損保数理 （問題）

問題1. 次の(1)から(4)について、記述内容を正しいものとするためにそれぞれ下線を引いた部分を修正する必要がある場合には、指定の解答用紙の所定欄に「×」の記号を記入したうえで、修正後の内容を併記せよ。また、記述内容が正しく、修正する必要がない場合には「○」の記号を記入せよ。 (16点)

(1) 会計年度統計によれば、当年度のアーンドプレミアムは、「<u>当年度リトンプレミアム＋当年度末未経過保険料－前年度末未経過保険料</u>」で表される。

(2) <u>超過損害額再保険</u>は、保険料の出再割合と再保険金の回収割合が元受支払保険金の大きさにより異なるため、非割合再保険に分類される。

(3) クレーム額の分散が0である場合に全信頼度を与える最低限のクレーム件数をn_0とすると、クレーム額の平均がm、分散がσ^2の場合に全信頼度を与えるクレーム件数n_fは、$n_f = \underline{n_0\left(1+\dfrac{\sigma}{m}\right)}$で表される。

(4) ある保険種目において、昨年度末3ヶ月間の発生保険金および事故報告1件あたりの平均単価は、それぞれ10,000、50であり、昨年度のIBNR損害の額は3,000であった。また、当年度末3ヶ月間の発生保険金および事故報告1件あたりの平均単価がそれぞれ11,250、45であったとするとき、当年度のIBNR備金の額を算式見積法により求めると<u>3,750</u>となる。

問題2. 次の(1)から(4)について、それぞれ選択肢の中から正しい答えを一つ選んで、指定の解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。 (18点)

(1) クレーム額$X_i\ (i=1,2,\cdots)$と年間クレーム総額Sに関する次の情報がある。

$$E(X_i)=50,\ V(X_i)=500,\ V(S)=30$$

クレーム額X_iは同一分布に従い、クレーム件数NとX_iは互いに独立であり、また、クレーム件数Nはポアソン分布に従うものとする。このとき、来年少なくとも1件以上のクレームが起きる確率に最も近いものは次のうちどれか。なお、e^xの値が必要な場合には、$e^x \fallingdotseq 1+x+\dfrac{x^2}{2}$で近似した計算値を用いよ。

(a) 99.5%　(b) 95%　(c) 90.5%　(d) 50%
(e) 9.5%　(f) 0.995%　(g) 0.95%　(h) 0.9%

(2) ある保険会社では、割引率0%（等級0）、20%（等級1）、40%（等級2）、60%（等級3）の無事故割引制度を実施している。この制度での契約者の等級分布の推移行列は、次のとおりである。

翌 年 の 等 級

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \text{現在の等級}\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.2592 & 0.7408 & 0 & 0 \\ 0.2592 & 0 & 0.7408 & 0 \\ 0 & 0.2592 & 0 & 0.7408 \\ 0 & 0 & 0.2592 & 0.7408 \end{pmatrix} \end{array}$$

また、契約者数は10,000人であり、その数は常に一定であると仮定する。

① 将来的にこの契約ポートフォリオが定常状態に達した際の、等級1の契約者数は次のどれに近いか。

(a) 800 (b) 808 (c) 816 (d) 824 (e) 832 (f) 840 (g) 848 (h) 856

② 定常状態での平均無事故割引率は、次のどれに近いか。

(a) 35% (b) 38% (c) 41% (d) 44%
(e) 47% (f) 50% (g) 53% (h) 56%

(3) ある保険会社の傷害保険の料率は、年齢別2区分(50歳未満と50歳以上)と性別2区分(女性と男性)の二つの危険標識で複合的に区分されている。

今、この保険種目の実績統計を分析したところ、各リスク区分ごとのエクスポージャが同数であり、相対クレームコスト指数(全体のクレームコストを1としたときの各リスク区分のクレームコストの割合)が下表のとおりであることがわかった。

＜相対クレームコスト指数(r_{ij})＞

	女性	男性	計
50歳未満	$r_{11}=0.648$	$r_{12}=0.918$	$r_{1\cdot}=0.783$
50歳以上	$r_{21}=0.998$	$r_{22}=1.436$	$r_{2\cdot}=1.217$
計	$r_{\cdot 1}=0.823$	$r_{\cdot 2}=1.177$	$r_{\cdot\cdot}=1.000$

この複合分類リスクの構造が加法型であるものとして、二つの危険標識それぞれについての料率係数をMinimum Bias法により求めた。ただし、年齢区分のうち「50歳未満」に対応する料率係数x_1は、$r_{1\cdot}$に等しいものと仮定する。

＜相対クレームコスト指数の推定値($\overline{r_{ij}}$)および料率係数＞

	女性	男性	料率係数
50歳未満	$\overline{r_{11}}=$	$\overline{r_{12}}=$	$x_1=0.783$
50歳以上	$\overline{r_{21}}=$	$\overline{r_{22}}=$	$x_2=$
料率係数	$y_1=$	$y_2=$	—

y_2の値として、正しいものはどれか。

(a) -1.217 (b) -0.960 (c) -0.783 (d) -0.177
(e) 0.177 (f) 0.783 (g) 0.960 (h) 1.217

(4) 以下の単位ロスディベロップメントが与えられているとき、分離法によって近似される経過年度2年の支払比率に最も近いものは次のうちどれか。

	経過年度		
事故年度	1	2	3
1	10	20	5
2	11	23	
3	13		

(a) 0.50 (b) 0.52 (c) 0.54 (d) 0.56 (e) 0.58 (f) 0.60 (g) 0.62 (h) 0.64

問題3．　次の(1)から(4)について、各問いの空欄に当てはまる最も適当な数値または算式を、指定の解答用紙の所定欄に記入せよ。
(48点)

(1)　チルメル式積立保険において、チルメル割合α、満期返れい金W、保険期間n、予定契約消滅率qを考慮した現価率ϕとし、期始払年金現価率を$\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}$とする。このとき、年払契約の初年度保険料は、$\boxed{\text{(a)}\qquad}$で表される。また、半年払契約において、契約が契約月の月央になされたものと仮定すれば、事業年度末の払戻積立金は、第2年度以降について$\boxed{\text{(b)}\qquad}$$(6 \leq m \leq 11)$で表すことができる。ただし、この契約の第$t$保険年度末における保険年度末払戻積立金を${}_tV$、第$t$事業年度末における経過年度が$t-\dfrac{m+1}{12}$年以上、$t-\dfrac{m}{12}$年未満$(0 \leq m \leq 11)$とする。

(2) ある保険種目に関する次のデータがある。①から③の各問いに答えよ。

収入保険料	100,000千円
支払保険金	55,000千円
当年度末未経過保険料	50,000千円
前年度末未経過保険料	40,000千円
当年度末支払備金	15,000千円
前年度末支払備金	10,000千円
予定損害率	60%
契約件数	20,000件
事故頻度	2%
保険金の平均	120千円
保険金の標準偏差	90千円

① インカード・ツー・アーンド・ベイシス損害率を計算すると、$\boxed{\text{(c)}\qquad\%}$となる。(パーセント表示で小数点以下第2位四捨五入)

② 一方、分散がゼロの場合に全信頼度を与える事故件数を1,000件とすると、部分信頼度(クレディビリティー係数)は$\boxed{\text{(d)}\qquad}$となる。(小数点以下第4位四捨五入)

③ したがって、①および②の結果を用いると、改定損害率は$\boxed{\text{(e)}\qquad\%}$となる。(パーセント表示で小数点以下第2位四捨五入)

(3) 次の前提ⅠからⅣのもとで、①から③の各問いに答えよ。

前提Ⅰ　ある保険種目の1契約あたりのクレーム件数は、平均0.01のポアソン分布に従い、クレーム額は平均90千円の指数分布に従う。

前提Ⅱ　上記保険種目のみの引き受けを行い、当該保険種目の保険金支払いを事業年度期初に保有するサープラス1,500千円と純保険料に安全割増5%を加えた保険料収入で賄う。

前提Ⅲ　引受契約件数は10,000件。

前提Ⅳ　契約はすべて期初に締結され(同時に保険料を領収する)、保険金はすべて当該事業年度中に支払われる。また、運用益は考えない。

① 支払総額Sの期待値を計算すると、$E(S)=$ (f)　　千円 となる。(千円表示で小数点以下第1位四捨五入)

② クレーム額の確率密度関数$f(x)$は$f(x)=$ (g)　　 であるので、クレーム額の原点周りの2次のモーメントを計算すると、(h)　　千円 となる。(千円表示で小数点以下第1位四捨五入)

したがって、支払総額Sの標準偏差を計算すると、$\sqrt{V(S)}=$ (i)　　千円 となる。(千円表示で小数点以下第1位四捨五入)となる。

③ $Z=\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}$は標準正規分布に近似的に従うとし、当該事業年度での破産確率を計算すると、(j)　　% となる。(パーセント表示で小数第2位四捨五入)

なお、必要な場合には次の数表の数値を用いよ。

標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.159	0.100	0.050	0.025	0.023
$u(\varepsilon)$	1.000	1.282	1.645	1.960	2.000

(4) 傷害保険のみの引き受けを行っているB保険会社は、k年度末のリザーブが2,500万円である。B保険会社が、$k+1$年度の期初に死亡保険金額1,000万円の保険契約を2,000件引き受け、$k+1$年度においては保険責任を有する契約はほかにないものとする。平均事故発生率が0.5%(すなわち、純保険料は1件につき5万円)であることがあらかじめわかっているとして、破産確率を計算するために事故発生件数とその確率を調べると下表のとおりとなった。

保険金支払件数n	n件以下の発生確率	保険金支払件数n	n件以下の発生確率
10	0.5830	16	0.9733
11	0.6971	17	0.9859
12	0.7920	18	0.9930
13	0.8650	19	0.9966
14	0.9171	20	0.9985
15	0.9517	21	0.9993

社費、手数料、利息および安全割増は考慮しないものとして、①および②の各問いに答えよ。

① 再保険を行わない場合のB保険会社の破産確率は、(k)　　% である。(パーセント表示で小数点以下第2位四捨五入)

② すべての契約について50%の比例再保険を行う場合のB保険会社の破産確率は、(l)　　% である。(パーセント表示で小数点以下第3位四捨五入)

問題4． ある保険種目の年間のクレーム件数Nは平均λのポアソン分布に従い、また各クレーム額X_i $(i=1,2,\cdots,N)$は、次の確率関数$p(k)$ $(=P(X_i=k))$を持つ分布に従うとする。

$$p(k)=-\alpha\frac{c^k}{k} \quad (k=1,2,\cdots,0<c<1)$$

クレーム件数Nと各クレーム額X_iは互いに独立であるとし、クレーム総額分布を$S=X_1+\cdots+X_N$で表すこととする。このとき、次の各問いに答えよ。 (18点)

(1) 定数αをcを用いた式で表せ。

(2) Sの積率母関数を求めよ。ただし、αを用いずに表すこと。

(3) Sが負の二項分布$NB(n,p)$になることを示し、このパラメータn, pをcおよびλを用いた数式で示せ。なお、$NB(n,p)$に従う確率分布Yの確率関数$q(k)$ $(=P(Y=k))$は、

$$q(k)=\binom{n+k-1}{k}p^n(1-p)^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

で与えられる。

損保数理（解答例）

問題1.

(1) × 当年度リトンプレミアム－当年度末未経過保険料＋前年度末未経過保険料

（テキスト1-12ページ参照）

(2) ○ （テキスト8-4ページ参照）

(3) × $n_0\left\{1+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right\}$ （テキスト3-22ページ参照）

(4) × 3,375

算式見積法による当年度IBNR備金は、$\dfrac{〔当年度末3ヶ月間の発生保険金〕}{〔昨年度末3ヶ月間の発生保険金〕}\times$〔前年度IBNR損害〕

によって求められるので、$\dfrac{11250}{10000}\times 3000=3375$ となる。 （テキスト5-7ページ参照）

問題2.

(1) (f) （テキスト2-8ページ参照）

$S=X_1+X_2+\cdots+X_N$ より、

$$\begin{aligned}V(S)&=E_N(V(S\mid N))+V_N(E(S\mid N))\\&=E_N(N\cdot V(X))+V_N(N\cdot E(X))\\&=V(X)E(N)+E(X)^2V(N)\end{aligned}\quad\cdots\ (i)$$

また、N がポアソン分布に従うことから、そのパラメータを λ とすれば、

$$E(N)=V(N)=\lambda$$

である。したがって、$E(N)$ を(i)式から求めると、次のとおりとなる。

$$\begin{aligned}E(N)&=\frac{V(S)}{V(X)+E(X)^2}\\&=\frac{30}{500+50^2}=0.01\end{aligned}$$

したがって、N の確率関数は、次式で表される。

$$P(N=n)=e^{-0.01}\frac{0.01^n}{n!}$$

よって、求める確率は、

$$\begin{aligned}1-P(N=0)&=1-e^{-0.01}\\&=1-0.99005\\&=0.00995\end{aligned}$$

となる。

(2) ① (b) 808 ② (f) 50% （テキスト3-8ページ参照）

① 定常状態では契約者の推移は均衡するので、最終的な各等級の契約者を x_0,x_1,x_2,x_3 とした場合に、次の方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 10{,}000 \\ x_0 = 0.2592x_0 + 0.2592x_1 \\ x_1 = 0.7408x_0 + 0.2592x_2 \\ x_2 = 0.7408x_1 + 0.2592x_3 \\ x_3 = 0.7408x_2 + 0.7408x_3 \end{cases}$$

これを解き、小数点以下を四捨五入すると、

$$x_0 = 283, x_1 = 808, x_2 = 2{,}309, x_3 = 6{,}600$$

となる。

②

$$\frac{(283\times 0\% + 808\times 20\% + 2{,}309\times 40\% + 6{,}600\times 60\%)}{10{,}000} = 0.50452$$

(3) (e) 0.177 (テキスト4-12ページ参照)

各リスク区分のエクスポージャを E_{ij} とすると、Minimum Bias法における満たすべき基準は、次の連立方程式のように表すことができる。

$$\begin{cases} E_{11}\left(r_{11} - \bar{r}_{11}\right) + E_{12}\left(r_{12} - \bar{r}_{12}\right) = 0 \\ E_{21}\left(r_{21} - \bar{r}_{21}\right) + E_{22}\left(r_{22} - \bar{r}_{22}\right) = 0 \\ E_{11}\left(r_{11} - \bar{r}_{11}\right) + E_{21}\left(r_{21} - \bar{r}_{21}\right) = 0 \\ E_{12}\left(r_{12} - \bar{r}_{12}\right) + E_{22}\left(r_{22} - \bar{r}_{22}\right) = 0 \end{cases}$$

また、題意より $E_{11} = E_{12} = E_{21} = E_{22}$ ($= E$ とおく。)であるから、$r_{ij} - \bar{r}_{ij}$ をそれぞれ変数と見なして求めると、

$$\begin{cases} r_{11} - \bar{r}_{11} = r_{22} - \bar{r}_{22} = C/E \\ r_{12} - \bar{r}_{12} = r_{21} - \bar{r}_{21} = -C/E \end{cases}$$

となる。

さらに、この複合分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は、

$$\bar{r}_{ij} = x_i + y_j \quad (i = 1,2;\ j = 1,2)$$

と表せるので、これを上の連立方程式に代入して整理すると、

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = r_{11} - C/E & \text{(a)} \\ x_2 + y_2 = r_{22} - C/E & \text{(b)} \\ x_1 + y_2 = r_{12} + C/E & \text{(c)} \\ x_2 + y_1 = r_{21} + C/E & \text{(d)} \end{cases}$$

となる。ここで、(a)+(b)−(c)−(d) を両辺について計算すると、

$$0 = r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22} - 4C/E$$

となるから、

$$C/E = \frac{r_{11} - r_{12} - r_{21} + r_{22}}{4} = 0.042$$

である。したがって、これを (c) に代入すると、

$$x_1 + y_1 = 0.960$$

また、題意より、$x_1 = r_{1\bullet} = 0.783$ であることがわかっているので、

$$y_2 = 0.960 - 0.783 = 0.177$$

となる。

(4) (d) 0.56 (テキスト5-30ページ参照)

$\lambda_k\ (k=0,1,2)$を損害額の指標、$r_j\ (j=0,1,2;\ r_0+r_1+r_2=1)$を経過年数$j$年の支払比率とすると、与えられた条件から次の方程式が得られる。

$$\begin{cases} \lambda_2 r_2 + \lambda_2 r_1 + \lambda_2 r_0 = \lambda_2 = 5+23+13=41 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_1 r_0 = 20+11=31 \\ \lambda_0 r_0 = 10 \\ \lambda_0 r_0 + \lambda_1 r_0 + \lambda_2 r_0 = 10+11+13=34 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_1 = 20+23=43 \\ \lambda_2 r_2 = 5 \end{cases}$$

これらから解を求めると、

$$\begin{cases} \lambda_0 = 31.8、\lambda_1 = 35.3、\lambda_2 = 41 \\ r_0 = 0.315、r_1 = 0.564、r_2 = 0.122 \end{cases}$$

となる。よって、経過年度2年の支払比率は0.564となる。

問題3.

(1) (a) $\dfrac{(1-\ddot{a}_{(q)\overline{n}|})\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$ (b) $\left({}_tV\phi^{\frac{m}{12}} - \dfrac{W\phi^n+\alpha}{2\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\phi^{\frac{m-6}{12}}\right)\phi^{\frac{1}{24}}$

(テキスト6-17ページ参照)

(a) 初年度の積立保険料をF_1、次年度以降の積立保険料をF_2とすると、

$$\begin{cases} \alpha + F_1 = F_2 \\ \alpha + F_1 + F_2 \times {}_{1|}\ddot{a}_{(q)\overline{n-1}|} = \alpha + W\phi^n \end{cases}$$

となる。ここで、${}_{1|}\ddot{a}_{(q)\overline{n-1}|} = \ddot{a}_{(q)\overline{n}|} - 1$ だから、

$$\underline{F_1 = \frac{(1-\ddot{a}_{(q)\overline{n}|})\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}},\quad F_2 = \frac{W\phi^n+\alpha}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$$

となる。

(b) 第t事業年度末から第t保険年度末までの期間は、

$$\left\{\left(t-\frac{m+1}{12}\right)+\left(t-\frac{m}{12}\right)\right\} \div 2 = \frac{2m+1}{24}$$

であり、この期間に収入する積立保険料を$\frac{1}{2}F_2$と考える。

第t事業年度末の払戻積立金は、この1回分の積立保険料は収入していない。したがって、第t保険年度末から半年前に戻した時点での払戻積立金は、さらに$\frac{2m+1}{24}-\frac{1}{2}$の期間分を戻せばよいから、求める第$t$事業年度末の払戻積立金は、

$$\left({}_tV\phi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}F_2\right)\phi^{\frac{2m+1}{24}-\frac{1}{2}} = \left({}_tV\phi^{\frac{m}{12}} - \frac{1}{2}F_2\phi^{\frac{m-6}{12}}\right)\phi^{\frac{1}{24}} = \underline{\left({}_tV\phi^{\frac{m}{12}} - \frac{W\phi^n+\alpha}{2\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\phi^{\frac{m-6}{12}}\right)\phi^{\frac{1}{24}}}$$

となる。

(2) (c) 66.7　(d) 0.506　(e) 63.4　(テキスト3-16ページ～参照)

(c) インカード・ツー・アーンド・ベイシス損害率$=\dfrac{\text{インカードロス}}{\text{アーンドプレミアム}}$

$$=\frac{55,000-10,000+15,000}{100,000+40,000-50,000}=\frac{60,000}{90,000}=66.7\%$$

(d) 全信頼度に必要なクレーム件数n_Fは、

$$n_F=1,000\times\left(1+\left(\frac{90}{120}\right)^2\right)=1,563$$

よって、部分信頼度Zは、

$$Z=\sqrt{\frac{20,000\times 0.02}{n_F}}=0.506$$

となる。

(e) 改定損害率は、

$$60\%\times(1-Z)+66.7\%\times Z=63.4\%$$

となる。

(3) (f) 9,000　(g) $\dfrac{e^{-\frac{x}{90}}}{90}$　(h) 16,200　(i) 1,273　(j) 6.6　(テキスト7-36ページ参照)

(f) $E(X)=90,\ E(N)=10,000\times 0.01=100$より、

$$E(S)=E(X)E(N)=9,000$$

となる。

(g) $E(X)=90$より、

$$f(x)=\frac{e^{-\frac{x}{90}}}{90}$$

(h) 原点周りの2次のモーメントは、

$$E(X^2)=V(X)+E(X)^2=90^2\times 2=16,200$$

(i)

$$\begin{aligned}\sqrt{V(S)}&=\sqrt{V(X)E(N)+E(X)^2V(N)}\\&=\sqrt{E(N)E(X)^2}\\&=\sqrt{100\times 16,200}=1,273\end{aligned}$$

(j) 破産確率を求めると、

$$\begin{aligned}P\big(S>1.05E(S)+1500\big)&=P\left(\frac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}>\frac{0.05\times E(S)+1500}{\sqrt{V(S)}}\right)\\&=P\big(Z>1.532\big)\end{aligned}$$

この値を直線補間により求めると、

$$P\big(Z>1.532\big)=\frac{(1.645-1.532)\times 0.1+(1.532-1.282)\times 0.05}{1.645-1.282}=0.0656$$

よって、破産確率は6.6%となる。

(4) (k) 20.8　　(l) 4.83　　(テキスト8-8ページ参照)

(k) $k+1$年度の期初における資金は、k年度末のリザーブ2,500万円と$k+1$年度の期初の収入保険料5万円×2,000件＝1億円の合計12,500万円となる。したがって、傷害保険の死亡保険金額が1,000万円であるから、12,500万円／1,000万円＝12.5(件)となり、12件までの保険金支払が可能である。

よって破産確率は、(1－0.7920)×100＝20.8%となる。

(l) $k+1$年度の期初における資金はk年度末のリザーブ2,500万円と$k+1$年度の期初の正味収入保険料5万円×2,000件×{100%－50%(出再比率)}＝5,000万円の合計7,500万円となる。したがって、傷害保険の死亡保険金額が1,000万円で出再比率50%であるから、7,500万円／{1,000万円×(100%－50%)}＝15(件)までの保険金支払が可能である。

よって破産確率は、(1－0.9517)×100＝4.83% となる。

問題4.

(1) $p(k)$は確率関数であるから、$\sum_{k=1}^{\infty} p(k)=1$ である。よって、$\sum_{k=1}^{\infty} p(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\alpha\frac{c^p}{p}\right)=\alpha\log(1-c)$

より、$\alpha=\frac{1}{\log(1-c)}$ が求められる。

(2) $S=X_1+X_2+\cdots+X_N$ は複合ポアソン分布に従うので、S, X の積率母関数をそれぞれ $M_S(t), M_X(t)$ とすると、$M_S(t)=\exp\{\lambda(M_X(t)-1\}$ が成り立つ。したがって、

$$M_X(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\alpha\frac{c^k}{k}e^{tk}\right)=-\frac{1}{\log(1-c)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ce^t)^k}{k}=\frac{\log(1-ce^t)}{\log(1-c)}$$

であることから、

$$M_S(t)=\exp\left\{\lambda\left(\frac{\log(1-ce^t)}{\log(1-c)}-1\right)\right\}$$

となる。

(3) 負の二項分布に従う確率変数Yの積率母関数$M_Y(t)$は、

$$M_Y(t)=\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^n \qquad \cdots \text{(ii)}$$

で表される。ところで、

$$M_S(t)=e^{-\lambda}(1-ce^t)^{\frac{\lambda}{\log(1-c)}}=\left(\frac{1-c}{1-ce^t}\right)^{-\frac{\lambda}{\log(1-c)}}$$

であることから、これは(ii)式において、$p=1-c$、$n=-\frac{\lambda}{\log(1-c)}$ としたものに等しいことが分かる。

よってSは、$-\frac{\lambda}{\log(1-c)}$ が整数のときに負の二項分布に従い、各パラメータは$n=-\frac{\lambda}{\log(1-c)}$、$p=1-c$ によって与えられる。　　(テキスト2-8ページ～参照)