年金数理(問題)

この年金数理の問題における「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年年齢 x_r 歳時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいう。

また、この年金数理の問題における「被保険者」とは、特に説明がない場合は在職中の者をいう。

問題1. 次の(1)～(4)については、それぞれ 5 つの選択肢から設問の答えとして正しいものを選んでその記号を、また(5)～(8)については、必要に応じて指示に従った端数処理を行った上で設問の解答のみを、(9)は指示に従った解答のみを、それぞれ解答用紙の所定の欄に記入せよ。(51 点)

(1) Trowbridge モデルの年金制度において、次の①～⑤のうち正しい算式はいくつあるか正しいものの記号を選べ。なお、x_e : 加入年齢、x_r : 定年年齢、ω : 最終年齢、$l_x^{(T)}$: x 歳の在職中の被保険者数、l_x : x 歳の年金受給権者数とする。

① $S^a = v \cdot (l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x})$: 在職中の被保険者の給付現価

② $S^p = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x + v \cdot \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$: 年金受給権者の給付現価

③ $G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} + v \cdot \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$: 在職中の被保険者の人数現価

④ $S_{PS}^a = \frac{1}{d} \cdot (l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} v - \frac{1}{x_r - x_e} \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x})$: 在職中の被保険者の過去の加入期間に対する給付現価

⑤ $S^f = \sum_{n=1}^{\infty} v^n \cdot l_{x_e}^{(T)} \frac{D_{x_r}}{D_{x_e}} \ddot{a}_{x_r}$: 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価

(A) 5つ　(B) 4つ　(C) 3つ　(D) 2つ　(E) 1つ

(2) 今、極限方程式 $\mathrm{C} + \frac{i}{1+i}\mathrm{F} = \mathrm{B}$ が成立している年金制度がある。

(i : 予定利率、F : 積立金、B : 給付、C : 保険料、給付および保険料は年 1 回期初払)

第 n 年度に特殊な要因により給付が 2 倍必要となった(第 $n+1$ 年度以降は B に戻っている)。また、第 n 年度を含む以降の年度の実績運用利回りが j $(0 < j < i)$ となったため、第 n 年度末積立金が当初の水準を下回ることになった。そこで、この積立金を当初の水準に回復させるため、第 $n+1$ 年度から $(1+k)$ 倍 $(k > 0)$ の保険料に変更したところ、第 $n+t$ 年度末の積立金が当初の水準を回復した。この t が満たすべき条件として正しいものの記号を選べ。

(A) $t \geq \log_{1+j} \frac{(j-i)\mathrm{B} - (j-i+ik+ijk)\mathrm{C}}{(j-i-ij)\mathrm{B} + (j-i+ik)\mathrm{C}} - 1$

(B) $t \geq \log_{1+j} \frac{(j-i)\mathrm{B} - (j-i+ik+ijk)\mathrm{C}}{(j-i-ij)\mathrm{B} - (j-i+ik)\mathrm{C}} - 1$

(C) $t \geq \log_{1+j} \frac{(j-i)\mathrm{B} - (j-i-ik-ijk)\mathrm{C}}{(j-i-ij)\mathrm{B} - (j-i-ik)\mathrm{C}} - 1$

(D) $t \geq \log_{1+j} \frac{(j-i)\mathrm{B} - (j-i-ik-ijk)\mathrm{C}}{(j-i-ij)\mathrm{B} - (j-i+ik)\mathrm{C}} - 1$

(E) $t \geq \log_{1+j} \frac{(j-i)\mathrm{B} - (j-i+ik+ijk)\mathrm{C}}{(j-i-ij)\mathrm{B} - (j-i-ik)\mathrm{C}} - 1$

(3) 定常状態にあった年金制度の第n年度末において剰余金Mが発生した。このため、第n年度末時点で制度設計を次のように見直すこととした。

・ 第$n+1$年度以降の給付を毎年ΔBずつ引き上げる（給付改善）ことをt回繰り返し、第$n+t$年度以降の給付水準を当初の給付より$\Delta B \cdot t$だけ増額する。

・ 給付改善の原資は剰余金Mを用い、第$n+1$年度以降の保険料は従前と同水準に据え置く。

給付改善を剰余金Mの範囲で実施する場合、上のような給付改善を行うことができる回数tとして正しいものの記号を選べ。なお、予定利率はiとし、給付は年 1 回期末払とする。
（記号$[x]$は、xを超えない最大の整数を表す。）

(A) $\left[\dfrac{\log \dfrac{i^2 M}{(1+i)\Delta B}}{\log \dfrac{1}{1+i}}\right]$　(B) $\left[\dfrac{\log \dfrac{iM}{(1+i)\Delta B}}{\log \dfrac{1}{1+i}}\right]$　(C) $\left[\dfrac{\log\left(1-\dfrac{iM}{(1+i)\Delta B}\right)}{\log \dfrac{1}{1+i}}\right]$

(D) $\left[\dfrac{\log\left(1-\dfrac{i^2 M}{(1+i)^2 \Delta B}\right)}{\log \dfrac{1}{1+i}}\right]$　(E) $\left[\dfrac{\log\left(1-\dfrac{i^2 M}{(1+i)\Delta B}\right)}{\log \dfrac{1}{1+i}}\right]$

(4) 年金を次のように支払う場合、(x),(y),(z)の３人に支払う年金の現価の合計を表している記号を選べ。

・ (x)が生存中は、(y),(z)のうち少なくとも一方の生存を条件として(x) に年金額Aを支払い、同時に、(y),(z) のうち生存している者（共存の場合は両者）に年金額Bを支払う。
・ (x)が死亡後に(y),(z)が共存している場合、一方に年金額A、他方には年金額Bをそれぞれ支払う。
・ (x)が死亡後に(y),(z)のどちらか一方だけが生存している場合、その者に年金額Aを支払う。
・ 年金はいずれも年 1 回期末払いとする。

(A) $A(a_{xy}+a_{xz}-a_{xyz})+B(a_y+a_z-a_{yz}+a_{xyz})$

(B) $A(a_x+a_y+a_z-a_{yz})+B(a_y+a_z-a_{yz})$

(C) $A(a_x+a_y+a_z-a_{xy}-a_{xz}-a_{yz})+B(a_{xy}+a_{xz}+a_{yz}-a_{xyz})$

(D) $A(a_x+a_y+a_z-a_{xyz})+B(a_{xy}+a_{xz}+a_{yz})$

(E) $A(a_y+a_z-a_{yz})+B(a_{xy}+a_{xz}+a_{yz}-a_{xyz})$

(5) 定常人口 : $l_x = a - x$　$(18 \le x \le a)$のもとにある年金制度において、この年金制度を 35 歳以上で脱退する者の脱退時年齢の平均が 55 歳であるとすると、この年金制度の集団の平均年齢は何歳か。（小数点以下第 1 位を四捨五入して整数で答えよ。）

(6) 2つの年金制度（AおよびB）が合併することになった。これらの年金制度は、以下の内容となっている。

- Bの被保険者数・給与額は、勤続・年齢別構成比がAと等しく、規模はAの２０％である。
- AとBの計算基礎率（予定利率・予定脱退率等）は一致している。
- Bの給付水準はAの2倍、Bの積立金残高はAの２０％である。
- Aの未償却の過去勤務債務は、Aの総給付現価の 0.5 倍であり、Aの特別保険料率は合併直前における総給与がその後一定という前提でn年償却するように算定されている。

今、合併にあたって、Aの給付水準はそのままとし、合併後の特別保険料率が合併前のAにおける特別保険料率の 1.1 倍以内に収まるようにBの給付水準を一律に引下げることを考えている。
標準保険料率は合併前のAのそれを使用するものとし、合併時の総給与がその後一定という前提でn年償却するように合併後の特別保険料率を算定すると考えた場合に、Bの給付水準を従前の何%以下に引下げたらよいか。なお、A、B、合併後ともに加入年齢方式である。
（パーセント単位で小数点以下第1位を四捨五入）

(7) 定常人口のもとにある年金制度の第n年度末の財政状況がつぎの状態にある。

将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	S^f	5,000 百万円
在職中の被保険者の将来の加入期間に対する給付現価	S^a_{FS}	7,000 百万円
在職中の被保険者の過去の加入期間に対する給付現価	S^a_{PS}	10,000 百万円
年金受給権者の給付現価	S^p	10,000 百万円
将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	G^f	210,000 百万円
在職中の被保険者の給与現価	G^a	270,000 百万円
積立金	F	15,275 百万円
20 年確定年金現価率（期初払）	$\ddot{a}_{\overline{20}\vert}$	12.6
永久年金現価率（期初払）	$\ddot{a}_{\infty}$	19.2

なお、給付・保険料はいずれも年1回期初払いとする。

① 定常人口であることを用いて、この年金制度の被保険者の総給与を求めよ。（百万円単位で小数点以下第1位を四捨五入）
② 第n年度末時点で計算した開放基金方式による標準保険料率、特別保険料率（20 年償却）を求めよ。（パーセント単位で小数点以下第2位を四捨五入）
③ 第n年度末時点で被保険者の 1/2 が脱退し被保険者の規模が 1/2 となったため、標準保険料率と特別保険料率（20 年償却）の合計が②と変わらないように今後脱退する被保険者の給付水準（将来期間分・過去期間分）を一律x%引下げることとした。xを求めよ。（パーセント単位で小数点以下第1位を四捨五入）。

＜③の前提＞
- 第n年度末の被保険者の脱退により、人員規模が 1/2 に縮小したが、被保険者の年齢階層毎の人員構成比は変化しなかった。
- 第n年度末の被保険者の脱退に伴う計算基礎率の見直しは行わないが、将来加入が見込まれる被保険者の規模は、人員規模の縮小に伴い従前の 1/2 の見込みに変更した。
- 第n年度末に脱退した被保険者は全員年金受給権者となり、過去の加入期間に対する給付現価を給付原資とした年金給付であった。

(8) ある年金制度における2004/3 末と 2005/3 末の決算諸数値および 2004/4～2005/3 の間の諸数値は、次のとおりである。(予定利率：3.0%)
2005/3 末決算における「利差損益」を求めよ。
(小数点以下第 1 位を四捨五入して万円単位で答えよ。利差損の場合は、金額の前に△を付けよ。)

[2004/3 末決算時]
被保険者の責任準備金：4,000 万円　　年金受給権者の責任準備金：2,000 万円
過去勤務債務　　　　：1,000 万円
[2005/3 末決算時]
被保険者の責任準備金：3,920 万円　　年金受給権者の責任準備金：？
過去勤務債務　　　　：1,050 万円
[2004/4～2005/3]
標準保険料額：360 万円　　特別保険料額：140 万円
一時金給付額：500 万円　　年金給付額　：200 万円

＜前提＞
・ 2004 年度の脱退者は、すべて一時金を選択するものとする。
・ 2004/3 末の年金受給権者は、全員確定年金であり、一時金給付は生じていない。
・ 保険料は年 1 回期初払い、給付は年 1 回期末払いとする。

(9) ある年金制度の初期過去勤務債務額を、以下に示す4通りの償却方法(①～④)による年1回期初払いの特別保険料で償却することを考えた。
第 2 年度末での未償却過去勤務債務残高が少ない順に、償却方法の番号を並べよ。

＜前提＞
・ この年金制度の被保険者数は増加傾向にあり、各期初の被保険者数は前期初より 5％増加する。
・ 後発過去勤務債務は（被保険者数の変動に関わらず）利差損によるもののみとし、初期過去勤務債務額の 5％が毎年期末に同額発生する。
・ ①および②の方法における被保険者 1 人あたりの特別保険料の算定は、被保険者数が発足時から変化しない前提で計算する。
・ 予定利率は 2.5%とし、期初払確定年金現価率（$\ddot{a}_{\overline{n|}}$）としては以下の数値を使用すること。

n	$\ddot{a}_{\overline{n\|}}$	n	$\ddot{a}_{\overline{n\|}}$
1	1.000	6	5.646
2	1.976	7	6.508
3	2.927	8	7.349
4	3.856	9	8.170
5	4.762	10	8.971

＜償却方法＞
①被保険者 1 人あたりの特別保険料を設定することにより 10 年間で元利均等償却する方法

②被保険者 1 人あたりの特別保険料を第 1 年度：P とすると，第 2 年度：2 × P，・・・，第 6 年度：6 × P と、階段式に増額する形式により 6 年間で償却する方法

③制度全体として、被保険者数に関わらず一定額の特別保険料を設定することにより 8 年間で元利均等償却する方法

④前年度末未償却過去勤務債務額（第 1 年度は初期過去勤務債務額）の一定割合 15%で償却する方法

問題2. 次の空欄に当てはまる算式を求め、解答用紙の所定欄に記入せよ。(9 点)

支給開始年齢から終身年金を全ての脱退者に給付する制度で、年金額は

年金額 ＝（給与累計）×（年金支給率）

となっている年金制度を考える。

B_x ： x 歳の給与額

D_x, $C_x^{(w)}$ など ： 脱退残存表（l_x, $d_x^{(w)}$）に基づく計算基数

D'_x, $\ddot{a}'_{x_r}$ など ： 生命表（l'_x, d'_x）に基づく計算基数、年金現価率等

（$C_x^{(w)} = v^{x+1} d_x^{(w)}$ には、生存脱退後その年度中に死亡する者を含まないものとする。）

年金支給率を一定値 α とし、また、定年年齢 x_r 歳（＝年金支給開始年齢）で全員脱退するものとする。

給付現価 S_x の計算式は

$$S_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \boxed{\quad ① \quad} C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} \ddot{a}'_{x_r} \right\} + \boxed{\quad ② \quad} D_{x_r} \ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$$= S_{x_{FS}} + S_{x_{PS}}$$

とすると

$$S_{x_{FS}} = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \boxed{\quad ③ \quad} C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} \ddot{a}'_{x_r} \right\} + \boxed{\quad ④ \quad} D_{x_r} \ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$$S_{x_{PS}} = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \boxed{\quad ⑤ \quad} C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} \ddot{a}'_{x_r} \right\} + \boxed{\quad ⑥ \quad} D_{x_r} \ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

と表される。$S_{x_{FS}}$ は将来見込まれる年金額のうち、将来加入期間に対応する部分の給付現価を表しており、$S_{x_{PS}}$ は過去加入期間分の給付現価を表している。

$S_{x_{PS}}$ は将来の加入期間の長短に関わらず年金額が確定しており、

$$S_{x_{PS}} = \alpha \left(\sum_{z=x_e}^{x-1} B_z \right) \ddot{a}'_{x_r} \times \boxed{\quad ⑦ \quad}$$

ここで、$\boxed{\quad ⑦ \quad} = v^{x_r - x} \dfrac{\boxed{\quad ⑧ \quad}}{l_x}$

x 歳の被保険者が x_r 歳まで生存している確率は、x_r 歳までに生存脱退した者が x_r 歳まで生存する確率と、x_r 歳まで加入し続ける確率の和であるから

$$\boxed{\quad ⑦ \quad} = v^{x_r - x} \frac{\boxed{\quad ⑨ \quad}}{l'_x}$$

となる。これより過去の期間に対応する給付現価（$S_{x_{PS}}$）は計算基礎率（予定脱退率、給与指数）の影響を受けないことが言える。

問題3. Trowbridge モデルの年金制度がある。財政方式は加入年齢方式、加入年齢は x_e 歳、定年年齢は x_r 歳とする。以下の各問に答えよ。(20 点)

（1）標準保険料率 P_{x_e} (年 1 回期初払い)を定年年齢における年金現価率および計算基数を用いて表せ。

（2）計算基礎率のうち、予定脱退率のみを洗い替える財政再計算を行ったところ、財政再計算前後の予定脱退率に基づく脱退残存表の加入者数に以下の関係があった。

$$l_x^A = l_{x_e}^A - m(x - x_e)$$

$$l_x^B = l_{x_e}^B - m(x_r - x_e) + \frac{m}{x_r - x_e}(x_r - x)^2$$

$$l_{x_e}^A = l_{x_e}^B、\ l_x^A \geq 0\ (x_e \leq x \leq x_r)、\ l_x^B \geq 0\ (x_e \leq x \leq x_r)$$

ここに、A は財政再計算前、B は財政再計算後の計数を表すものとし、m は定数（$m \geq 0$）とする。

このとき、財政再計算前後の加入年齢方式による標準保険料率 $P_{x_e}^A, P_{x_e}^B$ の大小関係を示せ。

（3）財政再計算後の標準保険料率 $P_{x_e}^B$ が最大となるような定数 m の値を求めよ。

問題4. 定常状態にある企業の年金制度を考える。(20 点)

≪制度内容≫

・加入時期	年 1 回期初加入。
・給付内容	「(加入全期間における毎期初の給与の累計額（定年到達時は（定年－1）歳までの累計とする。)) × α」の年金年額を、脱退時から年 1 回期初払いで生死に関わらず n 年間支給する。
・昇給時期	年 1 回期初昇給。
・脱退時期	年 1 回期末脱退(死亡による脱退は発生しない)。 定年退職は定年到達時の期初に脱退。
・拠出方法	「昇給後給与合計×保険料率」を年 1 回期初払い。
・財政方式	加入年齢方式(加入年齢 x_e 歳)

必要であれば以下の記号および計算基数を用いよ。

x_e ：加入年齢、x_r ：定年年齢、L_x ：x 歳の被保険者数、B_x ：x 歳の 1 人あたり給与、

b_x ：給与指数、i ：予定利率、$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ：利率 i の期初払い n 年確定年金現価率

D_x、C_x 等の計算基数は、生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。また、b_x は x に関して単調増加であるものとする。

なお、以下の設問において、責任準備金は期初の昇給直後・加入直後・保険料の拠出直前のものと考えること。

（1）標準保険料率および制度全体の被保険者の責任準備金を求めよ。

（2）ある昇給時期に一律 β のベースアップがあった場合に発生する後発過去勤務債務を求めよ。

なお、ここで言うベースアップとは、過去の給与累計には影響せず、将来にわたっての給与が従前の $(1+\beta)$ 倍 $(\beta > 0)$ となるものとする。

（3）給付内容は上表の「制度内容」と同じ条件で、拠出方法を「昇給後給与合計×保険料率（年 1 回期初払い)」から「期初被保険者数×保険料率（年 1 回期初払い)」に変更（すなわち、給与合計に比例した保険料から被保険者数に比例した保険料に変更）した場合、変更後の被保険者の責任準備金と（1）で求めた従前の被保険者の責任準備金の大小関係を示せ。

（注）本問では、当該拠出方法の変更についての可否は問題にしないこととする。

以上

年 金 数 理（解答例）

問題１.

番号	(1)	(2)	(3)	(4)
記号	（A）	（C）	（E）	（E）
番号	(5)	(6)	(7)－①	(7)－②
数値	３７　歳 （整数）	６５　％ （整数）	２５,０００百万円 （整数）	標準：　２．５ ％ 特別：　１．５ ％ （小数１位）
番号	(7)－③	(8)	(9)	
数値等	２６　％ （整数）	△２３５ 万円 （整数）	④ ＜ ③ ＜ ① ＜ ② （未償却過去勤務債務残高が少ない順）	

(1) ①～③ 教科書 P68 第３章練習問題３　より算式は全て正しい。

④教科書 P66（3―47）式より　$S_{PS}^{a}=\dfrac{1}{d}(v\cdot{}^{T}C-{}^{U}C)$

一方、教科書 P61（3―26）式及び P62（3―29）式から

${}^{T}C=l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$、${}^{U}C=\dfrac{1}{x_r-x_e}\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$ なので

$$S_{PS}^{a}=\frac{1}{d}\cdot(l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}v-\frac{1}{x_r-x_e}\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x^{(T)}\cdot\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x})$$

これより算式は正しい。

⑤教科書 P66（3―46）式より　$S^{f}=\dfrac{v}{d}\cdot{}^{In}C$

一方、教科書 P65（3―38）式から、${}^{In}C=l_{x_e}^{(T)}\cdot\dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}$ なので算式は正しい。

以上から①～⑤は全て正しい。…正解（A）

(2) 第 $n+s$ 年度末の積立金を F_{n+s} とする。

まず、第 n 年度の給付が 2B となったため、第 n 年度の期末時点での積立金 F_n は $\mathrm{F}_n=(1+j)\cdot(\mathrm{F}+\mathrm{C}-2\mathrm{B})$ となる。

次に、第 $n+1$ 年度から保険料を $(1+k)$ 倍にしたため、次の差分方程式を満たす。

$$\mathrm{F}_{n+s+1}=(1+j)\cdot\{\mathrm{F}_{n+s}+(1+k)\mathrm{C}-\mathrm{B}\}\quad(s\geq 0)$$

今、式の両辺から $\mathrm{F}_a=\dfrac{1+j}{j}\cdot[\mathrm{B}-(1+k)\mathrm{C}]$ を減じて式を整理すると

$$\mathrm{F}_{n+s+1}-\mathrm{F}_a=(1+j)\cdot(\mathrm{F}_{n+s}-\mathrm{F}_a)\quad(s\geq 0)$$

従って、$\mathrm{F}_{n+s}=(1+j)^s\cdot(\mathrm{F}_n-\mathrm{F}_a)+\mathrm{F}_a\quad(s\geq 0)$

ここで、$\mathrm{F}_{n+t}\geq\mathrm{F}$となる$t$を解く。

$$\mathrm{F}_{n+t}=(1+j)^{(t+1)-1}\cdot(\mathrm{F}_n-\mathrm{F}_a)+\mathrm{F}_a\geq\mathrm{F}$$

$$(1+j)^{(t+1)}\geq(1+j)\frac{\mathrm{F}-\mathrm{F}_a}{\mathrm{F}_n-\mathrm{F}_a}\qquad\cdots\cdots\cdots\ (*)$$

ここで、Fは$\mathrm{C}+\dfrac{i}{1+i}\mathrm{F}=\mathrm{B}$という関係式を満たすため$\mathrm{F}_n=\dfrac{1+j}{i}\cdot[(1-i)\mathrm{B}-\mathrm{C}]$である。

それらのF，F_a，F_nに関する関係式を（＊）の右辺に代入すると、

$$(1+j)^{(t+1)}\geq\frac{(j-i)\mathrm{B}-(j-i-ik-ijk)\mathrm{C}}{(j-i-ij)\mathrm{B}-(j-i-ik)\mathrm{C}}$$

となる。よって、両辺の対数をとることによって条件式が導ける。…正解（C）

(3)給付改善に伴う給付現価の増加が剰余金以下となる必要があるので、
次のような不等式が成り立つ必要がある。

$$M\geq\Delta B\cdot v\cdot\ddot{a}_\infty+\Delta B\cdot v^2\cdot\ddot{a}_\infty+\cdots+\Delta B\cdot v^t\cdot\ddot{a}_\infty=\Delta B\cdot a_t\cdot\ddot{a}_\infty=\Delta B\cdot\frac{1-\dfrac{1}{(1+i)^t}}{i}\cdot\frac{1+i}{i}$$

t について解くと、$t\leq\dfrac{\log\left(1-\dfrac{i^2M}{(1+i)\Delta B}\right)}{\log\dfrac{1}{1+i}}$より、題意の t は $\left[\dfrac{\log\left(1-\dfrac{i^2M}{(1+i)\Delta B}\right)}{\log\dfrac{1}{1+i}}\right]$となる。

…正解（E）

(4)

$$(A+2B)\cdot a_{xyz}+(A+B)\cdot a_{\overset{[1]}{x\overline{yz}}}+(A+B)\cdot a_{x|yz}+A\cdot a_{\overset{[1]}{x|\overline{yz}}}$$
$$=(A+2B)\cdot a_{xyz}+(A+B)\cdot(a_{xy}+a_{xz}-2a_{xyz})$$
$$+(A+B)\cdot(a_{yz}-a_{xyz})+A\cdot\{(a_y+a_z-2a_{yz})-(a_{xy}+a_{xz}-2a_{xyz})\}$$
$$=A\cdot(a_y+a_z-a_{yz})+B\cdot(a_{xy}+a_{xz}+a_{yz}-a_{xyz})$$

…正解（E）

(5)　x歳の者（l_x）について、x歳以上（a歳まで）の間に脱退する場合の脱退時平均年齢は

$$x+\frac{T_x-T_a-(a-x)l_a}{l_x-l_a} \qquad \left(\ T_x=\int_x^a l_y dy \ \right)$$

と表されるので、

題意から、 $55=35+\dfrac{T_{35}-T_a-(a-35)l_a}{l_{35}-l_a}$

一方、$l_a=0$, $T_a=0$, $T_{35}=\int_{35}^a (a-y)dy=\dfrac{(a-35)^2}{2}$ なので、 $a=75$

$\therefore \quad l_x=75-x \quad (18\le x\le 75)$

したがって、この集団の平均年齢は

$$\frac{\int_{18}^{75} xl_x dx}{\int_{18}^{75} l_x dx}=\frac{\int_{18}^{75} x(75-x)dx}{\int_{18}^{75}(75-x)dx}=(75+36)/3=37$$

⇒ 解答 3７歳

(6) G：総給与現価、S：総給付現価、F：積立金、P：標準保険料率（添字は各制度を表わす）とすると、問題文の条件は次のように表わせる。

$G_B=0.2G_A$、$S_B=0.4S_A$、$F_B=0.2F_A$、$S_A-P_A\times G_A-F_A=0.5S_A$

合併後のBの給付水準を合併前の給付水準のα倍とすると、合併後の過去勤務債務は、

$(S_A+\alpha\ S_B)-P_A\times(G_A+G_B)-(F_A+F_B)$

$=(1+0.4\alpha)\times S_A-P_A\times 1.2G_A-1.2F_A$

A制度の総給与をB_A、n年確定年金現価率をaとすると、合併後の制度の総給与は$1.2B_A$となる。

∴ 合併後の特別保険料率

$=\{(1+0.4\alpha)\times S_A-P_A\times 1.2G_A-1.2F_A\}/\{1.2B_A\times a\}$

$=\{(0.4\alpha-0.2)\times S_A+1.2(S_A-P_A\times G_A-F_A)\}/\{1.2B_A\times a\}$

$=\{(0.4\alpha-0.2)\times S_A+1.2\times 0.5S_A\}/\{1.2B_A\times a\}$

$=\{(\alpha+1)\times S_A\}/\{3B_A\times a\}$

これが合併前のAにおける特別保険料率の1.1倍以内に収まるためには、

$\{(\alpha+1)\times S_A\}/\{3B_A\times a\}\leqq 1.1\times\{0.5S_A/\{B_A\times a\}\}$

$\therefore\ \alpha+1\ \leqq\ 1.65$

$\therefore\ \alpha\ \leqq\ 0.65$

⇒ 解答 ６５％

(7)（以下、金額単位は百万円）

①被保険者の総給与をLBとすると

$$LB=\frac{G^a+G^f}{\ddot{a}_\infty}=\frac{270{,}000+210{,}000}{19.2}=25{,}000$$

⇒ 解答 ２５,０００百万円

②標準保険料率をP^N、特別保険料率をP^{PSL}とすると

$$P^N=\frac{S_{FS}^a+S^f}{G^a+G^f}=\frac{7{,}000+5{,}000}{270{,}000+210{,}000}=0.025$$

$$P^{PSL}=\frac{S^p+S_{PS}^a-F}{LB\cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{10{,}000+10{,}000-15{,}275}{25{,}000\cdot 12.6}=0.015$$

⇒ 解答 標準保険料率：２．５％、特別保険料率：１．５％

③被保険者数減少後の各数値はつぎのとおり。

$S'^f=2{,}500$　　$S'^a_{FS}=3{,}500$　　$S'^a_{PS}=5{,}000$　　$S'^p=15{,}000$

$G'^f=105{,}000$　　$G'^a=135{,}000$　　$F'=15{,}275$　　$LB=12{,}500$

給付水準引き下げ後の各数値はつぎのとおり。

$S''^f=2{,}500\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$　　$S''^a_{FS}=3{,}500\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$　　$S''^a_{PS}=5{,}000\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)$　　$S''^p=15{,}000$

$G''^f=105{,}000$　　$G''^a=135{,}000$　　$F''=15{,}275$　　$LB''=12{,}500$

給付水準引下げ後の保険料率をxを用いて表すと、

$$P''^N=\frac{S''^a_{FS}+S''^f}{G''^a+G''^f}=\frac{3{,}500\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)+2{,}500\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)}{135{,}000+105{,}000}$$

$$P''^{PSL}=\frac{S''^p+S''^a_{PS}-F''}{LB''\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{15{,}000+5{,}000\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)-15{,}275}{12{,}500\cdot 12.6}$$

$P^N+P^{PSL}=P''^N+P''^{PSL}$を$x$について解くと、$x=26$

⇒ 解答 ２６％

(8)まず、［2004/3 末決算時］の年金資産額を求めると、

年金資産額［2004/3 末］＝4,000 万円＋2,000 万円－1,000 万円＝5,000 万円

次に［2005/3 末決算時］の年金受給権者の責任準備金を求めるが、年金受給権者が権利を有する年金がすべて確定年金であることと、脱退者がすべて一時金を選択して年金受給権者にならないこと、また、年金受給権者が一時金選択を行わないことから、次の式が成立する。

年金受給権者の責任準備金［2005/3 末］

＝ 年金受給権者の責任準備金［2004/3 末］×（1＋3%）－ 年金給付額

ゆえに

年金受給権者の責任準備金［2005/3 末］

＝ 2,000 万円×（1＋3%）－200 万円＝1,860 万円

従って、［2005/3 末決算時］の年金資産額を求めると、

実際年金資産額［2005/3 末］＝3,920 万円＋1,860 万円－1,050 万円＝4,730 万円

一方、予定利率通りに利息が付与されたとすると、

予定年金資産額［2005/3 末］

＝（5,000 万円＋360 万円＋140 万円）×（1＋3%）－（500 万円＋200 万円）

＝4,965 万円

したがって、利差損益＝実際年金資産額－予定年金資産額＝△235 万円

⇒ 解答 △２３５万円

(9)仮に、当初の被保険者数を 10 万人、初期過去勤務債務額を 100 億円とする。

〔①の場合〕

被保険者１人あたりの特別保険料は 100 億円÷10 万人÷8.971＝11,147 円／人

第１年度末ＰＳＬ＝（100 億円－11,147×10 万人）×（1＋2.5%）＋5 億円＝96.0743 億円

第２年度末ＰＳＬ＝（96.0743 億円－11,147×10.5 万人）×（1＋2.5%）＋5 億円＝91.4792 億円

〔②の場合〕

Ｐは、$\mathrm{P}\times\sum_{n=1}^{6}\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{(1+2.5\%)^{6-n}}\times 10$万人$=100$億円という式を満たす。

上式のうち$\sum_{n=1}^{6}\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{(1+2.5\%)^{6-n}}$の部分は

$$5.646+\langle 4.762+\{3.856+[2.927+(1.976+1\div 1.025)\div 1.025]\div 1.025\}\div 1.025\rangle\div 1.025$$

と計算できて、19.354 となるため、P＝100 億円÷10 万人÷19.354＝5,167 円／人

第１年度末ＰＳＬ＝（100 億円－5,167×10 万人）×（1＋2.5%）＋5 億円＝102.2038 億円

第２年度末ＰＳＬ＝（102.2038 億円－2×5,167×10.5 万人）×（1＋2.5%）＋5 億円＝98.6369 億円

〔③の場合〕

１年あたりの特別保険料＝100 億円÷7.349＝13.6073 億円

第１年度末ＰＳＬ＝（100 億円－13.6073 億円）×（1＋2.5%）＋5 億円＝93.5525 億円

第２年度末ＰＳＬ＝（93.5525 億円－13.6073 億円）×（1＋2.5%）＋5 億円＝86.9438 億円

〔④の場合〕

第１年度末ＰＳＬ＝100 億円×（1－15%）×（1＋2.5%）＋5 億円＝92.125 億円

第２年度末ＰＳＬ＝92.125 億円×（1－15%）×（1＋2.5%）＋5 億円＝85.2639 億円

⇒ 解答 ④ ＜ ③ ＜ ① ＜ ②

問題２.

教科書 161 頁～163 頁

① $\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{y}B_z\right)$　② $\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x_r-1}B_z\right)$　③ $\alpha\left(\sum_{z=x}^{y}B_z\right)$　④ $\alpha\left(\sum_{z=x}^{x_r-1}B_z\right)$

⑤ $\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x-1}B_z\right)$　⑥ $\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x-1}B_z\right)$　⑦ $\dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{C_y^{(\omega)}\dfrac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}}\right\}+D_{x_r}}{D_x}$

⑧ $\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{d_y^{(\omega)}\frac{l'_{x_r}}{l'_{y+1}}\right\}+l_{x_r}$　⑨ l'_{x_r}

問題３.

（１）財政方式が加入年齢方式なので、ｘ歳の加入者１人当たりの給付現価をS_x、人数現価をG_xとすると、

$$S_x=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{D_x}\qquad G_x=\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y}{D_x}$$

したがって、加入年齢x_e歳における標準保険料率P_{x_e}は、$P_{x_e}=\frac{S_{x_e}}{G_{x_e}}=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y}$

（２）（ｉ）ｍ>0　の場合

l_xの関係式をみると、

$$l_x^A=l_{x_e}^A-m(x-x_e)$$

$$l_x^B=l_{x_e}^B-m(x_r-x_e)+\frac{m}{x_r-x_e}(x_r-x)^2$$　から

$l_{x_e}^A=l_{x_e}^B$，$l_{x_r}^A=l_{x_r}^B$　が言える。

また、$x_e<x<x_r$においては

$$l_x^B-l_x^A=l_{x_e}^B-m(x_r-x_e)+\frac{m}{x_r-x_e}(x_r-x)^2-\left\{l_{x_e}^A-m(x-x_e)\right\}$$

$$=m(x-x_e)\left(1-\frac{(x_r-x)+(x_r-x_e)}{x_r-x_e}\right)\qquad(\because l_{x_e}^A=l_{x_e}^B)$$

$$=-m(x-x_e)\left(\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\right)<0$$　なので

$l_x^A>l_x^B$　となる。

これより、$D_{x_r}^A=D_{x_r}^B$　なので　$S_{x_e}^A=S_{x_e}^B$　が成り立つ。　…①

一方、$x_e<x<x_r$　において　$D_x^A>D_x^B$　なので　$\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^A>\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^B$

$$\therefore G_{x_e}^A > G_{x_e}^B \qquad \cdots ②$$

①、②から

$$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}^B} = \frac{S_{x_e}^A}{G_{x_e}^A} \Big/ \frac{S_{x_e}^B}{G_{x_e}^B} = \frac{S_{x_e}^A}{S_{x_e}^B} \cdot \frac{G_{x_e}^B}{G_{x_e}^A} < 1$$

よって、$P_{x_e}^A < P_{x_e}^B$　が成り立つ。

（ⅱ）m＝0　の場合

$l_x^A = l_x^B$　が　$x_e \leqq x \leqq x_r$　で成り立つから　$P_{x_e}^A = P_{x_e}^B$

（3）　標準保険料率P_{xe}が最大となるには、次の算式が最小となる脱退率を求めればよい。

$$\frac{1}{P_{x_e}} = \frac{G_{x_e}}{S_{x_e}} = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}{D_{x_r} \ddot{a}_{x_r}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x_r} v^{x_r}} \sum_{y=x_e}^{x_r-1} v^y \frac{l_y}{l_{x_r}}$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x_r} v^{x_r}} \left(v^{x_e} \frac{1}{{}_{x_r-x_e}p_{x_e}} + v^{x_e+1} \frac{1}{{}_{x_r-x_e-1}p_{x_e+1}} + \cdots + v^{x_r-1} \frac{1}{p_{x_r-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{\ddot{a}_{x_r} v^{x_r}} \left(v^{x_e} \frac{1}{p_{x_e} p_{x_e+1} \cdots p_{x_r-1}} + v^{x_e+1} \frac{1}{p_{x_e+1} \cdots p_{x_r-1}} + \cdots + v^{x_r-1} \frac{1}{p_{x_r-1}} \right)$$

括弧内の各項が

$$p_{x_e} = p_{x_e+1} = \cdots = p_{x_r-1} = 1$$

のとき最小値をとる。

したがって、P_{x_e}　は各年齢における脱退率がすべて０のとき最大となる。

よって、m＝0 のとき$P_{x_e}^B$は最大値をとる。

問題４.

（１）求めるべき標準保険料率をP_{x_e}、制度全体の被保険者の責任準備金をVとすると

$$P_{x_e}=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}C_x\cdot\sum_{y=x_e}^{x}b_y+D_{x_r}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot b_x}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}\quad\cdots\cdots①$$

$$V=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x_e}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x_e}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right)$$

（2）ベースアップがあっても標準保険料率は変わらないため、ベースアップ後の責任準備金V'は

$$V'=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x_e}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x_e}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$+\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot\beta-P_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right)（1+\beta）$$

よって、発生する後発過去勤務債務は

$V'-V$

$$=\beta\{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right)\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right)\}$$

（3）

変更後の制度の標準保険料率 $P'_{x_e}=\dfrac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}C_x\cdot\sum_{y=x_e}^{x}B_{x_e}\cdot\frac{b_y}{b_{x_e}}+D_{x_r}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1}B_{x_e}\cdot\frac{b_y}{b_{x_e}}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}\quad\cdots\cdots②$

ここで、変更後の責任準備金をV''とし、変更前後の責任準備金について考えると、給付現価が等しいことから

$$V - V'' = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ P'_{x_e} \cdot L_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right) - P_{x_e} \cdot L_x \cdot B_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \right\}$$

ここで、各項の比を①②を用いて整理すると、$\dfrac{P'_{x_e} \cdot L_x \left(\dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right)}{P_{x_e} \cdot L_x \cdot B_x \left(\dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right)} = \dfrac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} \cdot \dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}$

一般に、$a_i > 0$、$b_i > 0$ で $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2} < \cdot\cdot\cdot < \dfrac{b_n}{a_n}$ ならば

$\dfrac{b_1 + \cdot\cdot\cdot + b_n}{a_1 + \cdot\cdot\cdot + a_n} < \dfrac{b_2 + \cdot\cdot\cdot + b_n}{a_2 + \cdot\cdot\cdot + a_n} < \cdot\cdot\cdot < \dfrac{b_n}{a_n}$ が言える。

今、$\dfrac{D_y \cdot b_y}{D_y} = b_y$ は y について単調増加という前提を用いると、

$$\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} < \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y} \qquad (x_e < x \leqq x_r - 1)$$

と言える。

よって $V - V'' < 0$ となり、「変更前責任準備金」<「変更後責任準備金」と言える。