年金数理(問題)

この年金数理の問題における「Trowbridge モデルの年金制度」とは、定年退職者のみに対し、定年年齢 x_r 歳時より単位年金額の終身年金を年 1 回期初に支払う年金制度をいう。

問題1. 次の(1)～(6)については、それぞれ 5 つの選択肢から設問の答えとして正しいものを選んでその記号を、また(7)～(12)については、必要に応じて指示に従った端数処理を行った上で設問の解答のみを、それぞれ解答用紙の所定の欄に記入せよ。(42 点)

(1) x 歳の被保険者数が $l_x = 4a - x \quad (a \leqq x \leqq 3a)$、$a > 0$ で表される定常状態に達した企業年金制度があり、a 歳の人が脱退するまでの平均加入年数は 24 年となっている。ある時点以降、この制度の新規加入者数が半分になってしまった。この時点から a 年後の被保険者の平均年齢は、定常状態であったときに比べ何歳上昇したか。最も近い年齢の記号を選べ。ただし、新規加入者は a 歳に限り、脱退率には変化がないものとする。

(A) 3 歳　(B) 4 歳　(C) 5 歳　(D) 6 歳　(E) 7 歳

(2) 予定利率 i において、t 年度の年金額が t $(1 \leqq t \leqq n)$ である期末払 n 年確定年金現価率が、年金額 1 の期末払 m 年確定年金現価率と等しくなる。この場合の m を予定利率 i と n で表した正しい式の記号を選べ。

(A) $m = \dfrac{\log\left\{\left(n+1+\dfrac{1}{i}\right)\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^n - \dfrac{1}{i}\right\}}{\log\left(\dfrac{1}{1+i}\right)}$

(B) $m = \dfrac{\log\left\{\left(n+1+\dfrac{1}{i}\right)\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n - \dfrac{1}{i}\right\}}{\log\left(\dfrac{1}{1+i}\right)}$

(C) $m = \dfrac{\log\left\{\left(n+1-\dfrac{1}{i}\right)\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^n - \dfrac{1}{i}\right\}}{\log\left(\dfrac{1}{1+i}\right)}$

(D) $m = \dfrac{\log\left\{\left(n+1+\dfrac{1}{i}\right)\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n + \dfrac{1}{i}\right\}}{\log\left(\dfrac{1}{1+i}\right)}$

(E) $m = \dfrac{\log\left\{\left(n+1-\dfrac{1}{i}\right)\left(\dfrac{1}{1+i}\right)^n + \dfrac{1}{i}\right\}}{\log\left(\dfrac{1}{1+i}\right)}$

(3) 年金額を次のように支払う場合、(x) が受け取る年金の現価を表している記号を選べ。

・(x), (y), (z) が共に生存している間は、3 人とも毎年 1/3 の年金額を期末に受け取る。

・1 人が死亡した場合、残りの 2 人の生存中は両者が毎年 1/2 の年金額を期末に受け取る。

・(x), (y), (z) のいずれか 1 人が生存している場合は、毎年 1 の年金額を生存している者が期末に受け取る。

(A) $a_x - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{zx}) - \frac{2}{3}a_{xyz}$　(B) $a_x + \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{zx}) - \frac{2}{3}a_{xyz}$　(C) $a_x + \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{zx}) + \frac{1}{3}a_{xyz}$

(D) $a_x + \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{zx}) - \frac{1}{3}a_{xyz}$　(E) $a_x - \frac{1}{2}(a_{xy} + a_{zx}) + \frac{1}{3}a_{xyz}$

(4) ある年金制度において、ある一定の条件を満たした年金受給者に対しては、A基金より給付を行い、ほかの年金受給者にはB基金より給付を行うものとする。一方、保険料は平準保険料によりA基金に払い込まれ、また、A基金よりB基金に対しては、B基金からの年金給付のための年金現価相当額を保険料として払い込まれるものとする。被保険者および年金受給者がともに定常状態に達した場合のA、B両基金の期初積立金の比(A基金の積立金／B基金の積立金)として正しいものの記号を選べ。なお、A基金に払い込まれる保険料を P、A基金が支払う年金給付を S_A、B基金に払い込まれる保険料を Q、B基金が支払う年金給付を S_B とし、両基金の予定利率は等しく、保険料、年金給付ともに期初払いとする。

(A) $\dfrac{S_A - P - Q}{S_B - Q}$　(B) $\dfrac{S_B - P - Q}{S_A - Q}$　(C) $\dfrac{S_A - P + Q}{S_B - Q}$　(D) $\dfrac{S_B - P + Q}{S_A - Q}$　(E) $\dfrac{S_A - P}{S_B - Q}$

(5) Trowbridgeモデルの年金制度において、定常状態での加入時積立方式における積立金 ${}^{In}F$ と、単位積立方式における積立金 ${}^{U}F$ との差として正しいものの記号を選べ。なお、x_e : 加入年齢、$l_x^{(T)}$: 脱退残存表における x 歳の在職中の被保険者数 とする。

(A) $\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$　(B) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$

(C) $\displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{x - x_e}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$　(D) $\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{x - x_e + 1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$

(E) $\displaystyle\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{x_e + x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$

(6) A社がB社を吸収合併することになった。それぞれの会社の年金制度は以下の関係がある。

- B社の規模(被保険者の総人数・総給与)は、A社の α 倍($0<\alpha<1$)である。
- A社とB社は、被保険者の年齢構成、被保険者期間構成および年齢別給与構成が互いに等しい。
  (即ち、A社とB社は、規模が異なるだけで被保険者の構成割合は互いに等しい。)
- A社およびB社の年金制度に年金受給者(受給待期者を含む)は存在しない。
- 合併後はA社の基礎率を使用し、引き続き加入年齢方式で財政評価することとなるが、A社の年金制度の給付内容を継続した場合には、B社の被保険者に係る責任準備金が合併時のB社の積立金を下回ることとなるため、合併後の年金制度は合併前のA社の給付水準の一律($1+\beta$)倍($0<\beta$)に変更する。

この場合に、合併後の年金制度の過去勤務債務として正しいものの記号を選べ。ただし、合併前の両社の積立金と過去勤務債務は、次のとおりとする。

- 積立金 ・・・・・・・・・・ A社 : F_A 、B社 : F_B
- 過去勤務債務 ・・・ A社 : U_A 、B社 : U_B

(A) $(\alpha-\beta)\cdot U_A+(\alpha+\beta)\cdot F_A-F_B$　　(B) $(1+\alpha-\beta)\cdot U_A+(\alpha-\beta)\cdot F_A-F_B$

(C) $(\alpha+\beta)\cdot(U_A+F_A)-F_B$　　(D) $(1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot U_A+(\alpha+\alpha\beta+\beta)\cdot F_A-F_B$

(E) $(1+\alpha+\beta)\cdot U_A+(\alpha+\beta)\cdot F_A-F_B$

(7) ある年度の年金制度の諸数値が以下のとおりであったとき、この年金制度の予定利率は何%か。小数点以下第 2 位を四捨五入し第 1 位まで求めよ。

・期初責任準備金	:	2,400	・期末責任準備金	:	2,500	・期末積立金	:	1,960
・給付(期末払)	:	500	・保険料(期初払)	:	400			
・利差以外の差損	:	80	・実際運用利回り	:	2.5%			

(8) 過去勤務債務のない定常状態に達した年金制度がある。期初の被保険者に対し給付水準を前期末の一律 1.05 倍とする給付改善を 3 年間毎期初に繰り返す。後発過去勤務債務償却のための特別保険料として給付改善直後の未償却過去勤務債務の 10%を直ちに償却する。予定利率を 4.0%とする時、3 回目の給付改善を行ったときの償却前での未償却過去勤務債務はいくらか。小数点以下第 1 位を四捨五入し整数で求めよ。なお、後発過去勤務債務は、給付改善に伴うもの以外には発生せず、また、年金受給者はいないものとし、当初の責任準備金を 1,000 とする。

(9) 年1回期初払 60 歳支給開始終身年金を、年 1 回期初払 60 歳支給開始 5 年確定年金に変更しようとしている。このとき、60 歳以下の各脱退時年齢における年金現価額が等しくなるように年金額を設定するものとする。ただし、60 歳までの据置期間中に年金受給権者が死亡した場合には、死亡の翌期初から遺族に本人と同額の年金を 5 年間支給することとする。現在 50 歳の人の変更後の年金額は、変更前の年金額の何倍になるか。小数点以下第 2 位を四捨五入し第 1 位まで求めよ。ただし、予定利率は 3.0%とし、3.0%の基数表及び現価率表は次のとおりとする。

x	D_x	N_x	C_x	M_x	n	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$
50	21963.427	436453.828	75.520	9388.923	1	1.00000
‥	………	………	……..	………	2	1.97087
54	19199.434	352823.336	94.596	9055.882	3	2.91347
55	18547.018	333623.902	99.422	8961.286	4	3.82861
‥	………	………	……..	………	5	4.71710
59	16066.285	263214.459	128.696	8524.912		
60	15471.528	247148.174	136.136	8396.216		
61	14886.762	231676.646	145.209	8260.080		
‥	………	………	……..	………		
65	12631.847	175556.309	174.258	7630.502		

(10) 年1回期初払 60 歳支給開始で 10 万円を給付する終身年金がある。今、60 歳時点の年金現価額を変更せずに、年 1 回期初払 60 歳支給開始 5 年保証期間付終身年金に変更したい。さらに、保証期間中の年金額を現行の 1.5 倍に変更した場合、保証期間経過後の年金額は何万円になるか。万円単位で小数点以下第 2 位を四捨五入し第 1 位まで求めよ。なお、予定利率や計算基数等は、(9)と同じものとする。

(11) 生存脱退と死亡脱退を脱退事由とする 2 重脱退残存表を考える。2 重脱退残存表における記号を次のように定義する。

$l_x^{(T)}$: 残存者数　$d_x^{(w)}$: 生存脱退数　$d_x^{(d)}$: 死亡脱退数　$q_x^{(w)}$: 生存脱退率　$q_x^{(d)}$: 死亡脱退率

このとき、$q_x^{(w)}$ は常に 0.07、$q_{50}^{(d)}$ は 0.007、$x \geqq 50$ に対して $d_x^{(d)}$ は一定になるという。この 2 重脱退残存表の最終年齢は何歳か。小数点以下第 1 位を四捨五入し整数で求めよ。ただし、必要ならば次の数値を用いよ。

$\log_{10} 1.1 \fallingdotseq 0.04139$　$\log_{10} 7 \fallingdotseq 0.84510$　$\log_{10} 9.3 \fallingdotseq 0.96848$　$\log_{10} 9.93 \fallingdotseq 0.99695$

(12) 定常人口の下における年金制度(当初積立金:3,000)において、積立の促進を図るため以下の 4 つの過去勤務債務の償却方法を考えた。利差損以外の差損益は発生しない前提において、4 年目が終了した時点での積立金が多い順に所定の解答用紙に 4 つの方法を番号で記入せよ。

(前提)

・責任準備金　: 5,000(予定利率:5.0%)、7,000(予定利率:3.0%)
・保険料の払込時期　: 年 1 回期初払
・給付　: 毎年 500(期末払)
・積立金の運用利回り　: 3.0%

方法	予定利率	過去勤務債務の償却方法
①	3.0%	当初未償却過去勤務債務残高を 10 年間元利均等償却する
②	3.0%	前年度末未償却過去勤務債務残高の一定割合 15%を償却する
③	5.0%	当初未償却過去勤務債務残高を 4 年間元利均等償却する
④	5.0%	前年度末未償却過去勤務債務残高の一定割合 35%を償却する

なお、方法②、④の初年度は、当初未償却過去勤務債務残高の一定割合を償却するものとし、年 1 回期初払年金現価率は、$\ddot{a}_{\overline{10|}}^{(3.0\%)}=8.78611$、$\ddot{a}_{\overline{4|}}^{(5.0\%)}=3.72325$ とする。

問題2. 次の空欄に当てはまる算式を求め、解答用紙の所定欄に記入せよ。(18 点)

財政方式に開放基金方式を採用している場合における標準保険料について考察する。

(前提)

・定年年齢 ： x_r 歳

・保険料の拠出時期 ：「給与×保険料率」を年 1 回期初に拠出

・給付の内容 ：「脱退時給与累計×α」の年 1 回期初払終身年金を、x_r 歳より支給

・l_x $d_x^{(w)}$ p_x $q_x^{(w)}$ D_x $C_x^{(w)}$ など ： 脱退残存表に基づく計算基数等

(但し、$d_x^{(w)}$ には、生存脱退後その年度中に死亡する者を含まないものとし、$C_x^{(w)} = v^{x+1} d_x^{(w)}$ とする。)

・l'_x D'_x $\ddot{a}'_{x_r}$ など ： 生命表に基づく計算基数、年金現価率等

・b_x : x 歳の給与

期初 x 歳の被保険者の給付現価 S_x を、以下のとおり将来および過去の加入期間に分ける。

$$\begin{cases} {}_{x_e \sim x}S_x & : x_e \text{歳} \sim x \text{歳までの過去の加入期間に対応する部分} \\ {}_{x \sim x+1}S_x & : x \text{歳} \sim (x+1) \text{歳までの将来加入期間に対応する部分} \\ {}_{x+1 \sim x_r}S_x & : (x+1) \text{歳} \sim x_r \text{歳までの将来加入期間に対応する部分} \end{cases}$$

とすると、

$${}_{x_e \sim x}S_x = \alpha \cdot (\boxed{\quad ① \quad}) \cdot \ddot{a}'_{x_r} \cdot \frac{\boxed{\quad ② \quad}}{D_x} \quad (= S_{x_{p.s.}} \text{ と表わす})$$

$${}_{x \sim x+1}S_x = \alpha \cdot b_x \cdot \ddot{a}'_{x_r} \cdot \frac{\boxed{\quad ② \quad}}{D_x}$$

となる。ここで、

$$S_{x_{p.s.}} + {}_{x \sim x+1}S_x$$

$$= \alpha \cdot (\boxed{\quad ③ \quad}) \cdot \ddot{a}'_{x_r} \cdot \frac{\boxed{\quad ② \quad}}{D_x}$$

$$=\alpha\cdot(\boxed{③})\cdot\ddot{a}'_{x_r}\cdot(\boxed{④}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}}+vp_x\frac{\boxed{⑤}}{D_{x+1}})$$

$$=\alpha\cdot(\boxed{③})\cdot\ddot{a}'_{x_r}\cdot\boxed{④}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}}\ +\ vp_x\cdot S_{x+1_{p.s.}}$$

となる。これは、仮定として、${}_{x\sim x+1}S_x$ に相当する額を保険料として払い込めば、この 1 年間に脱退した場合に必要になる給付現価および($x+1$)歳時における過去勤務期間分の給付現価を賄うことができるということを示している。さらに、集団が定常状態に達していると仮定すれば、必要な保険料は毎年一定で、

$$保険料\,C=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\boxed{⑥}\cdot{}_{x\sim x+1}S_x$$

と表せる。これは、脱退時における年金受給権のうち、この 1 年間の加入期間に対応する分の現価相当額を積み立てていることになり、単位積立方式の考え方となっている。

問題3. Trowbridge モデルの年金制度において、開放基金方式の 1 人あたり保険料について考察を行う。

(20 点)

(1) 空欄に当てはまる算式を求め、解答用紙の所定欄に記入せよ。

・単位積立方式における x 歳の 1 人の被保険者が 1 年間に払い込む保険料を ${}^{U}P_x$ とすると、

$$ {}^{U}P_x = \left(1 \Big/ \left(\boxed{\quad ① \quad} \right) \right) D_{x_r}\, \ddot{a}_{x_r} / D_x $$

と表される。ここで、x_e : 新規加入年齢とする。

・x 歳の 1 人の被保険者の将来期間に対応する保険料を ${}^{A}P_x = \dfrac{x_r - x}{x_r - x_e} D_{x_r}\, \ddot{a}_{x_r} \Big/ \left(N_x - N_{x_r}\right)$ と定義する。

このとき、${}^{A}P_x$ は、${}^{U}P_x$ を用いて次のように表される。

$$ {}^{A}P_x = \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} \boxed{\quad ② \quad} \right) \Big/ \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) \cdots\cdots (\mathrm{I})式 $$

・開放基金方式における 1 人あたりの保険料 ${}^{OAN}P$ は、次のように表される。

$$ {}^{OAN}P = \left\{ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left(\boxed{\qquad ③ \qquad} \right) D_{x_r}\, \ddot{a}_{x_r} / D_x \cdot l_x + \boxed{\ ④\ } \cdot D_{x_r}\, \ddot{a}_{x_r} / D_{x_e} \cdot l_{x_e} \right\} $$

$$ \Big/ \left\{ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left(N_x - N_{x_r}\right) / D_x \cdot l_x + \boxed{\ ④\ } \cdot \left(N_{x_e} - N_{x_r}\right) / D_{x_e} \cdot l_{x_e} \right\} \cdots\cdots (\mathrm{II})式 $$

・(Ⅱ)式の分子は、${}^{A}P_x$ を用いて以下のように書ける。

$$ (\mathrm{II})式分子 = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \boxed{\qquad ⑤ \qquad} / D_x \cdot l_x + \boxed{\ ④\ } \cdot {}^{A}P_{x_e} \left(N_{x_e} - N_{x_r}\right) / D_{x_e} \cdot l_{x_e} \cdots (\mathrm{III})式 $$

(2) (1)の (Ⅰ)式 および (Ⅲ)式 より、${}^{OAN}P = \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_x \cdot l_x \right) \Big/ \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x \right)$ となることを示せ。

(3) ${}^{OAN}P \leqq {}^{U}P_x$ となる最小の年齢を x_1 ($x_e \leqq x_1 \leqq x_r - 1$)、${}^{OAN}P \leqq {}^{A}P_x$ となる最小の年齢を x_2 ($x_e \leqq x_2 \leqq x_r - 1$) とする。このとき、$x_1$ 、x_2 を使用した x の範囲に応じて ${}^{OAN}P$ 、${}^{A}P_x$ 、${}^{U}P_x$ の大小関係がどのように変化するか示せ。

(注) 実際の試験問題には一部に誤植があったため、訂正して掲載している。
なお、採点にあたっては該当部分((1)④)について受験者全員に配点した。

問題4. 定常状態にある企業の年金制度を考える。(20 点)

≪制度内容≫

・加入時期	年 1 回期初加入。
・給付内容	「脱退時給与×加入から脱退時までの加入期間」で算定される金額に年利率 j で年金支給開始年齢まで複利で付利した額を原資として、利率 i' に基づく年 1 回期初払 n 年確定年金を支給する。
・昇給時期	年 1 回期初昇給。
・脱退時期	年 1 回期末脱退。なお、死亡は発生しないものとする。
・拠出時期	年 1 回期初拠出。(昇給後給与×保険料率)
・財政方式	加入年齢方式(加入年齢 x_e 歳)

解答は以下の記号を用いた計算基数、年金現価率等を用いて表現すること。

- x_e : 加入年齢
- x_r : 定年年齢(年金支給開始年齢)
- i : 予定利率(解答では、$1\div(1+i)=v$ として表現すること)
- b_x : 給与指数(定年時の給与指数は $b_{x_r}=b_{x_r-1}$ とする)
- L_x : x 歳の被保険者数
- B_x : x 歳の 1 人当り給与
- $\ddot{a}_{\overline{n}|}$: 利率 i の期初払 n 年確定年金現価率　$\ddot{a}'_{\overline{n}|}$: 利率 i' の期初払 n 年確定年金現価率

なお、この問題においては、死亡は一切考慮しないこととし、計算基数(D_x、C_x 等)は、生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。

(1) 上記の制度内容に基づく x 歳の被保険者 1 人当たりの給付現価(S_x)と給与現価(G_x)を求めた上で、標準保険料率 P_{x_e} 及び制度全体の責任準備金額 V を求めよ。

(2) 上記の制度内容のうち、給付内容だけが次のように異なる場合について、(1)と同様に x 歳の被保険者 1 人当たりの給付現価(S_x^*)と給与現価(G_x^*)を求めた上で、標準保険料率 $P_{x_e}^*$ 及び制度全体の責任準備金額 V^* を求めよ。

・給付内容 (変更後)	脱退時までの毎期初の給与の γ 倍($\gamma>0$:定数)を年利率 k で年金支給開始年齢まで複利で付利した額の合計額を原資として、年金支給開始年齢より利率 i' に基づく年1回期初払 n 年確定年金を支給する。

(3) k を j と同じ率とした上で、(1)の給付内容と(2)の給付内容での標準保険料率及び責任準備金額が同額となるためには、b_x , γ , j はどのような条件を満たせばよいか求めよ。

年 金 数 理 (解答例)

問題1.

番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
記号	(A)	(B)	(E)	(C)	(B)	(D)

問題1. (1)～(6)の解答選択肢は上のとおりであるが、各問の解説は以下のとおり。

(1) 現時点の平均年齢は

$$\overline{X}=\frac{\int_a^{3a}l_y y dy}{\int_a^{3a}l_y dy}=\frac{11}{6}a$$

一方、a 年後の平均年齢は

$$\overline{X}'=\frac{\frac{1}{2}\int_a^{2a}l_y y dy+\int_{2a}^{3a}l_y y dy}{\frac{1}{2}\int_a^{2a}l_y dy+\int_{2a}^{3a}l_y dy}=2a$$

よって、$\overline{X}'-\overline{X}=2a-\frac{11}{6}a=\frac{1}{6}a$ 歳上昇したことになる。

a 歳加入者の平均加入年数が 24 年なので 平均加入年数$=\frac{1}{l_a}\int_a^{3a}l_y dy=\frac{4}{3}a$

$\therefore a=18$ したがって、3 歳上昇した。・・・正解(A)

(2) $Ia_{\overline{n}|}=(1+1/i)a_{\overline{n}|}-\frac{nv^n}{i}=(1+1/i)\frac{1-v^n}{i}-\frac{nv^n}{i}$ ・・・①

$a_{\overline{m}|}=\frac{1-v^m}{i}$ ・・・②

①＝②より、$v^m=nv^n-\left(1+\frac{1}{i}\right)(1-v^n)+1=\left(n+1+\frac{1}{i}\right)v^n-\frac{1}{i}$

$$m\log v=\log\left\{\left(n+1+\frac{1}{i}\right)v^n-\frac{1}{i}\right\}\quad\therefore\ m=\frac{\log\left\{\left(n+1+\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right)^n-\frac{1}{i}\right\}}{\log\left(\frac{1}{1+i}\right)}$$ ・・・正解(B)

(3) (x)の受け取り分の現価$=\frac{1}{3}a_{xyz}+\frac{1}{2}\left(a_{y|zx}+a_{z|xy}\right)+a_{\overline{yz}|x}$

$=a_x-\frac{1}{2}\left(a_{xy}+a_{zx}\right)+\frac{1}{3}a_{xyz}$ ・・・正解(E)

$\because\ a_{y|zx}=a_{zx}-a_{xyz}\qquad a_{z|xy}=a_{xy}-a_{xyz}\qquad a_{\overline{yz}|x}=a_x-a_{xy}-a_{zx}+a_{xyz}$

(4) 定常状態にあることより、

A基金の積立金(F_A)については、$P+dF_A=S_A+Q$

B基金の積立金（F_B）については、$Q + dF_B = S_B$

これより、$F_A / F_B = \dfrac{S_A - P + Q}{S_B - Q}$となる。･･･正解(C)

(5) $^{In}F = S^P + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$ $\qquad$ $^{U}F = S^P + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \dfrac{x - x_e}{x_r - x_e} \cdot \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$

$$\therefore\ {}^{In}F - {}^{U}F = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$ ･･･正解(B)

(6) A社の責任準備金をV_A、B社の責任準備金をV_Bとする。A社の過去勤務債務U_A'は、給付水準が一律（1＋β）倍されているので、責任準備金も同様に大きくなるので

$$U_A' = V_A \cdot (1+\beta) - F_A = (U_A + F_A)\cdot(1+\beta) - F_A$$

一方、B社の過去勤務債務U_B'は、A社と同様だが、A社の規模のα倍も使って

$$U_B' = V_B \cdot (1+\beta) - F_B = V_A \cdot \alpha \cdot (1+\beta) - F_B = (U_A + F_A)\cdot \alpha \cdot (1+\beta) - F_B$$

よって、$U_A' + U_B'$を行って整理すると、

$$U_A' + U_B' = (1+\alpha)\cdot(1+\beta)\cdot U_A + (\alpha + \alpha\beta + \beta)\cdot F_A - F_B$$ ･･･正解(D)

番号	(7)	(8)	(9)
数値等	5．0％ (小数第1位)	148 (整数)	3．2 倍 (小数第1位)
番号	(10)	(11)	(12)
数値等	7．8 万円 (小数第1位)	83 歳 (整数)	② ＞ ③ ＞ ① ＞ ④ (積立金が多い順)

問題1．(7)～(12)の解答は上のとおりであるが、各問の解説は以下のとおり。

(7) 前年度の積立金をFとすると、(F+400)×1.025－500＝1,960 よって、F=2,000

一方、運用収益は、(F+400)×0.025＝60。従って、当年度不足金は、責任準備金の伸び(2,500-2,400＝100)に対して、資産の伸び(400+60-500=△40)を控除して、100－(△40)＝140 となっている。このうち、80 は利差損以外ということなので、140－80＝60 が利差損となる。求める予定利率をiとすると、(2,000＋400)×(i－0.025)＝60

∴ i＝0.05 ⇒ 解答 5．0％

(8) 1年目の期末(2年目期初)の未償却過去勤務債務は、1,000×0.05×(1－10%)×1.04=46.8

一方、責任準備金は、年金受給者は考えないので、給付改善された比率だけ大きくなる。

よって、2 年目期初の給付改善後・償却前での未償却過去勤務債務は、

1,000×1.05×0.05＋46.8≒99.3。よって、2 年目の期末(3 年目期初)の未償却過去勤務債務は、99.3×(1－10%)×1.04=92.9448。よって、3 年目期初の給付改善後・償却前・未償却過去勤務債務は、1,000×1.05×1.05×0.05＋92.9448＝148.0698 ⇒ 解答 148

(9) 変更前後で年金現価が等しくなるように年金額を設定すればよいので、

変更前年金額を1、変更後の年金額を A とすれば

$$\frac{N_{60}}{D_{50}} = A \times \frac{\left(M_{50} - M_{60} + D_{60}\right) \cdot \ddot{a}_{\overline{5|}}}{D_{50}}$$

∴ A ≒247148.174÷((9388.923－8396.216+15471.528)×4.71710)=3.182‥⇒ 解答 3．2倍

(10) 終身年金の 60 歳時点の現価率: N_{60}/D_{60}

一方、5 年保証期間付終身年金の 60 歳時点の現価率は、$\ddot{a}_{\overline{5|}} + N_{65}/D_{60}$

この第 1 項が保証部分、第 2 項が終身部分なので、保証期間経過後の年金額をAとすると、

$$10 \times N_{60}/D_{60} = 15 \times \ddot{a}_{\overline{5|}} + A \times N_{65}/D_{60}$$

∴A＝(10×247148.174/15471.528－15×4.71710)÷(175556.309/15471.528)=7.842‥

⇒ 解答 7．8万円

(11) $d_x^{(w)} = l_x^{(T)} \cdot q_x^{(w)}$, $d_x^{(d)} = l_x^{(T)} \cdot q_x^{(d)}$ なので、

$$d_x^{(w)} = l_x^{(T)} \cdot q_x^{(w)} = 0.07 \cdot l_x^{(T)},\ d_x^{(d)} = d_{50}^{(d)} = 0.007 \cdot l_{50}^{(T)}, (x \geqq 50)$$

また、$l_{x+1}^{(T)} = l_x^{(T)} - d_x^{(w)} - d_x^{(d)}$ より $l_{51}^{(T)} = l_{50}^{(T)} - d_{50}^{(w)} - d_{50}^{(d)} = \{(1-0.07) - 0.007\} \cdot l_{50}^{(T)}$

…

$$l_{50+m}^{(T)} = \left[(1-0.07)^m - 0.007\left\{1 + (1-0.07) + (1-0.07)^2 + \cdots + (1-0.07)^{m-1}\right\}\right] \cdot l_{50}^{(T)}$$

$l_{50+m}^{(T)} = 0$ なので $\left[(1-0.07)^m - 0.007\dfrac{1-(1-0.07)^m}{1-(1-0.07)}\right] \cdot l_{50}^{(T)} = 0$

これを m について解くと

$$m = \frac{\log_{10} 1/11}{\log_{10} 0.93} = \frac{1 + \log_{10} 1.1}{1 - \log_{10} 9.3} = 33.039\cdots$$

したがって、最終年齢は 50＋33=83 歳 ⇒ 解答 83歳

(12) 定常人口のため、極限方程式($F = V \Rightarrow V \cdot i + C \cdot (1+i) = B$)により標準保険料を予定利率に応じて算定する。

・予定利率 3.0%(①②):(500－7,000×0.03)÷1.03≒282

・予定利率 5.0%(③④):(500－5,000×0.05)÷1.05≒238

また、当初積立金と給付の 4 年後の数値は、共通で以下のとおり。(①③で使用)

・当初積立金・・・$3{,}000\times 1.03^4$=3,377、給付・・・$500\times\dfrac{1.03^4-1}{1.03-1}$=2,092

次に、それぞれの方法についての保険料から積立金を計算する。

①の方法：10 年間元利均等償却年額＝(7,000－3,000)÷8.78611＝455.26・・・455

保険料・・・$(282+455)\times 1.03\times\dfrac{1.03^4-1}{1.03-1}$=3,176 ⇒ 積立金 3,377－2,092＋3,176＝<u>4,461</u>

③の方法：4 年間元利均等償却年額＝(5,000－3,000)÷3.72325＝537.17・・・537

保険料・・・$(238+537)\times 1.03\times\dfrac{1.03^4-1}{1.03-1}$=3,340 ⇒ 積立金 3,377－2,092＋3,340＝<u>4,625</u>

②の方法：1 年後積立金＝(3,000+282+(7,000－3,000)×0.15)×1.03－500＝3,498

2 年後積立金＝(3,498+282+(7,000－3,498)×0.15)×1.03－500＝3,934

3 年後積立金＝(3,934+282+(7,000－3,934)×0.15)×1.03－500＝4,316

4 年後積立金＝(4,316+282+(7,000－4,316)×0.15)×1.03－500＝<u>4,651</u>

④の方法：1 年後積立金＝(3,000+238+(5,000－3,000)×0.35)×1.03－500＝3,556

2 年後積立金＝(3,556+238+(5,000－3,556)×0.35)×1.03－500＝3,928

3 年後積立金＝(3,928+238+(5,000－3,928)×0.35)×1.03－500＝4,177

4 年後積立金＝(4,177+238+(5,000－4,177)×0.35)×1.03－500＝<u>4,344</u>

これを、積立金の多い順に並べる。⇒ 解答 <u>②＞③＞①＞④</u>

問題2. 教科書 P168～P169

番号	①	②	③
算式	$\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z$	$\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)} \dfrac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}$	$\sum_{z=x_e}^{x} b_z$
番号	④	⑤	⑥
算式	$vq_x^{(w)}$	$\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y^{(w)} \dfrac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}$	l_x

問題3.

(1) 教科書 P109～110

番号	①	②	③
算式	$x_r - x_e$	${}^{U}P_y D_y$	$(x_r - x)/(x_r - x_e)$
番号	④	⑤	
算式	v/d	${}^{A}P_x(N_x - N_{x_r})$	

(2) 教科書 P132 第6章練習問題 7

(Ⅲ)式に(Ⅰ)式を代入して整理すると

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}{}^{U}P_yD_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y}\left(N_x-N_{x_r}\right)/D_x\right)l_x+\frac{v}{d}\left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_yD_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y}\left(N_{x_e}-N_{x_r}\right)/D_{x_e}\right)l_{x_e}$$

$$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}{}^{U}P_yD_y}{v^x}+\frac{v}{d}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_yD_y}{v^{x_e}}$$

$$=\left({}^{U}P_{x_e}D_{x_e}+{}^{U}P_{x_e+1}D_{x_e+1}+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}\right)/v^{x_e}$$

$$+\left({}^{U}P_{x_e+1}D_{x_e+1}+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}\right)/v^{x_e+1}$$

$$+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}/v^{x_r-1}$$

$$+\left(v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)\left({}^{U}P_{x_e}D_{x_e}+{}^{U}P_{x_e+1}D_{x_e+1}+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}\right)/v^{x_e}$$

$$={}^{U}P_{x_e}D_{x_e}\left\{\frac{1}{v^{x_e}}+\frac{1}{v^{x_e}}\left(v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)\right\}$$

$$+{}^{U}P_{x_e+1}D_{x_e+1}\left\{\frac{1}{v^{x_e+1}}(v+1)+\frac{1}{v^{x_e+1}}\left(v^2+v^3+\cdot\cdot\cdot\right)\right\}$$

$$+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}\left\{\frac{1}{v^{x_r-1}}\left(v^{x_r-x_e-1}+v^{x_r-x_e-2}+\cdot\cdot\cdot+1\right)+\frac{1}{v^{x_r-1}}\left(v^{x_r-x_e}+v^{x_r-x_e+1}+\cdot\cdot\cdot\right)\right\}$$

$$={}^{U}P_{x_e}D_{x_e}\frac{1}{v^{x_e}}\left(1+v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$$+{}^{U}P_{x_e+1}D_{x_e+1}\frac{1}{v^{x_e+1}}\left(1+v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$$+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}\frac{1}{v^{x_r-1}}\left(1+v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$$={}^{U}P_{x_e}l_{x_e}\left(1+v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)+{}^{U}P_{x_e+1}l_{x_e+1}\left(1+v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$$+\cdot\cdot\cdot+{}^{U}P_{x_r-1}l_{x_r-1}\left(1+v+v^2+\cdot\cdot\cdot\right)$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_yl_y\cdot\frac{1}{1-v}$$

(Ⅱ)式の分母も同様の式展開で

$\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y \cdot \frac{1}{1-v}$ となる。

よって ${}^{OAN}P = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y l_y \cdot \frac{1}{1-v}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y \cdot \frac{1}{1-v}} = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y l_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} l_y}$ となることが示せた。

(3) 教科書 P132 第6章練習問題 8（一部）

${}^{U}P_x = \left(1/(x_r - x_e) \right) D_{x_r} \ddot{a}_{x_r} / D_x$ であるが、この時 D_x は x の単調減少関数なので、${}^{U}P_x$ は x の単調増加関数となる。・・・・・ ①

一方、(Ⅰ)式より ${}^{A}P_x$ は、$x \leqq y \leqq x_r - 1$ における ${}^{U}P_y$ の最小値より大きいので、

${}^{A}P_x > {}^{U}P_x$ ・・・・・ ②（但し、$x \leqq y < x_r - 1$ であり、$x = x_r - 1$ のとき ${}^{A}P_x = {}^{U}P_x$）

また、${}^{A}P_{x+1} = \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y \right) \Big/ \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y \right) = \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y - {}^{U}P_x D_x \right) \Big/ \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x \right)$

$= \left({}^{A}P_x \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - {}^{U}P_x D_x \right) \Big/ \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x \right)$

$$\therefore {}^{A}P_{x+1} - {}^{A}P_x = \frac{\left({}^{A}P_x \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - {}^{U}P_x D_x \right) - \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x \right) {}^{A}P_x}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x} = \frac{\left({}^{A}P_x - {}^{U}P_x \right) D_x}{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y} > 0 \quad (x_e \leqq x < x_r - 1)$$

(∵ ②)

従って、${}^{A}P_x$ は $x_e \leqq x \leqq x_r - 1$ の範囲で x の単調増加関数となる。・・・・・ ③

ここで、${}^{OAN}P$ は(Ⅱ)式、(Ⅲ)式より、${}^{A}P_x$ の加重平均値であり、また、設問(2)より、${}^{U}P_x$ の加重平均値でも表されるので、設問の x_1 、x_2 歳が存在し、①③の単調関数性と②の大小関係を用いると $x_2 < x_1$ であることが分かり、結果として以下のことが言える。

・$x_e \leqq x < x_2$ のとき、${}^{U}P_x < {}^{A}P_x < {}^{OAN}P$

・$x_2 \leqq x < x_1$ のとき、${}^{U}P_x < {}^{OAN}P \leqq {}^{A}P_x$

・$x_1 \leqq x \leqq x_r - 1$ のとき、${}^{OAN}P \leqq {}^{U}P_x \leqq {}^{A}P_x$

問題4.

(1) 財政方式が加入年齢方式なので、x 歳の被保険者1人当たりの給付現価を S_x 、給与現価を G_x とすると、

$$S_x = B_x \cdot \frac{\left\{ \sum_{y=x}^{x_r-1} (y - x_e + 1) b_y \cdot (1+j)^{x_r-y-1} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + (x_r - x_e) b_{x_r-1} \cdot D_{x_r} \right\}}{b_x D_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}$$

$$G_x = B_x \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} b_y D_y}{b_x D_x}$$

したがって、標準保険料率 P_{x_e} は、

$$P_{x_e} = \frac{S_{x_e}}{G_{x_e}} = \frac{\left\{ \sum_{y=x_e}^{x_r-1} (y - x_e + 1) b_y \cdot (1+j)^{x_r-y-1} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + (x_r - x_e) b_{x_r-1} \cdot D_{x_r} \right\} \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y D_y}$$

責任準備金額 V は、 $V = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot (S_x - P_{x_e} \cdot G_x)$

(2) (1)と同様に財政方式が加入年齢方式なので、x 歳の被保険者1人当たりの給付現価を S_x^* 、給与現価を G_x^* とすると、

$$S_x^* = B_x \cdot \frac{\left[\sum_{y=x}^{x_r-1} \left\{ \sum_{z=x_e}^{y} (1+k)^{x_r-z} \cdot b_z \cdot \gamma \right\} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + \sum_{y=x_e}^{x_r-1} (1+k)^{x_r-y} \cdot b_y \cdot \gamma \cdot D_{x_r} \right]}{b_x D_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}$$

$$G_x^* = B_x \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} b_y D_y}{b_x D_x}$$

したがって、標準保険料率 $P_{x_e}^*$ は、

$$P_{x_e}^* = \frac{S_{x_e}^*}{G_{x_e}^*} = \frac{\left[\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \left\{ \sum_{z=x_e}^{y} (1+k)^{x_r-z} \cdot b_z \cdot \gamma \right\} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + \sum_{y=x_e}^{x_r-1} (1+k)^{x_r-y} \cdot b_y \cdot \gamma \cdot D_{x_r} \right] \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y D_y}$$

責任準備金額V^*は、 $V^* = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot (S_x^* - P_{x_e}^* \cdot G_x^*)$

(3) 題意を満たすには、(1)(2)の給付の内容に基づいた、x歳の被保険者1人当たりの給付現価が常に等しくなるような条件を求めればよい。

したがって、任意のxに対して $S_x = S_x^*$ となればよい。

$$\sum_{y=x}^{x_r-1}(y-x_e+1)b_y \cdot (1+j)^{x_r-y-1} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + (x_r - x_e) b_{x_r-1} \cdot D_{x_r} =$$

$$\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\sum_{z=x_e}^{y}(1+j)^{x_r-z} \cdot b_z \cdot \gamma\right\} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + \sum_{y=x_e}^{x_r-1}(1+j)^{x_r-y} \cdot b_y \cdot \gamma \cdot D_{x_r} \quad \cdots①$$

ここで、b_yは次のように変形できるので、①に代入して整理すると

$$b_y = \sum_{z=x_e}^{y} b_z \cdot \frac{b_y}{b_z} \times \frac{1}{y-x_e+1}$$

$$\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\sum_{z=x_e}^{y} b_z \cdot \frac{b_y}{b_z}\right\} \cdot (1+j)^{x_r-y-1} C_y \cdot v^{x_r-y-1} + \sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y \cdot \frac{b_{x_r-1}}{b_y} \cdot D_{xr} =$$

$$\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\sum_{z=x_e}^{y}(1+j)^{x_r-z} \cdot b_z \cdot \gamma\right\} C_y v^{x_r-y-1} + \sum_{y=x_e}^{x_r-1}(1+j)^{x_r-y} \cdot b_y \cdot \gamma \cdot D_{x_r} \quad \cdots②$$

②式が常に成立するためには、

$$\frac{b_y}{b_z} \cdot (1+j)^{x_r-y-1} = (1+j)^{x_r-z} \cdot \gamma \qquad (x_e \leqq z \leqq y \leqq x_r - 1)$$

$$\frac{b_{x_r-1}}{b_y} = (1+j)^{x_r-y} \cdot \gamma \qquad (x_e \leqq y \leqq x_r - 1)$$

が成り立てばよい。これより、

$$\frac{b_y}{b_z} = (1+j)^{y-z} \cdot (1+j)\gamma$$

$$\frac{b_{x_r-1}}{b_y} = (1+j)^{x_r-y-1} \cdot (1+j)\gamma$$

給与指数b_xの伸びが年率jで増加し、$\gamma = \dfrac{1}{1+j}$（>0：定数）となるならば上記の関係式は常に成り立つことになる。

【注】

1. 定常状態であることから、$B_x \dfrac{b_y}{b_x} = B_y \left(x_e \leq y \leq x_r\right)$が成り立つので、(1)(2)の給付現価$S_x \cdot S_x^*$、給与現価$G_x \cdot G_x^*$として、$B_x \dfrac{b_y}{b_x}$の代わりに$B_y$を使用した解答にも配点した。
2. (1)(2)においては、給与1円あたりの給付現価、給与現価（即ち、給付現価率、給与現価率）として$S_x \cdot S_x^*$、$G_x \cdot G_x^*$を求めた上で、責任準備金額算定上ではB_xを乗じた解答にも配点した。