数学1（問題）

1．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（40点）

(1) 0,1,2,…を値としてとる独立な確率変数X,Yが共に平均pの幾何分布に従うとき、$P(X=k\mid X+Y=n)=$ $\boxed{}$ (n=0,1,2,…; k=0,1,2,…n)である。

(2) 2変数関数 $f(x,y)=\begin{cases}Kxy(1-x-y) & (x,y)\in R\\ 0 & (x,y)\notin R\end{cases}$

（ここに、$R=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1,\ x+y<1\}$）が、2次元確率変数(X, Y)の同時確率密度関数になるような定数Kは、K= $\boxed{}$ である。また、このとき、X の周辺確率密度関数 $f_1(x)=$ $\boxed{}$ である。

(3) ある昆虫が1度の産卵でr個の卵を生む確率は $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^r}{r!}$ $(\lambda>0)$ であるとする。また、1つ1つの卵は独立にふ化するものとし、その確率がすべてpであるとする。このとき、1度の産卵でk個の卵がふ化する確率は $\boxed{}$ である。

(4) 人間の記憶が残存する時間は指数分布に従うとし、30分以内に記憶が失われる確率は $\dfrac{1}{2}$ であるとする。このとき、記憶の平均残存時間は $\boxed{}$ 分（小数点以下四捨五入）である（次の数表を用いよ）。

x	2	3	5	7
$\log_e(x)$	0.693147	1.098612	1.609438	1.945910

(5) X_1, X_2 は互いに独立な確率変数で、同じ確率密度関数 $f(x)=x\exp(-\frac{1}{2}x^2)$ $(x\geq 0)$ を持つとする。この時、確率変数 $Y=\min(X_1,X_2)$ の確率密度関数 $f_Y(y)=$ $\boxed{}$ $(y\geq 0)$ である。

(6) 負の二項分布NB(r,p)の確率分布 $P(X=x)=\dfrac{(x+r-1)!}{x!(r-1)!}p^r(1-p)^x$ $(x=0,1,2,\cdots;$ rは正の整数）の最大値を与えるxは $\boxed{}$ を超えない最大の整数である。

(7) 区間[0, 1]の中で、2つの数を無作為かつ独立に選ぶ。この時、大きい方の数を2乗した値が小さい方の数より大きい確率は $\boxed{}$ である。

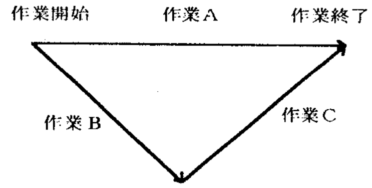
(8) 2次元確率変数(X,Y)の同時確率分布が、

$$P(X=x,Y=y)=\frac{n!}{x!\,y!\,(n-x-y)!}\alpha^x\beta^y(1-\alpha-\beta)^{n-x-y}\quad \begin{pmatrix} x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le n, \\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき、X,Y の共分散 Cov(X,Y)= $\boxed{}$ である。

(9) ある会社に、段ボール箱100箱分のコンピュータ出力リストが届いた。各リストはすべて異なり、それぞれの段ボール箱には十分多くの枚数のリストが、同じ枚数ずつ、無作為に収められているとする。この100箱の中から、特定の異なる2枚のリストを探し出すために開ける必要のある段ボール箱の個数は平均して $\boxed{}$ 箱（小数点以下四捨五入）である。なお2枚のリストは同一の段ボール箱に入っていることもあるとする。

(10) 右図のようなA,B,Cの3つの作業があり、AはB,Cとそれぞれ並行してできるが、CはBが終わらないと始められない。各作業の所要日数とその確率分布が次のとおり与えられているとき、全作業が終了するまでの所要日数の期待値は $\boxed{}$ 日（小数点以下第2位四捨五入)である。



作業の種類	A		B		C	
所要日数	4日	6日	1日	3日	2日	4日
確率	0.5	0.5	0.3	0.7	0.8	0.2

2．X,Y 2つのつぼにそれぞれN個の球が入っている。Xには赤球が1個、残りは白球、Yは全部白球である。X,Yからそれぞれ1球ずつ取り出して互いに他のつぼへ移す。これをn回繰り返したとき、赤球がXに入っている確率を求めよ。ただし、$N\ge 2$とする。(15点)

3．三角分布の確率密度関数は$f(x)=1-|x|$ $(-1<x<1)$ である。このとき、次の問に答えよ。(20点)

(1) この分布の積率母関数を求めよ。

(2) X,Yが独立で、ともに(0,1)上の一様分布に従うとき、X－Yが三角分布に従うことを、(1)の結果を用いて示せ。

4．あるタクシーの運賃は、初めの1 kmはA円、その後は1 km増すごとにB円追加されるものとする（1 km未満の距離は1 kmに切り上げる）。1日の乗車人数Nは平均値μ（人）のポアソン分布に従い、1人あたりの乗車距離は平均値λ (km)の指数分布に従うとするとき、1日の売り上げの平均値を求めよ。

なお、このタクシーには1度に1人の客しか乗車しないものとする。(25点)

以　上

数学１　解答

１．

(1)	$\dfrac{1}{n+1}$	
(2)	K=120	$f_1(x)=\begin{cases}20x(1-x)^3 & (0<x<1)\\ 0 & (x\le 0,\ 1\le x)\end{cases}$ $\left(f_1(x)=20x(1-x)^3\right.$ のみでも可$\left.\right)$
(3)	$e^{-\lambda p}\dfrac{(\lambda p)^k}{k!}$	
(4)	43	
(5)	$f_Y(y)=2ye^{-y^2}$	
(6)	$\dfrac{(1-p)(r-1)}{p}$	
(7)	$\dfrac{2}{3}$	
(8)	$-n\alpha\beta$	
(9)	67	
(10)	5.6	

（１）X，Yの分布は $P(X=k)=P(Y=k)=rs^k\ \left(r+s=1;\ \dfrac{s}{r}=p\right)$ で表される。

X，Yは独立であるので、$P(X=i,\ Y=n-i)=P(X-i)P(Y=n-i)$

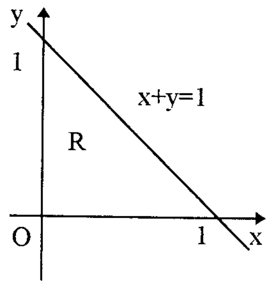
よって、

$$P(X+Y=n)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i,\ Y=n-i)=\sum_{i=0}^{n}P(X=i)P(Y=n-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}rs^{i}\cdot rs^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}r^2s^n=(n+1)r^2s^n$$

したがって、$P(X=k|X+Y=n)=\dfrac{P(X=k,\ Y=n\text{-}k)}{P(X+Y=n)}=\dfrac{rs^k\cdot rs^{n-k}}{(n+1)r^2s^n}=\dfrac{1}{n+1}$

（2）$\iint_R f(x,y)dxdy=K\int_0^1 dx\int_0^{1-x}xy(1-x-y)dy$



$=K\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left\{x(1-x)y-xy^2\right\}dy$

$=K\int_0^1\left[\dfrac{x(1-x)}{2}y^2-\dfrac{x}{3}y^3\right]_0^{y=1-x}dx$

$=K\int_0^1\dfrac{1}{6}x(1-x)^3dx=K\int_0^1\dfrac{1}{6}\left\{(1-x)^3-(1-x)^4\right\}dx$

$=K\left[-\dfrac{1}{24}(1-x)^4+\dfrac{1}{30}(1-x)^5\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{120}K$

f(x,y)が同時確率密度関数であることから$\iint_R f(x,y)dxdy=1$であるので、K=120

また、X の周辺確率密度関数$f_1(x)$は、$0<x<1$ に対して、

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{0}f(x,y)dy+\int_0^{1-x}f(x,y)dy+\int_0^{\infty}f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{1-x}120xy(1-x-y)dy=\left[60x(1-x)y^2-40xy^3\right]_0^{1-x}$$

$$=20x(1-x)^3$$

$x\le 0,\ 1\le x$ では明らかに$f_1(x)=0$

（3）この昆虫が1度の産卵で r 個の卵を生む事象を A_r、k 個が孵化する事象を B_k とする。

$P(B_k|A_r)={}_rC_k p^k(1-p)^{r-k}$ $(r \geq k)$ であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned}\sum_{r=k}^{\infty} P(B_k|A_r)P(A_r) &= \sum_{r=k}^{\infty} {}_rC_k p^k(1-p)^{r-k} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \\ &= \sum_{r=k}^{\infty} \frac{r!}{(r-k)!k!} p^k(1-p)^{r-k} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{r-k}\lambda^k}{r!} \\ &= \frac{p^k}{k!}e^{-\lambda}\lambda^k \sum_{r=k}^{\infty} \frac{\lambda^{r-k}(1-p)^{r-k}}{(r-k)!} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

（4）記憶の残存時間の従う指数分布の確率密度関数を $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(t \geq 0;\ \lambda > 0)$ とする。

題意より、$\displaystyle\int_0^{30} f(t)dt = \frac{1}{2}$

また、$\displaystyle\int_0^{30} f(t)dt = \int_0^{30} \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{30} = 1-e^{-30\lambda}$ であるから、$e^{-30\lambda} = \dfrac{1}{2}$

よって、$\lambda = \dfrac{1}{30}\log_e 2$

このとき、記憶の平均残存時間は、

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} = \frac{30}{\log_e 2} = \frac{30}{0.693147} \\ &= 43.28\cdots\end{aligned}$$

→43 分

（5）$y \geq 0$ に対して、

$$P(Y \le y) = P(\min(X_1, X_2) \le y) = 1 - P(\min(X_1, X_2) > y)$$
$$= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y)$$
$$= 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \quad (\because X_1,\ X_2 \text{ は互いに独立})$$

ここで、

$$P(X_1 > y) = P(X_2 > y) = \int_y^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2} \right]_y^\infty = e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

よって、$P(Y \le y) = 1 - e^{-y^2}$

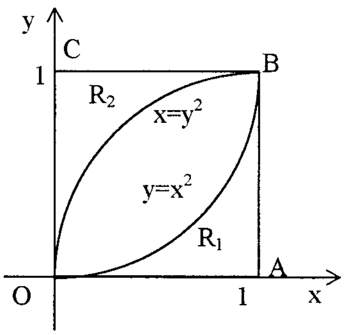
したがって、$f_Y(y) = (1 - e^{-y^2})' = 2ye^{-y^2} \ (y \ge 0)$

（６） $p(x) = P(X = x)$ とおくと、$\dfrac{p(x)}{p(x-1)} = \dfrac{x+r-1}{x} \cdot (1-p)$

よって、$\dfrac{p(x)}{p(x-1)} \ge 1$ となる x は、$\dfrac{x+r-1}{x} \cdot (1-p) \ge 1$ より、$x \le \dfrac{(1-p)(r-1)}{p}$ で与えられる。

したがって、P(X=x)を最大にする x は $\dfrac{(1-p)(r-1)}{p}$ を超えない最大の整数である。

（７） ２つの数をX，Ｙとすると、（X，Ｙ）の組は図の正方形ＯＡＢＣの中で一様分布する。このとき、「大きい方の数を２乗した値が小さい方の数より大きい」という事象は、図の領域 R_1 と R_2 で表されるので、求める確率は、$\dfrac{R_1 \text{と} R_2 \text{の面積合計}}{\text{正方形の面積}} = \dfrac{2 \times \int_0^1 x^2 dx}{1} = \dfrac{2}{3}$



（８） $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

ここで、

$$E(XY)=\sum_{x=0}^{n}\sum_{y=0}^{n-x}xy\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!}\alpha^x\beta^y(1-\alpha-\beta)^{n-x-y}$$

$$=n(n-1)\alpha\beta\times$$

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n-x}\left[\frac{(n-2)!}{(x-1)!(y-1)!\{(n-2)-(x-1)-(y-1)\}!}\alpha^{x-1}\beta^{y-1}(1-\alpha-\beta)^{(n-2)-(x-1)-(y-1)}\right]$$

$$=n(n-1)\alpha\beta\times$$

$$\sum_{x'=0}^{n-2}\sum_{y'=0}^{n-2-x'}\left[\frac{(n-2)!}{x'!y'!\{(n-2)-x'-y'\}!}\alpha^{x'}\beta^{y'}(1-\alpha-\beta)^{(n-2)-x'-y'}\right]\quad(x'=x-1,\ y'=y-1)$$

$$=n(n-1)\alpha\beta$$

同様の計算により、$E(X)=n\alpha,\ E(Y)=n\beta$ が示せるので、

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=n(n-1)\alpha\beta-(n\alpha)(n\beta)=-n\alpha\beta$$

（9）k 番めの箱を開けた時に探しているリストが見つかる確率は $\frac{1}{100}$、したがって、k 番めの箱を開けた時にそのリストが既に見つかっている確率は $\frac{k}{100}$ である。おのおののリストは独立に見つかると考えられるので、k 番めの箱を開けた時に目的の２枚のリストが既に見つかっている確率は $\left(\frac{k}{100}\right)^2$

よって、k 番めの箱を開けて初めてその２枚のリスト両方のありかが判明する確率 P_k は、$P_k=\left(\frac{k}{100}\right)^2-\left(\frac{k-1}{100}\right)^2\ (k\geq 2)$

これは、k=1 の時も成り立つ。

よって、求める平均は、

$$\sum_{k=1}^{100}k\cdot P_k=\sum_{k=1}^{100}k\cdot\left(\frac{k}{100}\right)^2-\sum_{k=0}^{99}(k+1)\cdot\left(\frac{k}{100}\right)^2=100-\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{k}{100}\right)^2$$

$$=100-\frac{1}{10000}\cdot\frac{99\times100\times199}{6}=\frac{13433}{200}=67.165$$

$\rightarrow 67$個

（１０）各作業の所要日数をx_A, x_B, x_Cで表すと、作業B，Cの合計の所要日数とその確率分布は次表のとおりとなる。

x_B	x_C	x_{B+C}	確率
1日	2日	3日	0.24
1	4	5	0.06
3	2	5	0.56
3	4	7	0.14

まとめると、

x_{B+C}	確率
3日	0.24
5	0.62
7	0.14

次に、作業Aと作業B，Cは並行してできることを考慮して、全体の作業終了までの所要日数とその確率分布は次のとおりとなる。

x_A	x_{B+C}	x_{A+B+C}	確率
4日	3日	4日	0.12
4	5	5	0.31
4	7	7	0.07
6	3	6	0.12
6	5	6	0.31
6	7	7	0.07

まとめると、

x_{A+B+C}	確率
4日	0.12
5	0.31
6	0.43
7	0.14

したがって、求める期待値は次のとおり。

$4\times 0.12+5\times 0.31+6\times 0.43+7\times 0.14=5.59\rightarrow 5.6$日

2．n回めの試行後に赤球がXにある確率をp_n、Yにある確率をq_nとする。

$(p_n+q_n=1)$

題意より$p_0=1$は明らかである。

1回めの試行後に、赤球がXに入っているのは、X，Yからともに白球が取り出されて、他のつぼに移された場合である。Xから白球が取り出される確率は$\frac{N-1}{N}=1-\frac{1}{N}$、Yから白球が取り出される確率は1であり、それぞれの球は独立に取り出されるとみなせるので、$p_1=\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot 1=1-\frac{1}{N}$

n回めの試行後に赤球がXにあるのは、（n－1）回めの試行後に赤球がXにあって、n回めの試行で白球同士が交換される場合か、（n－1）回めの試行後に赤球がYにあって、n回めの試行でXの白球とYの赤球が交換される場合のいずれかであり、両者は排反な事象である。

よって、次の漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
p_n &= p_{n-1}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N}{N}+q_{n-1}\cdot\frac{N}{N}\cdot\frac{1}{N}\\
&=\left(1-\frac{2}{N}\right)p_{n-1}+\frac{1}{N}\quad (n\geq 2)
\end{aligned}
$$

この漸化式を解くと、

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(p_{n-1}-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}\quad(n\geq 2)$$

$$\therefore\ p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}\right\}\ (n\geq 2)$$

これは、$n=1$の時も成り立つ。

よって、$p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(1-\dfrac{2}{N}\right)^{n}\right\}(n\geq 1)$

3.

（1）積率母関数の定義より、g(t)は次のとおり計算される。

$$g(t)=\int_{-1}^{1}e^{tx}(1-|x|)dx=\int_{-1}^{0}e^{tx}(1+x)dx+\int_{0}^{1}e^{tx}(1-x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{t}e^{tx}(1+x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\frac{1}{t}e^{tx}dx+\left[\frac{1}{t}e^{tx}(1-x)\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}\frac{1}{t}e^{tx}dx$$

$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{t}-\frac{1-e^{-t}}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{e^{t}-1}{t^2}$$

$$=\frac{e^{t}+e^{-t}-2}{t^2}$$

（2）X, Y は(0, 1)上の一様分布に従うので、その積率母関数$h_X(t),h_Y(t)$は、

$$h_X(t)=h_Y(t)=\int_{0}^{1}e^{tx}dt=\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_{0}^{1}=\frac{e^{t}-1}{t}$$

よって、$h_{-Y}(t)=h_Y(-t)=\dfrac{e^{-t}-1}{-t}=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$

X, Yは互いに独立であるので、X, －Yも互いに独立。よって、X－Yの積率母関数$h_{X-Y}(t)$は$h_X(t)$と$h_{-Y}(t)$の積で表され、

$h_{X-Y}(t)=\dfrac{e^{t}-1}{t}\cdot\dfrac{1-e^{-t}}{t}=\dfrac{e^{t}+e^{-t}-2}{t^2}$となる。

これは（1）で求めた $g(t)$ に一致するので、$X-Y$ は三角分布に従うことがわかる。

4．1人の乗客について、乗車距離を表わす確率変数を X（km）、売り上げを表わす確率変数を Y（円）とすると、

$$Y = A + Bk \quad (k < X \le k+1;\ k = 0,1,2,\cdots)$$

よって、

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k}^{k+1}(A+Bk)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx = A + B\sum_{k=0}^{\infty}k\int_{k}^{k+1}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$

$$= A + B\sum_{k=0}^{\infty}k\left[-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_{k}^{k+1} = A + B\sum_{k=0}^{\infty}k\left(e^{-\frac{k}{\lambda}} - e^{-\frac{k+1}{\lambda}}\right) = A + B\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k}{\lambda}}$$

$$= A + Be^{-\frac{1}{\lambda}}\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{\lambda}}} = A + \frac{B}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}$$

今、1日の中で i 番めに乗車した人の売上げを表わす確率変数を Y_i（円）とすると、1日の売上げを表わす確率変数を Z（円）は $Z = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$ で表わされる。

よって、1日の売上げの平均は、

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n \mid N=n) = \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{n}}{n!}\cdot n\cdot\left(A + \frac{B}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right) = \mu\left(A + \frac{B}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \mu\left(A + \frac{B}{e^{\frac{1}{\lambda}}-1}\right)$$