損保数理 (問題)

問題1. 次の(1)から(4)について、記述内容を正しいものとするためにそれぞれ下線を引いた部分を修正する必要がある場合には、指定の解答用紙の所定欄に「×」の記号を記入したうえで、修正後の内容を併記せよ。また、記述内容が正しく、修正する必要がない場合には「○」の記号を記入せよ。 (12点)

(1) 収入保険料が増加基調にある場合は通常、リトンベーシス損害率はアーンドベーシス損害率と比較してほぼ等しい値となる。

(2) ある保険種目のポートフォリオは、一定期間内に0, 1, 2件のクレームがそれぞれ0.5, 0.3, 0.2の頻度で発生し、クレーム1件あたりの金額は1または2でそれぞれ0.7, 0.3の確率とする。このときにクレーム総額が3以下となる確率は0.898である。

(3) 複合分類リスクの料率算定法の一つであるJung法は、複合分類リスク構造を乗法型、複合等級リスクが互いに独立でポアソン分布に従うものと仮定して、料率係数を最尤法によって決定する方法である。

(4) チェインラダー法は、ロスディベロプメントにおいて保険金が経過年数とともに規則的に変化する場合に、その規則性を利用して最終累計発生保険金の推定を行うものであり、算式見積法に分類される手法である。

問題2. 次の(1)から(6)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (33点)

(1) ある保険種目の10年前のクレーム額について分析をしたところ、クレーム額の分布は指数分布に従っており、かつクレーム額が100万円以下となる確率が25%であることが分かった。現在、個々のクレーム額は10年前の2倍となっていると仮定すると、クレーム額が100万円以下となる確率に最も近いものは次のうちのどれか。

(a) 6.3% (b) 12.5% (c) 13.4% (d) 15.4%
(e) 16.3% (f) 20.0% (g) 25.0% (h) 50.0%

(2) ある保険種目において無作為に抽出した契約者のクレーム件数は、平均Θのポアソン分布に従い、さらにΘは契約者ごとにばらつきがあり、しかも確率密度関数が$f(\theta)=4\theta^{-5}\ (\theta>1)$の分布に従うものとする。このとき、1年目、2年目の2年間で合計20件のクレームを起こしたある契約者についてBühlmannモデルを用いて3年目のクレーム件数を推定すると、その件数に最も近いものは次のうちのどれか。

(a) 3.2 (b) 3.3 (c) 3.4 (d) 3.5
(e) 3.6 (f) 3.7 (g) 3.8 (h) 3.9

(3) ある保険種目の料率は、A, Bという2種類の危険標識によってのみ分類されており、さらにAの危険等級が a_1, a_2 の2等級に、Bが b_1, b_2 の2等級に区分されているものとする。

この保険種目にかかるある年度の実績統計が次表のとおりであったときに、この統計に基づいてクレームコストの分析を行うこととする。

＜エクスポージャ(E_{ij})＞

	b_1	b_2	計
a_1	$E_{11}=150$	$E_{12}=140$	$E_{1\cdot}=290$
a_2	$E_{21}=120$	$E_{22}=\ \ 90$	$E_{2\cdot}=210$
計	$E_{\cdot1}=270$	$E_{\cdot2}=230$	$E_{\cdot\cdot}=500$

＜クレーム総額(C_{ij})＞

	b_1	b_2	計
a_1	$C_{11}=30$	$C_{12}=26$	$C_{1\cdot}=\ \ 56$
a_2	$C_{21}=24$	$C_{22}=20$	$C_{2\cdot}=\ \ 44$
計	$C_{\cdot1}=54$	$C_{\cdot2}=46$	$C_{\cdot\cdot}=100$

この複合分類リスクの構造が加法型であるものと仮定して、二つの危険標識についての料率係数をMinimum Bias法により求めるとき、危険標識Aの等級 a_2 に対応する料率係数 x_2 および危険標識Bの等級 b_2 に対応する料率係数 y_2 の値に最も近いものは次のうちどれか。なお、危険標識Aの等級 a_1 に対応する料率係数 x_1 は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数 $r_{1\cdot}=\dfrac{C_{1\cdot}/E_{1\cdot}}{C_{\cdot\cdot}/E_{\cdot\cdot}}$ に等しいものと仮定する。

(a) 1.2　(b) 1.0　(c) 0.8　(d) 0.6　(e) 0.4　(f) 0.2　(g) 0.0　(h) -0.2

(4) 積立保険の基礎率に関する次の各記述のうち、内容が正しいものの組合せは、次のうちのどれか。

① 予定利率が高くなると、積立保険料は小さくなる。

② 予定契約消滅率が高くなると、積立保険料は大きくなる。

③ 予定払込免除発生率が高くなると、積立保険料は大きくなる。

(a) ①のみ　(b) ②のみ　(c) ③のみ　(d) ①と②

(e) ①と③　(f) ②と③　(g) ①と②と③　(h) なし

(5) 危険保険料をp、新契約社費をα_1、維持費率をβ、契約手数料率をα_2、満期返れい金をW、保険期間をn年、予定利率をi、予定契約消滅率をq、予定契約消滅率を考慮した現価率を$\phi=(1-q)/(1+i)$、期始払い年金現価率を$\ddot{a}_{\overline{n}|}$、および予定契約消滅率を考慮した期始払い年金現価率を$\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}$としたときに、積立保険の一時払営業保険料を表すものとして正しいものを選択肢の中から選べ。なお、全損失効時には未経過年度の積立保険料部分を返れいすることとする。

(a) $\dfrac{\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}+\alpha_1}{1-\alpha_2}$ (b) $\dfrac{\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|}+\alpha_1}{1-\alpha_2}$

(c) $\dfrac{\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|}+\alpha_1}{1-\dfrac{\alpha_2}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}}$ (d) $\dfrac{\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}\dfrac{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}+\alpha_1}{1-\alpha_2}$

(e) $\dfrac{\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}+\alpha_1}{1-\alpha_2}$ (f) $\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n+\alpha_2 p}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|}+\alpha_1$

(g) $\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|}+\alpha_1+\alpha_2 p$ (h) $\left(p+\beta+\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}+\alpha_1+\alpha_2 p$

(6) ある保険種目の元受ポートフォリオにおいて、1件あたりの支払保険金Xは、平均0.5億円の指数分布に従うとし、年間の支払件数は20件であるとする。今、この保険種目に対し、エクセスポイント1億円、カバーリミット2億円の超過損害額再保険を設定したとき、この超過損害額再保険特約の年間ネット再保険料に最も近いものを次の選択肢から選べ。(必要ならば$e\fallingdotseq 2.718$を用いよ。)

(a) 0.117億円 (b) 0.133億円 (c) 0.24億円 (d) 0.385億円
(e) 1.17億円 (f) 1.33億円 (g) 2.4億円 (h) 3.85億円

問題3．　次の(1)から(4)について、各空欄に当てはまる最も適当な数値、算式または語句を、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。　(33点)

(1) ある保険種目の年間クレーム発生件数は平均nのポアソン分布に従い、これを表す確率変数をNとし、また各クレーム額は同一の分布に従い、これを表す確率変数をX_i $(i=1,2,\cdots,N)$とする。Nおよび$X_1,\cdots,X_N$は互いに独立であると仮定して、$E(X_i)=m$, $V(X_i)=\sigma^2$とする。

クレーム総額を、$S=X_1+\cdots+X_N$で定義したとき、

$$E(S)=\boxed{\text{(a)}\qquad\qquad} \quad \cdots①$$

$$V(S)=\boxed{\text{(b)}\qquad\qquad} \quad \cdots②$$

である。

今、年度末においてSが実績値として得られるが、これに全信頼度を与えるための平均クレーム件数nに関する条件を求めたい。

Sが確率pで真のクレームコストの上下$100k$%以内に収まれば、Sの実績値に全信頼度を与えることにすると、この条件は、

$$P\left(|S-E(S)|<\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad}\cdot E(S)\right)\geq p \quad \cdots③$$

と表される。これは、

$$P\left(\left|\frac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}\right|<\boxed{\text{(c)}\qquad\qquad}\cdot\frac{E(S)}{\sqrt{V(S)}}\right)\geq p \quad \cdots④$$

とも書ける。Nが十分大きいならば、中心極限定理より、$\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}$は標準正規分布で近似できる。よって、標準正規分布の片側ε点を$u(\varepsilon)$で表すことにする(すなわち，Xが標準正規分布に従うとき$P(X>u(\varepsilon))=\varepsilon$とする)と、④を満たすための条件は、

$$\boxed{\text{(d)}\qquad\qquad\qquad}$$

であることが分かる。これに、①、②を代入して整理すると、

$$n\geq\boxed{\text{(e)}\qquad\qquad\qquad}$$

となり、これがSに全信頼度を与えるクレーム件数の条件であることが分かる。

(2) N_tを期間$[0,t]$において発生するクレーム件数を表す確率変数とする($N_0=0$)。また、クレーム件数過程$\{N_t\}$は、次の3条件を満たすものと仮定する。

(ⅰ) $0\leq s<t\leq u<v$のとき、N_t-N_sとN_v-N_uは独立。

(ⅱ) $N_{s+t}-N_t$とN_sは同一の分布に従う。

(ⅲ) 同一時刻に2件以上のクレームが発生することはない。

このとき、$\lambda=-\log P(N_1=0)$としたとき、任意のtに対して、

$$P(N_t=n)=\boxed{\text{(f)}\qquad\qquad\qquad} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つ。このような確率過程を$\boxed{\text{(g)}\qquad\qquad}$という。

(3) ある保険種目に関する次のデータがある。

現行予定料率構成割合	
・損害率	60%
・社費率	20%
・代理店手数料率	15%
・利潤率	5%
直近年度の実績値	
・損害率	50%
・社費率	18%
・代理店手数料率	14%

① クレディビリティ係数を0.5として損害率法により料率改定率を求めると、(h) ＿＿＿＿となる。(小数点以下第5位四捨五入)

② ①の結果を用いて、料率改定後の予定料率構成割合を求めると、損害率は(i) ＿＿＿＿%、社費率は(j) ＿＿＿＿%、代理店手数料率は14.0%となる。なお、利潤率は5.0%とする。(パーセント表示で小数点以下第2位四捨五入)

(4) 事故発生年度から翌々年度までに支払いが完了する保険契約について、累計支払保険金のロスディベロップメントが次表のとおり与えられているとき、各事故年度に対応する最終発生保険金を計算せよ。(小数点以下第1位四捨五入)

なお、インフレーションの影響はないものとし、各年のロスディベロップメントファクターは、小数点以下第5位を四捨五入して計算し、またロスディベロップメントファクターの予測値は、対応する事故年度の既知の値を加重平均したものを用いるものとする。

事故年度	経過年数 1	2	3	最終発生保険金
1	2,342	2,468	2,511	(k)
2	2,273	2,537		(l)
3	2,098			(m)

問題4. 期間$[0,t]$において発生したクレーム件数N_t、個々のクレーム額X_i $(i=1,2,\cdots,N_t)$、クレーム累計額$S_t=X_1+X_2+\cdots+X_{N_t}$によって定義される複合ポアソン過程について、次の(1)から(4)に答えよ。なお、個々のクレーム額X_iの期待値および積率母関数を、それぞれ$E(X)$、$M_X(r)$とし、また確率変数N_tおよびS_tの積率母関数を、それぞれ$M_{N_t}(r)$、$M_{S_t}(r)$で表すものとする。 (22点)

(1) N_tが平均λtのポアソン分布に従うとき、$M_{N_t}(r)$をλtを使って表せ。

(2) $M_{S_t}(r)$を$M_X(r)$と$M_{N_t}(r)$で表せ。

(3) $M_{S_t}(r)$につき、k次のキュムラントχ_k $(k=1,2,\cdots)$を$E(X^k)$で表せ。

(4) S_tの歪度を求めよ。

損保数理（解答例）

問題1.

(1) × より低い値となる (テキスト1-10ページ参照)

(2) × 0.982 (テキスト2-25ページ参照)

クレーム総額xのとりうる値は、0,1,2,3,4のいずれかである。$p(1)=0.7$, $p(2)=0.3$を用いると、

$$p^{2*}(2)=p(1)p(1)=0.49$$
$$p^{2*}(3)=p(1)p(2)+p(2)p(1)=0.21+0.21=0.42$$
$$p^{2*}(4)=p(2)p(2)=0.09$$

となる。これにより、確率分布と累積分布を下表のとおり順次計算すればよい。ただし下表において、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{2}p^{n*}(x)\Pr(N=n),\ \Pr(N=0)=0.5,\ \Pr(N=1)=0.3,\ \Pr(N=2)=0.2,$$
$$F(x)=\sum_{y=0}^{x}f(y)$$

である。

x	$p^{0*}(x)$	$p(x)$	$p^{2*}(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	1.0	−	−	0.5	0.5
1	−	0.7	−	0.21	0.71
2	−	0.3	0.49	0.188	0.898
3	−	−	0.42	0.084	0.982
4	−	−	0.09	0.018	1.000

これにより、$F(3)=0.982$である。

(3) ○ (テキスト4-13ページ参照)

(4) × 統計的見積法 (テキスト5-12ページ参照)

問題2.

(1) (c)

10年前のクレーム額を表す確率変数をXとし、平均クレーム額をλとしたときに、Xの分布関数$F(x)$は、次のように表される。

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases}$$

題意より、

$$F(1{,}000{,}000)=1-e^{-1{,}000{,}000\lambda}=0.25$$

一方、現在のクレーム額を表す確率変数をYとすると、題意よりXの2倍であることから、Yの分布関数を$G(y)$とすると、次のように確率を求めることができる。

$$G(1{,}000{,}000)=F(500{,}000)$$
$$=1-e^{-500{,}000\lambda}=1-\sqrt{e^{-1{,}000{,}000\lambda}}$$
$$=1-\sqrt{0.75}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=0.13397$$

(2) (d) （テキスト3-42ページ参照）

$$E[V(X_i|\Theta)] = E(\Theta) = \int_1^\infty \theta \cdot 4\theta^{-5} d\theta = \frac{4}{3}$$

$$V[E(X_i|\Theta)] = V(\Theta) = E(\Theta^2) - E(\Theta)^2 = 0.22222$$

$$Z = \frac{n}{n + \dfrac{E[V(X_i|\Theta)]}{V[E(X_i|\Theta)]}} = \frac{2}{2 + \dfrac{4/3}{0.22222}} \cong 0.25$$

であることから、求める3年目のクレーム件数x_3は、次のとおりとなる。

$$x_3 = Z\bar{x} + (1-Z)\hat{u} = 0.25 \times \frac{20}{2} + (1-0.25) \times \frac{4}{3} = 3.5$$

(3) x_2：(b)、 y_2：(g) （テキスト4-18ページ参照）

まず、リスク区分ごとのクレームコスト$R_{ij} = \dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$および相対クレームコスト指数$r_{ij} = \dfrac{R_{ij}}{R_{\cdot\cdot}}$を計算すると下表のとおりとなる。（なお、本問の設定では有効桁数が2桁であるため、以下小数点以下第3位四捨五入で計算）

＜クレームコスト（R_{ij}）＞

	b_1	b_2	計
a_1	$R_{11} = 0.20$	$R_{12} = 0.19$	$R_{1\cdot} = 0.19$
a_2	$R_{21} = 0.20$	$R_{22} = 0.22$	$R_{2\cdot} = 0.21$
計	$R_{\cdot 1} = 0.20$	$R_{\cdot 2} = 0.20$	$R_{\cdot\cdot} = 0.20$

＜相対クレームコスト指数（r_{ij}）＞

	b_1	b_2	計
a_1	$r_{11} = 1.00$	$r_{12} = 0.95$	$r_{1\cdot} = 0.95$
a_2	$r_{21} = 1.00$	$r_{22} = 1.10$	$r_{2\cdot} = 1.05$
計	$r_{\cdot 1} = 1.00$	$r_{\cdot 2} = 1.00$	$r_{\cdot\cdot} = 1.00$

相対クレームコスト指数の推定値を$\hat{r}_{ij}$としたときに、Minimum Bias法における満たすべき基準は、次の連立方程式のように表すことができる。

$$\begin{cases} E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) + E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) = 0 \\ E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) + E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = 0 \\ E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) + E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) = 0 \\ E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) + E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = 0 \end{cases}$$

この連立方程式において、$E_{ij}(r_{ij} - \hat{r}_{ij})$をそれぞれ変数と見なして求めると、

$$\begin{cases} E_{11}(r_{11} - \hat{r}_{11}) = E_{22}(r_{22} - \hat{r}_{22}) = C \\ E_{12}(r_{12} - \hat{r}_{12}) = E_{21}(r_{21} - \hat{r}_{21}) = -C \end{cases}$$

となる。ここでCは定数とする。

さて、この複合分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は、料率係数を用いて、

$$\hat{r}_{ij} = x_i + y_j \quad (i = 1,2;\ j = 1,2)$$

と表すことができるので、これを上の連立方程式に代入して整理すると、

$$\begin{cases} x_1+y_1=r_{11}-C/E_{11} & \text{(a)} \\ x_2+y_2=r_{22}-C/E_{22} & \text{(b)} \\ x_1+y_2=r_{12}+C/E_{12} & \text{(c)} \\ x_2+y_1=r_{21}+C/E_{21} & \text{(d)} \end{cases}$$

となる。ここで、(a)+(b)−(c)−(d) を両辺について計算すると、

$$0=r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22}-C\left(\frac{1}{E_{11}}+\frac{1}{E_{12}}+\frac{1}{E_{21}}+\frac{1}{E_{22}}\right)$$

となるから、

$$C=(r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22})\Bigg/\left(\frac{1}{E_{11}}+\frac{1}{E_{12}}+\frac{1}{E_{21}}+\frac{1}{E_{22}}\right)$$

$$=(1.00-0.95-1.00+1.10)\Bigg/\left(\frac{1}{150}+\frac{1}{140}+\frac{1}{120}+\frac{1}{90}\right)$$

$$=4.51$$

である。したがって、これを(a) に代入すると、

$$x_1+y_1=1.00-4.51/150$$
$$=0.97$$

また、題意より、$x_1=r_{1\bullet}=0.95$ であることがわかっているので、

$$y_1=0.97-0.95=0.02$$

となる。さらにこれを(d) に代入することにより、x_2を次のように求めることができる。

$$x_2=1.00+4.51/120-0.02$$
$$=1.02$$

(4) (e) (テキスト6- 4ページ参照)

(5) (b) (テキスト6-10ページ参照)

Pを求める営業保険料とすると、

$$P=\alpha_1+\alpha_2 P+\frac{p\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}+\beta\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}+W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

となることから分かる。

(6) (f) (テキスト8-12ページ参照)

支払保険金Xの分布関数$F(x)$は、

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{0.5}x} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$$

となる。よって、年間のネット再保険料は、以下により求められる。

$$\text{年間支払件数}\times\int_1^3(1-F(x))dx=20\cdot\int_1^3 e^{-2x}dx=-20\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-2x}\right]_1^3$$

$$=20\cdot\int_1^3 e^{-2x}dx=-20\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-2x}\right]_1^3$$

$$=-10\cdot\frac{1}{e^2}\left(\frac{1}{e^2e^2}-1\right)=1.32883$$

問題3.

(1) (a) nm　(b) $n(m^2+\sigma^2)$　(c) k

(d) $k\dfrac{E(S)}{\sqrt{V(S)}} \geq u\left(\dfrac{1-p}{2}\right)$　(e) $\left(\dfrac{u((1-p)/2)}{k}\right)^2\left(1+\left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^2\right)$　(テキスト3-20ページ参照)

(2) (f) $\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$　(g) ポアソン過程　(テキスト7-10ページ参照)

(3) (h) -0.0988　(i) 61.0　(j) 20.0　(テキスト1-44ページ参照)

クレディビリティ係数が0.5であることを用いて損害率を計算すると、$0.5\times60\%+(1-0.5)\times50\%=55\%$となるから、求める料率改定率は、$\dfrac{0.55+0.18}{1-(0.14+0.05)}-1=-0.09876\cdots$ となる。

この結果を用いて料率改定後の損害率および社費率を求めると、それぞれ、$\dfrac{0.55}{1-0.0988}=0.6102\cdots$ および $\dfrac{0.18}{1-0.0988}=0.1997\cdots$ となる。

(4) (k) 2,511　(l) 2,581　(m) 2,338　(テキスト5-34ページ参照)

まず、(k)の値はロスディベロップメントから直ちに求めることができる。

次に、(l)および(m)については、下表のとおりロスディベロップメントファクターを計算してから求める。

ロスディベロップメントファクター

	1→2	2→3
1	1.0538	1.0174
2	1.1161	1.0174
3	1.0953	1.0174

これにより、(l)、(m)の値はそれぞれ、以下のとおりとなる。

$2{,}537\times1.0174=2{,}581.14 \rightarrow 2{,}581$

$2{,}098\times1.0953\times1.0174=2{,}337.92 \rightarrow 2{,}338$

問題4.

(1)　(テキスト7-25ページ参照)

N_t が平均 λt のポアソン分布に従うことから、N_t の確率関数は次のように表される。

$$P(N_t=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

したがって、N_t の積率母関数 $M_{N_t}(r)$ は、次のように求めることができる。

$$\begin{aligned}M_{N_t}(r)&=\sum_{n=0}^{\infty}e^{rn}P(N_t=n)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda te^r)^n}{n!}e^{-\lambda t}\\&=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda te^r)^n}{n!}\\&=\exp(-\lambda t)\exp(\lambda te^r)\\&=\exp\{\lambda t(e^r-1)\}\end{aligned}$$

(2)

$$M_{S_t}(r) = E(e^{rS_t}) = E(e^{r(X_1+X_2+\cdots+X_{N_t})})$$
$$= E(E(e^{r(X_1+X_2+\cdots+X_{N_t})} \mid N_t))$$
$$= E(M_X(r)^{N_t})$$
$$= E(\exp\{N_t \cdot \log M_X(r)\})$$
$$= M_{N_t}(\log M_X(r))$$

(3)

まず、(2)に(1)の結果を代入すると次のとおりとなる。

$$M_{S_t}(r) = \exp\{\lambda t(M_X(r)-1\}$$

S_t のキュムラント母関数は、

$$\log M_{S_t}(r) = \lambda t(M_X(r)-1)$$

であるから、k 次のキュムラント $\chi_k (k=1,2,\cdots)$ は、次のとおり求めることができる。

$$\chi_k = \frac{d^k}{dr^k}\lambda t(M_X(r)-1)\bigg|_{r=0}$$
$$= \lambda t \frac{d^k}{dr^k} M_X(r)\bigg|_{r=0}$$
$$= \lambda t E(X^k)$$

(4)

S_t の歪度は、分散を σ^2 としたときに、$\dfrac{\chi_3}{\sigma^3}$ で求めることができる。ここで、$\chi_2 = \sigma^2$ の関係式を用いて S_t の歪度を求めると、次のとおりとなる。

$$\frac{\chi_3}{\sigma^3} = \frac{\chi_3}{(\chi_2)^{3/2}}$$
$$= \frac{\lambda t E(X^3)}{\{\lambda t E(X^2)\}^{3/2}}$$
$$= \frac{E(X^3)}{\sqrt{\lambda t} \cdot E(X^2)^{3/2}}$$