数学１（問題）

平成６年12月20日

１．次の各問の$\boxed{\qquad}$に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。　　　　　　　　　　　（３５点）

（１）Ａ，Ｂの２人が、Ａ，Ｂ，Ｂ，Ａ，Ａ，Ｂ，Ｂ，Ａ，Ａ，……の順に１つのサイコロを投げ、最初に１の目を出した方を勝ちとする。但し引き分けはなく、どちらかが勝つまでゲームを続けるものとする。
このときＡの勝つ確率は $\boxed{\qquad}$ である。

（２）確率変数ＸとＹの同時確率密度関数が

$$f(x,\ y) = \begin{cases} x + y & (0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるとき、確率変数Ｚ＝Ｘ＋Ｙの確率密度関数ｈ（ｚ）は

$$h(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \\ \boxed{\qquad\qquad} & \\ \boxed{\qquad\qquad} & \\ 0 & (z > 2) \end{cases}$$

（３）確率変数Ｘ，Ｙは互いに独立で、ともに平均１のポアソン分布に従う。
このとき、$P\{X \cdot Y \leqq 3\} = \boxed{\qquad}$である。

（４）ＸとＹは独立な確率変数でいずれも標準正規分布　$N(0,\ 1)$（分布関数$F(x)$，確率密度関数$f(x)$とする。）に従う。このとき$P\{Y \geqq X \mid X \geqq 1\}$をＦ（１）を用いて表わすと、$\boxed{\qquad}$となる。

（５）確率変数Ｘは次の幾何分布に従う。
$P\{X = x\} = p(1-p)^x \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

このとき、期待値　$E\left(\sum_{k=0}^{X} \lambda^k\right) = \boxed{\qquad}$である。（$\lambda$は定数。）

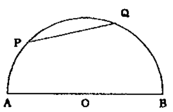
２．ある銘柄のある時点における株価をS_0とし、その時点からｉ日後の株価をS_i　$(i \geqq 0)$とする。
今、$\log(S_i / S_{i-1})$，$(i \geqq 1)$は互いに独立で同じ正規分布　$N(\mu,\ \sigma^2)$に従うとする。
（１）$X_i = \log(S_i / S_{i-1})$，$(i \geqq 1)$と置いたとき、

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ の積率母関数を求めよ。}$$

（２）ｎ日間の株価変動率　$Z_n = S_n / S_0$ の平均および分散を求めよ。　　　　　　　　　　（２０点）

３．ある図書館の所有する本の１冊当たりのページ数は確率変数　$N = X + 1$で表わされ、それぞれの本について独立であるとする。（ここにＸは平均λのポアソン分布に従う確率変数とする。）また、どの本についても、１ページ中の誤植の数は、本のページ数にはよらず、各ページ毎に独立に平均μのポアソン分布に従っているとする。
Ａ君がこの図書館から無作為にｍ冊の本を借りた時、次の問に答えよ。なお図書館は無限に本を所有するものと考えて良い。
（１）ｍ冊中、１個も誤植のない本の冊数の期待値と分散を求めよ。
（２）Ａ君が誤植を見つける確率は，本のページ数にはよらずどの誤植１個についてもｐであるとし、それぞれ独立であるとする。ｍ冊中、Ａ君が誤植を１個も見つけることのない本の冊数の期待値と分散を求めよ。　（２０点）

４．半径１の半円ＯＡＢがある。いま半円周$\overset{\frown}{AB}$上でそれぞれ無作為に点Ｐ，Ｑをとるとき、確率変数$X = \overline{PQ}$（弦ＰＱの長さ）の（１）平均および（２）分散を求めよ。
〔ヒント〕$\sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$



（２５点）

数学１　解答

１．

（１）初めにＡが１の目を出せばＡの勝ち。もし１が出なければＢの番になり、１を出せばＢの勝ち、出なければ再びＢの番となるが、この時Ｂの置かれている状況はゲーム開始時のＡと同一である。引き分けはないためＡ，Ｂそれぞれの勝つ確率の和は１である。Ａの勝つ確率をｐとすると、

Ｂの勝つ確率は $\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}p\right)$　であるから

$$p+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}p\right)=1$$

$$\therefore\quad p=\boxed{\frac{31}{61}}$$

（２）　$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ z-x)\,dx$　より

$0\leqq y=z-x\leqq 1$ となるのは　$z-1\leqq x\leqq z$ のときであるから

$z<0,\ z>2$　のときは　$h(z)=0$

$0\leqq z\leqq 1$ のとき　$h(z)=\int_{0}^{1}f(x,\ z-x)\,dx=\int_{0}^{z}z\,dx$

$$=\boxed{z^2}$$

$1\leqq z\leqq 2$ のとき　$h(z)=\int_{0}^{1}f(x,\ z-x)\,dx=\int_{z-1}^{1}z\,dx$

$$=\boxed{2z-z^2}$$

（３）$P\{X=0\}=e^{-1}$

$P\{(X=1)$ かつ $(Y\leqq 3)\}=e^{-1}\left(e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right)$

$P\{(X=2)$ かつ $(Y\leqq 1)\}=\frac{e^{-1}}{2}\left(e^{-1}(1+1)\right)$

$P\{(X=3)$ かつ $(Y\leqq 1)\}=\frac{e^{-1}}{2}\left(e^{-1}(1+1)\right)$

$P\{(X\geqq 4)$ かつ $(Y=0)\}=\left(1-e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\right)e^{-1}$

求める確率はこの合計であるから、$\boxed{2e^{-1}+\frac{4}{3}e^{-2}}$ である。

(4) $P\{Y \geqq X \mid X \geqq 1\} = \dfrac{P\{(Y \geqq X) \cap (X \geqq 1)\}}{P\{X \geqq 1\}}$

$P\{X \geqq 1\} = 1 - F(1)$

$$P\{(Y \geqq X) \cap (X \geqq 1)\} = \int_1^\infty f(x) \int_x^\infty f(y)\,dy\,dx$$

$$= \int_1^\infty f(x)(1 - F(x))\,dx$$

$$= \int_1^\infty f(x)\,dx - \int_1^\infty f(x)F(x)\,dx$$

$$= 1 - F(1) - \frac{1}{2}(1 - F(1)^2)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \displaystyle\int_1^\infty f(x)F(x)\,dx = \Big[F(x)^2\Big]_1^\infty - \int_1^\infty F(x)f(x)\,dx \\ \text{より} \displaystyle\int_1^\infty f(x)F(x)\,dx = \frac{1}{2}(1 - F(1)^2) \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - F(1))^2$$

よって

$$P\{Y \geqq X \mid X \geqq 1\} = \boxed{\frac{1}{2}(1 - F(1))}$$

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{x} \lambda^k = 1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^x$ から

$$E\left(\sum_{k=0}^{x} \lambda^k\right) = \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x \cdot 1 + \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^x \cdot \lambda$$

$$+ \sum_{x=2}^{\infty} p(1-p)^x \cdot \lambda^2 + \cdots$$

$$= 1 + (1-p) \cdot \lambda + (1-p)^2 \cdot \lambda^2 + \cdots$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 - \lambda(1-p)}}$$

(ただし収束は $|\lambda| < \dfrac{1}{1-p}$ のとき。)

2．Xが正規分布　$N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、Xの積率母関数は

$$(1)\ \phi_X(\theta) = E[e^{\theta x}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\theta x}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$
$$= \exp\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)$$

またX，Yが互いに独立な確率変数でそれぞれの積率母関数を $\phi_X(\theta)$、$\phi_Y(\theta)$ としたとき、X＋Yの積率母関数は $\phi_X(\theta)\phi_Y(\theta)$ であるから、$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ の積率母関数は

$$\phi_{Y_n}(\theta) = E(\exp(\theta Y_n)) = \exp\left(n\left(\mu\theta + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2\right)\right)$$

$$(2)\ Z_n = \frac{S_n}{S_0} = \frac{S_1}{S_0} \times \frac{S_2}{S_1} \times \cdots\cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$$
$$= \exp\left(\log\left(\frac{S_1}{S_0} \times \frac{S_2}{S_1} \times \cdots\cdots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}\right)\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \exp(Y_n)$$

$$E(Z_n) = E(\exp(Y_n)) = \phi_{Y_n}(1)$$
$$= \exp\left(n\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)$$

$$E(Z_n^2) = E(\exp(2Y_n)) = \phi_{Y_n}(2)$$
$$= \exp(n(2\mu + 2\sigma^2))$$

$$V(Z_n) = E(Z_n^2) - E(Z_n)^2$$
$$= \exp(n(2\mu + 2\sigma^2)) - \exp(n(2\mu + \sigma^2))$$
$$= \exp(n(2\mu + \sigma^2))(\exp(n\sigma^2) - 1)$$

3．（1）1ページ中に1個も誤植の無い確率は$e^{-\mu}$。ページ数nの本の場合1冊中に1個も誤植の無い確率は$(e^{-\mu})^n = e^{-n\mu}$。よってこの図書館から無作為に1冊の本を取り出したときその中に1個も誤植の無い確率πは

$$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X=n\}\, e^{-n\mu} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N=n-1\}\, e^{-n\mu}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{N=n\}\, e^{-(n+1)\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-(n+1)\mu}$$

$$= e^{-\lambda-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\mu})^n}{n!} = e^{-\lambda-\mu} e^{\lambda e^{-\mu}}$$

$$= e^{-\lambda-\mu+\lambda e^{-\mu}}$$

m冊中、1個も誤植の無い本の冊数は二項分布$\{b(k\,;m,\ \pi)\}$
（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$）にしたがうと考えられるから、

その平均は $m e^{-\lambda-\mu+\lambda e^{-\mu}}$

分散は $m e^{-\lambda-\mu+\lambda e^{-\mu}}\left(1- e^{-\lambda-\mu+\lambda e^{-\mu}}\right)$

（2）$q=1-p$とおく。1ページ中に誤植がk個あったとき、A君が誤植を1個も見つけない確率は

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{1\text{ページ中の誤植の数}=k\}\, q^k$$

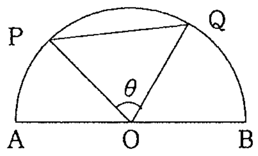
$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} q^k = e^{-\mu} e^{\mu q} = e^{-\mu p}$$

以降は（1）でμの代わりにμpとして同様に考えればよい。したがって、

期待値は $m e^{-\lambda-\mu p+\lambda e^{-\mu p}}$

分散は $m e^{-\lambda-\mu p+\lambda e^{-\mu p}}\left(1- e^{-\lambda-\mu p+\lambda e^{-\mu p}}\right)$

4．$\angle POB=\theta_1$、$\angle QOB=\theta_2$ はそれぞれ一様分布U（0，π）に従うから

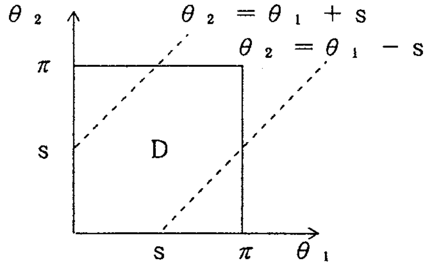


確率変数　$\theta=|\theta_1-\theta_2|$ の密度関数を f（t）（$0\leqq t\leqq\pi$）とすると、$0\leqq\forall s\leqq\pi$ に対して

$$\int_0^s f(t)\,dt=P\{\theta\leqq s\}=P\{-s\leqq\theta_1-\theta_2\leqq s\}$$

$$=P\{\theta_1-s\leqq\theta_2\leqq\theta_1+s\}=\int_D g(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_1\,d\theta_2$$

ここで θ_1,θ_2 の同時密度関数 $g(\theta_1,\theta_2)$ は



$$g(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{\pi^2}\quad\begin{matrix}(0\leqq\theta_1\leqq 1)\\(0\leqq\theta_2\leqq 1)\end{matrix}$$

であるから

$$\int_0^s f(t)\,dt=\frac{\pi^2-(\pi-s)^2}{\pi^2}$$

$$=\frac{2\pi s-s^2}{\pi^2}$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{1}{\pi^2}(2\pi-2t)$$

$X=\overline{PQ}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ であるから

$$E[X]=\int_0^\pi 2\sin\frac{\theta}{2}\,f(\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi(\pi-\theta)\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left\{\left[-2\pi\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi\right.$$

$$\left.-\left(\left[-2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi+\int_0^\pi 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\left(2\pi-\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi\right)$$

$$=\frac{8(\pi-2)}{\pi^2}$$

また$E[X^2] = \int_0^\pi 4\sin^2\frac{\theta}{2} f(\theta)\,d\theta$

$$= \frac{8}{\pi^2}\int_0^\pi (\pi-\theta)\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi (\pi-\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi (\pi-\theta-\pi\cos\theta+\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\left[\pi\theta-\frac{\theta^2}{2}-\pi\sin\theta+\theta\sin\theta\right]_0^\pi + \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{2}-2\right)$$

$$= 2-\frac{8}{\pi^2}$$

$V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$= 2-\frac{8}{\pi^2}-\left\{\frac{8(\pi-2)}{\pi^2}\right\}^2$$

$$= 2-\frac{72}{\pi^2}+\frac{256}{\pi^3}-\frac{256}{\pi^4}$$