生 保 数 理 （問 題）

問題 1. (48 点)

次の(1)から(8)までの各問について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。また、(5)については問題文中の空欄に当てはまる1つの記号を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) $\mu_x = \dfrac{1}{86-x}$ で、$\ddot{a}_{41:\overline{9}|} = 7.750$ となるとき、$a_{40:\overline{10}|}$ の値に最も近いものは次のどれか。
必要ならば次の数値を使用すること。　$v = 0.9852$　$v^{10} = 0.8617$

(A)	8.12	(B)	8.14	(C)	8.16	(D)	8.18	(E)	8.20
(F)	8.22	(G)	8.24	(H)	8.26	(I)	8.28	(J)	8.30

(2) 保険に加入した者の生存数は、下表のとおり、契約時から 3 年を経過するまでは、選択表に従い、その後、終局表に従うとした場合、($l_{[x]} \to l_{[x]+1} \to l_{[x]+2} \to l_{x+3} \to l_{x+4} \cdots$ という形で進行)、61 歳で保険契約に加入した者の $_{2|}\ddot{a}_{61:\overline{3}|}$ の値に最も近いものは次のどれか。必要ならば次の数値を使用すること。　$v = 0.9852$

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	l_{x+3}	$x+3$
	選択表			終局表	
60	88,487	87,923	87,114	86,078	63
61	87,320	86,763	85,965	84,943	64
62	86,158	85,608	84,821	83,727	65
63	84,985	84,442	83,600	82,436	66

(A)	2.65	(B)	2.67	(C)	2.69	(D)	2.71	(E)	2.73
(F)	2.75	(G)	2.77	(H)	2.79	(I)	2.81	(J)	2.83

(3) ある集団（年齢 20 歳から 22 歳）において加入員は毎年、脱退原因 A と死亡により脱退していくものとする。この時、脱退原因 A の中央脱退率は $m_{20}^{A} = 0.080$ に始まり、1 年増すごとに 0.005 ずつ減少し、$m_{22}^{A} = 0.070$ となる。また、絶対死亡率は $t \geqq 20$ の時、$q_{t+1}^{*} = 1.10 \times q_t^{*}$ ($q_{20}^{*} = 0.001$) に従うとする。この時、$l_{20} = 100{,}000$ とした場合、l_{23} の値に最も近いものは次のうちどれか。なお、脱退の発生は1年を通じて一様に起こるものとし、A 脱退と死亡はそれぞれ独立に発生するものとする。

(A)	79,545	(B)	79,579	(C)	79,613	(D)	79,647	(E)	79,681
(F)	79,715	(G)	79,749	(H)	79,783	(I)	79,817	(J)	79,851

(4) $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}=a$、$\left(I_{\overline{n}|}A\right)_x=b$および$\left(D_{\overline{n}|}A\right)_x=c$の時、$A^{1}_{x:\overline{n}|}$に等しい式は次のうちどれか。

(A) $\dfrac{na-b+(n+1)c}{n+1}$　(B) $\dfrac{na+b-nc}{n}$　(C) $\dfrac{na+b-(n+1)c}{n+1}$　(D) $\dfrac{na+b-nc}{n+1}$　(E) $\dfrac{(n+1)a-b+(n+1)c}{n+1}$

(F) $\dfrac{na-b+nc}{n}$　(G) $\dfrac{(n+1)a-b+nc}{n+1}$　(H) $\dfrac{(n+1)a+b-(n+1)}{n+1}$　(I) $\dfrac{na+b-nc}{n}$　(J) $\dfrac{(n+1)a+b-nc}{n+1}$

(5) 連続払の終身年金現価について、$\bar{a}_x=12.50$、利力と死力は年齢によらず一定の値であり、利力は死力の3倍である。一方、

$$\bar{a}_x=\int_0^{\infty}\boxed{}\cdot{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

と表せることから、$\bar{a}_x$は確率変数$\boxed{}$の平均値とみなすことができる。$\boxed{}$の中に最も適切な1つの記号を用いて埋めよ。また、$\boxed{}$の標準偏差を求めた場合、最も近い値は次のうちどれか。

(A)	3.062	(B)	3.125	(C)	3.536	(D)	3.785	(E)	4.067
(F)	4.167	(G)	4.556	(H)	4.725	(I)	4.975	(J)	5.250

(6) 保険料一時払 保険期間n年 満期保険金額1の生存保険で、期間途中の死亡に対しては責任準備金の4割を即時に支払う保険を考える。この保険の一時払純保険料をThieleの微分方程式を用いて求めた場合、一時払純保険料を表す最も簡潔な式は次のうちどれか。ここで、Thieleの微分方程式とは次の算式をいい、また、E_tは生存給付金、S_tは死亡保険金を示している。

$$\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt}=\left(\mu_{x+t}+\delta\right){}_tV^{(\infty)}+P_t^{(\infty)}-E_t-\mu_{x+t}S_t$$

(A) $v^n\cdot\left({}_np_x\right)^{0.6}$　(B) $v^n\cdot\left({}_np_x\right)^{0.4}$　(C) $0.6\cdot v^n\cdot{}_np_x$　(D) $0.4\cdot v^n\cdot{}_np_x$

(E) $\left(v^n\cdot{}_np_x\right)^{0.4}$　(F) $v^n\cdot\left(1-{}_np_x\right)^{0.6}$　(G) $v^n\cdot\left(1-{}_np_x\right)^{0.4}$　(H) $0.6\cdot v^n\cdot\left(1-{}_np_x\right)$

(I) $0.4\cdot v^n\cdot\left(1-{}_np_x\right)$　(J) $\left\{v^n\cdot\left(1-{}_np_x\right)\right\}^{0.6}$

(7) 40歳加入 全期払込 20年満期 養老保険(保険金額1 保険金年末払)において$l_x=100-x$, $i=3.0\%$のとき、年払営業保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、予定新契約費は新契約時に保険金額の3%、予定集金費は保険料払込のつど営業保険料の3%、予定維持費は毎年始に保険金額の0.3%とする。必要ならば
$v=1/(1+i)=0.970874$, $v^{20}=0.553676$, $d=i/(1+i)=0.029126$ を使用せよ。

(A)	0.045	(B)	0.046	(C)	0.047	(D)	0.048	(E)	0.049
(F)	0.050	(G)	0.051	(H)	0.052	(I)	0.053	(J)	0.054

(8)　契約年齢 40 歳、年払 全期払込 10 年満期養老保険(保険金額 1 保険金即時支払)の第t保険年度末5年チルメル式責任準備金 ${}_t\bar{V}^{(5Z)}_{40:\overline{10}|}$ において、t＝1で、${}_1\bar{V}^{(5Z)}_{40:\overline{10}|}=0.080$ となるチルメル割合 α の値に最も近いものは次のどれか。
必要ならば次の数値を使用すること。 $\bar{A}_{40:\overline{10}|}=0.863$, $\bar{A}_{41:\overline{9}|}=0.876$, $\ddot{a}_{40:\overline{10}|}=9.277$, $\ddot{a}_{41:\overline{9}|}=8.415$, $\ddot{a}_{40:\overline{5}|}=4.838$, $\ddot{a}_{41:\overline{4}|}=3.902$

(A)	0.008	(B)	0.010	(C)	0.012	(D)	0.014	(E)	0.016
(F)	0.018	(G)	0.020	(H)	0.022	(I)	0.024	(J)	0.026

問題 2.　(18 点)

次の(1)から(3)までの各問について最も適当な数値または最も簡潔な算式を、計算過程を簡潔に示すとともに、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。なお、計算過程の記入のない答案は採点の対象とはならない。

(1)　ある定常社会では各年齢層における人口と 1 年間の死亡者の平均年齢は以下のとおりとする。

	年齢層ごとの人口	1 年間の死亡者の平均年齢
20 歳未満	9 万人	10 歳
20 歳以上 60 歳未満	14 万人	40 歳
60 歳以上	3 万人	70 歳

ここで、死亡者の平均年齢とは「20 歳未満で死亡する者の平均年齢が 10 歳」「20 歳以上 60 歳未満で死亡する者の平均年齢が 40 歳」「60 歳以上で死亡する者の平均年齢が 70 歳」であることを表す。
この定常社会における平均寿命の値に最も近い自然数を求めよ。

(2)　(y) (z) がそれぞれ、$\mu_x=\dfrac{1}{a-x}$ $(0\le x<a)$ に従うとき、$\mathring{e}_{\overline{yz}}$ $(y<z)$ を求めよ。

(3)　x 歳加入 保険期間 n 年 年払 全期払込養老保険(保険金額1 保険金年末払)の第 t 保険年度末責任準備金を ${}_{t-1}V_{x+1}+\pi\cdot\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$ としたとき、この責任準備金は全期チルメル式責任準備金として表すことができる。
この保険のチルメル割合を年金現価の記号のみ用いた最も簡潔な式で表せ。
ここで ${}_{t-1}V_{x+1}$ は年払 全期払込 終身保険の平準純保険料式責任準備金(保険金額1、保険金年末払)、$\ddot{s}_{x:\overline{t}|}=\dfrac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}$、また、$\pi$ は計算基数又は年金現価の記号によって表される式とする。

問題 3.

(14 点)

以下の空欄に当てはまる記号または式を指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。
なお、空欄には分数表示を認めない。また、⑥・⑦の解答にあたっては死亡確率 q_x, ${}_nq_x$, ${}_{n|}q_x$ を使用した表記としないこと。

33 歳の親と 2 歳の子を被保険者とする 保険料年払 終身払込の連生終身保険がある。子が 22 歳到達後に死亡すれば死亡保険金 1 を死亡した年度末に支払い、22 歳以前に死亡した場合は既払込保険料（以下に示す親の死亡により免除される保険料は含まない）を死亡した年度末に返還し保険契約は消滅する。子が 22 歳になるまでに親が死亡すれば以後の保険料の払込が免除されるが、子が 25 歳に到達すれば子の負担で再び払込が開始され子の終身継続する。

また、年払純保険料 P に対し、営業保険料は $P^* = P(1+0.01)+0.002$とする。この保険の年払純保険料および 10 年経過後の責任準備金 ${}_{10}V$ を表す式を求める。なお、親と子は同一の生命表に従うものとする。

○子が 22 歳到達後に死亡した場合の給付現価

$$\frac{\boxed{①\qquad}}{D_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

○子が 22 歳以前に死亡した場合の給付現価

既払込保険料$1P^*$を返還する場合は、子が第 1 年度で死亡するか、親が第 1 年度に死亡してその後子が 22 歳になるまでに死亡する場合である。

・子が第 1 年度で死亡する場合の給付現価は生命関数を用いて表すと、

$$P^* \cdot \boxed{②\qquad}$$

・親が第 1 年度に死亡してその後子が 22 歳になるまでに死亡する場合の給付現価は生命関数を用いて表すと、

$$P^* \cdot q_{33} \cdot \sum_{t=1}^{19}\left(\boxed{③\qquad}\right)$$

これと$q_{33} = 1 - p_{33}$ 及び計算基数を用いて整理すると、既払込保険料 $1P^*$ を返還する場合の給付現価は、

$$P^* \cdot \frac{\boxed{④\qquad} - p_{33} \cdot \left(\boxed{⑤\qquad}\right)}{D_2}$$

同様に、既払込保険料$2P^*$ を返還する場合の給付現価は、生存確率及び計算基数を用いて表すと、

$$2P^* \cdot \frac{\boxed{⑥\qquad\qquad}}{D_2}$$

以下、同様の式が得られるから、これらを加えて整理すると子が 22 歳以前に死亡した場合の給付現価は、生存確率および計算基数を用いて次のように表せる。

$$P^* \cdot \sum_{t=0}^{19} \left\{ \frac{\boxed{⑦\qquad\qquad}}{D_2} \right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

○<u>契約開始から第 **20** 年度までの収入現価</u>

$$P \cdot \boxed{⑧\qquad\qquad} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

○<u>第 **21** 年度～第 **23** 年度の収入現価</u>

$$P \cdot \frac{\boxed{⑨\qquad\qquad}}{D_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

○<u>第 **24** 年度以降の収入現価</u>

$$P \cdot \frac{\boxed{⑩\qquad\qquad}}{D_2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{V})$$

よって、(I)～(V)および$P^* = P(1+0.01)+0.002$により、

$$P = \frac{\boxed{①\qquad} + \boxed{⑪\qquad\qquad}}{D_2 \cdot \boxed{⑧\qquad} + \boxed{⑨\qquad} + \boxed{⑩\qquad} + \boxed{⑫\qquad\qquad}}$$

○<u>契約開始後 **10** 年経過後の将来法責任準備金(親が生存している場合)</u>

$${}_{10}V = \frac{\boxed{⑬\qquad}}{D_{12}} + P^* \cdot \frac{\boxed{⑭\qquad\qquad}}{D_{12}} - P \cdot \frac{\boxed{⑮\qquad\qquad}}{D_{12}}$$

○<u>契約開始後 **10** 年経過後の将来法責任準備金(親が死亡している場合)</u>

親が死亡するまでに払い込まれた保険料の回数を k 回とすると、

$${}_{10}V = \frac{\boxed{⑯\qquad}}{D_{12}} + P^* \cdot \frac{\boxed{⑰\qquad\qquad}}{D_{12}} - P \cdot \frac{\boxed{⑱\qquad\qquad}}{D_{12}}$$

問題 4. (20 点)

次の空欄に当てはまる一つの記号を所定の解答用紙の指定欄に記入せよ。一つの記号とは例えばN^{ii}_{x+t}、l^{ii}_xなどをいい、$\sum_{t=1}^{h} N^{ii}_{x+t}$ や$\dfrac{l^{ii}_x}{l^{ii}_{x+1}}$などは不可とする。一つの記号以外を記入した解答は採点の対象とならない。

就業者であるx歳の被保険者が、年払 n年満期 全期払込 定期保険（死亡保険金額1 保険金年末支払）に加入した。保険料の払込は就業不能状態となった以降は免除するものとする。なお、就業不能状態からの回復はないものとし、以下の保険料計算においては予定事業費率は考慮しないものとする。

(1) この定期保険の年払保険料を以下のとおり求める。

この保険の支出現価は、次の二つの合計となる。

A. x歳の就業者がn年間のうちに就業者のまま死亡した場合に年度末に保険金1を支払う保険の支出現価

B. x歳の就業者がn年間のうちに就業不能状態となり死亡した場合に年度末に保険金1を支払う保険の支出現価

Aの一時払純保険料を計算基数を用いて表すと、

$$\frac{\boxed{2}-\boxed{3}}{\boxed{1}}$$ となる。……………………………(I)

Bの一時払純保険料を計算基数を用いて表すと、

$$\frac{\boxed{4}-\boxed{5}-D^{ii}_x\times\dfrac{\boxed{7}-\boxed{8}}{\boxed{6}}}{\boxed{1}}$$ となる。……(II)

年払純保険料をPとすると、収入保険料の現価は、計算基数を用いて表すと、

$$P\times\left(\frac{\boxed{9}-\boxed{10}}{\boxed{1}}\right)$$ となる。…………(III)

収支相等の原則より (I)+(II)=(III) が成り立つ。

よって、求める年払純保険料(P)を、計算基数を用いて表すと、

$$P=\frac{\boxed{2}-\boxed{3}+\boxed{4}-\boxed{5}-D^{ii}_x\times\dfrac{\boxed{7}-\boxed{8}}{\boxed{6}}}{\boxed{9}-\boxed{10}}$$

$$=\frac{\boxed{11}-\boxed{12}-D^{ii}_x\times\dfrac{\boxed{7}-\boxed{8}}{\boxed{6}}}{\boxed{9}-\boxed{10}}$$ ……………………(IV)

(2) この保険契約の$x+t$歳の者の将来法および過去法における保険年度末責任準備金を考え、両者が一致することを証明する。なお、責任準備金は、就業者と就業不能者とを区別せずに計算するのが一般的な方法であるが、ここでは両者を区別して考えるものとする。また、以下では就業者についての将来法・過去法の責任準備金の一致を考えていくこととする。

$x+t$ 歳の者の将来法により計算した保険年度末責任準備金を ${}_t^F V_x$ とすると、

$$\left\{l_{x+t}^{aa}+\left(l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\cdot{}_t p_x^i\right)\right\}{}_t^F V_x=\sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s+1}\cdot\boxed{13}+\sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s+1}\cdot\boxed{14}$$

$$-\frac{\boxed{16}}{\boxed{15}}\sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s+1}\cdot\boxed{17}-P\times\sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s}\cdot\boxed{18}$$

両辺に v^{x+t} を乗じ、さらに $v^{x+t}\cdot\left\{l_{x+t}^{aa}+\left(l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\cdot{}_t p_x^i\right)\right\}$ で割って計算基数を用いて表示すると、

$${}_t^F V_x=\frac{\boxed{19}-\boxed{20}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}+\frac{\boxed{21}-\boxed{22}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

$$-\frac{\boxed{23}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}\cdot\frac{\boxed{25}-\boxed{26}}{\boxed{24}}-P\times\frac{\boxed{27}-\boxed{28}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

$$=\frac{\boxed{29}-\boxed{30}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}-\frac{\boxed{23}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}\cdot\frac{\boxed{25}-\boxed{26}}{\boxed{24}}-P\times\frac{\boxed{27}-\boxed{28}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

次に、$x+t$ 歳の者の過去法により計算した保険年度末責任準備金を ${}_t^P V_x$ とすると、

$$\left\{l_{x+t}^{aa}+\left(l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\cdot{}_t p_x^i\right)\right\}{}_t^P V_x=P\times\sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-s}\cdot\boxed{31}-\sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-1-s}\cdot\boxed{32}$$

$$-\left\{\sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-1-s}\cdot\boxed{33}-\frac{\boxed{16}}{\boxed{15}}\sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-1-s}\cdot\boxed{34}\right\}$$

両辺に v^{x+t} を乗じた後、$v^{x+t}\cdot\left\{l_{x+t}^{aa}+\left(l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\cdot{}_t p_x^i\right)\right\}$ で割って計算基数を用いて表示すると、

$${}_t^P V_x=P\times\frac{\boxed{35}-\boxed{27}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}-\frac{\boxed{36}-\boxed{19}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

$$-\frac{\boxed{37}-\boxed{21}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}+\frac{\boxed{23}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}\cdot\frac{\boxed{38}-\boxed{25}}{\boxed{24}}$$

$$=P\times\frac{\boxed{35}-\boxed{27}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}-\frac{\boxed{39}-\boxed{29}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}+\frac{\boxed{23}}{D_{x+t}+D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}\cdot\frac{\boxed{38}-\boxed{25}}{\boxed{24}}\cdots(\mathrm{V})$$

ここで、$P\times\frac{\boxed{35}-\boxed{27}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}=P\times\frac{\boxed{35}-\boxed{28}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}-P\times\frac{\boxed{27}-\boxed{28}}{D_{x+t}-D_x^{ii}\cdot\frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$

右辺第一項に(Ⅳ)を代入して整理すると、

$$P \times \frac{\boxed{35} - \boxed{27}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \dfrac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

$$= \frac{\boxed{39} - \boxed{30}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \dfrac{D_{x+t}^i}{D_x^i}} - \frac{\boxed{23}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \dfrac{D_{x+t}^i}{D_x^i}} \cdot \frac{\boxed{38} - \boxed{26}}{\boxed{24}} - P \times \frac{\boxed{27} - \boxed{28}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \dfrac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

これを(Ⅴ)に代入して整理すると${}_t^PV_x = {}_t^FV_x$ が証明できる。

以上

生 保 数 理 （解 答）

問題1.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解答欄	(B)	(H)	(B)	(J)	(H)

(5)の空欄
$\bar{a}_{\overline{t}|}$

(6)	(7)	(8)
(A)	(J)	(E)

解答は上の表のとおりであり、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) $\mu_x = -\dfrac{d\log l_x}{dx}$ であるから、$\log l_x = \displaystyle\int \frac{-1}{86-x}dx = \log(86-x) + \log A$

従って、$l_x = A(86-x)$ （Aは定数）

よって、${}_n p_x = \dfrac{86-x-n}{86-x}$

従って、$a_{40:\overline{10}|} = \ddot{a}_{40:\overline{10}|} - 1 + v^{10}{}_{10}p_{40}$ 及び $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 1 + v \cdot p_{40} \cdot \ddot{a}_{41:\overline{9}|}$ により

$a_{40:\overline{10}|} = 1 + v \cdot p_{40} \cdot \ddot{a}_{41:\overline{9}|} - 1 + v^{10} \cdot {}_{10}p_{40}$

$a_{40:\overline{10}|} = 1 + 0.9852 \cdot \dfrac{86-40-1}{86-40} \cdot 7.750 - 1 + 0.8617 \cdot \dfrac{86-40-10}{86-40} = 8.143$

（答） (B)

(2) ${}_{2|}\ddot{a}_{61:\overline{3}|} = v^2 \dfrac{l_{[61]+2}}{l_{[61]}} + v^3 \dfrac{l_{61+3}}{l_{[61]}} + v^4 \dfrac{l_{61+4}}{l_{[61]}}$ であるから

${}_{2|}\ddot{a}_{61:\overline{3}|} = 0.9852^2 \left(\dfrac{85{,}965}{87{,}320} + 0.9852 \dfrac{84{,}943}{87{,}320} + 0.9852^2 \dfrac{83{,}727}{87{,}320}\right) = 2.78911$

（答） (H)

(3) 脱退原因Aの絶対脱退率を q_x^{A*} とすると、中央脱退率を用いて $q_x^{A*} = \dfrac{2m_x^A}{2+m_x^A}$ と表される。よって、与えられた $m_x^A (20 \le x \le 22)$ を用いて $q_x^{A*} (20 \le x \le 22)$ を求めると次のようになる。

$q_{20}^{A*} = 0.076923$、 $q_{21}^{A*} = 0.072289$、 $q_{22}^{A*} = 0.067633$

また、脱退率（q_x^A）は、絶対脱退率と絶対死亡率を用いて $q_x^A = q_x^{A*}\left(1 - \dfrac{1}{2}q_x^*\right)$ と表される。同様に死亡率（q_x）は、$q_x = q_x^*\left(1 - \dfrac{1}{2}q_x^{A*}\right)$ と表される。

以上より、２重脱退残存表を作成すると以下のようになる。

x	q_x^A	q_x	l_x	a_x	d_x
20	0.076885	0.000962	100,000	7,689	96
21	0.072249	0.001060	92,215	6,662	98
22	0.067592	0.001169	85,455	5,776	100
			79,579		

よって、求める答えは 79,579 となる。
(答)　(B)

(4) $(DA)^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})}{D_x} = a$、$\left(I_{\overline{n|}}A\right)_x = \dfrac{R_x - R_{x+n}}{D_x} = b$、

$\left(D_{\overline{n|}}A\right)_x = \dfrac{nM_x - (R_{x+1} - R_{x+n})}{D_x} = c$

ここで、$\left(D_{\overline{n|}}A\right)_x - (DA)^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{M_{x+n}}{D_x} = c - a$、

$\left(I_{\overline{n|}}A\right)_x + \left(D_{\overline{n|}}A\right)_x = \dfrac{(n+1)M_x}{D_x} = b + c$

以上より、$A^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \dfrac{b+c}{n+1} - (c-a) = \dfrac{(n+1)a + b - nc}{n+1}$

(答)　(J)

(5)　利力を δ、死力を μ とおくと、題意より δ =3 μ ……………①

$$12.5 = \bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \, dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot e^{-\mu t} \, dt \quad \left[\because {}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} \, ds\right) = e^{-\mu t}\right]$$

$$= \left[-\frac{e^{-(\mu+\delta)t}}{\mu+\delta}\right]_0^\infty = \frac{1}{\mu+\delta}$$

$\therefore \mu + \delta = 0.08$ ……………②

①、②より、μ =0.02、δ =0.06

一方、$\bar{a}_x$ は死亡するまでに受け取ることのできる給付総額の現価の平均値とみなすことができ、$\bar{a}_x = \int_0^\infty \boxed{\bar{a}_{\overline{t|}}} \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} dt$ と表せる（$\int_0^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} dt = 1$ であるから $\bar{a}_x$ は確率変数 $\bar{a}_{\overline{t|}}$ の平均値である）。

※テキスト P142 の式(4.12.6)と同じ。

よって、

$$^{[2]}\bar{a}_x = \int_0^\infty (\bar{a}_{\overline{t|}})^2 \cdot {}_t p_x \mu_{x+t} \, dt = \int_0^\infty \left(\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}\right)^2 \cdot e^{-\mu t} \mu \, dt$$

$$= \frac{\mu}{\delta^2} \int_0^\infty (1-e^{-\delta t})^2 \cdot e^{-\mu t} dt = \frac{\mu}{\delta^2} \int_0^\infty (e^{-\mu t} - 2e^{-(\delta+\mu)t} + e^{-(2\delta+\mu)t}) dt$$

$$= \frac{\mu}{\delta^2} \left[-\frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{2e^{-(\delta+\mu)t}}{\delta+\mu} - \frac{e^{-(2\delta+\mu)t}}{2\delta+\mu}\right]_0^\infty = \frac{\mu}{\delta^2}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2}{\delta+\mu} + \frac{1}{2\delta+\mu}\right)$$

[ここで、①の δ =3 μ を代入すると]

$$=\frac{\mu}{9\mu^2}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2\mu}+\frac{1}{7\mu}\right)=\frac{1}{14\mu^2}$$

一方、$\bar{a}_x=\dfrac{1}{\mu+\delta}=\dfrac{1}{4\mu}$ であるから、

$$\therefore Var(\bar{a}_{\overline{t|}})={}^{[2]}\bar{a}_x-(\bar{a}_x)^2=\frac{1}{14\mu^2}-\left(\frac{1}{4\mu}\right)^2=\frac{1}{\mu^2}\cdot\frac{2}{14\cdot16}$$

$$\therefore\sqrt{Var(\bar{a}_{\overline{t|}})}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{7}}=4.72455\cdots[\because\mu=0.02]$$

（別解）μ=0.02、δ=0.06 を算出した後、以下のように$\bar{A}_x$を経由して求めることもできる。

$$\bar{A}_x=\int_0^\infty e^{-\delta t}\cdot{}_tp_x\mu dt=\frac{\mu}{\mu+\delta}=0.25\quad,\quad {}^{[2]}\bar{A}_x=\int_0^\infty e^{-2\delta t}\cdot{}_tp_x\mu dt=\frac{\mu}{\mu+2\delta}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore Var(\bar{a}_x)=\frac{1}{\delta^2}Var(\bar{A}_x)=\frac{{}^{[2]}\bar{A}_x-(\bar{A}_x)^2}{\delta^2}=\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{16}}{0.0036}=22.321428\cdots$$

$$\therefore\sqrt{Var(\bar{a}_x)}=4.72455\cdots$$

（答）　(H)　　(5)の空欄　～　$\bar{a}_{\overline{t|}}$

(6) 題意より $P_t^{(\infty)}=0\ (t>0)$、$E_t=0$、$S_t=0.4\,{}_tV^{(\infty)}$であるから

$$\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt}=(\mu_{x+t}+\delta){}_tV^{(\infty)}-0.4\mu_{x+t}\,{}_tV^{(\infty)}$$

$$\frac{1}{{}_tV^{(\infty)}}\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt}=\delta+0.6\mu_{x+t}$$

$$\left[\log{}_tV^{(\infty)}\right]_0^n=\int_0^n(\delta+0.6\mu_{x+t})dt$$

ここで、${}_0V^{(\infty)}$が一時払保険料 A であり、${}_nV^{(\infty)}=1$、$\int_0^n\mu_{x+t}dt=-\log{}_np_x$ であるので、

$$-\log A=\delta n+0.6(-\log{}_np_x)=\log e^{\delta n}-\log({}_np_x)^{0.6}$$

$$A=e^{-\delta n}({}_np_x)^{0.6}=v^n({}_np_x)^{0.6}$$

（答）　(A)

(7) $$A_{x:\overline{n|}}=\frac{\sum_{t=0}^{n-1}d_{x+t}v^{t+1}+l_{x+n}\cdot v^n}{l_x}$$

$$=\frac{1}{l_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1}v^{t+1}+l_{x+n}\cdot v^n\right)\ (\because d_{x+t}=l_{x+t}-l_{x+t+1}=100-(x+t)-\{100-(x+t+1)\}=1)$$

$$= \frac{1}{100-x}\left\{\frac{v(1-v^n)}{1-v} + (100-x-n)v^n\right\}$$

$$= \frac{v(1-v^n)+(1-v)(100-x-n)v^n}{(100-x)(1-v)}$$

従って

$$A_{40:\overline{20}|} = \frac{0.970874(1-0.553676)+(1-0.970874)(100-40-20)0.553676}{(100-40)(1-0.970874)} = 0.6170769840\cdots$$

ここで$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　より $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}$, $P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　だから

$$\ddot{a}_{40:\overline{20}|} = \frac{1-0.6170769840\cdots}{0.029126} = 13.14711996\cdots$$

$$P_{40:\overline{20}|} = \frac{A_{40:\overline{20}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} = \frac{0.6170769840\cdots}{13.14711996\cdots} = 0.046936286\cdots$$

従って求める営業保険料は、予定新契約費をα、予定集金費をβ、予定維持費をγとすると

$$P^{*}_{40:\overline{20}|} = \frac{1}{1-\beta}\left(P_{40:\overline{20}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{40:\overline{20}|}} + \gamma\right) = \frac{1}{1-0.03}\left(0.046936286\cdots + \frac{0.03}{13.14711996\cdots} + 0.003\right)$$

$=0.053833149\cdots \fallingdotseq 0.054$

（答）　(J)

(8) ${}_1\overline{V}^{(5Z)}_{40:\overline{10}|} = {}_1\overline{V}_{40:\overline{10}|} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}\ddot{a}_{41:\overline{4}|}$　　${}_1\overline{V}^{(5Z)}_{40:\overline{10}|} = \overline{A}_{41:\overline{9}|} - \overline{P}_{40:\overline{10}|} \cdot \ddot{a}_{41:\overline{9}|} - \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}\ddot{a}_{41:\overline{4}|}$

$${}_1\overline{V}^{(5Z)}_{40:\overline{10}|} = \overline{A}_{41:\overline{9}|} - \frac{\overline{A}_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}\ddot{a}_{41:\overline{9}|} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}\ddot{a}_{41:\overline{4}|}$$

$$\alpha = \left(\overline{A}_{41:\overline{9}|} - \frac{\overline{A}_{40:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{40:\overline{10}|}}\ddot{a}_{41:\overline{9}|} - {}_1\overline{V}^{(5Z)}_{40:\overline{10}|}\right)\frac{\ddot{a}_{40:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{41:\overline{4}|}}$$

上の式にそれぞれの数値を代入すると

$$\alpha = \left(0.876 - \frac{0.863}{9.277}8.415 - 0.080\right)\frac{4.838}{3.902} = 0.01635$$

（答）　(E)

問題 2.

(1) まず、$T_0 = 90{,}000 + 140{,}000 + 30{,}000 = 260{,}000$、

$T_{20} = 140{,}000 + 30{,}000 = 170{,}000$、$T_{60} = 30{,}000$

$60 + \dfrac{T_{60}}{l_{60}} = 70$ より $l_{60} = 3{,}000$、$20 + \dfrac{T_{20} - T_{60} - 40l_{60}}{l_{20} - l_{60}} = 40$ より $l_{20} = 4{,}000$

$\dfrac{T_0 - T_{20} - 20l_{20}}{l_0 - l_{20}} = 10$ より $l_0 = 5{,}000$ 　　　したがって、平均寿命 $\overset{\circ}{e}_0 = \dfrac{T_0}{l_0} = 52$

(2) $\overset{\circ}{e}_{\overline{yz}} = \overset{\circ}{e}_y + \overset{\circ}{e}_z - \overset{\circ}{e}_{yz}$ ……………①

$$ {}_tp_y = \exp\left(-\int_0^t \mu_{y+s} ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{a-(y+s)} ds\right) = \exp\left[\log\{a-(y+s)\}\right]_0^t = \frac{a-(y+t)}{a-y} = 1 + \frac{t}{a-y} $$

$$ \therefore \overset{\circ}{e}_y = \int_0^{a-y} {}_tp_y dt = \int_0^{a-y}\left(1 + \frac{t}{a-y}\right)dt = \left[t + \frac{t^2}{2(a-y)}\right]_0^{a-y} = \frac{a-y}{2} \text{……………②} $$

同様に、$\overset{\circ}{e}_z = \dfrac{a-z}{2}$ ……………③

次に、

$$ \overset{\circ}{e}_{yz} = \int_0^{a-z} {}_tp_y \cdot {}_tp_z dt \quad (\because y < z) = \int_0^{a-z}\left(1 + \frac{t}{a-y}\right)\left(1 + \frac{t}{a-z}\right)dt $$

$$ = \int_0^{a-z}\left\{1 - \left(\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-z}\right)\cdot t + \frac{t^2}{(a-y)(a-z)}\right\}dt = \left[t - \left(\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-z}\right)\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(a-y)(a-z)}\right]_0^{a-z} $$

$$ = (a-z) - \left(\frac{1}{a-y} + \frac{1}{a-z}\right)\cdot\frac{(a-z)^2}{2} + \frac{(a-z)^3}{3(a-y)(a-z)} $$

$$ = \frac{a-z}{2} - \frac{(a-z)^2}{6(a-y)} \text{……………④} $$

ゆえに、②～④を①に代入すると、

$$ \overset{\circ}{e}_{\overline{yz}} = \frac{a-y}{2} + \frac{a-z}{2} - \left\{\frac{a-z}{2} - \frac{(a-z)^2}{6(a-y)}\right\} = \frac{a-y}{2} + \frac{(a-z)^2}{6(a-y)} $$

(3) $\ddot{s}_{x:\overline{t|}} = \dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$ とあることから、$\ddot{s}_{x:\overline{t|}} = \dfrac{D_x}{D_{x+t}} \times \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$、$\ddot{s}_{x:\overline{t|}} = \dfrac{D_x}{D_{x+n}} \times \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ と変形することができる。又、${}_{n-1}V_{x+1} + \pi \cdot \ddot{s}_{x:\overline{t|}} = 1$ より $\pi \cdot \ddot{s}_{x:\overline{t|}} = \dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}}$ であることから、

$\pi = \dfrac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+1}}$　これを用いると、

$$
{}_{t-1}V_{x+1} + \pi \cdot \ddot{s}_{x:\overline{t|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}} + \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+1}} \cdot \left(\frac{D_x}{D_{x+t}} \times \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \right)
$$

$$
= 1 - \left(\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}} - \frac{D_{x+n} \cdot \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1} \cdot D_{x+t}} \right) - \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x+1}} - \frac{D_{x+n}}{D_x} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_{x+1}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

$$
= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x+1}} \left(1 - \frac{D_{x+n} \cdot \ddot{a}_{x+n}}{D_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \right) = 1 - \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = {}_tV_{x:\overline{n|}} - \left(\frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} - 1 \right) \times \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}
$$

したがって、この保険の責任準備金は全期チルメル式として表すことができることがわかり、このチルメル割合は $\left(\dfrac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+1}} - 1 \right)$ となる。

問題 3.解答

	解答	別解答の例
①	M_{22}	$D_{22}\cdot A_{22}$
②	vq_2	
③	$v^{t+1}\cdot {}_{t\|}q_2$	$v^{t+1}\cdot {}_tp_2\cdot q_{x+t}$, $v^{t+1}({}_tp_2-{}_{t+1}p_2)$, $v^{t+1}({}_{t+1}q_2-{}_tq_2)$
④	M_2-M_{22}	
⑤	M_3-M_{22}	
⑥	$p_{33}(M_3-M_{22})-{}_2p_{33}(M_4-M_{22})$	$p_{33}\cdot C_{33}+(p_{33}-{}_2p_{33})(M_4-M_{22})$ も可とした。
⑦	${}_tp_{33}(M_{t+2}-M_{22})$	$(t+1)\{{}_tp_{33}(M_{t+2}-M_{22})-{}_{t+1}p_{33}(M_{t+3}-M_{22})\}$ も可とした。
⑧	$\ddot{a}_{2,33:\overline{20\|}}$	
⑨	${}_{20}p_{33}(N_{22}-N_{25})$	${}_{20}p_{33}\cdot D_{22}\cdot \ddot{a}_{22:\overline{3\|}}$
⑩	N_{25}	$D_{25}\cdot \ddot{a}_{25}$
⑪	$0.002\cdot\sum_{t=0}^{19}\{{}_tp_{33}(M_{t+2}-M_{22})\}$	
⑫	$-1.01\cdot\sum_{t=0}^{19}\{{}_tp_{33}(M_{t+2}-M_{22})\}$	
⑬	M_{22}	
⑭	$10\cdot(M_{12}-M_{22})+\sum_{t=0}^{9}\{{}_tp_{43}(M_{t+12}-M_{22})\}$	
⑮	$D_{12}\cdot\ddot{a}_{12,43:\overline{10\|}}+{}_{10}p_{43}(N_{22}-N_{25})+N_{25}$	$D_{12}\cdot\ddot{a}_{12,43:\overline{10\|}}+{}_{10}p_{43}\cdot D_{22}\cdot\ddot{a}_{22:\overline{3\|}}+N_{25}$
⑯	M_{22}	
⑰	$k\cdot(M_{12}-M_{22})$	
⑱	N_{25}	

（解説）二見隆　生命保険数学(下)　P.117 第 12 章練習問題（2）の（5）及び（6）に類題があるので参考にされたい。以下では少し詳しく説明する。

まず、給付金が支払われる条件を見てみると、子が 22 歳到達後に死亡すれば死亡保険金 1 を死亡した年度末に支払い、22 歳以前に死亡した場合は既払込保険料（以下に示す親の死亡により免除される保険料は含まない）を死亡した年度末に返還し保険契約は消滅する。
当然のことながら、親が先に死亡したとしても子が死亡しない限り契約は続く。

○子が 22 歳到達後に死亡した場合の給付現価

契約開始から 20 年後であるから、$_{20|}A_2=\dfrac{\boxed{①\ M_{22}}}{D_2}$ ………………………………（Ⅰ）

○子が22歳以前に死亡した場合の給付現価

この場合は既払込の営業保険料を死亡した年度末に返還し保険契約が消滅する。この場合、子が死亡したときに親が生存している場合はそれまで払い込んだ営業保険料が返還されるが、子が死亡したときに既に親が死亡している場合には親が死亡するまでに払い込まれた営業保険料分のみ返還される。この2つの場合に分けて考える必要がある。

さらに一度に給付現価の式を書き下すのはやや難しいので、まず既払込営業保険料 $1P^*$ を返還する場合がどのようになるか、次に $2P^*$ を変換する場合はどのようになるか、…と考えることにより見通しを立てよう。

まず、既払込保険料 $1P^*$ が返還される場合を考えると、問題文にもあるとおり子が第1年度で死亡するか、親が第1年度に死亡してその後子が22歳になるまでに死亡する場合となる。

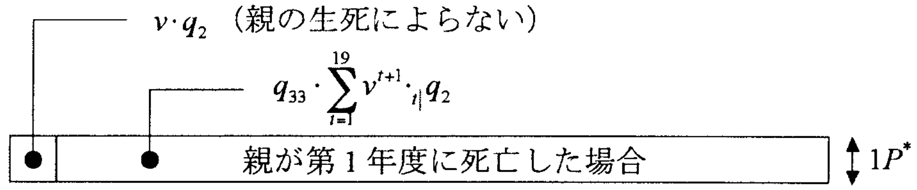
ここで注意が必要となるのは第1年度に子が死亡した場合にはその時点での親の生死によらず年度始に払い込まれる既払込保険料 $1P^*$ が返還されることである。一方、第2年度以降に既払込保険料 $1P^*$ が返還されるとすれば親が第1年度に既に死亡していることが条件となる。

従って、子が第1年度で死亡する場合の給付現価は生命関数を用いて表すと親の生死によらないので、$P^*\cdot\boxed{\text{②}\ v\cdot q_2}$ となる。

一方、第2年度以降に既払込保険料 $1P^*$ が返還される場合は、親が第1年度に死亡してその後子が 22 歳になるまでに死亡する場合であるから、その給付現価は生命関数を用いて表すと、

$$P^*\cdot q_{33}\cdot(v^2{}_{1|}q_2+v^3{}_{2|}q_2+\cdots+v^{20}{}_{19|}q_2)=P^*\cdot q_{33}\cdot\sum_{t=1}^{19}\left(\boxed{\text{③}\ v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_2}\right)$$

【既払込保険料 1P* が返還される場合】



年度	1	2	3	…	20	21
子年齢	2	3	4	…	21	22
親年齢	33	34	35	…	52	53

よって、既払込保険料 $1P^*$ を返還する場合の給付現価は、$q_{33}=1-p_{33}$ 及び計算基数を用いると、

$$P^*\cdot v\cdot q_2+P^*\cdot q_{33}\cdot\sum_{t=1}^{19}v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_2=P^*\cdot\left\{v\cdot q_2+(1-p_{33})\cdot\sum_{t=1}^{19}v^{t+1}\cdot{}_{t|}q_2\right\}=P^*\cdot\left\{\frac{C_2}{D_2}+(1-p_{33})\cdot\sum_{t=1}^{19}\frac{C_{2+t}}{D_2}\right\}$$

$$=P^*\cdot\frac{C_2+(1-p_{33})(M_3-M_{22})}{D_2}=P^*\cdot\frac{\boxed{\text{④}\ M_2-M_{22}}-p_{33}\cdot\left(\boxed{\text{⑤}\ M_3-M_{22}}\right)}{D_2}$$

この式は子が22歳までに死亡する場合の給付現価から親が1年間生存した後子が22歳までに死亡する給付現価を控除した式となっており、その場合に既払込保険料 $1P^*$ が返還されることを表している。

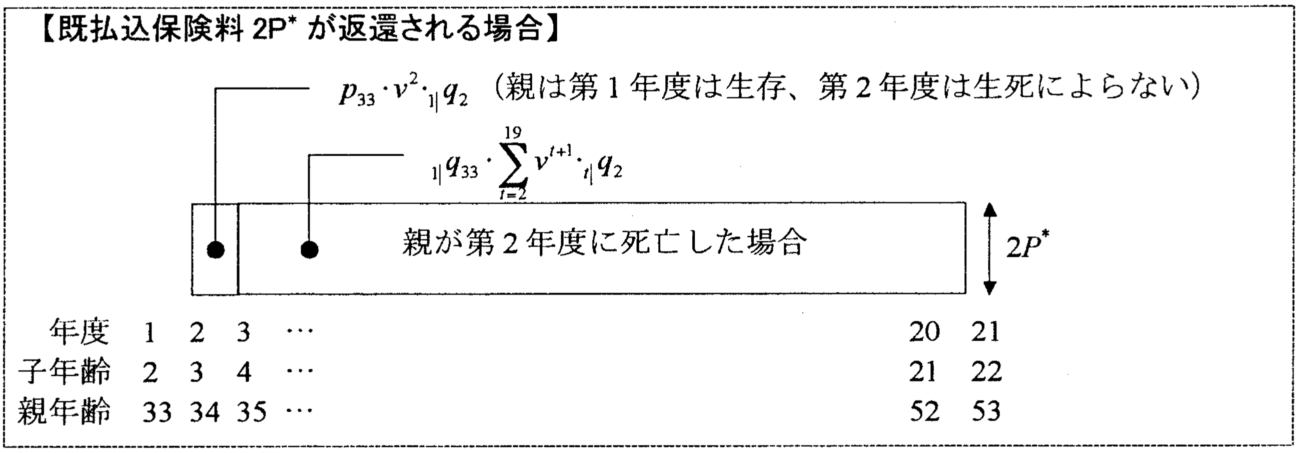
次に、既払込保険料 $2P^*$ が返還される場合を考えると、親が 2 回目の保険料を払い込んだ後で子が第 2 年度で死亡するか、親が第 2 年度に死亡してその後子が 22 歳になるまでに死亡する場合となる。

ここで注意が必要となるのは、親が 2 回目の保険料を払い込んだ直後の年度、すなわち第 2 年度に子が死亡した場合には、第 2 年度の親の生死によらず既払込保険料 $2P^*$ が返還されることである。一方、第 3 年度以降に既払込保険料 $2P^*$ が返還されるとすれば親が第 2 年度に死亡していることが条件となる。

従って、子が第 2 年度で死亡する場合の給付現価は、親が 2 回目の保険料を払い込むという条件、すなわち親が第 2 年度始までは生存しているという条件が必要になるので、
$2P^* \cdot p_{33} \cdot v^2 \cdot {}_{1|}q_2$ となる。

一方、第 3 年度以降に既払込保険料 $2P^*$ が返還される場合は、親が第 2 年度に死亡してその後子が 22 歳になるまでに死亡する場合であるから、その給付現価は生命関数を用いて表すと、

$$2P^* \cdot {}_{1|}q_{33} \cdot (v^3 {}_{2|}q_2 + v^4 {}_{3|}q_2 + \cdots + v^{20} {}_{19|}q_2) = 2P^* \cdot {}_{1|}q_{33} \cdot \sum_{t=2}^{19} v^{t+1} \cdot {}_{t|}q_2$$



よって、既払込保険料 $2P^*$を返還する場合の給付現価は、q_{33}=1－p_{33} 及び計算基数を用いると、

$$2P^* \cdot p_{33} \cdot v^2 \cdot {}_{1|}q_2 + 2P^* \cdot {}_{1|}q_{33} \cdot \sum_{t=2}^{19} v^{t+1} \cdot {}_{t|}q_2 = 2P^* \cdot \left\{ p_{33} \cdot v^2 \cdot {}_{1|}q_2 + p_{33}(1-p_{34}) \cdot \sum_{t=2}^{19} v^{t+1} \cdot {}_{t|}q_2 \right\}$$

$$= 2P^* \cdot \left\{ \frac{p_{33} \cdot C_3}{D_2} + p_{33}(1-p_{34}) \cdot \sum_{t=2}^{19} \frac{C_{2+t}}{D_2} \right\} = 2P^* \cdot \frac{p_{33} \cdot C_3 + p_{33}(1-p_{34}) \cdot (M_4 - M_{22})}{D_2}$$

$$= 2P^* \cdot \frac{\boxed{⑥\ \ p_{33}(M_3 - M_{22}) - {}_2p_{33}(M_4 - M_{22})}}{D_2}$$

この式は親が 1 年間生存してその後子が 22 歳までに死亡する場合の給付現価から、親が 2 年間生存した後子が 22 歳までに死亡する給付現価を控除した式となっており、その場合に既払込保険料 $2P^*$が返還されることを表している。

以下、同様の式が得られるから、これらを加えて整理すると、

$$P^{*}\cdot\frac{(M_2-M_{22})-p_{33}(M_3-M_{22})}{D_2}+2P^{*}\cdot\frac{p_{33}(M_3-M_{22})-{}_{2}p_{33}(M_4-M_{22})}{D_2}$$

$$+3P^{*}\cdot\frac{{}_{2}p_{33}(M_4-M_{22})-{}_{3}p_{33}(M_5-M_{22})}{D_2}+\cdots+20P^{*}\cdot\frac{{}_{19}p_{33}(M_{21}-M_{22})}{D_2}$$

$$=\frac{P^{*}}{D_2}\cdot\{(M_2-M_{22})-p_{33}(M_3-M_{22})+2\cdot p_{33}(M_3-M_{22})-2\cdot{}_{2}p_{33}(M_4-M_{22})$$

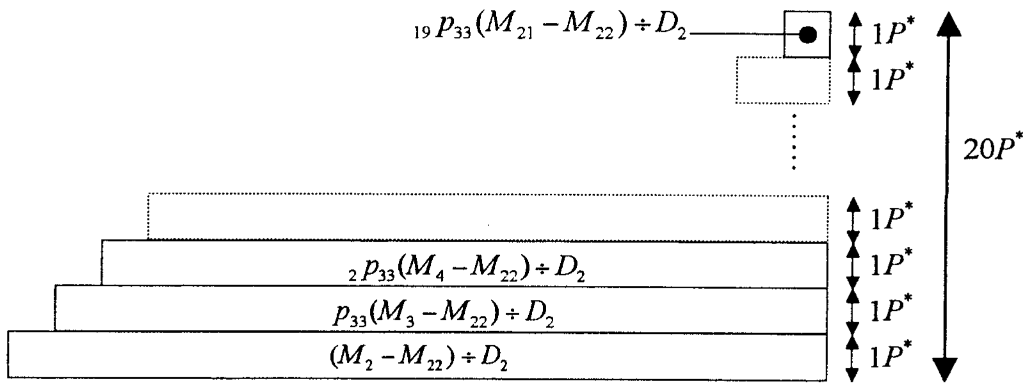
$$+3\cdot{}_{2}p_{33}(M_4-M_{22})-3\cdot{}_{3}p_{33}(M_5-M_{22})+\cdots+20\cdot{}_{19}p_{33}(M_{21}-M_{22})\}$$

$$=\frac{P^{*}}{D_2}\cdot\{(M_2-M_{22})+p_{33}(M_3-M_{22})+{}_{2}p_{33}(M_4-M_{22})+{}_{3}p_{33}(M_5-M_{22})+\cdots+{}_{19}p_{33}(M_{21}-M_{22})\}$$

$$=P^{*}\cdot\sum_{t=0}^{19}\frac{\boxed{⑦\ {}_{t}p_{33}(M_{2+t}-M_{22})}}{D_2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\mathrm{II})$$

この式は親が 1 年間生存して保険料が払い込まれるごとに、その後子が 22 歳までに死亡することを条件に $1P^{*}$ずつ給付現価が増加していくことを表している。

【既払込保険料が返還される場合】



年度	1	2	3	…	20	21
子年齢	2	3	4	…	21	22
親年齢	33	34	35	…	52	53

これが子が 22 歳以前に死亡した場合の給付現価となる。

○契約開始から20年度までの収入現価

この場合は親が死亡すれば保険料払込が免除され、子が死亡すれば当然契約は消滅することになるから、保険料は親と子が共存している場合になる。よって、

$$P\cdot\boxed{⑧\ \ddot{a}_{2,33:\overline{20|}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{III})$$

○21年度～23年度の収入現価

親が契約開始から20年以内に死亡した場合は保険料払込が免除されていることになり、子が20年以内に死亡すれば契約は消滅していることになるから、保険料収入が見込まれるのは親と子が契約開始後20年が経過した後の21年度始に共存している場合である。また21年度～23年度の間に親が死亡した場合には子が22歳以上になっていることから保険料免除の対象とならない。子が死亡した場合は当然契約は消滅する。よって、この期間は21年度始に親が生存していさえすればこの期間の親の生死によらず子が死亡するまでは保険料を払い込む必要がある。よって、

$$P\cdot{}_{20}p_{2,33}\cdot(v^{20}+p_{22}\cdot v^{21}+p_{23}\cdot v^{20})=P\cdot{}_{20}p_{33}(v^{20}\cdot{}_{20}p_2+v^{21}\cdot{}_{21}p_2+v^{20}\cdot{}_{22}p_2)$$

$$=P\cdot{}_{20}p_{33}\cdot\frac{(D_{22}+D_{23}+D_{24})}{D_2}=P\cdot\frac{\boxed{⑨\ {}_{20}p_{33}\cdot(N_{22}-N_{25})}}{D_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{IV})$$

○24年度以降の収入現価

親が契約開始から23年以内に死亡していたとしても、24年度始に子は25歳になることから、以後、子が生存して契約が続いている限り子の負担で保険料の払い込みが終身にわたりなされる。よって、この期間の保険料収入の見込みは親の生死にはよらないから、

$$P\cdot\frac{\boxed{⑩\ N_{25}}}{D_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{V})$$

よって、収支相等の原則及び（Ⅰ）～（Ⅴ）により、

$$\frac{M_{22}}{D_2}+P^*\cdot\sum_{t=0}^{19}\frac{{}_tp_{33}\cdot(M_{2+t}-M_{22})}{D_2}=P\cdot\ddot{a}_{2,33:\overline{20|}}+P\cdot\frac{{}_{10}p_{33}(N_{22}-N_{25})}{D_2}+P\cdot\frac{N_{25}}{D_2}$$

これに$P^*=P(1+0.01)+0.002$を代入して整理すると、

$$M_{22}+(1.01P+0.002)\sum_{t=0}^{19}{}_tp_{33}\cdot(M_{2+t}-M_{22})=P\cdot D_2\cdot\ddot{a}_{2,33:\overline{20|}}+P\cdot{}_{10}p_{33}(N_{22}-N_{25})+P\cdot N_{25}$$

$$\therefore P=\frac{M_{22}+\boxed{⑪0.002\sum_{t=0}^{19}{}_tp_{33}\cdot(M_{2+t}-M_{22})}}{D_2\cdot\ddot{a}_{2,33:\overline{20|}}+{}_{10}p_{33}(N_{22}-N_{25})+N_{25}+\boxed{⑫-1.01\sum_{t=0}^{19}{}_tp_{33}\cdot(M_{2+t}-M_{22})}}$$

○契約開始後 10 年経過後の将来法責任準備金（親が生存している場合）

10 年後に親は 43 歳、子は 12 歳になっている。これまで考えてきたとおりに給付現価、収入現価を考えると、

$$
{}_{10}V = {}_{10|}A_{12} + 11P^*\cdot\frac{(M_{12}-M_{22})-p_{43}(M_{13}-M_{22})}{D_{12}} + 12P^*\cdot\frac{p_{43}(M_{13}-M_{22})-{}_2p_{43}(M_{14}-M_{22})}{D_{12}}+\cdots
$$

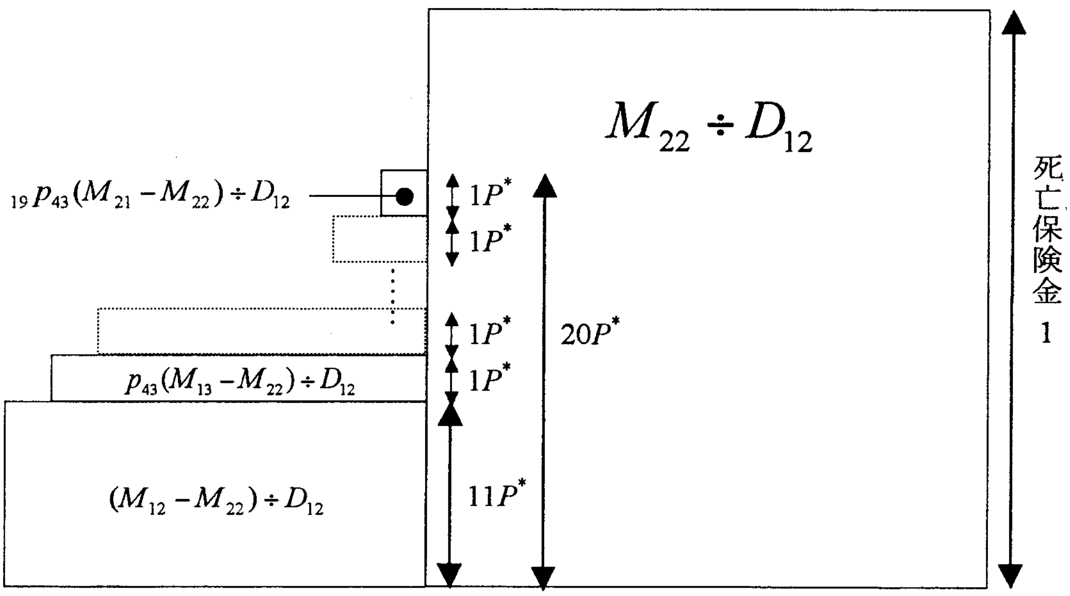
$$
+20P^*\cdot\frac{{}_9p_{43}(M_{21}-M_{22})}{D_{12}} - P\cdot\left\{\ddot{a}_{12,43:\overline{10}|}+{}_{10}p_{43}\left(\frac{D_{22}+D_{23}+D_{24}}{D_{12}}\right)+\frac{N_{25}}{D_{12}}\right\}
$$

$$
=\frac{M_{22}}{D_{12}}+\frac{P^*}{D_{12}}\cdot\{11(M_{12}-M_{22})-11p_{43}(M_{13}-M_{22})+12p_{43}(M_{13}-M_{22})-12{}_2p_{43}(M_{14}-M_{22})+\cdots
$$

$$
+20{}_9p_{43}(M_{21}-M_{22})\}-P\cdot\left\{\ddot{a}_{12,43:\overline{10}|}+{}_{10}p_{43}\left(\frac{N_{22}-N_{25}}{D_{12}}\right)+\frac{N_{25}}{D_{12}}\right\}
$$

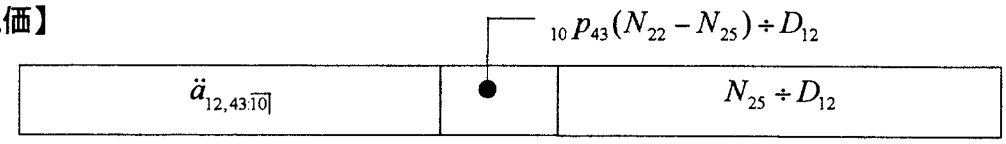
$$
=\frac{\boxed{⑬M_{22}}}{D_{12}}+P^*\cdot\frac{\boxed{⑭10(M_{12}-M_{22})+\sum_{t=0}^{9}{}_tp_{43}(M_{12+t}-M_{22})}}{D_{12}}-P\cdot\frac{\boxed{⑮D_{12}\cdot\ddot{a}_{12,43:\overline{10}|}+{}_{10}p_{43}(N_{22}-N_{25})+N_{25}}}{D_{12}}
$$

【給付現価】



年度	11	12	13	…	20	21	…	24
子年齢	12	13	14	…	21	22	…	25
親年齢	43	44	45	…	52	53	…	56

【収入現価】

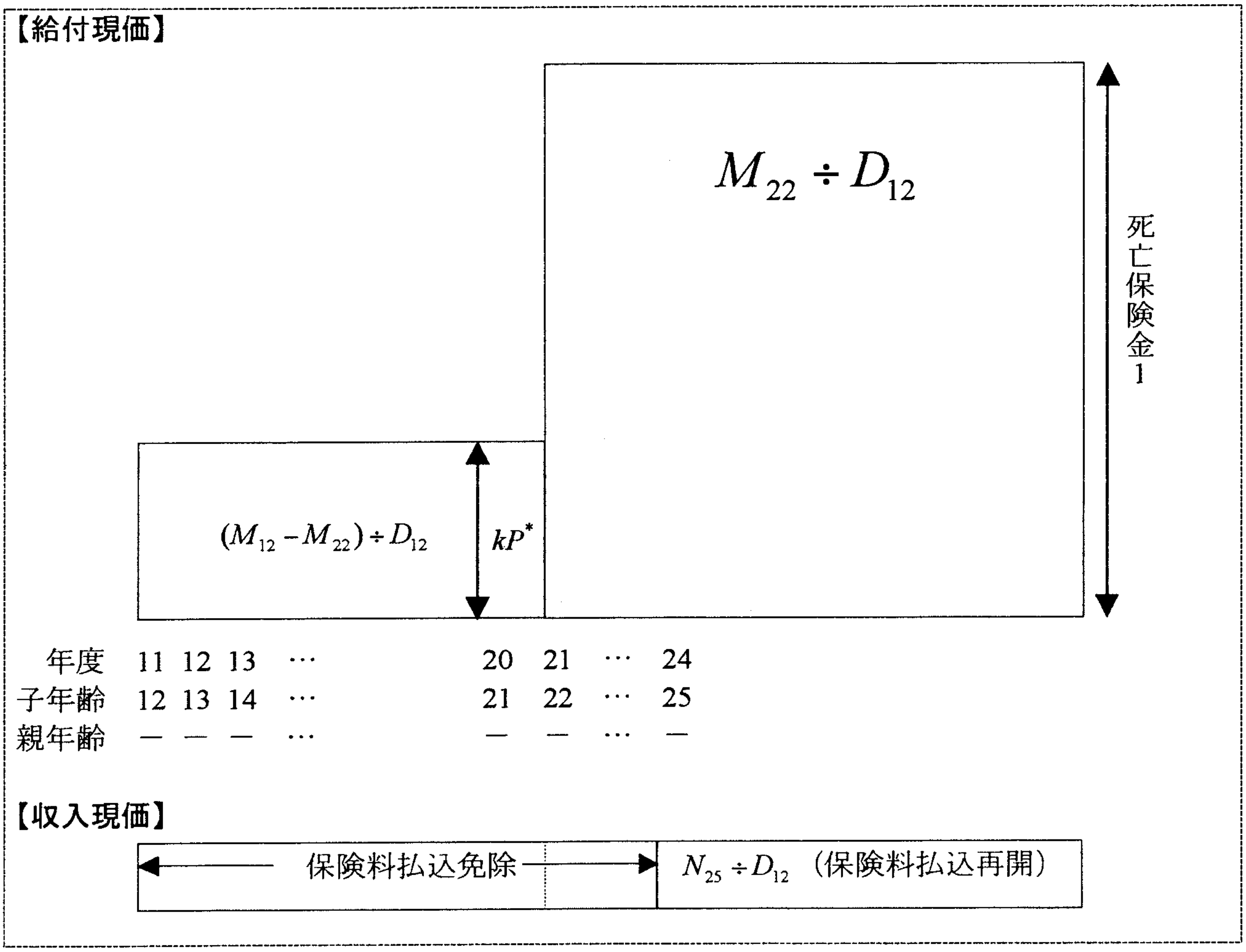


○契約開始後 10 年経過後の将来法責任準備金（親が死亡している場合）

親が死亡しているため子のみについて考えればよい。親が死亡するまでに払い込まれた保険料の回数が k 回であるから、子が 22 歳までに死亡した場合の給付金は kP^* である。また、保険料の負担は当面免除されるが、子が 25 歳に到達すれば子の負担で再び払込が開始され子の終身継続する。従って、

$$ {}_{10}V = {}_{10|}A_{12} + k\cdot P^*\cdot\frac{M_{12}-M_{22}}{D_{12}} - P\cdot\frac{N_{25}}{D_{12}} $$

$$ = \frac{\boxed{⑯\ M_{22}}}{D_{12}} + P^*\cdot\frac{\boxed{⑰\ k\cdot(M_{12}-M_{22})}}{D_{12}} - P\cdot\frac{\boxed{⑱\ N_{25}}}{D_{12}} $$



（参考）

この問題及び教科書の解答では、給付現価を求める場合に既払込営業保険料 $1P^*$ を返還する場合、$2P^*$ を返還する場合、…と考えているが、年度ごとの給付現価を考えていく方法もある。

例えば、第 3 年度に給付金が支払われるのは当然子が第 3 年度に死亡する場合であるが、親が第 1 年度に死亡している場合は $1P^*$、第 2 年度に死亡している場合は $2P^*$、第 3 年度始まで生存した場合は $3P^*$ が支払われる（第 3 年度は親の生死によらず $3P^*$ が支払われる）。

このような考え方により、子が 22 歳になるまでの給付現価を求めると、

$$
\begin{aligned}
& vq_2 \cdot 1P^* + v^2{}_{1|}q_2(q_{33} \cdot 1P^* + p_{33} \cdot 2P^*) + v^3{}_{2|}q_2(q_{33} \cdot 1P^* + {}_{1|}q_{33} \cdot 2P^* + {}_2p_{33} \cdot 3P^*) + \cdots \\
& \qquad + v^{20}{}_{19|}q_2(q_{33} \cdot 1P^* + {}_{1|}q_{33} \cdot 2P^* + {}_{2|}q_{33} \cdot 3P^* + \cdots + {}_{19}p_{33} \cdot 20P^*) \\
&= 1P^*(vq_2 + v^2{}_{1|}q_2 \cdot q_{33} + v^3{}_{2|}q_2 \cdot q_{33} + \cdots + v^{20}{}_{19|}q_2 \cdot q_{33}) + 2P^*(v^2{}_{1|}q_2 \cdot p_{33} + v^3{}_{2|}q_2 \cdot {}_{1|}q_{33} + \cdots + v^{20}{}_{19|}q_2 \cdot {}_{1|}q_{33}) \\
& \qquad + \cdots + 19P^*(v^{19}{}_{18|}q_2 \cdot {}_{18}p_{33} + v^{20}{}_{19|}q_2 \cdot {}_{18|}q_{33}) + 20P^* \cdot v^{20}{}_{19|}q_2 \cdot {}_{19}p_{33} \\
&= 1P^*\left(vq_2 + q_{33}\sum_{t=1}^{19} v^{t+1}{}_{t|}q_2\right) + 2P^*\left(v^2{}_{1|}q_2 \cdot p_{33} + {}_{1|}q_{33}\sum_{t=2}^{19} v^{t+1}{}_{t|}q_2\right) \\
& \qquad + \cdots + 19P^*\left(v^{19}{}_{18|}q_2 \cdot {}_{18}p_{33} + {}_{18|}q_{33}\sum_{t=19}^{19} v^{t+1}{}_{t|}q_2\right) + 20P^* \cdot v^{20}{}_{19|}q_2 \cdot {}_{19}p_{33} \\
&= 1P^*\left\{\frac{C_2}{D_2} + (1-p_{33})\frac{M_3 - M_{22}}{D_2}\right\} + 2P^*\left\{\frac{p_{33}C_3}{D_2} + p_{33}(1-p_{34})\frac{M_4 - M_{22}}{D_2}\right\} \\
& \qquad + \cdots + 19P^*\left\{\frac{{}_{18}p_{33}C_{20}}{D_2} + {}_{18}p_{33}(1-p_{51})\frac{M_{21} - M_{22}}{D_2}\right\} + 20P^*\frac{{}_{19}p_{33}C_{21}}{D_2} \\
&= 1P^* \cdot \frac{(M_2 - M_{22}) - p_{33}(M_3 - M_{22})}{D_2} + 2P^* \cdot \frac{p_{33}(M_3 - M_{22}) - {}_2p_{33}(M_4 - M_{22})}{D_2} \\
& \qquad + \cdots + 19P^* \cdot \frac{{}_{18}p_{33}(M_{20} - M_{22}) - {}_{19}p_{33}(M_{21} - M_{22})}{D_2} + 20P^* \cdot \frac{{}_{19}p_{33}(M_{21} - M_{22})}{D_2} \\
&= \frac{P^*}{D_2} \cdot \{(M_2 - M_{22}) - p_{33}(M_3 - M_{22}) + 2 \cdot p_{33}(M_3 - M_{22}) - 2 \cdot {}_2p_{33}(M_4 - M_{22}) \\
& \qquad + \cdots + 19 \cdot {}_{18}p_{33}(M_{20} - M_{22}) - 19 \cdot {}_{19}p_{33}(M_{21} - M_{22}) + 20 \cdot {}_{19}p_{33}(M_{21} - M_{22})\} \\
&= \frac{P^*}{D_2} \cdot \{(M_2 - M_{22}) + p_{33}(M_3 - M_{22}) + {}_2p_{33}(M_4 - M_{22}) + \cdots + {}_{18}p_{33}(M_{20} - M_{22}) + {}_{19}p_{33}(M_{21} - M_{22})\} \\
&= P^* \cdot \sum_{t=0}^{19} \frac{{}_tp_{33}(M_{2+t} - M_{22})}{D_2}
\end{aligned}
$$

となり、やはり（Ⅱ）と同じ式が得られる。

問題演習を積むことによりこのような式を一度に書き下すことができるようになってくる。また別の解き方を考えたり、その式が意味するものを考えるようにするとよい。

なお、この問題では採り上げていないが実際の保険商品（子供学資保険など）では、さらに小中高の入学に合わせた生存給付金や親が死亡した後に育英年金を支払うものもある。参考にされたい。

問題 4.

1	D_x^{aa}	21	M_{x+t}^{ii}
2	M_x^{aa}	22	M_{x+n}^{ii}
3	M_{x+n}^{aa}	23	D_x^{ii}
4	M_x^{ii}	24	D_x^{i}
5	M_{x+n}^{ii}	25	M_{x+t}^{i}
6	D_x^{i}	26	M_{x+n}^{i}
7	M_x^{i}	27	N_{x+t}^{aa}
8	M_{x+n}^{i}	28	N_{x+n}^{aa}
9	N_x^{aa}	29	M_{x+t}
10	N_{x+n}^{aa}	30	M_{x+n}
11	M_x	31	l_{x+s}^{aa}
12	M_{x+n}	32	d_{x+s}^{aa}
13	d_{x+t+s}^{aa}	33	d_{x+s}^{ii}
14	d_{x+t+s}^{ii}	34	d_{x+s}^{i}
15	l_x^{i}	35	N_x^{aa}
16	l_x^{ii}	36	M_x^{aa}
17	d_{x+t+s}^{i}	37	M_x^{ii}
18	l_{x+t+s}^{aa}	38	M_x^{i}
19	M_{x+t}^{aa}	39	M_x
20	M_{x+n}^{aa}		

就業者である x 歳の被保険者が、年払 n 年満期全期払込定期保険（死亡保険金額 1　保険金年末支払）に加入した。保険料の払込は就業不能状態となった以降は免除するものとする。なお、就業不能状態からの回復はないものとし、以下の保険料計算においては予定事業費率は考慮しないものとする。

（1）この定期保険の年払保険料を以下のとおり求める。

この保険の支出現価は、次の二つの合計となる。

A. x 歳の就業者が n 年間のうちに就業者のまま死亡した場合に年度末に保険金 1 を支払う保険の支出現価

B. x 歳の就業者が n 年間のうちに就業不能状態となり死亡した場合に年度末に保険金 1 を支払う保険の支出現価

A を計算基数を用いて表すと、

$$\frac{{}^{2}\boxed{M_x^{aa}} - {}^{3}\boxed{M_{x+n}^{aa}}}{{}^{1}\boxed{D_x^{aa}}} \text{ となる。} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

B を計算基数を用いて表すと、

$$\frac{{}^{4}\boxed{M_x^{ii}} - {}^{5}\boxed{M_{x+n}^{ii}} - D_x^{ii} \times \dfrac{{}^{7}\boxed{M_x^{i}} - {}^{8}\boxed{M_{x+n}^{i}}}{{}^{6}\boxed{D_x^{i}}}}{{}^{1}\boxed{D_x^{aa}}} \text{ となる。} \cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

年払純保険料を P とすると、収入保険料の現価は、計算基数を用いて表すと、

$$P \times \left(\frac{{}^{9}\boxed{N_x^{aa}} - {}^{10}\boxed{N_{x+n}^{aa}}}{{}^{1}\boxed{D_x^{aa}}}\right) \text{ となる。} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

収支相等の原則より　(Ⅰ)+(Ⅱ)=(Ⅲ)　が成り立つ。

よって、求める年払純保険料（P）を、計算基数を用いて表すと、

$$P = \frac{{}^{2}\boxed{M_x^{aa}} - {}^{3}\boxed{M_{x+n}^{aa}} + {}^{4}\boxed{M_x^{ii}} - {}^{5}\boxed{M_{x+n}^{ii}} - D_x^{ii} \times \dfrac{{}^{7}\boxed{M_x^{i}} - {}^{8}\boxed{M_{x+n}^{i}}}{{}^{6}\boxed{D_x^{i}}}}{{}^{9}\boxed{N_x^{aa}} - {}^{10}\boxed{N_{x+n}^{aa}}}$$

$$= \frac{{}^{11}\boxed{M_x} - {}^{12}\boxed{M_{x+n}} - D_x^{ii} \times \dfrac{{}^{7}\boxed{M_x^{i}} - {}^{8}\boxed{M_{x+n}^{i}}}{{}^{6}\boxed{D_x^{i}}}}{{}^{9}\boxed{N_x^{aa}} - {}^{10}\boxed{N_{x+n}^{aa}}} \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

（2）この保険契約の $x+t$ 歳の者の将来法および過去法における保険年度末責任準備金を考え、両者が一致することを証明する。

$x+t$ 歳の者の将来法により計算した保険年度末責任準備金を ${}_{t}^{F}V_x$ とすると、

$$\left\{l_{x+t}^{aa} + \left(l_{x+t}^{ii} - l_x^{ii} \cdot {}_{t}p_x^{i}\right)\right\} {}_{t}^{F}V_x = \sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s+1} \cdot {}^{13}\boxed{d_{x+t+s}^{aa}} + \sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s+1} \cdot {}^{14}\boxed{d_{x+t+s}^{ii}}$$

$$- \frac{{}^{16}\boxed{l_x^{ii}}}{{}^{15}\boxed{l_x^{i}}} \sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s+1} \cdot {}^{17}\boxed{d_{x+t+s}^{i}} - P \times \sum_{s=0}^{n-t-1} v^{s} \cdot {}^{18}\boxed{l_{x+t+s}^{aa}}$$

両辺に v^{x+t} を乗じ、さらに $v^{x+t} \cdot \left\{l_{x+t}^{aa} + \left(l_{x+t}^{ii} - l_x^{ii} \cdot {}_{t}p_x^{i}\right)\right\}$ で割って計算基数を用いて表示すると、

$$
{}^F_tV_x = \frac{{}^{19}\boxed{M^{aa}_{x+t}} - {}^{20}\boxed{M^{aa}_{x+n}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} + \frac{{}^{21}\boxed{M^{ii}_{x+t}} - {}^{22}\boxed{M^{ii}_{x+n}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}}
$$

$$
- \frac{{}^{23}\boxed{D^{ii}_x}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} \cdot \frac{{}^{25}\boxed{M^i_{x+t}} - {}^{26}\boxed{M^i_{x+n}}}{{}^{24}\boxed{D^i_x}} - P \times \frac{{}^{27}\boxed{N^{aa}_{x+t}} - {}^{28}\boxed{N^{aa}_{x+n}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}}
$$

$$
= \frac{{}^{29}\boxed{M_{x+t}} - {}^{30}\boxed{M_{x+n}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} - \frac{{}^{23}\boxed{D^{ii}_x}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} \cdot \frac{{}^{25}\boxed{M^i_{x+t}} - {}^{26}\boxed{M^i_{x+n}}}{{}^{24}\boxed{D^i_x}} - P \times \frac{{}^{27}\boxed{N^{aa}_{x+t}} - {}^{28}\boxed{N^{aa}_{x+n}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}}
$$

次に、 $x+t$ 歳の者の過去法により計算した保険年度末責任準備金を ${}^P_tV_x$ とすると、

$$
\left\{l^{aa}_{x+t} + \left(l^{ii}_{x+t} - l^{ii}_x \cdot {}_tp^i_x\right)\right\}{}^P_tV_x = P \times \sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-s}\cdot{}^{31}\boxed{l^{aa}_{x+s}} - \sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-1-s}\cdot{}^{32}\boxed{d^{aa}_{x+s}}
$$

$$
-\left\{\sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-1-s}\cdot{}^{33}\boxed{d^{ii}_{x+s}} - \frac{{}^{16}\boxed{l^{ii}_x}}{{}^{15}\boxed{l^i_x}}\sum_{s=0}^{t-1}(1+i)^{t-1-s}\cdot{}^{34}\boxed{d^i_{x+s}}\right\}
$$

両辺に v^{x+t} を乗じた後、 $v^{x+t}\cdot\left\{l^{aa}_{x+t} + \left(l^{ii}_{x+t} - l^{ii}_x \cdot {}_tp^i_x\right)\right\}$ で割って計算基数を用いて表示すると、

$$
{}^P_tV_x = P \times \frac{{}^{35}\boxed{N^{aa}_x} - {}^{27}\boxed{N^{aa}_{x+t}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} - \frac{{}^{36}\boxed{M^{aa}_x} - {}^{19}\boxed{M^{aa}_{x+t}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}}
$$

$$
- \frac{{}^{37}\boxed{M^{ii}_x} - {}^{21}\boxed{M^{ii}_{x+t}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} + \frac{{}^{23}\boxed{D^{ii}_x}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} \cdot \frac{{}^{38}\boxed{M^i_x} - {}^{25}\boxed{M^i_{x+t}}}{{}^{24}\boxed{D^i_x}}
$$

$$
= P \times \frac{{}^{35}\boxed{N^{aa}_x} - {}^{27}\boxed{N^{aa}_{x+t}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} - \frac{{}^{39}\boxed{M_x} - {}^{29}\boxed{M_{x+t}}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}}
$$

$$
+ \frac{{}^{23}\boxed{D^{ii}_x}}{D_{x+t} - D^{ii}_x \cdot \frac{D^i_{x+t}}{D^i_x}} \cdot \frac{{}^{38}\boxed{M^i_x} - {}^{25}\boxed{M^i_{x+t}}}{{}^{24}\boxed{D^i_x}} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(V)}
$$

ここで、

$$P \times \frac{{}^{35}\boxed{N_x^{aa}} - {}^{27}\boxed{N_{x+t}^{aa}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}} = P \times \frac{{}^{35}\boxed{N_x^{aa}} - {}^{28}\boxed{N_{x+n}^{aa}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}} - P \times \frac{{}^{27}\boxed{N_{x+t}^{aa}} - {}^{28}\boxed{N_{x+n}^{aa}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

右辺第一項に（Ⅳ）を代入して整理すると、

$$P \times \frac{{}^{35}\boxed{N_x^{aa}} - {}^{27}\boxed{N_{x+t}^{aa}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

$$= \frac{{}^{39}\boxed{M_x} - {}^{30}\boxed{M_{x+n}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}} - \frac{{}^{23}\boxed{D_x^{ii}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}} \cdot \frac{{}^{38}\boxed{M_x^i} - {}^{26}\boxed{M_{x+n}^i}}{{}^{24}\boxed{D_x^i}} - P \times$$

$$\frac{{}^{27}\boxed{N_{x+t}^{aa}} - {}^{28}\boxed{N_{x+n}^{aa}}}{D_{x+t} - D_x^{ii} \cdot \frac{D_{x+t}^i}{D_x^i}}$$

これを（Ⅴ）に代入して整理すると ${}_t^PV_x = {}_t^FV_x$ が証明できる。