年金数理(問題)

1. 次の(1)～(8)までについて、それぞれ5つの選択肢から正しいものを選んで解答用紙の所定欄にその記号を記入せよ。(24点)

(1)初年度には年金額1、次年度以降は前年度の年金額の$1+b$倍の額の年金を支払う期始払終身年金現価は次のうちどれか。ただし、予定利率i ($i>0$)、予定死亡率は各年齢ともqで一定とし、この期始払終身年金現価は収束値をもつとする。

(A) $\dfrac{i+q-b+q\cdot b}{1+i}$ (B) $\dfrac{1}{i+q-b+q\cdot b}$ (C) $\dfrac{1+i}{i+q-b+q\cdot b}$ (D) $\dfrac{1+i}{1+i+q-b+q\cdot b}$

(E) $\dfrac{1}{1-i-q+b-q\cdot b}$

(2)次の4つの算式のうち、正しく$a_{x|y}$を示しているものの数はいくつか。

①与式$=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_y\cdot(1-{}_tp_x)$　　②与式$=a_y-a_{xy}$

③与式$=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_{\overline{xy}}$　　④与式$=\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_y-\sum_{t=1}^{\infty}v^t\cdot{}_tp_y\cdot{}_tp_x$

(A) 0個　(B) 1個　(C) 2個　(D) 3個　(E) 4個

(3)年齢に関係なく生存率がpで一定であるとき、予定利率iを期末払終身年金現価率a_xとpにより表わすと次のうちどれか。

(A) $\dfrac{p-(1-p)\cdot a_x}{a_x}$ (B) $\dfrac{p}{a_x}$ (C) $\dfrac{1-p+p\cdot a_x}{a_x}$ (D) $\dfrac{p-a_x}{a_x}$ (E) $\dfrac{1-p\cdot a_x}{(1-p)\cdot a_x}$

(4) $\mu_{x+t}=\dfrac{a}{1+a\cdot t}$　($0\leqq t\leqq 1$) のとき、aをp_xで表わすとつぎのうちどれか。

(A) $\dfrac{1}{1-p_x}$ (B) $\dfrac{p_x}{1-p_x}$ (C) $\dfrac{1-p_x}{p_x}$ (D) $1-p_x$ (E) $p_x\cdot(1-p_x)$

(5)定常人口において$l_x=a-x$　($0\leqq x\leqq a$)、$\mathring{e}_0=60$ のとき、この人口の平均年齢が最も近いものは次のうちどれか。

(A) 38歳　(B) 40歳　(C) 42歳　(D) 44歳　(E) 46歳

多重脱退残存表（(6)および(7)の資料）

年齢（x）	加入者数（l_x）	死亡者数	生存脱退者数	T_x
20	100,000.0000	86.0000	8,000.0000	1,347,685.55
21	91,914.0000	75.3695	7,353.1200	1,251,728.55
22	84,485.5105	65.8986	8,448.5511	1,163,528.79
23	75,971.0608	56.9783	7,597.1061	1,083,300.50
24	68,316.9764	50.5545	6,148.5279	1,011,156.49
25	62,117.8940	46.5884	5,590.6105	945,939.05
26	56,480.6951	42.9254	4,518.4556	886,639.76
27	51,919.3141	39.9779	4,153.5451	832,439.75
28	47,725.7911	36.7488	3,340.8054	782,617.20
29	44,348.2369	33.7046	3,104.3766	736,580.18
30	41,210.1557	31.3198	2,472.6093	693,800.99
31	38,706.2266	30.5779	2,322.3736	653,842.80
32	36,353.2751	31.2638	1,817.6638	616,313.05
33	34,504.3475	32.4340	1,725.2174	580,884.24
34	32,746.6961	33.7292	1,309.8678	547,258.71
35	31,403.0991	34.8574	942.0930	515,183.82

以下の年齢は略

(注) $T_x = \frac{1}{2} \cdot l_x + \sum_{y=x+1}^{x_r-1} l_y$

(6)死亡・生存脱退の状況が資料の多重脱退残存表にしたがっている定常状態の年金制度があり、この制度では毎年20歳と30歳の２つの年齢でそれぞれ100人ずつ新規加入者がいる。この制度の総被保険者数に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 1,500人　(B) 2,000人　(C) 2,500人　(D) 3,000人　(E) 3,500人

(7) 資料の多重脱退残存表から、25歳における死亡率に最も近いものは次のうちどれか。

(A) 0.00075　(B) 0.00076　(C) 0.00077　(D) 0.00078　(E) 0.00079

(8)ある定常状態の年金制度において、給付を一律1.2倍にする制度変更を行った（過去勤務期間は全て通算する）。制度変更により発生した後発債務は10年間の定額特別保険料で償却するものとして、変更後の年間保険料額は変更前の年間標準保険料額の何倍になるか、最も近いものは次のうちどれか。ただし、変更直前の計数は以下のとおりであった。

・年金資産：20,000　・年間標準保険料額；3,000　・10年確定年金現価率；8.1109

(A) 1.200倍　(B) 1.323倍　(C) 1.333倍　(D) 1.364倍　(E) 1.529倍

2. 次の(1)、(2)について、空欄に当てはまる数値あるいは算式を求め、解答用紙の所定欄に記入せよ。(16 点)

(1) 下の表はある年金制度のある年度の貸借対照表および損益計算書である。この年金制度の保険料は期初払い込み、給付は期末払いであり、この年度の積立金の運用利回りは 2.5%であった。

表中の*****で表現されている運用収益は $\boxed{①}$ であり、当年度発生不足金額は $\boxed{②}$ である。

貸借対照表（年度末）

借方		貸方	
年金資産	9,800	年度末責任準備金	12,500
不足金	2,700		

損益計算書

借方		貸方	
給付金	2,500	前年度末責任準備金	12,000
当年度末責任準備金	12,500	保険料収入	2,000
		運用収益	*****
		当年度発生不足金	*****

この年度の不足金の発生要因は利差損益、前年度末剰余金(または不足金)にかかる予定利息および責任準備金変動等損益の３要因に分けられる。このうち、責任準備金変動等損益が 300 の不足要因であることが分かっているとする。この場合、この年金制度の予定利率は $\boxed{③}$ であり、利差損益は $\boxed{④}$ 、前年度剰余金(または不足金)にかかる予定利息は $\boxed{⑤}$ である。(③は百分率で少数第 2 位を四捨五入して第 1 位までとし、他の値は小数を四捨五入して整数とする。また④および⑤において不足要因の場合は数値の前にΔを付すこと。)

(2) 次のような年金制度を考える。

・定額給付制度、・加入期間τ年(1年未満切捨て)の脱退者の年金額；α_τ、

・年金支給期間；退職の翌期初からn年間の確定年金、・財政方式；加入年齢方式

このとき、x歳の被保険者一人あたりの給付現価S_x、給与現価G_xは

$$S_x = \frac{1}{D_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} \boxed{\quad ⑥ \quad} + \alpha_{x_r-x_e} \cdot D_{x_r} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$G_x = \frac{1}{D_x} \cdot \boxed{\quad ⑦ \quad}$$ と表される。

一方でS_{x_e}、G_{x_e}は

$$S_{x_e} = \Bigl(\upsilon \cdot q_{x_e} \cdot \alpha_{x_e-x_e} + \upsilon^2 \cdot {}_{1|}q_{x_e} \cdot \alpha_{x_e+1-x_e} + \cdots + \upsilon^{x_r-x_e} \cdot {}_{x_r-x_e-1|}q_{x_e} \cdot \alpha_{x_r-x_e-1}$$

$$\boxed{\quad ⑧ \quad} \Bigr) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$G_{x_e} = q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{1}|} + {}_{1|}q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|} + \cdots + {}_{x_r-x_e-1|}q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|} + \boxed{\quad ⑨ \quad}$$

とも表すことができ

$S_{x_e} - P_{x_e} \cdot G_{x_e} = 0$　(P_{x_e}:標準保険料率)より、年金終価率を用いて表すと以下となる。

$$\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \upsilon^{y-x_e+1} \cdot {}_{y-x_e|}q_{x_e} \cdot \left(\boxed{\quad ⑩ \quad} \right) + \upsilon^{x_r-x_e} \cdot {}_{x_r-x_e}p_{x_e} \cdot \left(\boxed{\quad ⑪ \quad} \right) = 0$$

上式は、各年齢で脱退が起こった場合に発生する給付と、それまでの保険料収入の積み上げとの乖離度合を示しているといえる。この各年齢における脱退による剰余・不足の現価の期待値が0となっていることはP_{x_e}が給付と保険料収入が収支相等するような保険料率であることを示している。

3. 定常状態に到達しているTrowbridgeモデルの年金制度における次の各財政方式における積立金はどうなるか。積立金の説明にある語群の記号を用いて表わし、解答用紙の所定欄に記入せよ。 (5点)

積立方式：①加入時積立方式 ②完全積立方式 ③退職時年金現価積立方式 ④単位積立方式 ⑤平準積立方式

積立金の説明：(A)在職中の被保険者の過去の加入員期間に対応する給付現価
(B)在職中の被保険者の過去の保険料の元利合計
(C)在職中のx_e歳を除く被保険者の給付現価
(D)在職中の被保険者の給付現価
(E)将来加入が見込まれる被保険者の給付現価
(F) x_r 歳を除く年金受給権者の給付現価
(G)年金受給権者の給付現価

4. 定年退職者に最終給与比例制による終身年金を支払う年金制度についての加入年齢方式での標準保険料率に関する説明として、正しい場合は○、誤っている場合は×を解答用紙の所定欄に記入せよ。 (5点)

(1)定年到達までの予定脱退率が各年齢で一律に上昇すると標準保険料率は上昇する。

(2)予定脱退率の変動状況として、若年齢層では低下し、高年齢層では上昇し、結果として標準保険料率算定に用いる加入年齢から定年年齢までの残存率は不変であったとした場合の標準保険料率は変動しない。

(3)給与指数の傾きが各年齢で一律に大きくなると標準保険料率は上昇する。

(4)予定利率を変更して低いものとした場合、給付現価は増加し、給与現価は減少するため標準保険料率は上昇する。

(5)支給率テーブルのうち加入年数の短い部分に対応する支給率の引き上げを行ったが、標準保険料率算定に用いる加入年齢から定年年齢までの加入年数に対応する支給率は変動がなかった場合、標準保険料率は変動しない。

5. 以下の各設問に答えよ。(15点)

年度中の脱退者に対して加入期間に応じた年金額 A_t のn年確定年金を脱退年度末から支払う保険料期初払いの年金制度を考える。

(1) 期初時点で x 歳、加入期間 t 年である加入者が、年度中に脱退した場合の給付現価を $A_t \cdot a_{\overline{n}|}$ 、期末時点の加入年齢方式による責任準備金を $V_{x+1,t+1}$ とする。この者が期末に加入している（脱退しなかった）ことによる後発債務を式で表わせ。なお、x 歳の脱退率を q_x とする。

(2) この年金制度において、脱退者の年齢、加入員期間あるいは脱退者の人数にかかわらず脱退による後発債務が発生しないとすると $A_t \cdot a_{\overline{n}|}$ =(脱退時まで払い込んだ標準保険料の脱退年度末までの元利合計) と表わされることを示せ。

6. 毎年度の保険料払い込みと給付支払いは期初に行う年金制度が、定常状態に到達している場合に以下の問いに答えよ。ただし、各年度の、保険料総額は P 、給付総額は S 、年度末の年金資産は F とし、実際の運用利回りは特に断りのない限り、予定利率 i に等しいものとする。(17点)

(1) 年金資産 F を P 、S 、i を用いて表わせ。

(2) ある年度に実際の運用利回りが $i-\Delta i>0$ に低下したとしたとき、この年度の年金財政上の不足額を P 、S 、i および Δi を用いて表わせ。

(3) (2)の不足額を償却するために、P とは別の特別保険料 ΔP を翌年度始より永久償却にて設定するとした場合 ΔP を P 、S 、i および Δi を用いて表わせ。ただし、特別保険料算出に用いる予定利率は i とする。

(4) (3)において、翌年度以降は実際の運用利回りが予定利率 i の水準に戻るとした場合、翌年度末以降の年度末年金資産は変動しないことを証明せよ。

(5) (3)において、翌年度以降は実際の運用利回りが $i-\Delta i>0$ に低下したままで継続するとし、不足額を償却するために(3)と同様に特別保険料を毎年見直して設定した場合、毎年度の保険料（毎年見直して設定する特別保険料を含む）と年度末年金資産はある値に収束することを証明し、その収束値を求めよ。

7. 次のような年金制度について、以下の問いに答えよ。(18 点)

・給付内容：満 60 歳前の脱退者には満 60 歳時より期初払終身年金を支払う。満 60 歳後の脱退者に対しては、次の誕生日より期初払終身年金を支払う。

・x 歳の予定脱退率（満 x 歳から満 $x+1$ 歳分、脱退は期末に発生するものとする）：q_x^w、ただし死亡率は含まない。

・x 歳の予定死亡率（満 x 歳から満 $x+1$ 歳分、死亡は期末に発生するものとする）：q_x^d

・生命表における最終年齢：ω 歳（$\omega > 60$ 歳）

・予定利率：i

(1) 既に脱退している丁度満 x 歳の者の年金額 1 に対する給付現価 S_x^d を $x \geqq 60$ の場合と $x < 60$ の場合に分けて求めよ。（解答のみでよい）

なお、解答には、予定死亡率 q_x^d および予定利率 i に対応する計算基数 D_x^d、N_x^d を使用せよ。

(2) まだ脱退していない丁度満 x 歳の被保険者の給付現価 S_x を求めよ。ただし、年金額は加入期間にかかわらず 1 とする。（解答のみでよい）

なお、解答には、総脱退率 $q_x^w + q_x^d$ および予定利率 i に対応する計算基数 D_x、N_x、C_x^w および(1)にて定義した S_x^d を使用せよ。（D_x^d、N_x^d は使用しないこと）

(3) 年金額を制度への加入期間 τ 年（年未満切上げ）に応じた $A\cdot\tau$ としたとき、既に加入期間が丁度 t 年である丁度満 x 歳の被保険者の総給付現価を求めよ。（解答のみでよい）

なお、解答には、総脱退率 $q_x^w + q_x^d$ および予定利率 i に対応する計算基数 D_x、N_x、C_x^w および(1)にて定義した S_x^d を使用せよ。（D_x^d、N_x^d は使用しないこと）

(4) (3)と同じ給付内容の制度維持のため、毎年の誕生日に保険料として、年齢に応じて $A\cdot S_x$（(2)で定義したもの）を徴収するとした場合、既に加入期間が丁度 t 年である丁度満 x 歳の被保険者の将来法責任準備金は $A\cdot t\cdot S_x$ に等しいことを証明せよ。

以上

年金数理解答例

1.

番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
記号	(C)	(D)	(A)	(C)	(B)	(D)	(E)	(D)

解答は上記であるが、解説は以下のとおり。

(1)初項1、等比$\dfrac{1+b}{1+i}\cdot(1-q)$ の等比数列の和になるから

$$\frac{1}{1-\dfrac{(1+b)\cdot(1-q)}{1+i}}=\frac{1+i}{1+i+(1+b)\cdot(1-q)}=\frac{1+i}{i+q-b+bq}$$

したがって(C)が正しい。

(2) $a_{x|y}$ は x の死亡後 y の生存を条件に支払われる期末払の復帰年金だから

$$a_{x|y}=\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^t\cdot{}_tp_y\cdot(1-{}_tp_x)=\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^t\cdot{}_tp_y-\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^t\cdot{}_tp_y\cdot{}_tp_x=a_y-a_{xy}$$

したがって、①、②および④が正しい算式であり3つの(D)が正しい。

(3) $$a_x=\sum_{t=1}^{\omega}{}_tp_x\cdot\upsilon^t=\sum_{t=1}^{\omega}(p\cdot\upsilon)^t=\frac{p\cdot\upsilon}{1-p\cdot\upsilon}=\frac{p}{(1+i)-p}$$

$\therefore\quad a_x\cdot\{(1+i)-p\}=p$ より i について解くと

$$i=\frac{p\cdot(1+a_x)-a_x}{a_x}=\frac{p-a_x\cdot(1-p)}{a_x}$$ したがって(A)が正しい。

(4) $$\int_0^1\mu_{x+1}dx=\int_0^1\frac{a}{1+a\cdot t}dt=\left[\log\left(t+\frac{1}{a}\right)\right]_0^1=\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\log\frac{1}{a}=\log(1+a)$$

$$\mathrm{P}x=e^{-\int_0^1\mu_{x+t}dt}=e^{-\log(1+a)}=\frac{1}{1+a}$$

$\therefore\ a = \dfrac{1-p_x}{P_x}$ より（C）が正しい。

(5) $l_x = a - x$ だから $T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}dt = \int_0^{\omega-x} \{a-(x+t)\}dt = \left[at - xt - \dfrac{t^2}{2}\right]_0^{\omega-x}$

$= (a-x) - \dfrac{(\omega-x)^2}{2}$ 　　$l_\omega = a - \omega$ より $\omega = a$ だから $T_x = \dfrac{(a-x)^2}{2}$

$\mathring{e}_0 = T_0 / l_0 = \dfrac{a^2}{2} / a = \dfrac{a}{2} = 60$ 　より　$a = 120$

平均年齢は　$\int_0^\omega l_x \cdot x\, dx / T_0$ 　だから

$\int_0^\omega \left(ax - x^2\right) dx / \left(a^2/2\right) = \left[\dfrac{ax^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^\omega / \left(a^2/2\right) = \dfrac{a}{6} \cdot 2 = 40$ 　したがって

(B)が正しい。

(6) 総人数 $= l_{20}^{ent} \cdot \mathring{e}_{20} + l_{30}^{ent} \cdot \mathring{e}_{30} = 100 \times \dfrac{1{,}347{,}685.55}{100{,}000} + 100 \times \dfrac{693{,}800.99}{41{,}210.1557} =$

3,031.25

したがって、(D)が正しい。

(7) 表より　$q_{25}^{(\omega)} = 5{,}590.6105 / 62{,}117.8940 = 0.0900$

$q_{25}^{(d)} = 46.5884 / 62{,}117.8940 = 0.00075$

$q_{25}^{(*)} = 0.00075 / (1 - \dfrac{1}{2} \cdot 0.09) = 0.0007853 \quad \to 0.00079$

したがって(E)が正しい。

(8) 後発 PSL : 20,000×0.2＝4,000

特別保険料 : 4,000÷8.1109=493.2

標準保険料 : 3,000×1.2=3,600

合計保険料 : 3,600+493.2=4,093.2　　比率 : 4,093.2÷3,000=1.3644

したがって(D)が正しい。

2-(1) 前年度資産を F_0 とすると

$(F_0+2{,}000)\times 1.025-2{,}500=9{,}800$ より $F_0=10{,}000$

運用収益は $(F_0+2{,}000)\times 0.025=300$ ……①

当年度発生不足金は (2,500+12,500)－(12,000+2,000+300)=700 ……②

前年度の不足金は 12,000－10,000=2,000

予定利率を i とすると、前年度不足金利息は 2,000× i

また、利差損は (10,000+2,000)×(i －0.025)　これと責任準備金関係益 300 の合計が当年度の不足金となるので

$2{,}000\times i+(10{,}000+2{,}000)\times(i-0.025)+300=700$ より $i=0.05$ したがって予定利率は５％……③

利差損は(10,000+2,000)×(0.05－0.025)=300 したがって△300 ……④

不足金利息は 2,000×0.05=100 したがって△100 ……⑤

2-(2) テキスト P159 から P160 参照

⑥ $\alpha_{y-x_e}\cdot C_y$

⑦ $\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y$

⑧ $v^{x_r-x_e}\cdot {}_{x_r-x_e}P_{x_e}\cdot\alpha_{x_r-x_e}$

⑨ ${}_{x_r-x_e}P_{x_e}\cdot\ddot{a}_{\overline{x_r-x_e|}}$

⑩ $\alpha_{y-x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} - P_{x_e} \cdot \ddot{S}_{\overline{y-x_e+1|}}$

⑪ $\alpha_{x_r-x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} - P_{x_e} \cdot \ddot{S}_{\overline{x_r-x_e|}}$

3.テキスト P60 から P66 より

① (C)+(G)

② (D)+(E)+(G)

③ (F)

④ (A)+(G)

⑤ (B)+(G)

4. (1) ×：脱退率上昇で受給対象者が減るため保険料率は低下する。

(2) ×：給与現価が増えるため保険料率は低下する。

(3) ○：最終給与比例の給付の伸びが大きいので保険料率は上昇する。

(4) ×：給与現価は上昇する。

(5) ○：標準者の給付に影響しないため保険料率は変動しない。

5. (1) この者に対する期末の予定 $q_x \cdot A_t \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} + (1+q_x) \cdot V_{x+1,t+1}$

実績 $V_{x+1,t+1}$

∴発生 PSL＝実績－予定

$$V_{x+1,t+1} - \{q_x \cdot A_t \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} + (1-q_x) \cdot V_{x+1,t+1}\}$$

$$= -q_x \cdot A_t \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} + q_x \cdot V_{x+1,t+1} = q_x \cdot (V_{x+1,t+1} - A_t \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}}) \cdots\cdots ①$$

(2) 発生 PSL＝0 ⇔ 全ての年齢・期間で①式＝0

$V_{x+1,t+1} - A_t \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} = 0$

ファックラーの公式より　c：一人当たり保険料とすると

$$l_{x+1} \cdot V_{x+1,t+1} = l_x \cdot (V_{x,t} + c) \cdot (1+i) - d_x \cdot A_t \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$= l_x \cdot (V_{x,t} + c) \cdot (1+i) - d_x \cdot V_{x+1,t+1}$$

$$l_x \cdot V_{x+1,t+1} = l_x \cdot (V_{x,t} + c) \cdot (1+i)$$

$$V_{x+1,t+1} = (V_{x,t} + c) \cdot (1+i)$$

$$= (V_{x-1,t-1} + c) \cdot (1+i)^2 + c \cdot (1+i)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$= V_{x-t,0} \cdot (1+i)^{t+1} + c \cdot (1+i)^t + \cdots\cdots + c \cdot (1+i)$$

$$= c \cdot \left\{ (1+i)^t + \cdots\cdots\cdots + (1+i) \right\}$$

$\therefore$ $S_t = V_{x+1,t+1}$ は保険料 c の脱退時までの元利合計となる。

6.　(1) $F = \dfrac{1+i}{i}(S-P)$

(2) 年度末の実際の年金資産額は $\left\{ F-(S-P) \right\} \cdot (1+i-\Delta i)$

不足額は $-\left\{ F-(S-P) \right\} \cdot (1+i-\Delta i) + F$

$$= -\left(\frac{1+i}{i} - 1\right) \cdot (S-P) \cdot (1+i-\Delta i) + \frac{1+i}{i}(S-P)$$

$$= \frac{\Delta i}{i}(S-P)$$

(3) $\Delta P = \dfrac{\Delta i}{i}(S-P)\cdot\dfrac{i}{1+i} = \dfrac{\Delta i}{1+i}(S-P)$

(4) 運用利回りが低下してｔ年経過後の年金資産額を F_t とする。

$$F_1 = \left\{F-(S-P)\right\}\cdot(1+i-\Delta i) = \frac{1+i-\Delta i}{i}(S-P)$$

$$F_2 = \left\{F_1-(S-P-\Delta P)\right\}\cdot(1+i) = F_1\cdot(1+i)-(S-P)\cdot(1+i-\Delta i)$$

$$= F_1\cdot(1+i)-F_1\cdot i = F_1$$

同様に F_3 以降も F_0 に等しい。

(5) 運用利回りが低下してｔ年経過後の年金資産額を F_t、別に徴収する保険料を ΔP_t とする。

$$F_1 = \frac{1+i-\Delta i}{i}(S-P)\text{、}\quad \Delta P_1 = 0$$

$$\Delta P_{t+1} = (F-F_t)\cdot\frac{i}{1+i}$$

$$F_{t+1} = \left\{F_t-(S-P-\Delta P_{t+1})\right\}\cdot(1+i-\Delta i)$$

$$= \left\{F_t - S + P + (F-F_t)\cdot\frac{i}{1+i}\right\}\cdot(1+i-\Delta i)$$

$$= F_t\cdot\frac{1+i-\Delta i}{1+i} - (S-P)\cdot(1+i-\Delta i) + F\frac{i\cdot(1+i-\Delta i)}{1+i}$$

$$= F_t\cdot\frac{1+i-\Delta i}{1+i} - (S-P)\cdot(1+i-\Delta i) + \frac{1+i}{i}\cdot(S-P)\cdot\frac{i\cdot(1+i-\Delta i)}{1+i}$$

$$= F_t\cdot\frac{1+i-\Delta i}{1+i}$$

したがって、$F_t = \dfrac{1+i-\Delta i}{i}(S-P)\cdot\left(\dfrac{1+i-\Delta i}{1+i}\right)^{t-1}$

また、$\Delta P_t = (F-F_{t-1})\cdot\dfrac{i}{1+i}$

$$= \left\{\frac{1+i}{i}(S-P) - (S-P)\cdot\frac{1+i}{i}\cdot\left(\frac{1+i-\Delta i}{1+i}\right)^{t-1}\right\}\cdot\frac{i}{1+i}$$

$$= (S-P)\left\{1-\left(\frac{1+i-\Delta i}{1+i}\right)^{t-1}\right\}$$

t→ ∞ のとき F_t は0、ΔP_t はS－Pに収束する。

したがって、$P+\Delta P_t$ はSに収束する。

7. (1) $x<60$の場合 $S_x^d = \frac{N_{60}^d}{D_x^d}$、 $x \geq 60$の場合$S_x^d = \frac{N_x^d}{D_x^d}$

(2) $S_x = \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d$

(3) $\frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot (t+\tau+1)$

(4) $\frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot (t+\tau+1) - \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} S_{x+\tau} \cdot D_{x+\tau} \cdot A$

$$\frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot (t+\tau+1) - \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1}\left(\frac{1}{D_{x+\tau}}\sum_{\sigma=0}^{\omega-x-\tau-1} C_{x+\tau+\sigma}^w \cdot S_{x+\tau+\sigma+1}^d\right) \cdot D_{x+\tau} \cdot A$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot (t+\tau+1) - \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1}\sum_{\sigma=0}^{\omega-x-\tau-1} C_{x+\tau+\sigma}^w \cdot S_{x+\tau+\sigma+1}^d \cdot A$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot (t+\tau+1) - \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot (\tau+1)$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{\tau=0}^{\omega-x-1} C_{x+\tau}^w \cdot S_{x+\tau+1}^d \cdot A \cdot t$$

$$= A \cdot S_x \cdot t$$