損保数理 （問題）

問題1．　次の(1)から(10)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。　(70点)

(1) ある保険会社の自動車保険において、免責額0の場合、1契約につき1年間に発生するクレーム件数はパラメータ2のポアソン分布に従い、クレーム額は平均10の指数分布に従っているとする。今、1契約について、1件目のクレームには免責金額を10、2件目以降のクレームには免責金額20を設定することとしたとき、この保険の1契約あたりの純保険料に最も近いものは次のうちどれか。なお、必要があれば $e = 2.718$ として計算すること。

(a) 4.0　(b) 4.1　(c) 4.2　(d) 4.3
(e) 4.4　(f) 4.5　(g) 4.6　(h) 4.7

(2) ある自動車保険に関する過去4年間の保険料および損害率は、次表のとおりであったとする。

		2001年度	2002年度	2003年度	2004年度	2005年度
車種A	保険料	200	240	270	320	
	損害率	50%	50%	50%	50%	
車種B	保険料	100	100	100	100	
	損害率	60%	60%	60%	60%	
車種C	保険料	200	200	200	200	
	損害率	40%	48%	58%	70%	

① 過去4年間のデータ値を用いた線形回帰分析により、2005年度の車種ごとの保険料および損害率を求めると、車種Aの保険料および車種Cの損害率のそれぞれの値に最も近いものは次のうちどれか。

(a) 340　(b) 345　(c) 350　(d) 355　(e) 360
(f) 365　(g) 370　(h) 55%　(i) 60%　(j) 65%
(k) 70%　(l) 75%　(m) 80%　(n) 85%　(o) 90%

② ①の結果より求まる2005年度の3車種を合わせた全体の損害率（全体の保険金/全体の保険料）に最も近いものは、次のうちどれか。

(a) 55%　(b) 60%　(c) 65%　(d) 70%
(e) 75%　(f) 80%　(g) 85%　(h) 90%

(3) クレーム総額Sは複合ポアソン分布に従っており、そのクレーム件数の平均が$\lambda=5$、個々のロスの確率関数は表Aのとおりであるとする。また、表Bはクレーム総額Sの確率関数を表す表の一部分を取り出したものである。

（表A）

x	$\Pr(X=x)$
1	0.5
2	0.3
3	0.1
4	0.1

（表B）

s	$\Pr(S=s)$
5	0.0748
6	0.0840
7	0.0885
8	0.0887

このとき、$\Pr(S=9)$に最も近いものは、次のうちどれか。

(a) 0.0482　(b) 0.0635　(c) 0.0681　(d) 0.0832
(e) 0.0848　(f) 0.0888　(g) 0.0954　(h) 0.1928

(4) ある保険商品の1年間のクレーム総額をS、営業保険料をpとする。今、Sはポアソンパラメータλの複合ポアソン分布に従い、個々のクレーム額は確率変数Xが従う分布に従うものとする。また、営業保険料pは、Sから求まる純保険料を予定損害率θで割った額とする。このとき、1年間の損害率はS/pで表される確率変数となるが、この分散として正しいものは次のうちどれか。

(a) $\dfrac{E(X^2)}{\{E(X)/\theta\}^2\times\lambda}$　(b) $\dfrac{E(X^2)}{\{E(X)/\theta\}\times\lambda}$　(c) $\dfrac{E(X^2)}{\{E(X)/\lambda\}^2\times\theta}$

(d) $\dfrac{E(X^2)\times\lambda}{\{E(X)/\theta\}^2}$　(e) $\dfrac{E(X)^2}{\{E(X^2)/\theta\}\times\lambda}$　(f) $\dfrac{E(X)}{\{E(X^2)/\theta\}\times\lambda}$

(g) $\dfrac{E(X)^2}{\{E(X^2)/\lambda\}\times\theta}$　(h) $\dfrac{E(X)^2\times\lambda}{E(X^2)/\theta}$

(5) 無作為に抽出した契約者の年間クレーム件数は期待値Θのポアソン分布に従い、Θは契約者ごとにばらつきがある。今、Θが確率密度関数$f(x)=ax^{-a-1}$ $(x>1;\ a>2)$で表される分布に従うものとして、過去n年間のデータに対して求めたBühlmann信頼度は0.4であった。

この条件を変更して、Θが確率密度関数$f(x)=\left(\dfrac{2}{3}a\right)\left(\dfrac{2}{3}x\right)^{-a-1}$ $(x>\dfrac{3}{2};\ a>2)$で表される分布に従うものとして、過去n年間のデータに対してBühlmann信頼度を求めたとき、このBühlmann信頼度に最も近いものは次のうちどれか。なお、問題文中のa, nは定数である。

(a) 0.4　(b) 0.5　(c) 0.6　(d) 0.7

(e) $\dfrac{0.4n}{0.4n+a}$　(f) $\dfrac{0.5n}{0.5n+a}$　(g) $\dfrac{0.6n}{0.6n+a}$　(h) $\dfrac{0.7n}{0.7n+a}$

(6) ある保険会社では、下表のとおり各契約者ごとに前年度のクレーム件数による優良割引制度を実施している。ただし、前年度まで2年度以上連続してクレーム件数が2件以上であった場合は、20%割増を行うものとする。

前年度のクレーム件数	割引率
0件	20%
1件	10%
2件以上	なし

各契約者の1年間のクレーム件数は、平均1.5のポアソン分布に従うことがわかっている。この保険会社の保有契約件数は常に一定で、契約の流入および流出はないものとして、定常状態に達したときの平均割増引率に最も近いものは、次のうちのどれか。なお、必要があれば$e = 2.718$として計算すること。

(a) 10%割引　(b) 8%割引　(c) 6%割引　(d) 4%割引
(e) 2%割引　(f) 2%割増　(g) 4%割増　(h) 6%割増

(7) ある保険会社の自動車保険の料率が単純に"被保険自動車の用途"と"被保険者の年齢"の2つの危険標識のみによって複合的に区分されており、ある年度のエクスポージャおよび実績に基づく相対クレームコスト指数が次のとおりであったとする。

＜エクスポージャ(E_{ij})＞

	30歳以上	30歳未満	計
自家用	$E_{11} = 4{,}000$	$E_{12} = 2{,}500$	$E_{1\bullet} = 6{,}500$
営業用	$E_{21} = 1{,}500$	$E_{22} = 2{,}000$	$E_{2\bullet} = 3{,}500$
計	$E_{\bullet 1} = 5{,}500$	$E_{\bullet 2} = 4{,}500$	$E_{\bullet\bullet} = 10{,}000$

＜相対クレームコスト指数(r_{ij})＞

	30歳以上	30歳未満	計
自家用	$r_{11} = 0.58$	$r_{12} = 1.29$	$r_{1\bullet} = 0.86$
営業用	$r_{21} = 0.71$	$r_{22} = 1.68$	$r_{2\bullet} = 1.27$
計	$r_{\bullet 1} = 0.62$	$r_{\bullet 2} = 1.47$	$r_{\bullet\bullet} = 1.00$

この複合分類リスクが加法型であると仮定し、各相対クレームコスト指数の推定値($\hat{r}_{ij}$)をMinimum Bias法により求めるとき、$\hat{r}_{11}$, $\hat{r}_{12}$, $\hat{r}_{21}$, $\hat{r}_{22}$のそれぞれの値に最も近いものは次のうちどれか。

(a) 0.50　(b) 0.55　(c) 0.60　(d) 0.65　(e) 0.70
(f) 0.75　(g) 0.80　(h) 0.85　(i) 1.15　(j) 1.20
(k) 1.25　(l) 1.30　(m) 1.35　(n) 1.40　(o) 1.45
(p) 1.50　(q) 1.55　(r) 1.60　(s) 1.65　(t) 1.70

(8) ある保険会社のある保険商品の事故について分析を行ったところ、事故発生から事故報告までの期間をx(月)としたときに、xは平均3の指数分布に従うことがわかった。事故は毎月月初に100件発生し、平均損害額は10万円であるとすると、年度末において、当年度発生事故についてIBNR損害を算出した場合、その値に最も近いものは次のうちのどれか。なお、必要があれば$e^{-\frac{1}{3}}=0.72$として計算すること。

(a) 500万円 (b) 1,000万円 (c) 1,500万円 (d) 2,000万円
(e) 2,500万円 (f) 3,000万円 (g) 3,500万円 (h) 4,000万円

(9) 保険料の払込免除制度を持つ年払契約の積立型基本特約における、第t保険年度の予定利息を表すものとして正しいものは、次のうちどれか。ただし、予定利息とは保険料算出する際に予定されている利息のことをいう。なお、満期返戻金をW、保険期間をn年、予定利率をi、現価率を$v\left(=\dfrac{1}{1+i}\right)$、予定消滅率$q$を考慮した現価率を$\phi\left(=(1-q)v\right)$、予定消滅率$q$および予定払込免除率$d$を考慮した現価率を$\psi=(1-d)(1-q)v$とする。

(a) $W\phi^n\dfrac{1}{1-\psi^n}v^{-t}(1-\psi^t)(1-v)$ (b) $W\psi^n\dfrac{1}{1-\psi^n}v^{-t}(1-\psi^t)(1-v)$

(c) $W\psi^n\dfrac{1}{1-\psi^n}v^{-t}(1-\phi^t)(1-v)$ (d) $W\phi^n\dfrac{1}{1-\phi^n}v^{-t}(1-\psi^t)(1-v)$

(e) $W\phi^n\dfrac{1}{1-\psi^n}v^{-t}(1-\psi^t)(1-\psi)$ (f) $W\psi^n\dfrac{1}{1-\psi^n}v^{-n}(1-\psi^t)(1-v)$

(g) $W\psi^n\dfrac{1}{1-\psi^n}v^{-n}(1-\psi^n)(1-v)$ (h) $W\phi^n\dfrac{1}{1-\phi^n}v^{-t}(1-\psi^n)(1-v)$

(10) ある再保険会社は、ある元受保険会社の契約ポートフォリオに対して、エクセスポイント1億円、責任限度額無制限のELC再保険を提供することとし、その年間再保険料を決めるにあたり、元受保険会社から次の情報を得た。

・ 過去のデータでは、対象契約ポートフォリオから発生したクレームのうち、2億円以上のクレームは5件であり、それぞれ2.1億円、2.2億円、2.4億円、2.6億円、3.2億円であった。(過去何年間のデータであるかは定かではない。)

・ 対象契約ポートフォリオから生じる年間の元受クレーム件数の期待値は90件である。

・ 元受クレーム1件あたりのクレーム額は指数分布に従うと考えてよい。

このとき、次の各問いに答えよ。

① 1件あたりの元受クレーム額の平均を最尤推定により求めたとき、この最尤推定値に最も近いものは次のうちどれか。

(a) 0.1億円 (b) 0.3億円 (c) 0.5億円 (d) 1.0億円
(e) 1.5億円 (f) 2.0億円 (g) 2.5億円 (h) 3.0億円

② この再保険会社は、①で求めた推定値を用いてこのELC再保険の年間ネット再保険料を算出することにした。この年間ネット再保険料に最も近いものは次のうちどれか。なお、必要があれば$e=2.718$として計算すること。

(a) 5億円　(b) 5.5億円　(c) 6億円　(d) 6.5億円
(e) 7億円　(f) 7.5億円　(g) 8億円　(h) 8.5億円

問題2.　次の各問いに答えよ。（18点）

(1) 確率変数$S_i\ (i=1,\cdots,m)$が、互いに独立で、それぞれポアソンパラメータ$\lambda_i\ (i=1,\cdots,m)$、クレーム額分布関数$F_i(x)\ (i=1,\cdots,m)$の複合ポアソン分布に従うとする。また、クレーム額分布の積率母関数を$M_i(x)\ (i=1,\cdots,m)$とする。このとき、$S=S_1+\cdots+S_m$は、ポアソンパラメータが$\lambda=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$、クレーム額の分布関数が$F(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\lambda}F_i(x)$で表される複合ポアソン分布に従うことを、$S$の積率母関数を求めることにより示せ。

(2) ある保険会社では3種類の保険種目を販売しており、各保険種目の契約ポートフォリオから生じる年間のクレーム総額をそれぞれS_1, S_2, S_3とする。S_1, S_2, S_3は互いに独立で、それぞれ次表のようなパラメータをもつ複合ポアソン分布に従っているとする。

	平均事故件数	個々のクレーム額分布
S_1	50	平均1の指数分布
S_2	100	平均2の指数分布
S_3	50	平均4の指数分布

今、3種目の契約ポートフォリオを1つのポートフォリオ（集合的リスクモデル）とみなし、そのクレーム総額を$S=S_1+S_2+S_3$、事故件数をN、個々のクレーム額を$X_i\ (i=1,2,\cdots,N)$とする。このとき、次の問いに答えよ。

① 保険会社全体での平均事故件数$E(N)$、および$X_i\ (i=1,2,\cdots)$の分布関数$F(x)$を求めよ。

② 正規分布近似を用いて、Sの99パーセンタイル（$\Pr(S\le a)=0.99$を満たす値a）を求めよ。ただし、Zを標準正規分布に従う確率変数とするとき、$\Pr(Z\le 2.33)=0.99$であることを用いよ。

③ この保険会社は、どの保険商品に発生したクレームであるかにかかわらず、個々のクレーム額が4を超えた部分全額を回収するELC再保険（エクセスポイント4、責任限度額無制限のELC再保険）を購入することとした。このとき、このELC再保険から回収が発生するクレーム件数の期待値を求めよ。なお、必要があれば$e=2.718$として計算することとし、答えは小数点以下第2位を四捨五入して小数点以下第1位まで求めよ。

問題3. クレーム件数過程$\{N_t\}$が次の条件を満たすとする。

① $0 \leq s < t \leq u < v \Rightarrow N_t - N_s$と$N_v - N_u$は独立

② $P(N_t = 0) = e^{-\lambda\sqrt{t}}$ $(0 \leq t)$が成り立つ。

③ 同一時刻に2件以上のクレームが発生することはない。

このとき、次の各問いに答えよ。 (12点)

(1) オペレーショナル・タイム$\tau(t)$を求めよ。

(2) 強度関数$\lambda(t)$は、時刻tでのクレーム瞬間発生確率を意味する。$\lambda(t)$を求め、クレーム瞬間発生確率がtの増加とともに増加するか減少するかを答えよ。

(3) n件目のクレームが発生する時刻を表す確率変数をT_nとするとき、T_nの平均を求めよ。なお、パラメータλのポアソン過程において、n件目のクレームが発生する時刻がガンマ分布$\Gamma(n,\lambda)$に従うことは証明せずに用いてよい。

以 上

損保数理（解答例）

問題1.

(1)　(h)　（テキスト1-40ページ参照）

免責額0の場合のクレーム件数をN、i件目のクレーム額（免責0）を$X_i\ (i=1,2,\ldots)$とする。Nの平均はλ、X_iの平均はμとする。また、免責額がdの場合の保険会社が支払うクレーム額1件あたりの期待値（保険会社の支払対象とはならない事故も含めた期待値）を、

$$R(d)=E[X_i-\min(X_i,d)]=\int_d^{\infty}(x-d)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}dx=\mu e^{-\frac{d}{\mu}}$$

と表記することとする。

すると、1件目のクレームに免責額d_1、2件目以降のクレームに免責額d_2を設定した場合の純保険料Pは、

$$\begin{aligned}
P&=E[(X_1-\min(X_1,d_1))+(X_2-\min(X_2,d_2))\cdots+(X_N-\min(X_N,d_2))]\\
&=E_N[E[(X_1-\min(X_1,d_1))+(X_2-\min(X_2,d_2))+\cdots+(X_N-\min(X_N,d_2))\,|\,N]]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}E[(X_1-\min(X_1,d_1))+(X_2-\min(X_2,d_2))+\cdots+(X_n-\min(X_n,d_2))]\Pr(N=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(R(d_1)+(n-1)R(d_2))\Pr(N=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}(R(d_1)-R(d_2))\Pr(N=n)+\sum_{n=1}^{\infty}nR(d_2)\Pr(N=n)\\
&=(R(d_1)-R(d_2))(1-\Pr(N=0))+R(d_2)E[N]\\
&=\mu(e^{-\frac{d_1}{\mu}}-e^{-\frac{d_2}{\mu}})(1-e^{-\lambda})+\mu e^{-\frac{d_2}{\mu}}\cdot\lambda\\
&=\mu(1-e^{-\lambda})e^{-\frac{d_1}{\mu}}+\mu(\lambda-1+e^{-\lambda})e^{-\frac{d_2}{\mu}}
\end{aligned}$$

となる。$\lambda=2,\ \mu=10,\ d_1=10,\ d_2=20$を代入して、

$$\begin{aligned}
P&=10(1-e^{-2})e^{-1}+10(2-1+e^{-2})e^{-2}\\
&=4.7180\ldots
\end{aligned}$$

(2)　（テキスト1-20ページ参照）

①　(d)　　②　(m)

車種A、B、Cごとの2005年度の保険料および損害率を直線回帰式より求める。

まず、車種Aの2005年度の保険料を回帰直線$y-\bar{y}=\beta(x-\bar{x})$より求める。ここで、$y$は被説明変数、$x$は説明変数で2001年度を1とする指数とする。

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\times\bar{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\times\bar{x}^2}=\frac{2,770-4\times2.5\times257.5}{30-4\times2.5^2}=39$$

となる。よって、2005年度の保険料は、$y_{2005}=\beta\times(x-\bar{x})+\bar{y}=39\times(5-2.5)+257.5=355$ である。

次に、車種Cの2005年度の損害率を同様の手法より求める。

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i y_i-4\overline{x}\times\overline{y}}{\sum_{i=1}^{4}x_i^2-4\times\overline{x}^2}=\frac{5.9-4\times2.5\times0.54}{30-4\times2.5^2}=0.1$$

となる。よって、2005年度の損害率は、$y_{2005}=\beta\times(x-\overline{x})+\overline{y}=0.1\times(5-2.5)+0.54=0.79=79\%$ である。

② (b)

同様に他の車種の2005年度の保険料、損害率を求める。

車種Aの2005年度の損害率は、50%である。

車種Bの2005年度の保険料および損害率は、それぞれ100、60% となる。

車種Cの2005年度の保険料は、200 となる。

よって2005年度の3車種計の損害率は、$\dfrac{355\times50\%+100\times60\%+200\times79\%}{355+100+200}=60.4\%$ である。

(3) (e) (テキスト2-19ページ参照)

クレーム額が正の整数であるから、次の式を用いて帰納的にクレーム総額の分布を計算することができる。

$$\Pr(S=s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{s}\lambda\Pr(X=i)\Pr(S=s-i)$$

この式に、この問題における数値を代入すれば、

$$\Pr(S=s)=\frac{5}{s}[0.5\Pr(S=s-1)+2\times0.3\Pr(S=s-2)$$
$$+3\times0.1\Pr(S=s-3)+4\times0.1\Pr(S=s-4)]$$

となる。したがって、

$$\Pr(S=9)=\frac{5}{9}[0.5\times0.0887+2\times0.3\times0.0885$$
$$+3\times0.1\times0.0840+4\times0.1\times0.0748]$$
$$=0.084761\ldots$$

(4) (a) (テキスト2-8ページ参照)

純保険料は、$E(X)E(N)$ によって表すことができるので、営業保険料 p は、

$$p=\{E(X)E(N)\}/\theta$$

と表される。したがって、確率変数 S/p の分散を計算すると、以下のとおりとなる。

$$V(S/\theta)=V\left[\frac{S}{(E(X)E(N))/\theta}\right]=\frac{V[E(S|N)]+E[V(S|N)]}{\{(E(X)E(N))/\theta\}^2}$$
$$=\frac{V[E(X)N]+E[V(X)N]}{\{(E(X)E(N))/\theta\}^2}$$
$$=\frac{E(X)^2V(N)+V(X)E(N)}{\{(E(X)E(N))/\theta\}^2}$$

$$=\frac{\lambda\left(E(X)^2+V(X)\right)}{\left\{(E(X)\lambda)/\theta\right\}^2}$$

$$=\frac{E(X^2)}{\left\{E(X)/\theta\right\}^2\lambda}$$

(5)　(b)　(テキスト3-30ページ参照)

年間クレーム件数 X の期待値、分散は、X が期待値 Θ のポアソン分布に従うことより、$E[X|\Theta]=\Theta$, $V[X|\Theta]=\Theta$ である。したがって、Θ の分布の確率密度関数を

$$f(x)=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{-a-1}\quad(x>b>0;\ a>2)$$

とすると、

$$E[V[X|\Theta]]=E[\Theta]=\int_b^\infty x\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{-a-1}dx=\frac{ab}{a-1}$$

$$V[E[X|\Theta]]=V[\Theta]=E[\Theta^2]-(E[\Theta])^2=\int_b^\infty x^2\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b}\right)^{-a-1}dx-\left(\frac{ab}{a-1}\right)^2$$

$$=\frac{ab^2}{a-2}-\left(\frac{ab}{a-1}\right)^2=\frac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2}$$

となる。よって、このときのBühlmann信頼度を Z_b とおくと、

$$Z_b=\frac{n}{n+\dfrac{E[V[X|\Theta]]}{V[E[X|\Theta]]}}=\frac{bn}{bn+(a-2)(a-1)}$$

となる。題意より、$Z_1=0.4$ なので、簡単のため $(a-2)(a-1)=c$ と書くことにすると、

$$Z_1=\frac{n}{n+c}=0.4$$

$$n=\frac{2}{3}c$$

となることがわかる。よって、

$$Z_{\frac{3}{2}}=\frac{\frac{3}{2}n}{\frac{3}{2}n+c}=\frac{c}{c+c}=\frac{1}{2}$$

(6)　(d)　(テキスト3-41ページ参照)

1年間のクレーム件数が0件の確率を p_0 、1件の確率を p_1 、2件以上の確率を p_2 、定常状態において割引率20%の構成割合を α 、10%の構成割合を β 、0%の構成割合を γ 、割増率20%の構成割合を δ とすると、

$$(\alpha\quad\beta\quad\gamma\quad\delta)\begin{pmatrix}p_0 & p_1 & p_2 & 0\\ p_0 & p_1 & p_2 & 0\\ p_0 & p_1 & 0 & p_2\\ p_0 & p_1 & 0 & p_2\end{pmatrix}=(\alpha\quad\beta\quad\gamma\quad\delta)$$

したがって、

$$\alpha = p_0(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = p_0$$
$$\beta = p_1(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = p_1$$
$$\gamma = p_2(\alpha+\beta) = p_2(p_0+p_1) = p_2(1-p_2)$$
$$\delta = p_2(\gamma+\delta) \quad \to \quad \delta = p_2{}^2$$

クレーム件数は平均1.5のポアソン分布に従うから、

$$p_0 = e^{-1.5}\times\frac{1.5^0}{0!} = 0.2254$$
$$p_1 = e^{-1.5}\times\frac{1.5^1}{1!} = 0.3381$$
$$p_2 = 1-p_1-p_2 = 0.4365$$

よって、平均割引率は、

$$-20\%\times p_0 - 10\%\times p_1 + 20\%\times p_2{}^2 = -4.1\%$$

(7) $\hat{r}_{11}$：(b)、$\hat{r}_{12}$：(m)、$\hat{r}_{21}$：(g)、$\hat{r}_{22}$：(r) (テキスト4-12ページ参照)

Minimum Bias法によれば、各$\hat{r}_{ij}$は次の連立方程式を満たさなければならない。

$$\begin{cases} E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11}) + E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12}) = 0 \\ E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21}) + E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22}) = 0 \\ E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11}) + E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21}) = 0 \\ E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12}) + E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22}) = 0 \end{cases}$$

ここで、各危険標識の料率係数をそれぞれx_i, y_jとし、$C = E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})$とおけば、この複合分類リスクが加法型であることにより、上の方程式は次のように整理される。

$$\begin{cases} \hat{r}_{11} = x_1 + y_1 = r_{11} - C/E_{11} \\ \hat{r}_{22} = x_2 + y_2 = r_{22} - C/E_{22} \\ \hat{r}_{12} = x_1 + y_2 = r_{12} + C/E_{12} \\ \hat{r}_{21} = x_2 + y_1 = r_{21} + C/E_{21} \end{cases}$$

よって、$(r_{11}-C/E_{11}) + (r_{22}-C/E_{22}) = (r_{12}+C/E_{12}) + (r_{21}+C/E_{21})$であり、各$E_{ij}$, r_{ij}を代入してCについて解くと、$C = 143.1$が求まる。

これを(1)に代入して、

$$\hat{r}_{11} = 0.54,\ \ \hat{r}_{12} = 1.35,\ \ \hat{r}_{21} = 0.81,\ \ \hat{r}_{22} = 1.61$$

(8) (e) (テキスト5-6ページ参照)

平均3の指数分布に従うので、分布関数は$F(x) = 1-\exp\left(-\dfrac{x}{3}\right)$で表される。

x	0	1	2	…	12
$F(x)$	0.000	0.2800	0.4816	…	0.9806

事故は月初発生なので、当月中に事故報告される確率は$F(1)-F(0) = F(1)$、翌月に事故報告される確率は$F(2)-F(1)$、…となる。したがって、事故発生月ごとに当年度中に事故報告されない確率は次のとおりとなる。

事故発生月	4月	5月	6月	…	3月
事故報告されない確率	$1-F(12)$ $=\exp\left(-\frac{12}{3}\right)$ $=0.0194$	$1-F(11)$ $=\exp\left(-\frac{11}{3}\right)$ $=0.0270$	$1-F(10)$ $=\exp\left(-\frac{10}{3}\right)$ $=0.0374$		$1-F(1)$ $=\exp\left(-\frac{1}{3}\right)$ $=0.720$

毎月の発生損害は100(件)×10万円＝1,000万円であるから、IBNR損害は、

$$1{,}000\times(0.0194+0.0270+0.0374+\cdots+0.720)=1{,}000\times 2.52=2{,}520\ (\text{万円})$$

(9)　(a)　(テキスト6-17ページ参照)

第t保険年度末の払戻積立金を${}_tV$、平準式積立保険料をP_sとして、第t保険年度の予定利息R_tを求めると次のとおりとなる。

$$\begin{aligned}
R_t &= (1-q)^t\,{}_tV-(1-q)^{t-1}\,{}_{t-1}V-(1-q)^{t-1}(1-d)^{t-1}Ps\\
&=(1-q)^t w\phi^{n-t}\frac{1-\psi^t}{1-\psi^n}-(1-q)^{t-1}W\phi^{n-t+1}\frac{1-\psi^{t-1}}{1-\psi^n}-(1-q)^{t-1}(1-d)^{t-1}W\phi^n\frac{1-\psi}{1-\psi^n}\\
&=W\phi^n\frac{1}{1-\psi^n}\left[(1-q)^t\frac{1-\psi^t}{v^t(1-q)^t}-(1-q)^{t-1}\frac{1-\psi^{t-1}}{v^{t-1}(1-q)^{t-1}}-\frac{\psi^{t-1}(1-\psi)}{v^{t-1}}\right]\\
&=W\phi^n\frac{1}{1-\psi^n}\left[v^{-t}(1-\psi^t)-v^{-t+1}(1-\psi^{t-1})-v^{-t+1}(\psi^{t-1}-\psi^t)\right]\\
&=W\phi^n\frac{1}{1-\psi^n}\left[v^{-t}(1-\psi^t)-v^{-t+1}(1-\psi^t)\right]\\
&=W\phi^n\frac{1}{1-\psi^n}\left[v^{-t}(1-\psi^t)(1-v)\right]
\end{aligned}$$

(10)　①　(c)　②　(c)　(テキスト8-12ページ参照)

①　元受クレーム額を表す確率変数をXとし、その平均をμ億円とすると、その確率密度関数は、$f(x)=\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}$ $(x>0)$である。したがって、2億円以上の元受クレーム額の確率密度関数(2億円以上のクレームが発生した条件の下でのクレーム額の条件付確率密度関数)は、

$$g(x)=\frac{f(x)}{\Pr(X\geq 2)}=\frac{\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}}{e^{-\frac{2}{\mu}}}=\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}(x-2)}\quad(x\geq 2)$$

である。よって、尤度関数を$l(\mu)$とおくと、

$$\begin{aligned}
\log l(\mu)&=\log\prod_{i=1}^{n}g(x_i)=\log\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}(x_i-2)}\\
&=-n\log\mu-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)\\
&=-n\log\mu+\frac{2n}{\mu}-\frac{n\bar{x}}{\mu}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{d}{d\mu}\log l(\mu) = -\frac{n}{\mu} - \frac{n(2-\overline{x})}{\mu^2} = 0$$

より、μ の最尤推定値は $\hat{\mu} = \overline{x} - 2 = 2.5 - 2 = 0.5$ となる。

② このELCネット再保険料 P は、

$$P = 90\int_1^\infty (x-1)f(x)dx = 90\int_1^\infty (1-F(x))dx$$
$$= 90\int_1^\infty e^{-\frac{x}{\hat{\mu}}}dx = 90\int_1^\infty e^{-\frac{x}{0.5}}dx$$
$$= 90 \times 0.5e^{-2} = 6.09\ldots$$

問題2.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(テキスト2-12ページ参照)

(1) 各 S_i はポアソン分布に従うので、その積率母関数は、$M_{S_i}(t) = e^{\lambda_i(M_i(t)-1)}$ となる。したがって、S の積率母関数を $M_S(t)$ とすると、

$$M_S(t) = E\left[e^{St}\right] = E\left[e^{(S_1+\cdots+S_m)t}\right]$$
$$= E\left[e^{S_1t}\cdots\cdots e^{S_mt}\right]$$
$$= \prod_{i=1}^m E\left[e^{S_it}\right] = \prod_{i=1}^m M_{S_i}(t) = \prod_{i=1}^m e^{\lambda_i(M_i(t)-1)}$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i(M_i(t)-1)\right) = \exp\left(\lambda\left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda}M_i(t)-1\right)\right)$$

となる。(ただし、$\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ とする。)

したがって、S は、ポアソンパラメータが $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i$ で、クレーム額分布の積率母関数が $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda}M_i(x)$ となる複合ポアソン分布に従うことがわかる。これは分布関数が、

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda}F_i(x)$$

で表される分布の積率母関数であるので題意は示せた。

(2)

① (1)より、S は複合ポアソン分布に従い、

$$E(N) = 50 + 100 + 50 = 200$$
$$F(x) = \frac{50}{200}(1-e^{-x}) + \frac{100}{200}(1-e^{-\frac{x}{2}}) + \frac{50}{200}(1-e^{-\frac{x}{4}})$$
$$= 1 - \frac{1}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} \quad (x > 0)$$

となる。

② ①で求めたポートフォリオ全体の複合ポアソン分布において、個々のクレーム額の1次と2次のモーメントは、それぞれ

$$E(X) = \int_0^\infty xdF(x) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{4}}\right) = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2)=\int_0^\infty x^2 dF(x)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{4}x^2e^{-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2e^{-\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^2e^{-\frac{x}{4}}\right)=\frac{25}{2}$$

となる。したがって、

$$E(S)=E(N)E(X)=200\times\frac{9}{4}=450$$

$$V(S)=E(N)E(X^2)=200\times\frac{25}{2}=2500$$

正規分布近似により、$\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}=\dfrac{S-450}{50}$ が標準正規分布に従うとして、$\Pr\left(\dfrac{S-450}{50}\le 2.33\right)=0.99$ より、$\Pr(S\le 566.5)=0.99$ となり、したがって99パーセンタイルは566.5である。

③ 個々のクレームに対し、再保険回収が発生するクレームであるときには1を、発生しないときには0をとるような確率変数を $I_i\ (i=1,\ldots,N)$ とおくと、

$$\Pr(I_i=0)=\Pr(X_i\le 4)=F(4)=1-\frac{1}{4}e^{-4}-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-1}=0.83570\ldots$$

$$\Pr(I_i=1)=1-F(4)=0.16429\ldots$$

であり、$N,X_1,X_2,\ldots$ の独立性から、$N,I_1,I_2,\ldots$ も互いに独立である。

回収が発生するクレーム件数を M とすると、$M=I_1+\cdots+I_N$ と書けるので、

$$\begin{aligned}E[M]&=E[E[I_1+\cdots+I_N\mid N]]\\&=E[N\Pr(I_i=1)]\\&=E[N]\Pr(I_i=1)\\&=200\times 0.16429\ldots\\&=32.85\ldots\end{aligned}$$

よって、回収発生クレーム件数の期待値は32.9となる。

問題3. (テキスト7-16ページ参照)

(1) $\tau(t)=-\log\Pr(N_t=0)=\lambda\sqrt{t}\quad(t\ge 0)$

(2) $\lambda(t)=-\dfrac{dP(N_t=0)/dt}{P(N_t=0)}=-\dfrac{d}{dt}\log P(N_t=0)=\dfrac{d}{dt}\tau(t)=\dfrac{\lambda}{2\sqrt{t}}\quad(t\ge 0)$

となり、$\lambda(t)$ は t について減少関数であることがわかる。$\lambda(t)$ は時刻 t での瞬間クレーム発生確率を意味するので、これは、クレーム発生確率は時刻 t の増加とともに減少するということを意味する。

(3) $N_s' = N_{\tau^{-1}(s)}$ はポアソン過程に従い、$\Pr(N_s' = n) = \dfrac{s^n}{n!}e^{-s}$ $(n = 0,1,\ldots)$ が成り立つ。したがって、$S_n = \tau(T_n)$ とおくと、S_n は $\Gamma(n,1)$ に従うので、

$$E[T_n] = E[\tau^{-1}(S_n)] = \int_0^\infty \tau^{-1}(s)\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s}ds = \int_0^\infty \frac{s^2}{\lambda^2}\cdot\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-s}ds$$

$$= \frac{n(n+1)}{\lambda^2}\int_0^\infty \cdot\frac{s^{n+1}}{(n+1)!}e^{-s}ds$$

$$= \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

となる。(2行目の式の積分の中身は $\Gamma(n+2,1)$ の密度関数なので、この積分は1)