$ を求めよ。

(2) $E[X_2]$ を求めよ。

(3) $E[X_3]$ を求めよ。

(4) $E[X_4]$ を求めよ。

ヒント：$E[X_0], E[X_1], E[X_2], E[X_3], \cdots$ は数列とみなすことができる。

以　上

(付表)

I .標準正規分布表

$P(x>0.25)=0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x>1.9600)=0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

II. 自由度φのχ^2分布の上側ε点：　$\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ \ ε	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349	7.8794
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103	10.5966
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449	12.8382
4	0.2070	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767	14.8603
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.6757	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.9893	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.3444	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902	21.9550
9	1.7349	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5894
10	2.1559	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093	25.1882
11	2.6032	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7568
12	3.0738	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.5650	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882	29.8195
14	4.0747	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412	31.3193
15	4.6009	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.1422	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.6972	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.2648	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1565
19	6.8440	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909	38.5823
20	7.4338	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.0337	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322	41.4011
22	8.6427	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7957
23	9.2604	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384	44.1813
24	9.8862	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9279
26	11.1602	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629	49.6449
28	12.4613	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782	50.9934
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922	53.6720
31	14.4578	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914	55.0027
32	15.1340	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858	56.3281
33	15.8153	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755	57.6484
34	16.5013	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609	58.9639
35	17.1918	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421	60.2748
36	17.8867	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192	61.5812
37	18.5858	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925	62.8833
38	19.2889	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621	64.1814
39	19.9959	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281	65.4756
40	20.7065	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907	66.7660
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5345	37.4849	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0819	83.2977	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4417	48.7576	51.7393	55.3289	85.5270	90.5312	95.0232	100.4252	104.2149
80	51.1719	53.5401	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.8795	106.6286	112.3288	116.3211
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2911	107.5650	113.1453	118.1359	124.1163	128.2989
100	67.3276	70.0649	74.2219	77.9295	82.3581	118.4980	124.3421	129.5612	135.8067	140.1695

Ⅲ. 分母の自由度 m 、分子の自由度 n の F 分布の上側ε点 $F_m^n(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.100$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323

$\varepsilon = 0.050$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon = 0.025$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon = 0.010$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon = 0.005$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ. 自由度φのt分布の上側ε点： $t_{\phi}(\varepsilon)$

φ \ ε	0.100	0.050	0.025
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ. 常用対数表

x	$\log_{10} x$
1.1	0.0414
1.2	0.0792
1.3	0.1139
1.4	0.1461
1.5	0.1761
1.6	0.2041
1.7	0.2304
1.8	0.2553
1.9	0.2788
2.0	0.3010
2.5	0.3979
3.0	0.4771
3.5	0.5441
4.0	0.6021
4.5	0.6532
5.0	0.6990
5.5	0.7404
6.0	0.7782
6.5	0.8129
7.0	0.8451
7.5	0.8751
8.0	0.9031
8.5	0.9294
9.0	0.9542
9.5	0.9777

解答例（数学）

問題 1.

(1) 赤、青、黄の 3 色のランプが 1 つずつある。常に、そのうち 1 つのランプだけが点灯しているものとする。また、どのランプも点灯するとその 1 秒後に消え、消えると同時に残る 2 つのランプのうちどちらか一方が、それぞれ確率$\frac{1}{2}$でランダムに点灯するものとする。今、赤い色のランプが点灯しているとすると、n秒後に赤い色のランプが点灯している確率$p(n)$は、$\boxed{}$ である。

（解答）$\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}$

k秒経過時に赤色のランプが点灯しているとすると$k+1$秒経過時に赤色のランプが点灯している確率は 0、k秒経過時に赤色のランプが点灯していないとすると、$k+1$秒経過時に赤色のランプが点灯している確率は$\frac{1}{2}$である。従って、$p(k+1)=\frac{1}{2}(1-p(k)) \qquad (k=0,1,2,\cdots)$

変形すると、$p(k+1)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p(k)-\frac{1}{3}\right)$　これを、繰り返し用いると、

$$p(n)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p(n-1)-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(p(n-2)-\frac{1}{3}\right)=\cdots\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(p(0)-\frac{1}{3}\right)$$

$p(0)=1$　なので、$p(n)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$

(2) ある正規母集団（母平均は未知）から以下の 8 個の標本を無作為に抽出した。

3.1　3.6　1.9　2.8　2.6　3.1　2.1　4.0

ここで、

$f(a,b)\equiv$「母分散の信頼係数a%の信頼区間の幅」－「母分散の信頼係数b%の信頼区間の幅」

と定義すると、$f(99,95)-f(95,80)=$ $\boxed{}$ である。

（「信頼係数」は「信頼度」とも言う。信頼区間の「幅」は「長さ」とも言う。）

（解答）0.6077

標本平均は、$\overline{X}=\frac{3.1+3.6+1.9+2.8+2.6+3.1+2.1+4.0}{8}=2.9$

$$8S^2=\sum_{k=1}^{8}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$$
$$=(3.1-2.9)^2+(3.6-2.9)^2+(1.9-2.9)^2+(2.8-2.9)^2+(2.6-2.9)^2+(3.1-2.9)^2+(2.1-2.9)^2+(4.0-2.9)^2$$
$$=3.52$$

母分散の信頼係数$100(1-\alpha)$%の信頼区間は、$\left[\frac{3.52}{\chi_7^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)},\frac{3.52}{\chi_7^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$であたえられるので、各々の信頼区間の幅を求めると下表のとおりである。

信頼係数	$\frac{\alpha}{2}$	$\chi_7^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$	$\chi_7^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$\frac{3.52}{\chi_7^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$	$\frac{3.52}{\chi_7^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$	$\frac{3.52}{\chi_7^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{3.52}{\chi_7^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
99%	0.005	0.9893	20.2777	3.558071	0.173590	3.384482
95%	0.025	1.6899	16.0128	2.082963	0.219824	1.863139
80%	0.100	2.8331	12.0170	1.242455	0.292918	0.949537

この表より、$f(99,95)-f(95,80)=(3.384482-1.863139)-(1.863139-0.949537)=0.6077$

(3) 時系列モデル$\{S_t\}$が以下を満たすとき、時点$t-h$と時点tの自己共分散 $Cov(S_{t-h},S_t)$ は、$\boxed{\quad}$ である。ただし、時差hは正の整数とする。

$$\begin{cases} S_0=0 \\ S_t=S_{t-1}+\mu+\varepsilon_t \qquad (t=1,2,3,\cdots) \\ \quad \text{ここで、}\mu\text{は}t\text{によらない定数、} \\ \quad\quad \varepsilon_t\text{は平均}0\text{、分散}\sigma^2\text{の同一の分布に従う互いに独立な確率変数} \end{cases}$$

(解答) $(t-h)\sigma^2$

$S_t=\mu+S_{t-1}+\varepsilon_t=2\mu+S_{t-2}+(\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t)=\cdots=(t-1)\mu+S_1+(\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t)$
$\quad=t\mu+S_0+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t)=t\mu+(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t)$

$\therefore\ E[S_t]=t\mu$

$Cov(S_{t-h},S_t)=E[(S_{t-h}-(t-h)\mu)(S_t-t\mu)]$

$$=E[(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{t-h-1}+\varepsilon_{t-h})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{t-h-1}+\varepsilon_{t-h}+\varepsilon_{t-h+1}+\cdots+\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t)]=\sum_{k=1}^{t-h}E[(\varepsilon_k)^2]=(t-h)\sigma^2$$

($t\neq w$ ならば、ε_tとε_wは互いに独立であり、$Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_w)=E[\varepsilon_t\cdot\varepsilon_w]=0$ となることを用いた。)

(4) X_1とX_2を、同一の確率密度関数 $f(x)=e^{-x}$ (定義域は、$x>0$) に従う互いに独立な確率変数とするとき、以下のとおりとなる。

$Y=X_1-X_2$ の確率密度関数は、$f_1(y)=\boxed{\text{①}}$ $(-\infty<y<\infty)$

$Z=\dfrac{X_1}{X_2}$ の確率密度関数は、$f_2(z)=\boxed{\text{②}}$ $(z>0)$

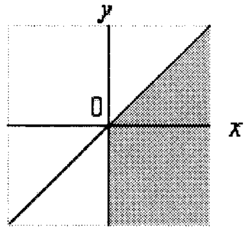
(解答) ① $\dfrac{e^{-|y|}}{2}$ ② $\dfrac{1}{(z+1)^2}$

X_1,X_2 の同時(確率)密度関数を$f(x_1,x_2)$とすると、$f(x_1,x_2)=f(x_1)f(x_2)=e^{-x_1-x_2}$

① 変数変換 $\varphi_1:(x_1,x_2)\to(x_1,y)$ を考える。$(y=x_1-x_2)$

φ_1の定義域は $x_1>0,x_2>0$ 、$x_2>0$ かつ $x_2=x_1-y$ だから $y<x_1$

従って、値域は、$x_1>0$ かつ $y<x_1$ (右図の塗り潰した部分)



(x_1,y) の同時密度関数を$f_3(x_1,y)$ とすると、$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y}\\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$

$$f_3(x_1, y) = e^{-x_1-x_2}|J| = e^{y-2x_1} \cdot |-1| = e^{y-2x_1}$$

定義域はφ_1の値域に同じ

yの周辺分布を計算するには、yの正負で場合分けが必要となる。

$y \geq 0$ の場合

$$f_1(y) = \int_y^\infty f_3(x_1, y)dx_1 = \int_y^\infty e^{y-2x_1}dx_1 = e^y\int_y^\infty e^{-2x_1}dx_1 = e^y\left[-\frac{e^{-2x_1}}{2}\right]_y^\infty = e^y\left(0-\left(-\frac{e^{-2y}}{2}\right)\right) = \frac{e^{-y}}{2}$$

$y < 0$ の場合

$$f_1(y) = \int_0^\infty f_3(x_1, y)dx_1 = \int_0^\infty e^{y-2x_1}dx_1 = e^y\int_0^\infty e^{-2x_1}dx_1 = e^y\left[-\frac{e^{-2x_1}}{2}\right]_0^\infty = e^y\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{e^y}{2}$$

従って、$f_1(y) = \dfrac{e^{-|y|}}{2}$

② 変数変換 $\varphi_2 : (x_1, x_2) \to (z, x_2)$ を考える。$\left(z = \dfrac{x_1}{x_2}\right)$

φ_2の定義域は $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ 値域も $z > 0$, $x_2 > 0$

(z, x_2)の同時密度関数を$f_4(z, x_2)$ とすると、$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial z} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial z} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & 0 \\ -\dfrac{x_2}{z} & 1 \end{vmatrix} = x_2$

$$f_4(z, x_2) = e^{-x_1-x_2}|J| = e^{-zx_2-x_2} \cdot x_2 = x_2 \cdot e^{-(z+1)x_2} \qquad (z > 0,\ x_2 > 0)$$

$$f_2(z) = \int_0^\infty f_4(z, x_2)dx_2 = \int_0^\infty x_2 \cdot e^{-(z+1)x_2}dx_2 = \left[-\frac{x_2 \cdot e^{-(z+1)x_2}}{z+1}\right]_{x_2=0}^{x_2=\infty} + \frac{1}{z+1}\int_0^\infty e^{-(z+1)x_2}dx_2$$

$$= (0-0) - \frac{1}{(z+1)^2}\left[e^{-(z+1)x_2}\right]_{x_2=0}^{x_2=\infty} = -\frac{1}{(z+1)^2}(0-1) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

(5) ある計算アルゴリズムでは、変数の個数xと計算時間yとの間に以下の関係があることがわかった。

個 数 x	1	10	100	1,000	10,000
計算時間 y	7.4	8.0	9.1	11.5	14.1

明らかに線形回帰分析では良く当てはまりそうもない。そこで、説明変数xを適当に変換し、変換後の説明変数x'と被説明変数yの回帰式を最小二乗法により推定する。ここで、xの変換として、$x' = log_{10}x$ と $x' = \sqrt{x}$ の２つを考えるが、そのいずれが優れているかを、決定係数を用い、回帰式 $y = a + bx'$ のいずれが良く当てはまっているかで判定する。判定の結果、優れているほうの変換による回帰式 $y = a + bx'$ の aは $\boxed{\quad ① \quad}$ 、bは $\boxed{\quad ② \quad}$ 、決定係数は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

(解答) ① $a = 6.64$ ② $b = 1.69$ ③ $R^2 = 0.9325$

教科書「モデリング」の 1.16 非線形回帰（1-14 ページ）から出題した。
一般に、線形回帰式 $y=a+bx$ の係数 a、b は以下のとおり。

$$b=\frac{\overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}}{\overline{(x-\overline{x})^2}}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}=\frac{s_{xy}}{s_x{}^2}=r_{xy}\frac{s_y}{s_x}$$

ここで、$s_x{}^2=\overline{(x-\overline{x})^2}=\overline{x^2}-\overline{x}^2$

$$s_y{}^2=\overline{(y-\overline{y})^2}=\overline{y^2}-\overline{y}^2 \qquad s_{xy}=\overline{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y} \qquad r_{xy}=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}$$

係数 a は、$(\overline{x},\overline{y})$ が $y=a+bx$ 上にあることから、$a=b\cdot\overline{x}-\overline{y}$

ここで、$r_{xy}{}^2$ は「最小二乗法によって推定した回帰式が、観測値にどれぐらい良く当てはまっているのかを測る尺度」であり「決定係数」と呼ぶ。決定係数は 0 以上 1 以下。1 ならば、すべての (x_k,y_k) が回帰式（直線）上にあることになり、決定係数が 1 に近いほど、回帰式が良く当てはまっていることになる。今、$x'=log_{10}x$ とおき、$y=a+bx'$ の形にして最小二乗法で a と b の値を求める。

x	x'	y	$x'y$	x'^2	y^2
1	0	7.4	0.00	0	54.76
10	1	8.0	8.00	1	64.00
100	2	9.1	18.20	4	82.81
1,000	3	11.5	34.50	9	132.25
10,000	4	14.1	56.40	16	198.81
平均	2	10.02	23.42	6	106.526

$$b=\frac{\overline{x'y}-\overline{x'}\cdot\overline{y}}{\overline{(x')^2}-\left(\overline{x'}\right)^2}=\frac{23.42-2\times10.02}{6-2^2}=1.69$$

$$a=\overline{y}-b\overline{x'}=10.02-1.69\times2=6.64$$

$$\text{決定係数}\quad R^2=r_{x'y}^2=\frac{\left(\overline{x'y}-\overline{x'}\cdot\overline{y}\right)^2}{\left\{\overline{(x')^2}-\left(\overline{x'}\right)^2\right\}\left\{\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2\right\}}=\frac{(23.42-2\times10.02)^2}{(6-2^2)(106.526-10.02^2)}=0.9325$$

次に、$x'=\sqrt{x}$ とおき、$y=a+bx'$ の形にして最小二乗法で a と b の値を求める。

x	x'	y	$x'y$	x'^2	y^2
1	1.0000	7.4	7.4000	1	54.76
10	3.1623	8.0	25.2982	10	64.00
100	10.0000	9.1	91.0000	100	82.81
1,000	31.6228	11.5	363.6619	1,000	132.25
10,000	100.0000	14.1	1410.0000	10,000	198.81
平均	29.1570	10.02	379.4720	2222.20	106.526

$$b=\frac{\overline{x'y}-\overline{x'}\cdot\overline{y}}{\overline{(x')^2}-\left(\overline{x'}\right)^2}=\frac{379.472-29.1570\times10.02}{2222.2-29.157^2}=0.0636$$

$$a=\overline{y}-b\overline{x'}=10.02-0.06364\times29.1570=8.1644$$

$$\text{決定係数}\quad R^2=r_{x'y}^2=\frac{\left(\overline{x'y}-\overline{x'}\cdot\overline{y}\right)^2}{\left\{\overline{(x')^2}-\left(\overline{x'}\right)^2\right\}\left\{\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2\right\}}=\frac{(379.4720-29.1570\times10.02)^2}{(2222.2-29.1570^2)\ (106.526-10.02^2)}=0.9072$$

よって、前者のほうが良く当てはまっている。

(6) あるデパートではある種のカブトムシを大量に販売しているが、その価格は日々変化する。日々のカブトムシ1匹の価格(以下、単に「価格」という)の前日比は、10%上昇、5%下落のいずれかをとる互いに独立な確率変数であり、その発生確率は10%上昇が60%、5%下落が40%である。本日の価格が1,000円であるとき、n日後の価格が2,000円以上となる確率が90%以上となることが保証されるのは、$n \geq$ [　　　] であるときである。ただし、nは十分に大きいものとして考えること。(整数で解答せよ。)

（解答） 34

① n日後の価格が2,000円以上となるのは、n日中m日以上価格上昇（前日対比）の日がなくてはならない。このmを求める。（mはnに依存する。）

$$1.1^m \cdot 0.95^{n-m} = 2$$

$$m \cdot log 1.1 + (n-m) \cdot log\, 0.95 = log\, 2$$

$$m = \frac{log\, 2 - n \cdot (log\, 9.5 - 1)}{log 1.1 - log\, 9.5 + 1} = \frac{0.3010 - n \cdot (0.9777 - 1)}{0.0414 - (0.9777 - 1)} = 0.3501 \cdot n + 4.7253$$

② n日後の価格の下側10%点を求める。（確率はnに依存する。）

n日中k日価格上昇（前日対比）する確率K_nは、$P(K_n = k) = \binom{n}{k} 0.6^k \cdot 0.4^{n-k} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$

nが十分大きい前提において、$\frac{K_n - 0.6n}{\sqrt{0.24n}}$は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

従って、$P\left(k \left| \frac{k-0.6n}{\sqrt{0.24n}} \geq -u(0.1) \right.\right) = 0.9$

下側10%点wは、$w = 0.6n - u(0.1)\sqrt{0.24n} = 0.6n - 0.6279\sqrt{n}$

③ ①と②が一致するnを求める。

$$0.3501 \cdot n + 4.7253 = 0.6n - 0.6279\sqrt{n}$$

$$0.2499 \cdot n - 4.7253 = 0.6279\sqrt{n}$$

$$(0.2499 \cdot n - 4.7253)^2 = 0.6279^2 n$$

$$0.0625 \cdot n^2 - 2.756 \cdot n + 22.3285 = 0$$

$$n = 10.6984\ , 33.3996$$

以上から、$n \geq 34$

(7) ある企業の社員の翌日（1 日後）の出社・病欠を予測するモデルを考える。社員の翌日の出社・病欠は、本日および前日の出社・病欠にのみ依存しているものとし、本日および前日の出社・病欠と、翌日の出社・病欠の関係は、以下のとおりである。

(i) 前日、本日ともに出社した社員が、翌日出社する確率は 0.98

(ii) 前日は病欠したが本日は出社した社員が、翌日出社する確率は α

(iii) 前日は出社したが本日は病欠した社員が、翌日出社する確率は 0.8

(iv) 前日、本日ともに病欠した社員が、翌日出社する確率は β

ここで、

・前日も本日も病欠した社員が、翌々日（2 日後）も病欠である確率が 0.29

・前日は出社したが本日は病欠の社員が、翌々日（2 日後）出社する確率が 0.836

であるとすると、$\alpha=$ $\boxed{\quad ① \quad}$ 、$\beta=$ $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。$(0<\alpha,\beta<1)$

（解答）① 0.92　　② 0.5

（ⅰ）～（ⅳ）の状態をそれぞれ状態 j_1 ～ j_4 とすると、確率推移行列は以下のとおりである。

$$
A=\begin{array}{c} \\ j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0.02 & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0 & \beta & 0 & 1-\beta \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
A^2=\begin{pmatrix} 0.98^2 & 0.02\times0.8 & 0.98\times0.02 & 0.02\times0.2 \\ 0.98\alpha & 0.8(1-\alpha) & 0.02\alpha & 0.2(1-\alpha) \\ 0.8\alpha & 0.2\beta & 0.8(1-\alpha) & 0.2(1-\beta) \\ \alpha\beta & \beta(1-\beta) & \beta(1-\alpha) & (1-\beta)^2 \end{pmatrix}
$$

行列 A の (k,l) 成分は、前日、本日の状態が j_k であるときに、本日、翌日の状態が j_l となる確率。
すると、行列 A^2 の (k,l) 成分は、前日、本日の状態が j_k であるときに、翌日、翌々日の状態が j_l となる確率となる。

ここで条件の 1 つめから、A^2 の（4,3）（4,4）成分の合計が 0.29、言い換えれば、（4,1）（4,2）成分の合計が 0.71。条件の 2 つ目から A^2 の（3,1）（3,2）成分の合計が 0.836 となるので

$$
\begin{cases} \alpha\beta+\beta(1-\beta)=0.71 \\ 0.8\alpha+0.2\beta=0.836 \end{cases}
\quad \text{変形すると、} \quad
\begin{cases} \beta(1+\alpha-\beta)=0.71 \\ 0.8(1+\alpha-\beta)+\beta=0.836+0.8 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} \beta(1+\alpha-\beta)=0.71 \\ 0.8\beta(1+\alpha-\beta)+\beta^2=1.636\beta \end{cases}
\quad \text{上式を下式に代入すると、} \quad \beta^2-1.636\beta+0.568=0
$$

変形すると、$(\beta-0.5)(\beta-1.136)=0$　だから、$\beta=0.5$

これを、$\beta(1+\alpha-\beta)=0.71$　に代入すると、$\alpha=0.92$

(8) ある企業の毎月の弔慰金支払額は、平均 2,000 万円、標準偏差 750 万円の正規分布に従うものとする。その企業は、弔慰金支払い集中に備えて、月間の弔慰金支払額が 2,500 万円を超えた場合に、以下の（ⅰ）と（ⅱ）のいずれか小さい金額を保険金として保険会社から受け取る契約を結ぶこととした。

（ⅰ）2,500 万円を超える部分の金額の 1.1 倍

（ⅱ）2,000 万円を超える部分の全額

この契約からの保険会社の 1 年間の利益（＝「累積保険料」－「累積保険金支払額」、事業費や利息は考慮しないこととする）の期待値が 200 万円となるように、企業が保険会社に支払う毎月の保険料(定額)をシミュレーションで求めると $\boxed{\qquad}$ 万円（千円単位を四捨五入して万円単位とせよ）となる。
シミュレーションは、$[0,1]$ 区間の一様分布として次の確率変数を用い、累積密度関数の逆関数を用いる方法で実施すること。（小なる確率変数は、少額の支払額に対応するものとせよ。）

0.916　0.442　0.778　0.424　0.058　0.859　0.516　0.632　0.024　0.098　0.992　0.398

（注）本問の趣旨は、シミュレーション方法を理解しているかどうかを単純に問うものである。上記の乱数は、万円単位の保険料を求めるには充分な個数であるとはいえないものの、問題の便宜上、少数としているものであり、精度にはこだわらず、単純にシミュレーションを行って保険料を求めよ。（正規分布の理論値計算や、シミュレーション上の分散減少の工夫等を行う必要はない。）

（解答）220 万円

この企業の毎月の弔慰金支払額を表す確率変数を X とすると、X は正規分布に従うので、
$X=2{,}000\text{万}+750\text{万}\times Z$　（Z は標準正規分布）とおける。
また、保険会社からこの企業に支払われる保険金額を表す確率変数を X' とすると、

U	$Z=F^{-1}(U)$	X	X'
0.916	1.3787	3033.99	587.39
0.442	−0.1459	1890.57	0.00
0.778	0.7655	2574.09	81.50
0.424	−0.1917	1856.25	0.00
0.058	−1.5718	821.16	0.00
0.859	1.0758	2806.88	337.57
0.516	0.0401	2030.09	0.00
0.632	0.3372	2252.87	0.00
0.024	−1.9774	516.97	0.00
0.098	−1.2930	1030.23	0.00
0.992	2.4089	3806.69	1437.36
0.398	−0.2585	1806.10	0.00
合計		24425.89	2443.82

$X' = Max(0, Min(1.1\cdot(X - 2{,}500万), X - 2000万))$

$X' = Max(0, Min(1.1\cdot(750万\times Z - 500万), 750万\times Z))$

である。Z を逆関数法で求める。

シミュレーションによる１年間の支払額は2,443.82万円となる。毎月の保険料をＰとすると、１年間で200万の利益がターゲットなので、$P = \dfrac{2443.82+200}{12} = 220.30$

(9) あるホームページへの１時間あたりのアクセス数は、平均15のポアソン分布に従うものとする。このとき、α 時間あたりのアクセス数は ①$\boxed{平均\ _____\ の\ _____\ 分布}$ に従う。また、アクセスの間隔を T 時間とすると、T は ②$\boxed{平均\ _____\ の\ _____\ 分布}$に従う。最新のアクセスが今から３分前にあったことが判明しているとすると、今から５分以内にアクセスがある確率は $\boxed{③}$ である。

(解答) ① 平均15αのポアソン分布　② 平均$\dfrac{1}{15}$の指数分布　③ $1-e^{-\frac{5}{4}}$

α時間あたりのアクセス数は、平均15αのポアソン分布に従う（ポアソン分布の再生性）。

従って、Xをα時間あたりのアクセス数を表す確率変数とするとき、

$$Prob(X=k) = \frac{(15\alpha)^k e^{-15\alpha}}{k!} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

これを、k と α の関数と考え、$G(k,\alpha)$ と表記する。

T をアクセスの間隔を表す確率変数とするとき、

$Prob(T \le t)$　は、t時間あたりのアクセス数が１以上となる確率に等しい。

従って、$Prob(T \le t) = 1 - G(0,t) = 1 - e^{-15t}$

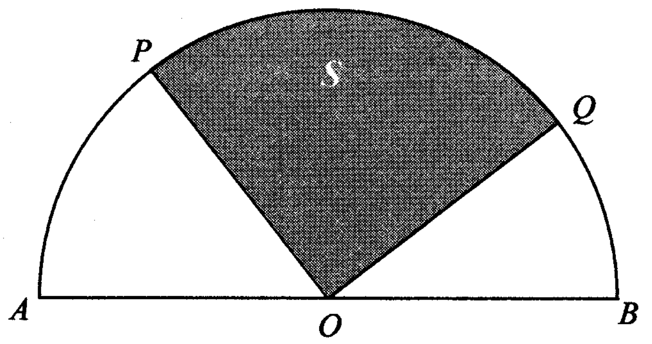
これは、確率変数の分布関数であるから、確率変数 T は、平均$\dfrac{1}{15}$の指数分布に従う。

$F(t) = Prob(T \le t) = 1 - e^{-15t}$　と置く。

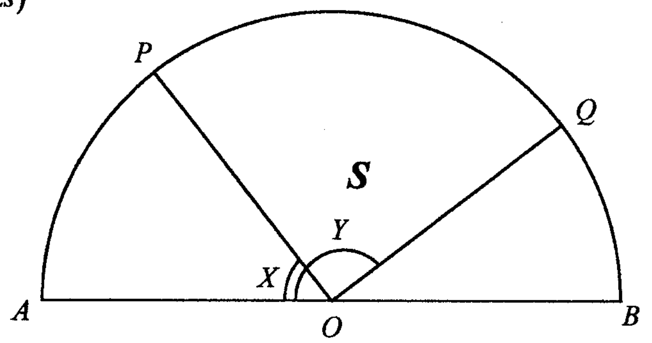
求める確率は、$T \ge \dfrac{3}{60}$　の条件のもとで、$T \le \dfrac{8}{60}$　となる確率であるから、

$$Prob\left(T \le \frac{8}{60} \middle| T \ge \frac{3}{60}\right) = \frac{Prob\left(\frac{3}{60} \le T \le \frac{8}{60}\right)}{Prob\left(T \ge \frac{3}{60}\right)} = \frac{F\left(\frac{8}{60}\right) - F\left(\frac{3}{60}\right)}{1 - F\left(\frac{3}{60}\right)} = \frac{e^{-\frac{3}{4}} - e^{-2}}{e^{-\frac{3}{4}}} = 1 - e^{-\frac{5}{4}}$$

(10) 下図のような半径 1 の半円周$\overset{\frown}{AB}$上に点P、点Qを無作為に選ぶ。このとき、円の中心Oと点P、点Qからなる扇型POQの面積Sは確率変数となるが、Sの確率密度関数は、$f(s) = \boxed{}$ $\left(0 \le s < \dfrac{\pi}{2}\right)$ である。



（解答） $\dfrac{4}{\pi^2}(\pi-2s)$



半円の中心をOとして、AOP、AOQ の角度を表す確率変数をそれぞれ X 、Y とおくと（すなわち、$\angle AOP=X$ 、$\angle AOQ=Y$ ）、点P 、Q は半円周 $\overset{\frown}{AB}$ 上に無作為に選ばれるので、X 、Y はともに区間 $(0,\pi)$ 上の一様分布に従う。

扇型POQの面積をSとすると、$S=\pi\cdot1^2\cdot\dfrac{|X-Y|}{2\pi}=\dfrac{|X-Y|}{2}$

$0<x<\pi$、$0<y<\pi$　だから、$-\pi<x-y<\pi$

$0\leq|x-y|<\pi$

$0\leq s<\dfrac{\pi}{2}$

確率変数Sの分布関数$F(s)$ を求める。

$0\leq s<\dfrac{\pi}{2}$　なるsを定め、確率変数Sが、$S\leq s$となる(x,y)は、　$-2s<x-y<2s$　を満たす。

これを変形すると、$x-2s<y<x+2s$　となり、これを満たす(x,y)の領域は、下の塗りつぶした部分。

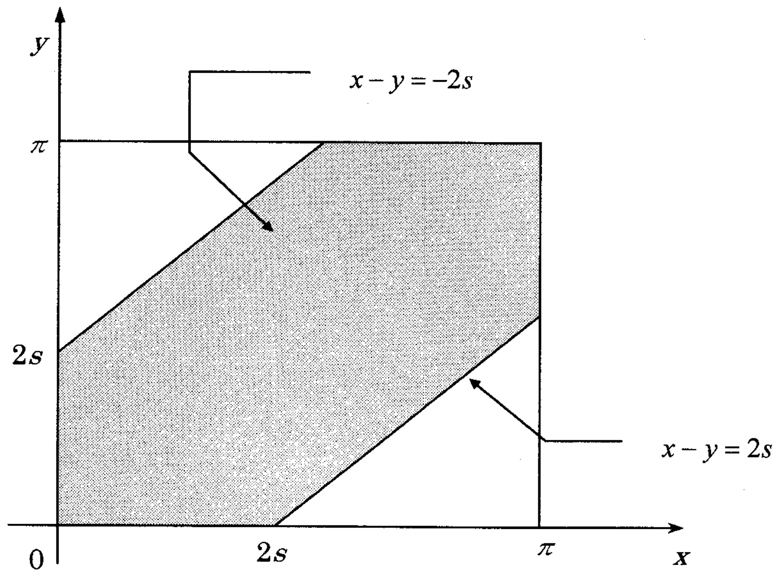
この面積は、$\pi^2-(\pi-2s)^2=4\pi s-4s^2$

なので、

$F(s)=\dfrac{4\pi s-4s^2}{\pi^2}$　$\left(0\leq s<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f(s)=\dfrac{4\pi-8s}{\pi^2}$　　変形して、

$f(s)=\dfrac{4}{\pi^2}(\pi-2s)$　$\left(0\leq s<\dfrac{\pi}{2}\right)$



(11) 確率過程$\{X_i\}$が標準ブラウン運動に従うものとする。

このとき、条件付確率 $P[X_2>0|X_1>0]$ は、$\boxed{}$ となる。

注：ブラウン運動はガウス過程とも呼ばれる。標準ブラウン運動はウィーナー過程とも呼ばれる。

（解答） $\frac{3}{4}$

標準ブラウン運動については、教科書「モデリング」の 3-10 参照のこと。

$\{X_i\}$ は標準ブラウン運動であるから、互いに独立で標準正規分布(平均 0、分散 1)に従う確率変数 Z_1 と Z_2 を用いて、$X_1=Z_1$

$$X_2=Z_1+Z_2$$

と表すことができる。

$$P[X_2>0|X_1>0]=P[Z_1+Z_2>0|Z_1>0]=\frac{P[(Z_2>-Z_1)\,and\,(Z_1>0)]}{P[Z_1>0]}$$

$$=\frac{P[(Z_2>0)\,and\,(Z_1>0)]}{P[Z_1>0]}+\frac{P[(Z_2<0)\,and\,(Z_1>0)\,and\,(|Z_2|<|Z_1|)]}{P[Z_1>0]}$$ (Disjoint に分解)

第 1 項は、$\frac{P[(Z_2>0)\,and\,(Z_1>0)]}{P[Z_1>0]}=P[Z_2>0]=\frac{1}{2}$ （Z_1 と Z_2 は互いに独立。Z_2 は標準正規分布に従う。）

第 2 項は、$\frac{P[(Z_2<0)\,and\,(Z_1>0)\,and\,(|Z_2|<|Z_1|)]}{P[Z_1>0]}=\frac{1}{2}\frac{P[(Z_2<0)\,and\,(Z_1>0)]}{P[Z_1>0]}=\frac{1}{2}P[Z_2<0]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

（Z_1 と Z_2 は同じ分布に従う・・・対称性。Z_1 と Z_2 は互いに独立。Z_2 は標準正規分布に従う。）

従って、$P[X_2>0|X_1>0]=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

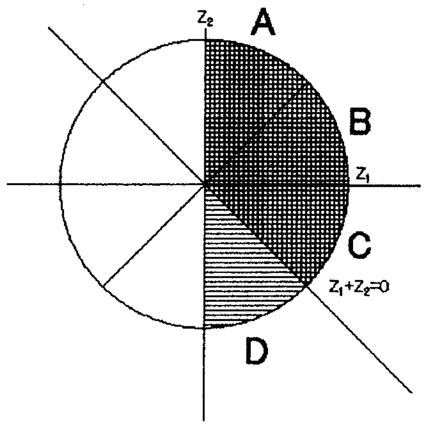
（別解）

Z_1 と Z_2 を直交させた二次元標準正規分布を考える。

$$P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=\frac{1}{8}$$

求める確率は、

$$\frac{P(A+B+C)}{P(A+B+C+D)}=\frac{P(A)+P(B)+P(C)}{P(A)+P(B)+P(C)+P(D)}=\frac{3}{4}$$



(12) 成功確率$\frac{1}{3}$の試行を繰り返し行い（異なる回の試行が成功するかどうかは互いに独立とする）、成功するごとに、つぼに玉を 1 個入れるというゲームを行う。3 個の玉が入った状況でつぼに玉を入れると玉があふれ、つぼに入った玉は 3 個に戻る仕組みになっている。つぼからあふれた玉の個数を得点とすると、ゲーム終了時の得点の期待値は $\boxed{}$ である。ただし、つぼに玉が入っていない状況から始め、試行が通算で 3 回失敗したときに、このゲームは終了するものとする。

（解答）$\dfrac{29}{162}$ または 01790

オリジナル・アイデアは野球の問題「打率.333（すべて内野安打）の打者をそろえたチームの１イニングの得点の期待値を求めよ（四死球、盗塁、２以上の進塁等はないものとする）」であった。イメージが掴みやすいので、このオリジナル・アイデアに基づいて解答を書く。

方針として、ヒット数の期待値を求め、これを修正して得点の期待値を求める。

３アウトになるまでのヒット数を確率変数Xとする。

確率関数を、$P(X=k)=f(k)$　とする。

アウト数０の間のヒットの数を確率変数Y_1、アウト数１の間のヒットの数を確率変数Y_2、アウト数２の間のヒットの数を確率変数Y_3とする。$X=Y_1+Y_2+Y_3$　　Y_1,Y_2,Y_3は同じ分布に従う。

$P(Y_1 \geq 1)=\dfrac{1}{3}$　、$P(Y_1 \geq 2)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$　、$P(Y_1 \geq 3)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$　、・・・・　なので、

$$E[Y_1]=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{2}$$

$E[X]=E[Y_1+Y_2+Y_3]=E[Y_1]+E[Y_2]+E[Y_3]=3\cdot E[Y_1]=3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$　・・・ヒット数の期待値

従って、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k\cdot f(k))=\frac{3}{2}$　（4.5 打数 1.5 安打で、.333 となる）

一方、求める得点の期待値は、

$$\sum_{k=3}^{\infty}\{(k-3)\cdot f(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}(k\cdot f(k))-3\sum_{k=0}^{\infty}f(k)+3f(0)+2f(1)+f(2)=\frac{3}{2}-3+3f(0)+2f(1)+f(2)$$

$f(0)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$　　$f(1)=\dbinom{3}{1}\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{2^3}{3^3}$　　$f(2)=\dbinom{4}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{2^4}{3^4}$

これらを代入すると、求める期待値は、

$$\sum_{k=3}^{\infty}\{(k-3)\cdot f(k)\}=-\frac{3}{2}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{16}{81}=\frac{-243+144+96+32}{162}=\frac{29}{162}\fallingdotseq 01790$$

問題 2.　X_1、X_2を確率変数Xからの標本とし、Xの確率密度関数が、未知の母数θを含む、

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{4}{\theta^2}\right)x & \left(0\leq x\leq\dfrac{\theta}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{4}{\theta}-\left(\dfrac{4}{\theta^2}\right)x & \left(\dfrac{\theta}{2}<x\leq\theta\right)\\[2ex] 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

で与えられるとする。このとき、次の問いに解答せよ。

(1)　統計量$S=C_1\cdot(X_1+X_2)$　、　$T=C_2\cdot Max(X_1,X_2)$　がともにθの不偏推定量となるように、定数C_1およびC_2を定めよ。

(2)　(1)で定めたθの不偏推定量S、Tのどちらがより有効かを示せ。

(解答)

X の分布関数は、

$$F(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ \dfrac{2x^2}{\theta^2} & \left(0 \le x \le \dfrac{\theta}{2}\right) \\ -1+\dfrac{4x}{\theta}-\dfrac{2x^2}{\theta^2} & \left(\dfrac{\theta}{2}<x\le\theta\right) \\ 1 & (x>\theta) \end{cases}$$

X の平均は、

$$E[X]=\int_0^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{4}{\theta^2}\right)x^2\,dx+\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\left\{\left(\frac{4}{\theta}\right)x-\left(\frac{4}{\theta^2}\right)x^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{4x^3}{3\theta^2}\right]_0^{\frac{\theta}{2}}+\left[\frac{2x^2}{\theta}-\frac{4x^3}{3\theta^2}\right]_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}=\frac{1}{6}\theta+\left(2\theta-\frac{4}{3}\theta\right)-\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{6}\theta\right)=\frac{\theta}{2}$$

(1) $E[S]=E[C_1\cdot(X_1+X_2)]=C_1\{E[X_1]+E[X_2]\}=2C_1\cdot E[X]=C_1\cdot\theta$

S が θ の不偏推定量であるためには、$C_1=1$ でなくてはならない。

次に、$U=Max(X_1,X_2)$ とおくとき、U の分布関数 $F_U(x)$ は、

$$F_U(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ \left\{\dfrac{2x^2}{\theta^2}\right\}^2 & \left(0\le x\le\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \left\{-1+\dfrac{4x}{\theta}-\dfrac{2x^2}{\theta^2}\right\}^2 & \left(\dfrac{\theta}{2}<x\le\theta\right) \\ 1 & (x>\theta) \end{cases}$$

変形すると、

$$F_U(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ \dfrac{4x^4}{\theta^4} & \left(0\le x\le\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{4x^4}{\theta^4}-\dfrac{16x^3}{\theta^3}+\dfrac{20x^2}{\theta^2}-\dfrac{8x}{\theta}+1 & \left(\dfrac{\theta}{2}<x\le\theta\right) \\ 1 & (x>\theta) \end{cases}$$

従って、U の確率密度関数 $f_U(x)$ は、

$$f_U(x)=\begin{cases} \dfrac{16x^3}{\theta^4} & \left(0\le x\le\dfrac{\theta}{2}\right) \\ \dfrac{16x^3}{\theta^4}-\dfrac{48x^2}{\theta^3}+\dfrac{40x}{\theta^2}-\dfrac{8}{\theta} & \left(\dfrac{\theta}{2}<x\le\theta\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

U の平均は、

$$E[U]=\int_0^{\theta} x\cdot f_U(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\theta}{2}}\frac{16x^4}{\theta^4}dx+\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\left(\frac{16x^4}{\theta^4}-\frac{48x^3}{\theta^3}+\frac{40x^2}{\theta^2}-\frac{8x}{\theta}\right)dx$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{16x^4}{\theta^4}dx+\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\left(-\frac{48x^3}{\theta^3}+\frac{40x^2}{\theta^2}-\frac{8x}{\theta}\right)dx$$

$$=\left[\frac{16x^5}{5\theta^4}\right]_0^{\theta}+\left[-\frac{12x^4}{\theta^3}+\frac{40x^3}{3\theta^2}-\frac{4x^2}{\theta}\right]_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}$$

$$=\frac{16}{5}\theta+\left(-12\theta+\frac{40}{3}\theta-4\theta\right)-\left(-\frac{3}{4}\theta+\frac{5}{3}\theta-\theta\right)=\frac{37}{60}\theta$$

$$E[T]=C_2\cdot E[U]=\frac{37}{60}C_2\cdot\theta$$

T が θ の不偏推定量であるためには、$C_2=\dfrac{60}{37}$ でなくてはならない。

(2)

$V[S]$ の算出

$$E[X^2]=\int_0^{\frac{\theta}{2}}\left(\frac{4}{\theta^2}\right)x^3\,dx+\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\left\{\left(\frac{4}{\theta}\right)x^2-\left(\frac{4}{\theta^2}\right)x^3\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{\theta^2}\right]_0^{\frac{\theta}{2}}+\left[\frac{4x^3}{3\theta}-\frac{x^4}{\theta^2}\right]_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}=\frac{1}{16}\theta^2+\left(\frac{4}{3}\theta^2-\theta^2\right)-\left(\frac{1}{6}\theta^2-\frac{1}{16}\theta^2\right)=\frac{7}{24}\theta$$

$$V[S]=V[X_1+X_2]=2\cdot V[X]=2E[X^2]-2\{E[X]\}^2=\frac{7}{12}\theta^2-\frac{1}{2}\theta^2=\frac{1}{12}\theta^2$$

$V[T]$ の算出

$$E[U^2]=\int_0^{\theta} x^2\cdot f_U(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\theta}{2}}\frac{16x^5}{\theta^4}dx+\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\left(\frac{16x^5}{\theta^4}-\frac{48x^4}{\theta^3}+\frac{40x^3}{\theta^2}-\frac{8x^2}{\theta}\right)dx$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{16x^5}{\theta^4}dx+\int_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}\left(-\frac{48x^4}{\theta^3}+\frac{40x^3}{\theta^2}-\frac{8x^2}{\theta}\right)dx$$

$$=\left[\frac{8x^6}{3\theta^4}\right]_0^{\theta}+\left[-\frac{48x^5}{5\theta^3}+\frac{10x^4}{\theta^2}-\frac{8x^3}{3\theta}\right]_{\frac{\theta}{2}}^{\theta}$$

$$=\frac{8}{3}\theta^2+\left(-\frac{48}{5}\theta^2+10\theta^2-\frac{8}{3}\theta^2\right)-\left(-\frac{3}{10}\theta^2+\frac{5}{8}\theta^2-\frac{1}{3}\theta^2\right)=\frac{49}{120}\theta^2$$

$$V[T]=V[C_2\cdot U]=(C_2)^2\cdot V[U]=\left(\frac{60}{37}\right)^2\left[E\left[U^2\right]-\{E[U]\}^2\right]=\left(\frac{60}{37}\right)^2\left\{\frac{49}{120}\theta^2-\left(\frac{37}{60}\right)^2\theta^2\right\}=\frac{101}{1369}\theta^2$$

以上から、$V[T]=\frac{101}{1369}\theta^2<\frac{1}{12}\theta^2=V[S]$ なので、T がより有効

問題3. 成功するとそれぞれ点数 1、2、3 を加算する 3 種類のゲームがある。各々のゲームの成功確率はそれぞれ$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$であり、失敗の場合は加算点を 0 とする。今、開始時の持ち点を 0 とし、3 種類のゲームのうち 1 種類をランダムに選び（どの種類のゲームを選ぶかは、各々$\frac{1}{3}$の確率とする）、そのゲームを行い、成功すれば持ち点にゲームごとに上記で定めた点数を加算し、あらかじめ定めた目標点 n $(n>0)$ にちょうど到達した場合のみ終了、そうでなければ、次のゲームを選ぶところから繰り返す。ゲームに成功した場合であっても、上記で定めた点数を加算した結果、目標点 n を上回る場合は加算点を 0 とする。目標点 n への到達までのゲームの実施回数（加算点が 0 となった回を含む）を確率変数 X_n とし、その期待値を $E[X_n]$ とあらわす。このとき、次の問いに解答せよ。

(1) $E[X_1]$ を求めよ。

(2) $E[X_2]$ を求めよ。

(3) $E[X_3]$ を求めよ。

(4) $E[X_4]$ を求めよ。

ヒント：$E[X_0],E[X_1],E[X_2],E[X_3],\cdots$ は数列とみなすことができる。

（解答）
ヒントより、$E[X_0],E[X_1],E[X_2],E[X_3],\cdots$ を数列とみなし、その漸化式を作る。
加算点が目標点を上回る場合を除けば、1 回のゲームで

3 点加算となる確率　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$

2 点加算となる確率　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

1 点加算となる確率　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

点が加算されない確率　$1-\frac{1}{18}-\frac{1}{9}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

従って、$k\geq 3$ であれば、

$$E[X_k]=1+\frac{2}{3}E[X_k]+\frac{1}{6}E[X_{k-1}]+\frac{1}{9}E[X_{k-2}]+\frac{1}{18}E[X_{k-3}] \quad \cdots\cdots ①$$

（ある時点の「到達までのゲームの実施回数の期待値」は、1 回後における「到達までのゲームの実施

回数の期待値」に1を加えたものに等しい。ここで、$E[X_0]=0$）

$k=1$ では、①において、$E[X_{k-2}]$及び$E[X_{k-3}]$を$E[X_k]$に、

$k=2$ では、①において、$E[X_{k-3}]$を$E[X_k]$に置き換えればよい。従って、

$$E[X_1]=1+\frac{5}{6}E[X_1]+\frac{1}{6}E[X_0]=1+\frac{5}{6}E[X_1] \quad \cdots\cdots②$$

$$E[X_2]=1+\frac{13}{18}E[X_2]+\frac{1}{6}E[X_1]+\frac{1}{9}E[X_0]=1+\frac{13}{18}E[X_2]+\frac{1}{6}E[X_1] \quad \cdots\cdots③$$

②より、$\frac{1}{6}E[X_1]=1$　　従って、$E[X_1]=6$　　・・・・・・(1)の解答

③より、$\frac{5}{18}E[X_2]=1+\frac{1}{6}\cdot 6=2$　　従って、$E[X_2]=\frac{36}{5}$　　・・・・・・(2)の解答

① に$k=3$を代入し、$\frac{1}{3}E[X_3]=1+\frac{1}{6}\cdot\frac{36}{5}+\frac{1}{9}\cdot 6+\frac{1}{18}\cdot 0=\frac{43}{15}$

従って、$E[X_3]=\frac{43}{5}$　　・・・・・・(3)の解答

① に$k=4$を代入し、$\frac{1}{3}E[X_4]=1+\frac{1}{6}\cdot\frac{43}{5}+\frac{1}{9}\cdot\frac{36}{5}+\frac{1}{18}\cdot 6=\frac{107}{30}$

従って、$E[X_4]=\frac{107}{10}$　　・・・・・・(4)の解答

以　上