生 保 数 理 （問 題）

問題 1.　次の(1)から(7)までの各問について答えよ。　(35 点)

(1)　ある年齢 x 歳において、生存確率 ${}_tp_x$ と死力 μ_{x+t} との間に、
${}_tp_x\mu_{x+t}=a\cdot e^{bt}\ (a\neq 0, b\neq 0, 0\leqq t\leqq 1)$ が成り立つとき、中央死亡率 m_x を表す式は次のうちどれか。最も適当な記号を選んで、所定の解答用紙の指定欄に記入せよ（なお、以下の各選択肢において、分母は 0 にならないものとする）。

(A) $\dfrac{\frac{a}{b}\left(e^b-1\right)}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(B) $\dfrac{\frac{a}{b}\left(e^b-1\right)}{1-\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(C) $\dfrac{\frac{a}{b}\left(e^b-1\right)}{-1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(D) $\dfrac{\frac{a}{b}\left(e^b-1\right)}{1+\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$

(E) $\dfrac{\frac{a}{b}\left(e^b-1\right)}{1-\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(F) $\dfrac{\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}{1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(G) $\dfrac{\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}{1-\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(H) $\dfrac{\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}{-1+\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$

(I) $\dfrac{\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}{1+\frac{a}{b}+\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$　(J) $\dfrac{\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}{1-\frac{a}{b}-\frac{a}{b^2}\left(e^b-1\right)}$

(2)　債務の返済方法として次の2つを考える。
・返済額が毎回同額となるように返済する方法（元利均等返済）
・元金は均等に返済することとし、これに加えて毎返済時には未返済元金に対する利息を支払う方法（元金均等返済）

元金 1,000 万円、返済期間 30 年、年 1 回期末返済、金利 5%の場合、元金均等返済による返済額が元利均等返済による返済額を下回るのは何回目からか。最も適当な整数を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。なお、解答にあたって必要ならば、$a_{\overline{30|}}=15.37245$ を用いよ。

(3)　次の記述のうちで死力 μ_x について正しいものを全て、解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし、正しいものが一つもない場合は×と記入せよ。
(A)　$\mu_x<0$ となることがある。
(B)　$\mu_x>1$ となることがある。
(C)　常に $0\leqq\mu_x\leqq 1$ である。
(D)　常に $\mu_x<q_x$ である。
(E)　常に $\mu_x>q_x$ である。
(F)　$\mu_x<q_x$ となることがある。

(4) 人口が定常状態にある国家で、出生数が毎年前年比 98%で等比数列的に減少し始めた。この国家では、65 歳以上の人々全員に年金（金額は全員同じ）を支払う制度があり、その毎年支払う財源全額を、20 歳以上 59 歳以下の人々全員で負担している（負担金額は全員同じ、未納はないものとする）。人口が減少しても 65 歳以上の人々がもらう年金額は変わらないものとする場合、出生数が減少し始めてから 60 年後の 1 人あたりの負担額は、定常状態であったときに比べ何倍になるか。以下の選択肢のうち最も近い数値の記号を選んで所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。ここで、この国家の生命表における生存数は$l_x = K(100-x)$ （x, K は整数）に従うものとする。なお、解答にあたって必要ならば、$0.98^{40} = 0.44570$を用いよ。

(A)	1.40	(B)	1.45	(C)	1.50	(D)	1.55	(E)	1.60
(F)	1.65	(G)	1.70	(H)	1.75	(I)	1.80	(J)	1.85

(5) ある企業グループに属する会社員（主集団）が死亡と自己都合退職により減少していく2重脱退残存表を考える。この企業グループの自己都合退職者により形成される集団（副集団）は死亡のみにより減少し、再度元の企業グループの会社員に復帰することはないものとする。このような 2 重脱退残存表が表す人員構成が定常人口を形成しており、ある年齢 x 歳と $x+1$ 歳の間で以下の条件を満たすものとする。

- x 歳の会社員が $x+1$ 歳に達するまでに会社員のままで死亡する確率は $\dfrac{1}{468}$
- x 歳の者（全員）の中央死亡率は $\dfrac{1}{450}$
- x 歳の自己都合退職者が $x+1$ 歳までに死亡する確率（絶対死亡率）は $\dfrac{1}{436}$
- x 歳と $x+1$ 歳の間の主集団の人数は 26,274 人
- x 歳と $x+1$ 歳の間の副集団の人数は 5,226 人

このとき、x 歳の会社員の絶対死亡率に最も近いものは次のうちどれか。最も適当な記号を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。なお、自己都合退職及び各死亡は年間を通じて一様に発生するものとする。

(A)	0.002193	(B)	0.002196	(C)	0.002200	(D)	0.002202
(E)	0.002205	(F)	0.002208	(G)	0.002212	(H)	0.002215
(I)	0.002218	(J)	0.002220				

(6) 予定死亡率が年齢とともに単調増加する時、予定利率を引き上げた場合、次の中で必ず値が小さくなるものの記号を全て、解答用紙の所定の欄に記入せよ。ただし、該当するものが一つもない場合は×と記入せよ。ただし、n >5 とする。

(A) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　(B) $A_{x:\overline{n}|}$　(C) $(DA)_{x:\overline{n}|}$　(D) $P_{x:\overline{n}|}$

(7) 就業不能者の死力が就業者の死力の 1.5 倍で、${}_tp_x^{aa} = e^{-0.008t}$, ${}_tp_x^{i} = e^{-0.006t}$ なる関係がある。このとき、${}_tp_x^{ai} = X \times {}_tp_x^{aa} + Y \times {}_tp_x^{i}$ と表すこととすると、次のうち(X,Y)の組はどれか。最も適当な記号を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。

(A) $(-5,3)$　(B) $(-5,5)$　(C) $(-4,3)$　(D) $(-4,4)$　(E) $(-3,3)$
(F) $(-3,4)$　(G) $(-2,1)$　(H) $(-2,2)$　(I) $(-1,2)$　(J) $(-1,3)$

問題 2. 次の(1)から(3)までの各問について、それぞれ選択肢の中から最も近い数値の記号を選んで、その記号を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。(12 点)

40 歳加入 60 歳満期、保険料払込期間 10 年、保険金額 1(保険金年末払)の年払養老保険において経過 8 年度末に払済保険に変更する。この時、

- 解約返戻金は 10 年チルメル式責任準備金とする。(チルメル割合は新契約費と同一)
- 払済保険への変更時に、1 回分の年払営業保険料が振替貸付されており、払済保険金額の算出時に解約返戻金から差し引くものとする。(振替貸付についての利息は考慮しないものとする。)
- 払済保険金額の計算には保険料払済後の維持費を含めて計算するものとする。
- 予定事業費率は次のとおりとする。

新契約費		保険金額の 0.025
維持費	保険料払込中	毎年度始に保険金額の 0.0024
	保険料払済後	毎年度始に保険金額の 0.0020
集金費		営業保険料の 0.03

(1) 払済保険に変更する前の養老保険の年払営業保険料は次のうちどれか。

(A)	0.08203	(B)	0.08303	(C)	0.08403	(D)	0.08503	(E)	0.08603
(F)	0.08733	(G)	0.08833	(H)	0.08933	(I)	0.09033	(J)	0.09103

(2) 経過 8 年度末の 10 年チルメル式責任準備金は次のうちどれか。

(A)	0.66104	(B)	0.66204	(C)	0.66304	(D)	0.66404	(E)	0.66504
(F)	0.66604	(G)	0.66704	(H)	0.66804	(I)	0.66904	(J)	0.67004

(3) 払済保険の払済保険金額は次のうちどれか。

(A)	0.662	(B)	0.665	(C)	0.668	(D)	0.671	(E)	0.674
(F)	0.677	(G)	0.680	(H)	0.683	(I)	0.686	(J)	0.689

必要ならば以下の基数を用いよ。

x	D_x	N_x	C_x	M_x
40	0.50545	14.38845	0.00074	0.27190
48	0.43591	10.59105	0.00134	0.26399
50	0.41913	9.72766	0.00152	0.26123
60	0.33473	5.91219	0.00329	0.23877

問題 **3**. 次の各問について、最も適当な数値または最も簡潔な算式を、所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。 (23 点)

(1) 30 歳加入の保険料年払全期払込、保険金期末払、保険金額 1、保険期間 20 年の定期保険がある。いま、$l_x = 100 - x$ $(0 \leqq x \leqq 100)$ であるとき、以下の空欄を埋めよ。

(ア) $P^{1}_{30:\overline{20|}}$ を $v, a_{\overline{n|}}$ のみを用いて表すと以下のようになる。

$$P^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{(1-v)\cdot a_{\overline{20|}}}{\boxed{①} - \boxed{②}\cdot v^{\boxed{③}} - a_{\overline{20|}}}$$

(イ) (ア)の $P^{1}_{30:\overline{20|}}$ を単に P と書き、t 年経過後の責任準備金 ${}_tV^{1}_{30:\overline{20|}}$ を $t, v, a_{\overline{n|}}$ のみを用いて表すと以下のようになる。

$${}_tV^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{a_{\overline{20-t|}}}{\boxed{④}} - P\cdot\frac{\boxed{⑤} - \boxed{⑥}\cdot v^{\boxed{⑦}} - a_{\overline{20-t|}}}{(\boxed{⑧})(1-v)}$$

(ウ) $i = 0.02$ のとき、自然保険料が $P^{1}_{30:\overline{20|}}$ を上回るのは契約後 $\boxed{⑨}$ 年経過時点の保険料からである。また、この保険はある時点までは責任準備金が単調に増加し、以後単調に減少するが、この場合、責任準備金が最大となるのは契約後 $\boxed{⑩}$ 年経過時点である。⑨,⑩に当てはまる整数を答えよ。

なお、解答にあたって必要ならば次の数値を用いよ。

v = 0.98039	v^2 = 0.96117	v^3 = 0.94232	v^4 = 0.92385	v^5 = 0.90573
v^6 = 0.88797	v^7 = 0.87056	v^8 = 0.85349	v^9 = 0.83676	v^{10} = 0.82035
v^{11} = 0.80426	v^{12} = 0.78849	v^{13} = 0.77303	v^{14} = 0.75788	v^{15} = 0.74301
v^{16} = 0.72845	v^{17} = 0.71416	v^{18} = 0.70016	v^{19} = 0.68643	v^{20} = 0.67297

$a_{\overline{1|}}$ = 0.98039	$a_{\overline{2|}}$ = 1.94156	$a_{\overline{3|}}$ = 2.88388	$a_{\overline{4|}}$ = 3.80773	$a_{\overline{5|}}$ = 4.71346
$a_{\overline{6|}}$ = 5.60143	$a_{\overline{7|}}$ = 6.47199	$a_{\overline{8|}}$ = 7.32548	$a_{\overline{9|}}$ = 8.16224	$a_{\overline{10|}}$ = 8.98259
$a_{\overline{11|}}$ = 9.78685	$a_{\overline{12|}}$ = 10.57534	$a_{\overline{13|}}$ = 11.34837	$a_{\overline{14|}}$ = 12.10625	$a_{\overline{15|}}$ = 12.84926
$a_{\overline{16|}}$ = 13.57771	$a_{\overline{17|}}$ = 14.29187	$a_{\overline{18|}}$ = 14.99203	$a_{\overline{19|}}$ = 15.67846	$a_{\overline{20|}}$ = 16.35143

(2) 次の条件を満たす連生終身保険がある。

(ア) 被保険者は夫 (x)、妻 (y)、子 (z) の 3 人
(イ) 子が死亡した場合、もしくは夫婦ともに子より先に死亡した場合この保険は消滅する。
(ウ) 夫が妻より先に死亡した場合、保険金 1 を期末に支払う。
(エ) 夫が子より先に死亡した場合、保険金 1 を期末に支払う。
(オ) 妻が夫より先に死亡した場合、保険金 0.5 を期末に支払う
(カ) 妻が子より先に死亡した場合、保険金 0.5 を期末に支払う。
(キ) 子が夫または妻(もしくは両者)より先に死亡した場合、保険金 0.1 を期末に支払う。
(ク) 保険料は夫の生存中は払い込まれ、死亡後は免除される。
(ケ) (ウ)から(キ)の複数の条件に該当した場合は保険金を重複して支払う。
(コ) 被保険者の同時死亡はないものとする。

このとき、この保険の年払平準純保険料(終身払)を P とすると

$$P = \frac{2A_{\overset{1}{x}yz} + 0.5A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + 0.1 \cdot \left(\boxed{\quad ⑪ \quad} \right) + \boxed{\quad ⑫ \quad}}{\boxed{\quad ⑬ \quad}}$$

と書ける。上記空欄に当てはまる最も適当な式を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。

問題 **4.** 次の各問について、最も適当な数値または最も簡潔な算式を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。 (15 点)

x 歳加入、保険料年払全期払込、保険期間 n 年の生存保険で、満期まで生存すれば保険金 1 を支払い、満期までに死亡すればその保険年度末に保険金 m と責任準備金を加えた額を支払う。いま、予定利率を i とし、t 年度始における死亡率が $q_{x+t-1} = 0.002\,(1+i)^{t-1}\,(1 \leqq t \leqq n)$ と表せるとき、以下の問いに答えよ。

(1) この保険の t 年度始における危険保険料 P_t^r を求めよ。なお、解答にあたっては生命表に関する記号 (l_x , d_x) 及び生命関数 (p_x , q_x) を用いずに表すこと。

(2) この保険の年払純保険料を求めよ。なお、解答にあたっては生命表に関する記号 (l_x , d_x) 及び生命関数 (p_x , q_x)、Σ 記号を用いずに表すこと。

(3) $i = 0.02$, $m = 15$, $n = 20$ のとき、この保険の危険保険料と貯蓄保険料の大小関係について調べ、以下の (ア) ～ (オ) の中から最も適切な記号を選択せよ。
また、(ウ) , (エ) を選択した場合は空欄に入る整数を求めよ。
なお、計算過程のない答案は採点の対象としない。

(ア) 危険保険料が貯蓄保険料を常に上回る。
(イ) 貯蓄保険料が危険保険料を常に上回る。
(ウ) 初年度以降、しばらくは貯蓄保険料が危険保険料を上回るものの、$\boxed{}$ 年度始の保険料から危険保険料が貯蓄保険料を上回って推移する。
(エ) 初年度以降、しばらくは危険保険料が貯蓄保険料を上回るものの、$\boxed{}$ 年度始の保険料から貯蓄保険料が危険保険料を上回って推移する。
(オ) 上記以外

なお、上記 (1) ～ (3) の解答にあたって必要ならば、以下の記号・数値を用いよ。

$v = \dfrac{1}{1+i}$, $a_{\overline{20}|} = 16.35143$, $\ddot{a}_{\overline{20}|} = 16.67846$

$v = 0.98039$	$v^2 = 0.96117$	$v^3 = 0.94232$	$v^4 = 0.92385$	$v^5 = 0.90573$
$v^6 = 0.88797$	$v^7 = 0.87056$	$v^8 = 0.85349$	$v^9 = 0.83676$	$v^{10} = 0.82035$
$v^{11} = 0.80426$	$v^{12} = 0.78849$	$v^{13} = 0.77303$	$v^{14} = 0.75788$	$v^{15} = 0.74301$
$v^{16} = 0.72845$	$v^{17} = 0.71416$	$v^{18} = 0.70016$	$v^{19} = 0.68643$	$v^{20} = 0.67297$

問題 5. 次の各問について最も簡潔な算式を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。　(15 点)

次の給付を行なうx歳加入、保険期間n年の就業不能保険を考える。

(ア) 加入者(就業者)が満期まで、就業のまま生存した場合、保険金Sを支払う。
(イ) 加入者が保険期間中に就業のまま死亡した場合、その保険年度末に既に払い込んだ保険料の累計額を一時金として支払う。
(ウ) 加入者が保険期間中に就業不能となった場合、生死にかかわらず、その保険年度末に給付金Hを支払う。
(エ) 加入者が保険期間中に就業不能となった場合、その保険年度末から満期まで毎年度末(満期時を含む。)に生存している限り、年金Kを支払う。

保険料は年払とし、保険期間中に加入者が就業している限り払い込むものとする。
なお、就業不能者でない者は就業者であることとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

(1) この保険の年払平準純保険料P、第t保険年度末の就業者の責任準備金${}_tV$および就業不能者の責任準備金${}_t\tilde{V}$(第t保険年度末に支払われる給付金の支払後・年金の支払前)を求めよ。

なお、解答にあたって必要ならば、責任準備金の算式中、Pを用いよ。

(2) ${}_tV$を${}_{t+1}V$と${}_{t+1}\tilde{V}$を用いて、再帰式で表せ。

以上

生 保 数 理 （解答例）

問題 1.

(1)	(A)	(2)	12	(3)	(B),(F)		
(4)	(D)	(5)	(E)	(6)	(A),(B),(C),(D)	(7)	(H)

(1) ${}_t p_x \mu_{x+t} = -\dfrac{1}{l_x} \cdot \dfrac{dl_{x+t}}{dt} = a \cdot e^{bt}$ であるから、 $l_{x+t} = -l_x\left(k + \dfrac{a}{b}e^{bt}\right)$ （k は定数）

$t=0$ を代入すると、$k + \dfrac{a}{b} = -1 \quad \therefore k = -\dfrac{a}{b} - 1$

従って、$l_{x+t} = l_x + \dfrac{a}{b}l_x - \dfrac{a}{b}l_x e^{bt}$

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}dt = l_x + \frac{a}{b}l_x - \frac{a}{b^2}\left[l_x e^{bt}\right]_0^1 = l_x + \frac{a}{b}l_x - \frac{a}{b^2}\left(l_x e^b - l_x\right) = l_x \cdot \left\{1 + \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2}\left(e^b - 1\right)\right\}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x - l_x \cdot \left(1 + \frac{a}{b} - \frac{a}{b}e^b\right) = l_x \cdot \frac{a}{b}\left(e^b - 1\right)$$

$$\therefore m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{\dfrac{a}{b}\left(e^b - 1\right)}{1 + \dfrac{a}{b} - \dfrac{a}{b^2}\left(e^b - 1\right)}$$

解答：(A)

(2) 元利均等返済による毎回の返済額は $\dfrac{10{,}000{,}000}{a_{\overline{n|}}}(=650{,}514)$、

元金均等返済による t 回目の返済額は $10{,}000{,}000 \cdot \left\{\dfrac{1}{n} + (1 - \dfrac{t-1}{n}) \cdot i\right\}$ となる。

そこで、$\dfrac{10{,}000{,}000}{a_{\overline{n|}}} > 10{,}000{,}000 \cdot \left\{\dfrac{1}{n} + (1 - \dfrac{t-1}{n}) \cdot i\right\}$ となる t を求めると、

$$t > n + 1 - (\frac{n}{a_{\overline{n|}}} - 1) \cdot \frac{1}{i} = 30 + 1 - (\frac{30}{15.37245} - 1) \cdot \frac{1}{0.05} = 11.9691$$

元金均等返済による返済額は、返済回数 t とともに減少するため、12 回目以降は元金均等返済による返済額が元利金等返済による返済額を下回る。実際に元金均等返済による 11 回目および 12 回目の返済額を確認すると、

第 11 年度：666,667

第 12 年度：650,000

となっており、12 回目から下回ることがわかる。 解答： $\boxed{12}$ 回目

(3) μ_x は死力であり、明らかに正。また、$\mu_x > 1$ となることがあるため(B)は正しい。

また、$l_x q_x = \int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}dt$ であり、$l_{x+t}\mu_{x+t}$ が増加・減少に従って $q_x > \mu_x$、$q_x < \mu_x$ である。

一方、$l_x \mu_x = -\frac{dl_x}{dx}$ だから $l_x \mu_x$ の増加・減少は l_x 曲線の凹凸により判定される。

従って $q_x > \mu_x$ となることも、$q_x < \mu_x$ となることもある。よって、(F)は正しい。

解答:**(B)、(F)**

(4) 65歳以上の人々がもらう年金額を1とすると、20歳以上59歳以下の人々の1人あたりが負担する金額は、$\frac{T_{65}}{\sum_{20}^{59} l_k}$ である。

また、出生数が減少し始めてから60年後の20歳以上59歳以下の人々の1人あたりが負担する金額は、$\frac{T_{65}}{\sum_{20}^{59} 0.98^{60-k}\cdot l_k}$ であることから、

求める値を A とすると、$A = \frac{\sum_{20}^{59} l_k}{\sum_{20}^{59} 0.98^{60-k}\cdot l_k}$ である。

ここで、$l_x = K\cdot(100-x)$ (K は定数)となることから、

$$A = \frac{\sum_{k=20}^{59} K\cdot(100-k)}{\sum_{k=20}^{59} 0.98^{60-k}\cdot K\cdot(100-k)} = \frac{\sum_{k=20}^{59}(100-k)}{\sum_{k=20}^{59} 0.98^{60-k}\cdot(100-k)}$$

ここで $0.98 = r$ とし、$B = \sum_{k=20}^{59}(100-k)r^{60-k} = 80\cdot r^{40} + 79\cdot r^{39} + \cdots + 41\cdot r$ とすると、

$B = 40(r + r^2 + \cdots + r^{40}) + (r + 2r^2 + \cdots + 40r^{40})$

$C = r + 2r^2 + \cdots + 40r^{40}$ とすると、$(1-r)C = r + r^2 + \cdots + r^{40} - 40r^{41}$ より

$$C = \frac{1-r^{40}}{(1-r)^2}r - \frac{40r^{41}}{1-r}$$

ゆえに

$$B = 40\frac{1-r^{40}}{1-r}r + \frac{1-r^{40}}{(1-r)^2}r - \frac{40r^{41}}{1-r}$$

$r = 0.98$ より、$B = 1{,}570.8884\cdots$。よって $A = 2420/1570.8884 = 1.540\cdots$。

解答:**(D)**

(5) x 歳の会社員数をl_x^{aa}、x 歳の自己都合退職者数をl_x^{ii}、x 歳と$x+1$ 歳の間における会社員の死亡者数をd_x^{aa}、x 歳と$x+1$ 歳の間における自己都合退職者の死亡者数をd_x^{ii}、x 歳と$x+1$ 歳の間において会社員が自己都合退職者となる数をi_xとおくと、

$$l_x^{aa}-d_x^{aa}-i_x=l_{x+1}^{aa}\Leftrightarrow l_x^{aa}-l_{x+1}^{aa}=d_x^{aa}+i_x \quad \cdots\cdots\cdots①$$

$$l_x^{ii}-d_x^{ii}+i_x=l_{x+1}^{ii}\Leftrightarrow l_x^{ii}-l_{x+1}^{ii}=d_x^{ii}-i_x \quad \cdots\cdots\cdots②$$

が成り立つ。さらに問題の条件により、

$$\frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}}=\frac{1}{468}\Leftrightarrow l_x^{aa}=468\cdot d_x^{aa} \quad \cdots\cdots\cdots③$$

$$\frac{d_x^{aa}+d_x^{ii}}{\left(\dfrac{l_x^{aa}+l_x^{ii}+l_{x+1}^{aa}+l_{x+1}^{ii}}{2}\right)}=\frac{1}{450}\Leftrightarrow l_x^{aa}+l_{x+1}^{aa}+l_x^{ii}+l_{x+1}^{ii}=900\cdot(d_x^{aa}+d_x^{ii}) \cdots\cdots\cdots④$$

$$\frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}+\frac{1}{2}\cdot i_x}=\frac{1}{436}\Leftrightarrow l_x^{ii}+\frac{1}{2}\cdot i_x=436\cdot d_x^{ii} \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\frac{l_x^{aa}+l_{x+1}^{aa}}{2}=26{,}274\Leftrightarrow l_x^{aa}+l_{x+1}^{aa}=52{,}548 \quad \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$\frac{l_x^{ii}+l_{x+1}^{ii}}{2}=5{,}226\Leftrightarrow l_x^{ii}+l_{x+1}^{ii}=10{,}452 \quad \cdots\cdots\cdots⑦$$

①～⑦を解いて、各々の数を求める。

④に⑥・⑦を代入して、$63{,}000=900\cdot(d_x^{aa}+d_x^{ii})\Leftrightarrow d_x^{aa}+d_x^{ii}=70$ ………④’

②・⑦より、$2l_x^{ii}=d_x^{ii}-i_x+10{,}452\Leftrightarrow l_x^{ii}+\frac{1}{2}\cdot i_x=\frac{1}{2}d_x^{ii}+5{,}226$

これと⑤を解くと、$436\cdot d_x^{ii}=\frac{1}{2}d_x^{ii}+5{,}226\Leftrightarrow d_x^{ii}=12$

これを④’に代入して$d_x^{aa}=58$

これを③に代入して$l_x^{aa}=468\times 58=27{,}144$

これを⑥に代入して$l_{x+1}^{aa}=25{,}404$

上記と①より、$i_x=l_x^{aa}-l_{x+1}^{aa}-d_x^{aa}=27{,}144-25{,}404-58=1{,}682$

上記と⑤より、$l_x^{ii}=436\cdot d_x^{ii}-\frac{1}{2}\cdot i_x=436\times 12-\frac{1{,}682}{2}=4{,}391$

これと⑦より、$l_{x+1}^{ii}=6{,}061$

よって、x 歳の会社員の絶対死亡率は、

$$\frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}-\frac{i_x}{2}}=\frac{58}{27{,}144-\frac{1{,}682}{2}}=\frac{58}{26{,}303}=0.0022050716\cdots\fallingdotseq 0.00220507$$

解答:(E)

(6) 二見隆　生命保険数学(上)P.212～215を参照。

解答:(A)、(B)、(C)、(D)

(7) 就業者の死力を$\mu_1(x)$、就業不能の瞬間発生率を$\mu_2(x)$、就業不能者の死力を$\mu_3(x)$とする。

$$\mu_1(x+t)+\mu_2(x+t)=-\frac{d}{dt}\log_t p_x^{aa}=-\frac{d}{dt}\log e^{-0.008t}=0.008$$

$$\mu_3(x+t)=-\frac{d}{dt}\log_t p_x^{i}=-\frac{d}{dt}\log e^{-0.006t}=0.006$$

題意より、$\mu_3(x+t)=1.5\mu_1(x+t)$　であるから、$\mu_1(x+t)=0.004$、$\mu_2(x+t)=0.004$となる。

$$_tp_x^{ai}=\int_0^t {}_sp_x^{aa}\cdot\mu_2(x+s)_{t-s}p_{x+s}^{i}ds=\int_0^t e^{-0.008s}\cdot 0.004\cdot e^{-0.006(t-s)}ds$$

$$=0.004e^{-0.006t}\int_0^t e^{-0.002s}ds=0.004e^{-0.006t}\cdot\frac{1}{0.002}\left(1-e^{-0.002t}\right)$$

$$=-2e^{-0.008t}+2e^{-0.006t}=-2{}_tp_x^{aa}+2{}_tp_x^{i}$$

従って、$(X,Y)=(-2,2)$　　解答:(H)

問題 2.

(1)	(G)	(2)	(D)	(3)	(G)

(1) 年払営業保険料は、$P=\dfrac{A_{x:\overline{n}|}+\alpha+\gamma\ddot{a}_{x:\overline{m}|}+\gamma'\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\right)}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$

$$=\frac{\dfrac{M_{40}-M_{60}+D_{60}}{D_{40}}+\alpha+\gamma\dfrac{N_{40}-N_{50}}{D_{40}}+\gamma'\left(\dfrac{N_{40}-N_{60}}{D_{40}}-\dfrac{N_{40}-N_{50}}{D_{40}}\right)}{(1-\beta)\dfrac{N_{40}-N_{50}}{D_{40}}}$$

$$=\frac{\dfrac{0.27190-0.23877+0.33473}{0.50545}+0.025+0.0024\dfrac{14.38845-9.72766}{0.50545}+0.002\left(\dfrac{9.72766-5.91219}{0.50545}\right)}{(1-0.03)\dfrac{14.38845-9.72766}{0.50545}}$$

$$=\frac{0.72779+0.025+0.02213+0.01510}{8.94443}=0.08833$$

解答:(G)

(2) 10 年チルメル式責任準備金(解約返戻金)は、$W={}_{8}V_{40:\overline{20}|}-\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}\ddot{a}_{48:\overline{2}|}$

$$=\frac{M_{48}-M_{60}+D_{60}}{D_{48}}-\frac{M_{40}-M_{60}+D_{60}}{N_{40}-N_{50}}\frac{N_{48}-N_{50}}{D_{48}}-\alpha\frac{D_{40}}{N_{40}-N_{50}}\frac{N_{48}-N_{50}}{D_{48}}$$

$$=\frac{0.26399-0.23877+0.33473}{0.43591}-\frac{0.27190-0.23877+0.33473}{14.38845-9.72766}\times\frac{10.59105-9.72766}{0.43591}$$

$$-0.025\frac{0.50545}{14.38845-9.72766}\times\frac{10.59105-9.72766}{0.43591}$$

$$=0.82574-0.07893\times1.98066-0.025\times0.10845\times1.98066=0.66404$$

解答:(D)

(3) 払済保険金額は、

$$S=\frac{W-P}{A_{48:\overline{12}|}+\gamma\ddot{a}_{48:\overline{12}|}}=\frac{W-P}{\dfrac{M_{48}-M_{60}+D_{60}}{D_{48}}+0.002\dfrac{N_{48}-N_{60}}{D_{48}}}$$

$$=\frac{0.66404-0.08833}{\dfrac{0.26399-0.23877+0.33473}{0.43591}+0.002\dfrac{10.59105-5.91219}{0.43591}}$$

$$=\frac{0.57571}{0.82574+0.02147}=0.680$$

解答:(G)

問題 3.

(1) (ア) $A^{1}_{30:\overline{20|}} = \dfrac{1}{70}(v + v^2 + \cdots + v^{20}) = \dfrac{a_{\overline{20|}}}{70}$

$$\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = \frac{1}{70}(70 + 69v + 68v^2 + \cdots + 51v^{19})$$

ここで、

$$\begin{aligned} Y &= 70 + 69v + 68v^2 + \cdots + 51v^{19} \\ vY &= \quad 70v + 69v^2 + \cdots + 52v^{19} + 51v^{20} \\ \hline (1-v)Y &= 70 - v - v^2 - \cdots - v^{19} - 51v^{20} \\ &= 70 - (v + v^2 + \cdots + v^{19} + v^{20}) - 50v^{20} \\ &= 70 - 50v^{20} - a_{\overline{20|}} \end{aligned}$$

$$\therefore Y = \frac{1}{1-v}(70 - 50v^{20} - a_{\overline{20|}})$$

よって、$\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = \dfrac{1}{70(1-v)}(70 - 50v^{20} - a_{\overline{20|}})$ であるから、

$$P^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{(1-v)\cdot a_{\overline{20|}}}{\boxed{①70} - \boxed{②50}\, v^{\boxed{③20}} - a_{\overline{20|}}}$$

(イ) (ア)と同様に考えて、

$$ {}_tV^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{a_{\overline{20-t|}}}{\boxed{④70-t}} - P\cdot\frac{\boxed{⑤70-t} - \boxed{⑥50}\cdot v^{\boxed{⑦20-t}} - a_{\overline{20-t|}}}{(\boxed{⑧70-t})(1-v)}$$

(ウ) $i = 0.02$ のとき、$P^{1}_{30:\overline{20|}} = \dfrac{0.02 \div 1.02 \cdot 16.35143}{70 - 50\cdot 0.67297 - 16.35143} \fallingdotseq \dfrac{0.32062}{20} = 0.016031$

自然保険料は $v\cdot\dfrac{1}{70-t}$ であるから、単調増加であることが分かる。よって、

自然保険料が $P^{1}_{30:\overline{20|}}$ を上回る条件を求めると、

$$v\cdot\frac{1}{70-t} > 0.016031 \Leftrightarrow \frac{1}{70-t} > 0.01635162 \Leftrightarrow 70 - t < 61.162\cdots \Leftrightarrow t > 8.837\cdots$$

よって契約後 $\boxed{⑨\ 9}$ 年経過時点の保険料から自然保険料が $P^{1}_{30:\overline{20|}}$ を上回る。

次に責任準備金が最大となる時期を求める。この保険は定期保険で初年度始の責任準備金及び満期の責任準備金はともにゼロである。また、「責任準備金がある年度までは単調に増加し、以後単調に減少する」こと、及び、「自然保険料は単調増加で、かつ 9 年経過時までは $P^{1}_{30:\overline{20|}}$ が自然保険料を上回って推移する」ことから、それまでは差額を保険会社が留保・運用して、以後留保分を取り崩して保険金支払いに充てていくことが分かる。

したがって、責任準備金が最大となるのは 9 年経過時以降である。

$$ {}_{t}V^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{a_{\overline{20-t|}}}{70-t} - P \cdot \frac{(70-t) - 50v^{20-t} - a_{\overline{20-t|}}}{(70-t)(1-v)} $$

であり、上式に t=9,10,…を順に代入していくと、$1-v = 1-\dfrac{1}{1.02} = \dfrac{0.02}{1.02} = \dfrac{1}{51}$ より、

$$ {}_{9}V^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{a_{\overline{11|}}}{61} - P \cdot \frac{51 \cdot (61 - 50v^{11} - a_{\overline{11|}})}{61} = \frac{1}{61}\{(1+51P) \cdot a_{\overline{11|}} - 51P(61 - 50v^{11})\} $$

$$ = \frac{1}{61}\{1.817581 \cdot 9.78685 - 0.817581(61 - 50 \cdot 0.80426)\} = 0.0130055\cdots $$

$$ {}_{10}V^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{1}{60}\{1.817581 \cdot 8.98259 - 0.817581(60 - 50 \cdot 0.82035)\} = 0.0134475\cdots $$

$$ {}_{11}V^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{1}{59}\{1.817581 \cdot 8.16224 - 0.817581(59 - 50 \cdot 0.83676)\} = 0.0136306\cdots $$

$$ {}_{12}V^{1}_{30:\overline{20|}} = \frac{1}{58}\{1.817581 \cdot 7.32548 - 0.817581(58 - 50 \cdot 0.85349)\} = 0.0135313\cdots $$

よって、責任準備金が最大となるのは契約後 $\boxed{⑩\ 11}$ 年経過時点である。

(2) この保険の給付を死亡する順番に考えると

①夫→妻→子の順に死亡する場合

夫死亡時:保険金 2、妻死亡時:保険金 0.5 を支払い保険は消滅

②夫→子→妻の順に死亡する場合

夫死亡時:保険金 2、子死亡時:保険金 0.1 を支払い保険は消滅

③妻→夫→子の順に死亡する場合

妻死亡時:保険金 1、夫死亡時:保険金 1 を支払い保険は消滅

④妻→子→夫の順に死亡する場合

妻死亡時:保険金 1、子死亡時:保険金 0.1 を支払い保険は消滅

⑤子→夫→妻の順に死亡する場合

子死亡時:保険金 0.1 を支払い保険は消滅

⑥子→妻→夫の順に死亡する場合

子死亡時:保険金 0.1 を支払い保険は消滅

よって、求める給付現価は、

$$2A_{\overset{1}{x}yz}+A_{x\overset{1}{y}z}+0.1A_{xy\overset{1}{z}}+0.5A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}+0.1A_{\underset{1}{x}y\overset{2}{z}}+A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z}+0.1A_{x\underset{1}{y}\overset{2}{z}}$$

保険料は夫と子の共存中払い込まれるから、求める保険料を P とすると収入現価は、$P\ddot{a}_{xz}$。ゆえに求める年払平準純保険料は、

$$P=\frac{2A_{\overset{1}{x}yz}+0.5A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}+0.1\left(\boxed{⑪A_{xy\overset{1}{z}}+A_{\underset{1}{x}y\overset{2}{z}}+A_{x\underset{1}{y}\overset{2}{z}}}\right)+\left(\boxed{⑫A_{x\overset{1}{y}z}+A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z}}\right)}{\boxed{⑬\ddot{a}_{xz}}}$$

(注) 上記解答例と表現が異なる場合でも、内容により正否を判断した。

問題 4.

(1) ファクラーの再帰式より、

$$ {}_{t-1}V + P - vq_{x+t-1}(m + {}_tV) = v(1 - q_{x+t-1}){}_tV \ (1 \leqq t \leqq n) $$

$$ \therefore P = (v \cdot {}_tV - {}_{t-1}V) + vq_{x+t-1}m \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① $$

右辺第 1 項が貯蓄保険料、第 2 項が危険保険料となる。

$q_{x+t-1} = 0.002 \cdot (1+i)^{t-1}$ を代入すると危険保険料 P_t^r は、

$$ P_t^r = v \cdot 0.002 \cdot (1+i)^{t-1} \cdot m = \boxed{0.002 \cdot (1+i)^{t-2} \cdot m} $$

(2) ①に P_t^r を代入すると、

$$ P = (v \cdot {}_tV - {}_{t-1}V) + 0.002 \cdot (1+i)^{t-2} \cdot m $$

両辺に v^{t-1} を乗じると、

$$ v^{t-1}P = (v^t \cdot {}_tV - v^{t-1} \cdot {}_{t-1}V) + 0.002 \cdot v \cdot m $$

$t = 1, 2, \cdots, n$ とし、辺々を加えると、

$$ \sum_{t=1}^{n} v^{t-1}P = (v^n \cdot {}_nV - v^0 \cdot {}_0V) + 0.002 \cdot \sum_{t=1}^{n} v \cdot m $$

ここで、${}_nV = 1$, ${}_0V = 0$ であるから、$P = \boxed{\dfrac{v^n + 0.002mnv}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}}$

(3) $i = 0.02$, $m = 15$, $n = 20$ を上記式に代入する。

$$ P = \frac{v^{20} + 0.002 \cdot 15 \cdot 20 \cdot v}{\ddot{a}_{\overline{20|}}} = \frac{0.67297 + 0.6 \cdot 0.98039}{16.67846} \fallingdotseq 0.0756187 $$

$$ P_t^r = 0.002 \cdot (1+0.02)^{t-2} \cdot 15 = 0.03 \cdot 1.02^{t-2} \ (1 \leqq t \leqq 20) $$

よって危険保険料 P_t^r は t に対し単調増加であることが分かる。一方、貯蓄保険料は $P - P_t^r$ と表せ、危険保険料とは逆に t に対し単調減少となる。

したがって、危険保険料が貯蓄保険料を上回る条件は $P_t^r > \dfrac{P}{2}$ となればよいから、

$$ 0.03 \cdot 1.02^{t-2} > \frac{P}{2} \fallingdotseq 0.037809 \Leftrightarrow 1.02^{t-2} > 1.2603 $$

1.02 のべき乗を求めていくと、$1.02^{11} = 1.24337\cdots$, $1.02^{12} = 1.26824\cdots$

よって、条件を満たす最小の t は $t-2=12 \Leftrightarrow t=14$ となる。

解答:(ウ)で、空欄に入る整数は 14

(注) 上記解答例と表現が異なる場合でも、内容により正否を判断した。

問題 5.

(1) まずPを求める。

加入時における(ア)の給付現価は、

$$S \times \frac{D_{x+n}^{aa}}{D_x^{aa}} \quad \cdot\cdot ①$$

(イ)の給付現価は、

$$P \times (IA)_{x:\overline{n}|}^{1\ aa} \left(= P \times \frac{R_x^{aa} - R_{x+n}^{aa} - nM_{x+n}^{aa}}{D_x^{aa}} \right) \quad \cdot\cdot ②$$

(ただし、$R_y^{aa} = \sum_{t=0}^{\omega-y} M_{y+t}^{aa}$ とする。(以下、同じ。ここで、ωは、死亡・就業不能脱退残存表の就業者の最終年齢とし、$l_\omega^{aa} = 0$とする。))

(ウ)の給付現価は、

$$H \times \frac{M_x^{(i)} - M_{x+n}^{(i)}}{D_x^{aa}} \quad \cdot\cdot ③$$

(エ)の給付現価は、

$$K \times a_{x:\overline{n}|}^{ai} \quad \cdot\cdot ④$$

一方で、保険料の収入現価は、

$$P \times \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa} \quad \cdot\cdot ⑤$$

収支相等の原則により、①+②+③+④=⑤となるから、これにより、

$$P = \frac{S \times \frac{D_{x+n}^{aa}}{D_x^{aa}} + H \times \frac{M_x^{(i)} - M_{x+n}^{(i)}}{D_x^{aa}} + K \times a_{x:\overline{n}|}^{ai}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa} - (IA)_{x:\overline{n}|}^{1\ aa}}$$

次に、${}_tV$を将来法によって求める。

第t保険年度末における(ア)の給付現価は、

$$S \times \frac{D_{x+n}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} \quad \cdot\cdot ⑥$$

(イ)の給付現価は、

$$(t+1)P \times \frac{C_{x+t}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} + (t+2)P \times \frac{C_{x+t+1}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} + \cdots + nP \times \frac{C_{x+n-1}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}}$$

$$= tP \times \frac{M_{x+t}^{aa} - M_{x+n}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} + P \times \frac{R_{x+t}^{aa} - R_{x+n}^{aa} - (n-t)M_{x+n}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}}$$

$$= P \times \frac{R_{x+t}^{aa} - R_{x+n}^{aa} + tM_{x+t}^{aa} - nM_{x+n}^{aa}}{D_{x+t}^{aa}} \quad \cdot\cdot ⑦$$

(ウ)の給付現価は、

$$H\times\frac{M^{(i)}_{x+t}-M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}\quad\cdot\cdot⑧$$

（エ）の給付現価は、

$$K\times a^{ai}_{x+t:\overline{n-t}|}\quad\cdot\cdot⑨$$

一方、第t保険年度末における、残存保険期間の保険料収入現価は、

$$P\times\ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t}|}\quad\cdot\cdot⑩$$

よって、⑥+⑦+⑧+⑨−⑩により、

$${}_tV=S\times\frac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}+P\times\frac{R^{aa}_{x+t}-R^{aa}_{x+n}+tM^{aa}_{x+t}-nM^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}+H\times\frac{M^{(i)}_{x+t}-M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}+K\times a^{ai}_{x+t:\overline{n-t}|}-P\times\ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

${}_t\tilde{V}$ については、将来法で考えると、（エ）の給付だけを考慮すればよい。

${}_t\tilde{V}$ が第t保険年度末に支払われる年金を支払う前の責任準備金である点に注意して、

$${}_t\tilde{V}=K\times\ddot{a}^{i}_{x+t:\overline{n-t+1}|}$$

(2) 各給付現価と保険料収入現価について、それぞれ再帰式を導出していく。

まず（ア）について、

$$S\times\frac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}=S\times vp^{aa}_{x+t}\times\frac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}\quad\cdot\cdot⑪$$

と表すことができる。

同様にして、（イ）についても、

$$P\times\frac{R^{aa}_{x+t}-R^{aa}_{x+n}+tM^{aa}_{x+t}-nM^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}$$

$$=P\times\left(\frac{M^{aa}_{x+t}}{D^{aa}_{x+t}}+t\times\frac{C^{aa}_{x+t}}{D^{aa}_{x+t}}-\frac{M^{aa}_{x+t+1}}{D^{aa}_{x+t}}+vp^{aa}_{x+t}\times\frac{R^{aa}_{x+t+1}-R^{aa}_{x+n}+(t+1)M^{aa}_{x+t+1}-nM^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}\right)$$

$$=P\times\left((t+1)\cdot vq^{aa}_{x+t}+vp^{aa}_{x+t}\times\frac{R^{aa}_{x+t+1}-R^{aa}_{x+n}+(t+1)M^{aa}_{x+t+1}-nM^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}\right)\quad\cdot\cdot⑫$$

（ウ）については、

$$H\times\frac{M^{(i)}_{x+t}-M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}=H\times\left(\frac{C^{(i)}_{x+t}}{D^{aa}_{x+t}}+\frac{M^{(i)}_{x+t+1}-M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}\right)=H\times\left(vq^{(i)}_{x+t}+vp^{aa}_{x+t}\times\frac{M^{(i)}_{x+t+1}-M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}\right)\quad\cdot\cdot⑬$$

（エ）については、次のように導出していく。まず、一般に次の 2 つの関係式が成立する。

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|}=\frac{N^{ii}_{x}-N^{ii}_{x+n+1}-D^{ii}_{x}\ddot{a}^{i}_{x:\overline{n+1}|}}{D^{aa}_{x}}$$

$$p^{ai}_{x}=\frac{l^{ii}_{x+1}-l^{ii}_{x}p^{i}_{x}}{l^{aa}_{x}}$$

$a^{ai}_{x:\overline{n}|}$の式でxの代わりに$x+t+1$、nの代わりに$n-t-1$を代入し、p^{ai}_{x}の式でxの代わりに$x+t$を代入することで、

$$a^{ai}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}=\frac{N^{ii}_{x+t+1}-N^{ii}_{x+n+1}-D^{ii}_{x+t+1}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}}{D^{aa}_{x+t+1}}$$

$$p^{ai}_{x+t}=\frac{l^{ii}_{x+t+1}-l^{ii}_{x+t}p^{i}_{x+t}}{l^{aa}_{x+t}}$$ を得る。これらをもとに、次の計算を行なう。

$$vp^{ai}_{x+t}\times\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}+vp^{aa}_{x+t}\times a^{ai}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$$

$$=v\times\frac{l^{ii}_{x+t+1}-l^{ii}_{x+t}p^{i}_{x+t}}{l^{aa}_{x+t}}\times\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}+v\times\frac{l^{aa}_{x+t+1}}{l^{aa}_{x+t}}\times\frac{N^{ii}_{x+t+1}-N^{ii}_{x+n+1}-D^{ii}_{x+t+1}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}}{D^{aa}_{x+t+1}}$$

$$=\frac{D^{ii}_{x+t+1}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}-vD^{ii}_{x+t}p^{i}_{x+t}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}+N^{ii}_{x+t+1}-N^{ii}_{x+n+1}-D^{ii}_{x+t+1}\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}}{D^{aa}_{x+t}}$$

$$=\frac{-D^{ii}_{x+t}\left(\ddot{a}^{i}_{x+t:\overline{n-t+1}|}-1\right)+N^{ii}_{x+t+1}-N^{ii}_{x+n+1}}{D^{aa}_{x+t}}$$

$$=\frac{N^{ii}_{x+t}-N^{ii}_{x+n+1}-D^{ii}_{x+t}\ddot{a}^{i}_{x+t:\overline{n-t+1}|}}{D^{aa}_{x+t}}$$

$$=a^{ai}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

よって、

$$K\times a^{ai}_{x+t:\overline{n-t}|}=K\times\left(vp^{ai}_{x+t}\times\ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}+vp^{aa}_{x+t}\times a^{ai}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\right)$$

$$=vp^{ai}_{x+t}\times{}_{t+1}\tilde{V}+vp^{aa}_{x+t}\times K\times a^{ai}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\quad\cdot\cdot⑭$$

更に、保険料の収入について、

$$P\times\ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t}|}=P+vp^{aa}_{x+t}\times P\times\ddot{a}^{aa}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\quad\cdot\cdot⑮$$

⑪,⑫,⑬,⑭,⑮の 5 つの等式について、左辺同士、右辺同士それぞれ
⑪+⑫+⑬+⑭－⑮を計算すると、

$${}_{t}V=vp^{aa}_{x+t}\times$$
$$\left(S\times\frac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}+P\times\frac{R^{aa}_{x+t+1}-R^{aa}_{x+n}+(t+1)M^{aa}_{x+t+1}-nM^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}+H\times\frac{M^{(i)}_{x+t+1}-M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}+K\times a^{ai}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}-P\ddot{a}^{aa}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}\right)$$
$$+vp^{ai}_{x+t}\times{}_{t+1}\tilde{V}+P(t+1)\times vq^{aa}_{x+t}+H\times vq^{(i)}_{x+t}-P$$

この等式の右辺第 1 項の括弧内は${}_{t+1}V$を表しているから、よって、次の再帰式が得られた。

$${}_{t}V+P=vp^{aa}_{x+t}\times{}_{t+1}V+vp^{ai}_{x+t}\times{}_{t+1}\tilde{V}+P(t+1)\times vq^{aa}_{x+t}+H\times vq^{(i)}_{x+t}$$

（注）上記解答例と表現が異なる場合でも、内容により正否を判断した。