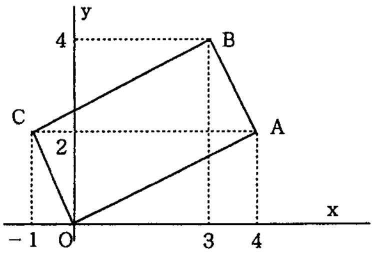
平成8年12月20日

数 学 1（問題）

1．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（35点）

（1）ある人が1日1回、n種類のメニューのある食堂で食事をする。毎日、無作為にメニューを選ぶが、前日に食べたメニューと同じメニューは選ばないとするとき、ある日に選んだメニューと同じメニューをそのk日後に選ぶ確率は $\boxed{}$ である。

（2）図の長方形OABC内で一様分布をする点Pのx座標をX、y座標をYで表わすとき、E（XY）＝ $\boxed{}$ である。



（3）確率分布　$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{(e^\lambda-1)k!}$（k＝1, 2, …）を持つ確率変数Xに対して、E（X）＝ $\boxed{}$,
V（X）＝ $\boxed{}$ である。

（4）コインを3回投げ、表が出た回数だけサイコロを振るとき、出るサイコロの目の合計の分散は $\boxed{}$ である。ただし、3回ともコインの裏が出た場合はサイコロの目の合計は0と考えるものとする。

（5）互いに独立な確率変数X, Y, Zが、すべて標準正規分布N（0, 1）に従うものとする。このとき、

$U=X^2+Y^2+Z^2$ の確率密度関数 $f(u)$ は、$f(u)=\begin{cases}\boxed{} & (u\geq 0)\\ 0 & (u<0)\end{cases}$　である。

2．ある人が互いに異なるn個の鍵を束ねた鍵束を持っており、この中から無作為に鍵を選んで、ある1つの扉を開けようとしている。このとき、次のそれぞれ2つの場合について扉が開くまでの試行回数の平均値と分散を求めよ。なお、n個の鍵の中に正しい鍵は1つだけあるものとし、扉が開いたときの試行も回数に含めるものとする。

（1）扉が開かなかった鍵を鍵束から除いて、次の試行を行う。

（2）扉が開かなかった鍵を鍵束に戻して、次の試行を行う。ただし、鍵束に戻した後、試した鍵と試していない鍵との見分けはつかなくなるものとする。（20点）

3．$X_1, X_2, \cdots X_n$ を、区間（0, 1）上の一様分布に従う、それぞれ互いに独立な確率変数とする。これらを小さい方から順に並べ変えたとき、小さいほうからk番目の確率変数の確率密度関数を求めたい。

（1）$\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\displaystyle\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt=\sum_{i=k}^{n}{}_nC_i\,p^i q^{n-i}$ を示せ。ただし、$0<p<1$, $p+q=1$, $k=1, 2\cdots, n$ とする。

（2）（1）を利用して小さいほうからk番目の確率変数の確率密度関数を求めよ。（20点）

4．毎日価格が変動するある商品がある。ある日の価格を P_0 とし、そのt日後の価格を P_t（t：1, 2）で表わすとき、以下の問に答えよ。

（1）P_1-P_0 が区間（−1, 1）上の一様分布に従い、また、P_1 が既知の状態で、P_2-P_1 は区間（$k(P_1-P_0)-1$, $k(P_1-P_0)+1$）（kは正の定数）上の一様分布に従うとする。このとき、P_0 のみ既知の状態における、P_2 の確率密度関数を求めよ。

（2）P_1-P_0 が標準正規分布N（0, 1）に従うとする。また、P_1 が既知の状態で、P_2-P_1 は正規分布N（$k(P_1-P_0)$, 1）（kは正の定数）に従うとする。このとき、P_0 のみ既知の状態における、P_2 の確率密度関数を求めよ。（25点）

以　上

数学１　　解答

1.

（１）　求める確率をP_kとする。ある日に選んだメニューと同じメニューをそのｋ日後に選ぶということは、ｋ－１日目には違うメニューを選び、ｋ日目にｋ－１日目に選んだメニューを除いたｎ－１種類のメニューからそのメニューを選ぶということであるから、次の漸化式が成り立つ。

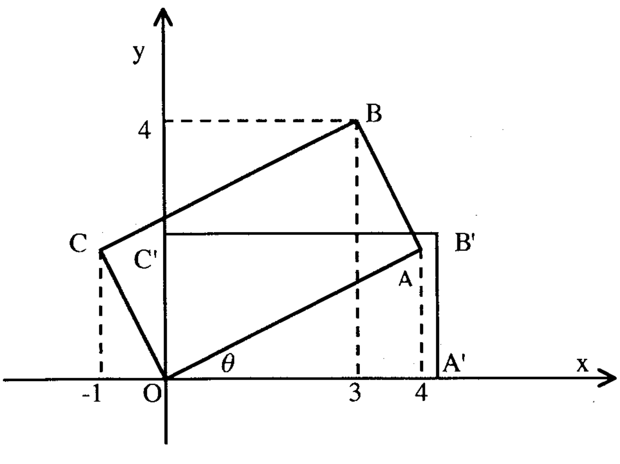
$$P_k = \frac{1}{n-1}(1-P_{k-1}) = -\frac{1}{n-1}P_{k-1} + \frac{1}{n-1}$$

この漸化式を解くと、

$$P_k - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n-1}\left(P_{k-1} - \frac{1}{n}\right) = \cdots = (-1)^{k-1}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{k-1}\left(P_1 - \frac{1}{n}\right) = -\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-1}\frac{1}{n} \qquad (\because P_1 = 0)$$

したがって、$P_k = \boxed{\frac{1}{n}\left\{1-\left(-\frac{1}{n-1}\right)^{k-1}\right\}}$

（２）OABCは原点Oを頂点とする第一象限内の長方形OA'B'C'を回転したものと考えられる。そこで、OA'B'C'上で一様分布に従う確率変数を(ξ, η)、回転角度をθとする。



今、$\overline{OA} = \overline{OA'} = 2\sqrt{5}$, $\overline{OC} = \overline{OC'} = \sqrt{5}$から、$\xi, \eta$は独立でそれぞれ$\left[0,\ 2\sqrt{5}\right]$, $\left[0,\ \sqrt{5}\right]$上で一様分布に従う。X, Yを$\xi, \eta$で表わすと、

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ \left(\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ より、

$X=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(2\xi-\eta)$, $Y=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,(\xi+2\eta)$ となる。

よって、

$$E(XY)=E\left(\frac{1}{5}(2\xi-\eta)(\xi+2\eta)\right)=\frac{1}{5}E\left(2\xi^2+3\xi\eta-2\eta^2\right)=\frac{2}{5}E\left(\xi^2\right)+\frac{3}{5}E(\xi)\,E(\eta)-\frac{2}{5}E\left(\eta^2\right)$$

（∵　ξ, η は独立）

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{20}{3}+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}$$

$$=\boxed{\frac{7}{2}}\quad\left(\because\ E(\xi)=\sqrt{5},\ E(\eta)=\frac{\sqrt{5}}{2},\ E\left(\xi^2\right)=\frac{20}{3},\ E\left(\eta^2\right)=\frac{5}{3}\right)$$

（3）定義より、$E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{\left(e^{\lambda}-1\right)k\,!}=\frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)\,!}=\boxed{\frac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}}$

また、$E\left(X(X-1)\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{\left(e^{\lambda}-1\right)k\,!}=\frac{\lambda^2}{e^{\lambda}-1}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\frac{\lambda^2e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}$ より、

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=E\left(X(X-1)\right)+E(X)-E(X)^2$$

$$=\frac{\lambda^2e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}+\frac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}-\left(\frac{\lambda e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\right)^2=\boxed{\frac{\lambda e^{\lambda}\left(e^{\lambda}-\lambda-1\right)}{\left(e^{\lambda}-1\right)^2}}$$

（4） i 回目のコイン投げによって得るサイコロの目の数を確率変数 X_i $(i=1,2,3)$ で表わすと（裏が出たら、$X_i=0$ と考える）、

$P\left(X_i=0\right)=\dfrac{1}{2}$, $P\left(X_i=k\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$　$(k=1,2,\cdots,6)$ であるから、

$$E\left(X_i\right)=\sum_{k=1}^{6}k\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\times\frac{6\times7}{2}=\frac{7}{4}\ ,\quad E\left(X_i{}^2\right)=\sum_{k=1}^{6}k^2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}\times\frac{6\times7\times13}{6}=\frac{91}{12}$$

よって、$V\left(X_i\right)=\dfrac{91}{12}-\left(\dfrac{7}{4}\right)^2=\dfrac{1}{48}(364-147)=\dfrac{217}{48}$

この試行をそれぞれ 3 回独立に行うから、求める分散は $3\times\dfrac{217}{48}=\boxed{\dfrac{217}{16}}$

（５）Ｕの確率分布関数は、 $F(u)=\int_{x^2+y^2+z^2\le u}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)dxdydz$

ここで、 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ とおいて、ヤコビアンを求めると、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=r^2(\sin\theta)^3(\cos\varphi)^2+r^2(\sin\theta)^3(\sin\varphi)^2+r^2(\cos\theta)^2\sin\theta(\cos\varphi)^2+r^2(\cos\theta)^2\sin\theta(\sin\varphi)^2$$

$$=r^2(\sin\theta)^3+r^2(\cos\theta)^2\sin\theta=r^2\sin\theta$$

これより、

$$F(u)=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)r^2dr=(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\cdot2\pi\cdot[-\cos\theta]_0^{\pi}\int_0^{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)r^2dr$$

$$=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot2\cdot\int_0^{\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)r^2dr$$

よって、 $f(u)=F'(u)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cdot2\cdot u\exp\left(-\frac{1}{2}u\right)\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\boxed{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}u\right)}$

２．

（１） k 回目の試行で扉が開く確率は $\frac{n-1}{n}\bullet\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\bullet\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$

従って、扉が開くまでの試行回数の平均値は $\sum_{k=1}^{n}k\bullet\frac{1}{n}=\underline{\frac{n+1}{2}}$

分散は $\sum_{k=1}^{n}k^2\bullet\frac{1}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\underline{\frac{n^2-1}{12}}$

（２） k 回目の試行で扉が開く確率は $\frac{1}{n}\bullet\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

従って、扉が開くまでの試行回数の平均値は $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\bullet\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

この和をＳと置くと、

$$S=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{3}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{k}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)S=\quad\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{k-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}S=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}=1$$

従って、求める平均値は　$\underline{n}$

また、$T=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$　と置くと、

$$T=\frac{1}{n}+\frac{4}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{9}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{16}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{k^2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)T=\quad\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{4}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{9}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{(k-1)^2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}T=\frac{1}{n}+\frac{3}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{5}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{7}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2k-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}=2S-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}=2n-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}$$

$$=2n-1$$

$$\therefore\ T=n(2n-1)$$

よって、求める分散は　$n(2n-1)-n^2=\underline{n(n-1)}$

3.

(1)

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[\frac{1}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right]_0^p+\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^p\frac{n-k}{k}t^k(1-t)^{n-k-1}dt$$

$$={}_nC_k\,p^kq^{n-k}+\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^p t^k(1-t)^{n-k-1}dt$$

$$={}_nC_k\,p^kq^{n-k}+{}_nC_{k+1}\,p^{k+1}q^{n-k-1}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-2)!}\int_0^p t^{k+1}(1-t)^{n-k-2}dt$$

以下、部分積分を繰り返して、

$$= \sum_{i=k}^{n} {}_nC_i\, p^i q^{n-i}$$

（2） $X_1, X_2, \cdots X_n$ を小さいほうから順に並べたとき、小さいほうからk番目の確率変数を $X_{(k)}$ とする。

$X_{(k)}$ の分布関数をF（x)、確率密度関数をf（x）とする。

このとき、

$$\begin{aligned}
F(x) &= p(X_{(k)} \le x) \\
&= \sum_{i=k}^{n} p(X_{(1)} \le x, \cdots X_{(i)} \le x, X_{(i+1)} > x, \cdots X_{(n)} > x) \\
&= \sum_{i=k}^{n} p(X_{(1)} \le x) \cdots p(X_{(i)} \le x) p(X_{(i+1)} > x) \cdots p(X_{(n)} > x) \\
&= \sum_{i=k}^{n} {}_nC_i\, x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^x t^{k-1} (1-t)^{n-k} dt \quad (\because (1))
\end{aligned}$$

よって、

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

4.

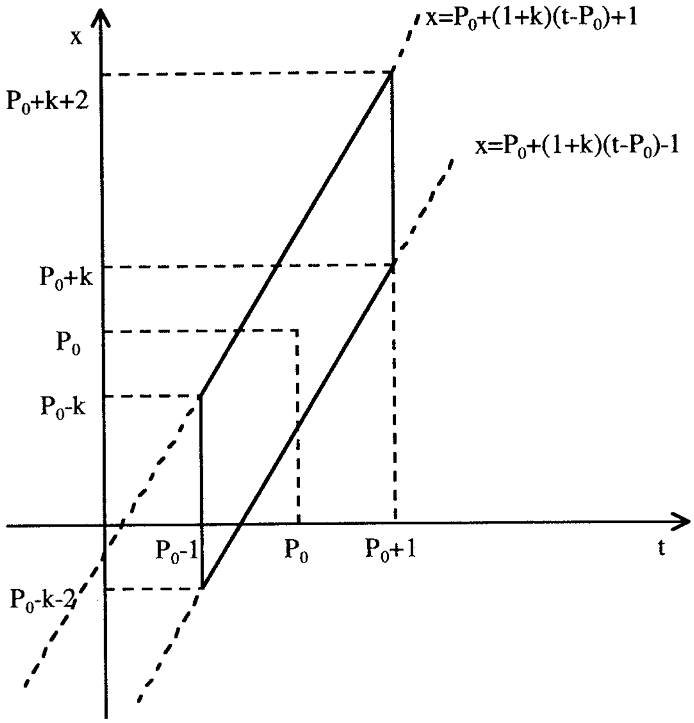
（1） P_1 の確率密度関数は $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (x \in [P_0 - 1, P_0 + 1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

また、$P_1 = t$ を既知としたときの $P_2 - P_1$ の確率密度関数は

$$f_{2,t}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & .(x \in [k(P_1 - P_0) - 1, k(P_1 - P_0) + 1]) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

よって、P_1 が未知の状態での P_2 の確率密度関数 $f_2(x)$ は、$P_2 = P_1 + (P_2 - P_1)$ であるこ

とから、$f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_{2,t}(x-t)dt$　であるが、$f_1, f_{2,t}$ がともに 0 にならない t, x の範囲は次の図の実線で囲まれた平行四辺形の内部である。



したがって、x の範囲に応じて、$f_2(x)$ は次のとおりとなる。

① $P_0-k-2 \leq x < P_0-k$ のとき、$f_2(x)=\int_{P_0-1}^{\frac{x-P_0+1}{1+k}+P_0} \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}dt=\frac{x-P_0+k+2}{4(k+1)}$

② $P_0-k \leq x < P_0+k$ のとき、$f_2(x)=\int_{\frac{x-P_0-1}{1+k}+P_0}^{\frac{x-P_0+1}{1+k}+P_0} \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}dt=\frac{1}{4}\bullet\frac{2}{1+k}$

③ $P_0+k \leq x < P_0+k+2$ のとき、$f_2(x)=\int_{\frac{x-P_0-1}{1+k}+P_0}^{1+P_0} \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}dt=\frac{-x+P_0+k+2}{4(k+1)}$

④ x が①～③以外の範囲にある場合、$f_2(x)=0$

（2）題意より、$P_2-P_1-k(P_1-P_0)$ は、$N(0,1)$　に従う。

また、P_1-P_0 が、$N(0,1)$ に従うので、$(k+1)(P_1-P_0)$ は、$N(0,(k+1)^2)$　に従う。

よって、正規分布の再生性より $\{P_2-P_1-k(P_1-P_0)\}+(k+1)(P_1-P_0)=P_2-P_0$ は、

$N(0,(k+1)^2+1)=N(0,k^2+2k+2)$　に従う。

P_0は定数であることから、P_2は、 $N(P_0, k^2+2k+2)$ に従う。

したがって、P_2の確率密度関数$g(x)$は、

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(k^2+2k+2)}}\exp\left(-\frac{(x-P_0)^2}{2(k^2+2k+2)}\right)$$