保 険 数 学 1（問題）

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。 (50点)

（1）期末払で初年度年金年額が1、以後毎年一定額$2i$だけ増加する永久年金の現価が、期末払で初年度年金年額が1、以後年金年額が毎年一定率rだけ増加し、r, r^2, r^3, ……となる永久年金の現価と等しいとき、rの値として適当なものを次から選べ。ただしiは両永久年金の予定利率を表し、$r < 1 + i$とする。

(A) $1+\frac{d}{2}$　(B) $1+\frac{2}{3}i$　(C) $1+\frac{i}{2}$　(D) $\sqrt{1+i}$　(E) $1+\frac{i}{3}$

（2）定常人口の社会があり、$\ell_x = a - x$ $(0 \leqq x < a)$、30歳以上の人の死亡時年齢の平均が75歳のとき、aは次のうちどれに等しいか。

(A) 97.5　(B) 98.0　(C) 98.5　(D) 99.0　(E) 99.5

（3）$\mathring{e}_x = 0.8\ (100 - x)\ (0 \leqq x < 100)$, $\ell_0 = 100{,}000$とするとき、ℓ_{25}に最も近いのは次のうちのどれか。

（A）92,860　（B）92,910　（C）92,960　（D）93,010　（E）93,060

（4）関係式（ア）～（エ）の正誤に関する記述のうち、正しいものは次のうちのどれか。

（ア）$M_x = D_x - dN_x$

（イ）$\frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} v^{n-t-1} + D_{x+n}\right) = v^{n+1}$

（ウ）$\sum_{t=1}^{\infty} \ell_{x+t} A_{x+t} = \ell_x\ (\ddot{a}_x - 1)$

（エ）$\frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t-1}\, \ddot{a}_{\overline{n-t}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

（A）全て誤り　（B）1つ正しい　（C）2つ正しい　（D）3つ正しい　（E）4つ正しい

（5）条件付保険に関する記号は（R）を付して表すこととする。x歳加入、保険期間n年、死亡保険金額1（期末払）、死亡指数150の条件付保険を考え、満期まで生存した場合には年払平準純保険料$P^{(R)}$のうちから、特別保険料部分の既払込分全額を返還することとする。この条件付保険の年払平準純保険料$P^{(R)}$のうち特別保険料部分は次のうちどれに最も近いか。

ここで、同じ仮定の下での条件付定期保険の年払平準純保険料を$\overset{(R)}{P}{}^{1}_{x:\overline{n}|}$とし、$\overset{(R)}{P}{}^{1}_{x:\overline{n}|} = 0.00336$、また、条件付養老保険の年払平準純保険料を$P^{(R)}_{x:\overline{n}|}$とし、$P^{(R)}_{x:\overline{n}|} = 0.02974$とする。

さらに$P^{1}_{x:\overline{n}|} = 0.00211$とし、nは共通に、20年とする。

(A) 0.00257　(B) 0.00259　(C) 0.00261　(D) 0.00263　(E) 0.00265

（6）$i = 0.05$, $\ell_{20} = 98{,}884$, $\ell_{21} = 98{,}766$, $\ddot{a}_{21:\overline{9}|} = 7.43590$, $A^{1}_{20:\overline{10}|} = 0.00774$のとき、$\ell_{30}$に最も近いのは次のうちのどれか。

(A) 97,600　(B) 97,700　(C) 97,800　(D) 97,900　(E) 98,000

（7）x歳加入、保険期間30年、保険料年払全期払込、保険金額1（期末払）の養老保険において、第t年度における危険保険料をP_r (t) とするとき、$\sum_{t=1}^{30} v^t P_r(t)$の値に最も近いのは次のうちのどれか。但し、$i = 0.03$, $v^{30} = 0.411987$, $P_{x:\overline{30}|} = 0.06$とする。

(A) 0.772　(B) 0.774　(C) 0.776　(D) 0.778　(E) 0.780

(8) x歳加入、保険料一時払の生存保険（保険金額1）で、期中の死亡に対しては責任準備金の1／2を即時に支払うものとするとき、一時払純保険料は次のうちどれに最も近いか。但し、保険期間は20年とし、$v^{20}=0.554$, ${}_{20}p_x=0.64$とする。

(A) 0.441　(B) 0.443　(C) 0.445　(D) 0.447　(E) 0.449

(9) $P^{1}_{x:\overline{n}|}=0.00632$,　$P_{x:\overset{\,1}{\overline{n}|}}=0.07251$, ${}_{t}V_{x:\overline{n}|}=0.41750$のとき、$P_{x:\overline{n}|}$に最も近いのは次のうちのどれか。

(A) 0.0366　(B) 0.0368　(C) 0.0370　(D) 0.0372　(E) 0.0374

(10) $\ddot{a}_x+\ddot{a}_{x+2t}=2\ddot{a}_{x+t}$の関係式が成立し、${}_{t}V_x=0.150$であるとき、${}_{t}V_{x+t}+{}_{2t}V_x$の値に最も近いのは次のうちのどれか。

(A) 0.470　(B) 0.472　(C) 0.474　(D) 0.476　(E) 0.478

2．次の文中の空欄に適当な算式を記入せよ。　(12点)

時刻tにおける資産額を$f(t)=Ae^{\alpha t}$ $(0\leqq t\leqq 1)$とし、利力をδとすると、1年間に収入する利息Iは、$I=\dfrac{A\delta}{\alpha}$ ($\boxed{①}$) と表される。ここで$f(0)=V_0$, $f(1)=V_1$とおきAおよびαを消去し整理すると、$\delta=\boxed{②}$となる。この式を実利率iとδの関係式$i=\boxed{③}$に代入して整理すると、$i=(1+\boxed{④})^{\frac{I}{V_1-V_0}}-1$となる。この式を級数展開し、3次以上の項を無視することとすると、

$$i\fallingdotseq 1+\frac{I}{V_1-V_0}\cdot\boxed{④}+\frac{1}{2}\cdot\frac{I}{V_1-V_0}\left(\frac{I}{V_1-V_0}-1\right)\cdot\left(\boxed{④}\right)^2-1=\frac{I}{V_0}\left(1-\boxed{⑤}\right)$$ となる。

さらに近似式を用いて整理すると、$i\fallingdotseq\boxed{⑥}$となる。これは、資産額が時刻tの指数関数として表されると仮定した場合のハーディの公式である。

3．次の文中の空欄に適当な算式を記入せよ。　(12点)

養老保険の年払純保険料が逓減定期保険の年払純保険料と定期積金の毎年の掛金に分解できることを証明する。

$$C_{x+t-1}=\boxed{①}\text{より、}\frac{1}{D_x\ddot{s}_{\overline{n}|}}\sum_{t=1}^{n}C_{x+t-1}\ddot{s}_{\overline{t}|}=\boxed{②}-\boxed{③}$$

ここで、$$P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{D_x}\left\{\sum_{t=1}^{n}\boxed{④}+\sum_{t=1}^{n}\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}C_{x+t-1}\right\}+\boxed{③}\text{より}$$

$$P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n}\boxed{④}+\boxed{②}$$

したがって、$$P_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n}\boxed{④}+\boxed{⑤}$$

第1項は第t年度の死亡保険金が$\boxed{⑥}$の逓減定期保険の年払純保険料を表し、第2項は定期積金の毎年の掛金を表す。

4．数列 $\{S_t\}_{t=1,2,\cdots\cdots}$ に対し、保険期間がN年（$N=1, 2, \cdots\cdots$）で第t保険年度中（$t=1, 2, \cdots\cdots, N$）の死亡には S_t を年度末に支払う死亡保険を考える。

この保険の全期払込年払純保険料を $P(N)$、第t年度末責任準備金を ${}_tV_{x:\overline{N|}}$ とし、関数 $f_N(t)$ が次の関係式を満たしているものとする。

$$f_N(t) - {}_tV_{x:\overline{N|}} = v p_{x+t}\{f_N(t+1) - {}_{t+1}V_{x:\overline{N|}}\}$$

（ここで $t=0, 1, \cdots\cdots, N-1$、${}_0V_{x:\overline{N|}}=0$ とする。）

このとき次の問に答えよ。（26点）

（1）$P(t) + P_{x:\overset{1}{\overline{t|}}} \cdot f_N(t) - P_{x:\overline{t|}} f_N(0)$ がtによらない定数であることを示せ。

ここで、$P_{x:\overset{1}{\overline{t|}}}$, $P_{x:\overline{t|}}$ はそれぞれx歳加入、t年満期の生存保険と養老保険の全期払込年払純保険料とする。

（2）$F_N(t) = \dfrac{D_{x+t}}{D_x} \cdot f_N(t) - f_N(0)$ とするとき、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$F_{N+1}(t) = F_N(t) + \{P(N+1) - P(N)\} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t|}}$$

以上

保険数学１（解答例）

問題１

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
解答欄	(B)	(A)	(E)	(C)	(E)	(D)	(C)	(B)	(A)	(D)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) …… (B)

初年度1、毎年一定額hだけ増加する永久年金の現価 $a_{\infty}^{(1)} = \dfrac{1}{i}\left(1+\dfrac{h}{i}\right)$

初年度1、毎年一定率rだけ増加する永久年金の現価 $a_{\infty}^{(2)} = \dfrac{1}{(1+i)-r}$

いま、$h=2i$、$a_{\infty}^{(1)} = a_{\infty}^{(2)}$ より、$\dfrac{1}{i}\left(1+\dfrac{2i}{i}\right) = \dfrac{1}{(1+i)-r}$

$\therefore\ r = 1+\dfrac{2}{3}i$

(2) …… (A)

$\ell_x = a - x$ より $\mu_x = -\dfrac{1}{\ell_x}\dfrac{d\ell_x}{dx} = \dfrac{1}{a-x}$

(30歳以上の人の死亡時年令の平均)

$$= \frac{\int_{30}^{a}\int_{0}^{a-x}(x+t)\cdot\ell_x\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\,dt\,dx}{\int_{30}^{a}\int_{0}^{a-x}\ell_x\cdot{}_tp_x\cdot\mu_{x+t}\,dt\,dx} = \frac{\int_{30}^{a}\int_{0}^{a-x}(x+t)\,dt\,dx}{\int_{30}^{a}\int_{0}^{a-x}dt\,dx}$$

$$= \frac{2}{3}a+10 \qquad \therefore\ \frac{2}{3}a+10 = 75$$

$$\therefore a = 97.5$$

(3) …… (E)

$\dfrac{d}{dx}\mathring{e}_x = \mathring{e}_x\mu_x - 1 = -0.8$ より $\qquad \mu_x = \dfrac{1}{400-4x}$

$$\begin{aligned}\ell_x &= \ell_0\exp\{-\textstyle\int_0^x \mu_t\,dt\}\\ &= \ell_0\exp\{-\textstyle\int_0^x \dfrac{1}{400-4t}dt\}\\ &= \ell_0\exp\left[\dfrac{1}{4}\log(400-4t)\right]_0^x\\ &= \ell_0\left(\dfrac{400-4x}{400}\right)^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

$$\therefore \ell_{25} = 100{,}000\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \fallingdotseq 93{,}060$$

(4) …… (C)

（ア）左辺 $= vN_x - N_{x+1}$

$$= vN_x - (N_x - D_x)$$

$$= D_x - (1-v)N_x$$

$$= D_x - dN_x = \text{右辺}\cdots\cdots\cdots\bigcirc$$

（イ）左辺 $= \dfrac{1}{D_x}\{\sum_{t=0}^{n-1} v^{n-t-1}(vD_{x+t} - D_{x+t+1}) + D_{x+n}\}$

$$= \frac{1}{D_x}\{\sum_{t=0}^{n-1}(v^{n-t}D_{x+t} - v^{n-t-1}D_{x+t+1}) + D_{x+n}\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{(v^n D_x - D_{x+n}) + D_{x+n}\}$$

$$= v^n \fallingdotseq \text{右辺}\cdots\cdots\cdots\times$$

（ウ）左辺 $= \sum_{t=1}^{\infty} \ell_{x+t}\dfrac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$

$$= \sum_{t=1}^{\infty}(1+i)^{x+t}(vN_{x+t} - N_{x+t+1})$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty}\{(1+i)^{x+t-1}N_{x+t} - (1+i)^{x+t}N_{x+t+1}\}$$

$$= (1+i)^x N_{x+1}$$

$$= \ell_x \cdot \frac{N_{x+1}}{v^x \ell_x}$$

$$= \ell_x \cdot \frac{N_x - D_x}{D_x} = \text{右辺}\cdots\cdots\cdots\bigcirc$$

（エ）右辺 $= \sum_{t=0}^{n-1} v^t - \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} v^t (1 - {}_tp_x)$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1} v^t (q_x + {}_{1|}q_x + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + {}_{t-1|}q_x)$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t-1|}q_x (v^t + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + v^{n-1})$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1} v^t {}_{t-1|}q_x (1 + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + v^{n-t-1})$$

$$= \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} a_{\overline{n-t|}} \fallingdotseq \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t-1} a_{\overline{n-t|}} = \text{左辺}\cdots\cdots\cdots\times$$

(5) …… (E)

契約時の収支相等の原則より

$$P^{(R)} a^{(R)}_{x:\overline{n|}} = A^{(R)}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + n(P^{(R)} - P^{1}_{x:\overline{n|}}) A^{(R)}_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$$

$$\therefore P^{(R)} = \frac{\overset{(R)}{A}{}^{\,1}_{x:\overline{n}|} - nP^{\,1}_{x:\overline{n}|}A^{(R)\,1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(R)}_{x:\overline{n}|} - nA^{(R)\,1}_{x:\overline{n}|}}$$

したがって求める特別保険料は

$$P^{(R)} - P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overset{(R)}{A}{}^{\,1}_{x:\overline{n}|} - P^{\,1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}^{(R)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(R)}_{x:\overline{n}|} - nA^{(R)\,1}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{\overset{(R)}{P}{}^{\,1}_{x:\overline{n}|} - P^{\,1}_{x:\overline{n}|}}{1 - nP^{(R)\,1}_{x:\overline{n}|}}$$

$$= \frac{0.00336 - 0.00211}{1 - 20 \cdot (0.02974 - 0.00336)} = 0.002646$$

(6) …… (D)

$A^{1}_{20:\overline{10}|} = 1 - d\ddot{a}_{20:\overline{10}|} - v^{10}\,{}_{10}p_{20}$ より

$$\ell_{30} = \frac{\ell_{20}}{v^{10}}\,(1 - d\ddot{a}_{20:\overline{10}|} - A^{1}_{20:\overline{10}|}) \qquad \left(\because {}_{10}p_{20} = \frac{\ell_{30}}{\ell_{20}}\right)$$

また、$\ddot{a}_{20:\overline{10}|} = 1 + v \cdot p_{20} \cdot \ddot{a}_{21:\overline{9}|}$ なので、上式に代入すると

$$\ell_{30} = \frac{\ell_{20}}{v^{10}} \cdot \left\{1 - d\,(1 + v \cdot \frac{\ell_{21}}{\ell_{20}} \cdot \ddot{a}_{21:\overline{9}|}) - A^{1}_{20:\overline{10}|}\right\}$$

$$= \ell_{20}\,(1+i)^{10}\left\{1 - \frac{i}{1+i}\,(1 + \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\ell_{21}}{\ell_{20}}\,\ddot{a}_{21:\overline{9}|}) - A^{1}_{20:\overline{10}|}\right\}$$

与えられた数字を代入し、計算すると $\ell_{30} = 97{,}902$

(7) …… (C)

$P_r(t) = P_{x:\overline{n}|} - (vV_t - V_{t-1})$ の両辺に v^t を乗じて、$t = 1, 2, \cdots\cdots n$ について

加えると、$\sum_{t=1}^{n} v^t P_r(t) = P_{x:\overline{n}|}\sum_{t=1}^{n} v^t - v^{n+1}\,V_n + vV_0$

$$= P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{v - v^{n+1}}{1-v} - v^{n+1} \qquad (\because V_0 = 0,\ V_n = 1)$$

$$= P_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{1}{i} \cdot (1 - v^n) - v \cdot v^n$$

いま $n = 30$ であることから $P_{x:\overline{30}|} = 0.06,\ i = 0.03,\ v = \frac{1}{1.03},\ v^{30} = 0.411987$

を代入して $\sum_{t=1}^{30} v^t P_r(t) = 0.77604$

(8) …… (B)

Thieleの微分方程式より $\frac{d}{dt} V_t^{(\infty)} = (\mu_{x+t} + \delta)\, V_t^{(\infty)} - \frac{1}{2} \mu_{x+t}\, V_t^{(\infty)}$

$$= (\delta + \frac{1}{2} \mu_{x+t})\, V_t^{(\infty)}$$

$$\frac{1}{V_t^{(\infty)}} \frac{dV_t^{(\infty)}}{dt} = \delta + \frac{1}{2} \mu_{x+t}$$

$$\therefore\ [\log V_t^{\infty}]_0^n = \int_0^n (\delta + \frac{1}{2} \mu_{x+t})\, dt$$

$P(= V_0^{(\infty)})$ を一時払純保険料とすると

$$-\log P = \delta \cdot n - \frac{1}{2} \log {}_n p_x$$

$$P = e^{-\delta n} \cdot ({}_n p_x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= v^n \sqrt{{}_n p_x}$$

$$= 0.554 \times \sqrt{0.64}$$

$$= 0.4432$$

(9) …… (A)

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \cdot P_{x:\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad \text{(過去法)}$$

$$= \frac{1}{P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}} \cdot P_{x:\overline{n}|} - \frac{P^1_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}}$$

$$\therefore P_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1} \cdot {}_tV_{x:\overline{n}|} + P^1_{x:\overline{t}|}$$

与えられた数値を代入して

$$P_{x:\overline{n}|} = 0.03659$$

(10) …… (D)

$\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - {}_tV_x$ より　　　${}_tV_{x+t} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+2t}}{\ddot{a}_{x+t}}$

題意より

$${}_tV_{x+t} = 1 - \frac{2\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}$$
$$= -1 + \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}$$
$$= -1 + \frac{1}{1 - {}_tV_x}$$
$$= \frac{{}_tV_x}{1 - {}_tV_x}$$

また ${}_{2t}V_x = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+2t}}{\ddot{a}_x}$

$$= 1 - \frac{2\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$$
$$= 2\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}\right)$$
$$= 2{}_tV_x$$

$$\therefore\ {}_tV_{x+t} + {}_{2t}V_x = \frac{{}_tV_x}{1 - {}_tV_x} + 2{}_tV_x$$
$$= \frac{0.150}{1 - 0.150} + 2 \times 0.150$$
$$= 0.47647$$

問題2

① $e^{\alpha}-1$	② $\dfrac{I}{V_1-V_0}\log\dfrac{V_1}{V_0}$	③ $e^{\delta}-1$
④ $\dfrac{V_1-V_0}{V_0}$	⑤ $\dfrac{V_1-V_0-I}{2V_a}$	⑥ $\dfrac{2I}{V_1+V_0-I}$

$$I=\int_0^1\delta f(t)\,dt=\int_0^1\delta Ae^{\alpha t}dt=\left[\frac{A\delta}{\alpha}e^{\alpha t}\right]_0^1=\frac{A\delta}{\alpha}(\overset{①}{\boxed{e^{\alpha}-1}})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (a)$$

$f(0)=A=V_0,\ f(1)=Ae^{\alpha}=V_1,$ より $A=V_0,\ \alpha=\log\dfrac{V_1}{V_0}$

これを (a) 式に代入して, δについて解くと

$$\delta=\frac{\alpha I}{A(e^{\alpha}-1)}=\frac{I\log\left(\frac{V_1}{V_0}\right)}{V_0\left(\frac{V_1}{V_0}-1\right)}=\overset{②}{\boxed{\frac{I}{V_1-V_0}\log\frac{V_1}{V_0}}}$$

この式を $i=\overset{③}{\boxed{e^{\delta}-1}}$ に代入すると

$$i=e^{\frac{I}{V_1-V_0}\log\frac{V_1}{V_0}}-1=\left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{\frac{I}{V_1-V_0}}-1=\left(1+\overset{④}{\boxed{\frac{V_1-V_0}{V_0}}}\right)^{\frac{I}{V_1-V_0}}-1$$

これを $\dfrac{V_1-V_0}{V_0}$ の関数とみなして、級数展開し、3次以上の項を無視すると、

$$i\fallingdotseq 1+\frac{I}{V_1-V_0}\cdot\overset{④}{\boxed{\frac{V_1-V_0}{V_0}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{I}{V_1-V_0}\left(\frac{I}{V_1-V_0}-1\right)\left(\overset{④}{\boxed{\frac{V_1-V_0}{V_0}}}\right)^2-1$$

$$=\frac{I}{V_0}\left(1-\overset{⑤}{\boxed{\frac{V_1-V_0-I}{2V_0}}}\right)\fallingdotseq\frac{I}{V_0}\left(1+\frac{V_1-V_0-I}{2V_0}\right)^{-1}=\overset{⑥}{\boxed{\frac{2I}{V_1+V_0-I}}}$$

問題3

① $vD_{x+t-1}-D_{x+t}$	② $\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}$	③ $\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$
④ $\left(1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\right)C_{x+t-1}$	⑤ $\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}$	⑥ $1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}$

$C_{x+t-1}=\overset{①}{\boxed{vD_{x+t-1}-D_{x+t}}}$ より

$$\frac{1}{D_x\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\sum_{t=1}^{n}C_{x+t-1}\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}=\frac{1}{D_x\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\sum_{t=1}^{n}(vD_{x+t-1}-D_{x+t})\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}$$

$$=\frac{1}{D_x\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\left\{\sum_{t=1}^{n}(1+\ddot{s}_{\overline{t-1}\rvert})D_{x+t-1}-\sum_{t=1}^{n}\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}D_{x+t}\right\}$$

$$=\frac{1}{D_x\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}(N_x-N_{x+n}-\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}D_{x+n})=\overset{②}{\boxed{\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}}}-\overset{③}{\boxed{\frac{D_{x+n}}{D_x}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{(b)}$$

ここで$P_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}=\dfrac{1}{D_x}\displaystyle\sum_{t=1}^{n}C_{x+t-1}+\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$

$$=\frac{1}{D_x}\left\{\sum_{t=1}^{n}\overset{④}{\boxed{\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\right)C_{x+t-1}}}+\sum_{t=1}^{n}\frac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}C_{x+t-1}\right\}+\overset{③}{\boxed{\frac{D_{x+n}}{D_x}}}$$

(b) 式を用いて

$$P_{x:\overline{n}\rvert}\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}=\frac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n}\overset{④}{\boxed{\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\right)C_{x+t-1}}}+\overset{②}{\boxed{\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}}}$$

したがって、$P_{x:\overline{n}\rvert}=\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}}\dfrac{1}{D_x}\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\overset{④}{\boxed{\left(1-\frac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}\right)C_{x+t-1}}}+\overset{⑤}{\boxed{\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}}}$

第1項は、死亡保険金$\overset{⑥}{\boxed{1-\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t}\rvert}}{\ddot{s}_{\overline{n}\rvert}}}}$の逓減定期保険の年払純保険料を表す。

問題4

(1) 条件より $f_N(t) - {}_tV_{x:\overline{N}|} = v \cdot p_{x+t} \cdot f_N(t+1) - v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{N}|}$ …………… (a)

ファクラーの再帰式より ${}_tV_{x:\overline{N}|} + P(N) = v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{N}|} + v \cdot q_{x+t} \cdot S_{t+1}$…… (b)

(a) ＋ (b)　　$f_N(t) + P(N) = v \cdot p_{x+t} \cdot f_N(t+1) + v \cdot q_{x+t} \cdot S_{t+1}$

両辺に $v^t \cdot {}_tp_x$ を乗じると

$$v^t \cdot {}_tp_x \cdot f_N(t) + v^t \cdot {}_tp_x \cdot P(N)$$

$$= v^{t+1} \cdot {}_{t+1}p_x \cdot f_N(t+1) + v^{t+1} \cdot {}_{t|}q_x \cdot S_{t+1}$$

この t を τ と置き換え、$\tau = 0, 1,$ ……………t−1 について辺々相加えると

$$f_N(0) + P(N) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} = v^t \cdot {}_tp_x \cdot f_N(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} v^{\tau+1} \cdot {}_{\tau|}q_x \cdot S_{\tau+1}$$

これより $P(N) = \dfrac{v^t \cdot {}_tp_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \cdot f_N(t) + \dfrac{\sum_{\tau=0}^{t-1} v^{\tau+1} \cdot {}_{\tau|}q_x \cdot S_{\tau+1}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} - \dfrac{f_N(0)}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}$

ところで $\dfrac{v^t \cdot {}_tp_x}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}$, $\dfrac{\sum_{\tau=0}^{t-1} v^{\tau+1} \cdot {}_{\tau|}q_x \cdot S_{\tau+1}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = P(t)$

$\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} = P_{x:\overline{t}|} + d$ だから

$P(N) = P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} \cdot f_N(t) + P(t) - (P_{x:\overline{t}|} + d) \cdot f_N(0)$…………… (c)

$\therefore P(t) + P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} \cdot f_N(t) - P_{x:\overline{t}|} \cdot f_N(0) = P(N) + d \cdot f_N(0)$……………右辺は一定

(2) $\dfrac{D_{x+t}}{D_x} \cdot f_N(t) = P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} \cdot f_N(t)$

前問 (1) の (c) より $P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} \cdot f_N(t) = \{P(N) - P(t)\} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} + f_N(0)$

ゆえに, $\dfrac{D_{x+t}}{D_x} \cdot f_N(t) = \{P(N) - P(t)\} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|} + f_N(0)$

したがって $F_N(t) = \dfrac{D_{x+t}}{D_x} \cdot f_N(t) - f_N(0)$

$= \{P(N) - P(t)\} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$…………… (d)

これは N+1 についても成り立つ。

すなわち $F_{N+1}(t) = \{P(N+1) - P(t)\} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$…………… (e)

(d)、(e) より $F_{N+1}(t) - F_N(t) = \{P(N+1) - P(N)\} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}$　　以上