年金数理（問題）

１．次の(1)〜(4)までについて、それぞれ５つの選択肢の中から正しいものを選んで所定の解答用紙にその記号を記入せよ。（１問５点、合計２０点）

(1) 60歳支給開始、期初払い、10年有期年金がある。年金支給開始前の死亡に対しては、死亡年度末に10年確定年金現価相当額を一時払いし、支給期間中の死亡に対しては死亡年度末に残存期間分の年金現価相当額を一時払いする。予定利率 5.0％のもとで、55歳時の年金現価率は次のどの範囲にあるか。ただし、 5.0％の基数表および現価表は右のとおりである。

x	D_x	N_x	C_x	M_x	n	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	v^n
55	6,246.7	85,452.1	42.038	2,177.171	1	1.00000	0.95238
56	5,907.2	79,205.4	43.305	2,135.133	2	1.95238	0.90703
57	5,582.6	73,298.2	44.662	2,091.828	3	2.85941	0.86384
58	5,272.1	67,715.6	46.048	2,047.166	4	3.72325	0.82270
59	4,975.0	62,443.5	47.595	2,001.118	5	4.54595	0.78353
60	4,690.5	57,468.5	49.443	1,953.523	6	5.32948	0.74622
61	4,417.7	52,778.0	51.233	1,904.080	7	6.07569	0.71068
62	4,156.1	48,360.3	53.190	1,852.847	8	6.78637	0.67684
63	3,905.0	44,204.2	54.948	1,799.657	9	7.46321	0.64461
64	3,664.1	40,299.2	56.919	1,744.709	10	8.10782	0.61391
65	3,432.7	36,635.1	58.557	1,687.790	11		0.58468
66	3,210.3	33,202.4	61.029	1,629.233	12		0.55684
67	2,996.4	29,992.1	63.114	1,568.204	13		0.53032
68	2,790.6	26,995.7	65.014	1,505.090	14		0.50507
69	2,592.7	24,205.1	67.038	1,440.076	15		0.48102
70	2,402.2	21,612.4	68.910	1,373.038			

（A）6.35以下　　（B）6.35以上6.40以下

（C）6.40以上6.45以下　　（D）6.45以上6.50以下

（E）6.50以上

(2) 毎年一定額の特別保険料P_{PSL} を払い込んで過去勤務債務を償却する年金制度があるものとする。ある年度に、過去勤務債務の償却を早めるために（１＋α)・P_{PSL} を払い込んだところ、年初の償却予定残余年数ｎ年に対し、年末の償却予定残余年数がｎ－１－βとなった。αは、ｎおよびβを用いてどのように表せるか。ただし、特別保険料の払込は期初払いとし当該年度の後発過去勤務債務額は発生せず、予定利率はｉである。

（A）$(1+i)\cdot\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}-\ddot{a}_{\overline{n-1-\beta}\rceil}$　　（B）$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}-a_{\overline{n-1-\beta}\rceil}$　　（C）$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}-\ddot{a}_{\overline{n-1-\beta}\rceil}-1$

（D）$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}-a_{\overline{n-1-\beta}\rceil}-1$　　（E）$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}-\ddot{a}_{\overline{n-1-\beta}\rceil}$

(3) ２つの年金制度（甲）および（乙）が合併することとなった。（甲）および（乙）には以下の関係がある。

- （乙）は、総人員、総給与とも（甲）の10％の規模であり、被保険者の期間、年齢構成は等しい。
- （乙）の給付内容は、（甲）の給付の一律２倍である。
- （乙）の年金資産額は、（甲）の年金資産額の10％の規模であり、（甲）および（乙）に年金者（受給待期者を含む）は存在してない。
- 合併時の（甲）の未償却過去勤務債務額は、（甲）の給付現価の50％に相当する額であった。
- （甲）は、未償却過去勤務債務額の償却を、総給与の一定割合を有限年数拠出することで行っている。

合併後は（甲）の基礎率を用いて財政方式も変更せず財政評価を行うものとし、制度内容は以下のとおりとすることとした。

- （甲）の給付内容は従前どおりとし、（乙）の給付を一律に引き下げ、（乙）の資産は全額が合併後の制度に充当される。
- 合併後の制度全体の過去勤務債務額は（甲）の合併時の償却年限を変更ぜず、（甲）および（乙）の合計の総給与の一定割合で償却する。

今、（甲）にとって従前の（甲）の被保険者に係る（甲）が負担する合併後の過去勤務債務額償却のための費用増加を、従前の（甲）の過去勤務債務額償却のための費用の５％以内に抑えることとした場合、（乙）にかかる給付の水準を、従前の（乙）の給付水準の一律何パーセント以下とすればよいか。

（A） 50.25　　（B） 57.50　　（C） 60.25　　（D） 63.75　　（E） 68.00

(4) 定年退職者のみに対し、定年年齢Xr歳時より、終身年金（年金額をαとし、年1回期初払い）を給付する年金制度において財政方式を、退職時年金現価積立方式によるものとすれば、定常状態における積立金Fを表すものは次のうちどれか。

ただし、$e_x = \left(\sum_{t=1}^{\omega - x} \ell_{x+t} \right) / \ell_x$ とする。

(A) $\alpha \cdot \ell_{x_r} \cdot a_{x_r} / d$　(B) $\alpha \cdot \ell_{x_r} \cdot (e_{x_r} - a_{x_r}) / d$　(C) $\alpha \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} (e_x - a_{x_r}) / d$

(D) $\alpha \cdot \ell_{x_r} \cdot e_{x_r} / d$　(E) $\alpha \cdot \ell_{x_r} \cdot (e_{x_r} - a_{x_r})$

2．次の空欄に当てはまる適当な算式または数値を所定の解答用紙に記入せよ。（合計20点）

(1) 定常状態にある団体に対して年金制度を導入する。保険料は期初払い、一時金は期末払い、当該年度発生の年金受給権者に対しては期末から給付が始まるものとする。給付および保険料は給与比例制の制度である。財政方式は加入年齢方式であるものとし、記号を下記のとおり定義する。

V_0:当初責任準備金（＝初期過去勤務債務額）、　PN_1:初年度標準保険料、　P_{PSL1}：初年度過去勤務債務償却額

S_1:初年度の給付等支払額、　i：予定利率、　j：初年度の実際利回り

初年度末に被保険者の給与はα%のベースアップがあり、受給者についてもα%の給付改善を行った場合、初年度末の責任準備金V_1 ＝ ［　①　］ である。一方、初年度末の年金資産F_1 ＝ ［　②　］ である。したがって、初年度末の未償却過去勤務債務額U_1 は$U_1 = U_1^{(a)} + U_1^{(b)} + U_1^{(c)}$ と表すことができる。ここに、

$U_1^{(a)} = (PN_1 + P_{PSL1}) \times (i - j)$：利差損益による後発債務（または剰余）

$U_1^{(b)} =$ ［　③　］：ベースアップおよび給付改善による後発過去勤務債務額

$U_1^{(c)} =$ ［　④　］：当初過去勤務債務額未償却残高

(2) ある企業の年金制度は、在職中の累計給与の一定割合の額を年金額として定年年齢から終身給付するものである。いま、財政再計算を行ったところ以下の諸係数が得られた。

- 将来の被保険者の給付現価（S^f） 2,000百万円、
- 在職中の被保険者の給付現価（S^a） 5,000百万円、
- 在職中の被保険者の将来勤務期間に対応する給付現価（$S^a_{F.S.}$） 3,000百万円、
- 年金受給者の給付現価（S^P） 2,200百万円、
- 将来の被保険者の給与現価（G^f）［年1回払い］ 20,000百万円、
- 在職中の被保険者の給与現価（G^a）［年1回払い］ 30,000百万円、
- 年金資産額（F） 2,500百万円、
- 在職中の被保険者の給与総額（L） 2,800百万円

財政方式は開放基金方式として、財政再計算後の標準保険料率Pは ［　⑤　］ %であり、過去勤務債務額Uは ［　⑥　］ 百万円である。この過去勤務債務額を今後20年間で毎年の在職中の被保険者の給与総額の一定割合で償却する場合、在職中の被保険者の給与総額は一定であると仮定し、20年の確定年金現価率$\overline{a}_{\overline{20|}}$ ＝12.27462を用いて特別保険料率P_{PSL} を求めると ［　⑦　］ %となる。

財政再計算を機に制度変更として「今後の給与を 1.5倍とする」を行うこととした。財政方式は変更しないものとして制度変更後の標準保険料率P' は ［　⑧　］ %となり、制度変更後の過去勤務債務額U' は ［　⑨　］ 百万円となる。過去勤務債務額の償却方法は財政再計算前と同じとした場合、過去勤務債務額償却のための特別保険料率P'_{PSL}は ［　⑩　］ %である。

（注）(2)の解答にあたって、保険料率は小数第2位を四捨五入して小数第1位までの百分率とせよ。

３．定年退職者に対して定年時の給与のα倍の年金を終身にわたって支給する年金制度がある。財政再計算による基礎率の見直しにより、給与指数を次のように洗い替えた。

再計算前 $\{b_x\} = \{1 + k(x - x_e)\}$、再計算後 $\{b'_x\} = \{1 + k'(x - x_e)\}$、$x_e \leqq x$、kとk' は正の定数

加入年齢方式による標準保険料率を再計算前 ${}^{E}P_{x_e}$、再計算後を ${}^{E}P'_{x_e}$ とするとき　$k < k' \Rightarrow {}^{E}P_{x_e} < {}^{E}P'_{x_e}$　であることを示せ。ただし、財政再計算の結果、給与指数以外の基礎率に変更はなかったものとする。　　　　（２０点）

４．過去勤務債務額の償却が終了し、定常状態に達したある年金制度が、次のような給付改善を行うものとする。

①期初の被保険者、年金受給者に対し、給付水準を前期末の一律$1 + r$倍（$r > 0$）する。

②上記の給付改善をｎ年間、毎期初に繰り返し、最終的に給付水準を当初のα倍（$\alpha > 1 + r$）に引き上げる。

後発過去勤務債務額償却のための特別保険料として、給付改善直後の未償却過去勤務債務額のｋ％（$0 < k < 100$）を直ちに償却するものとする。

ここで、単年度の特別保険料が、最初の給付改善を行う直前の責任準備金額のｃ倍（$0 < c < 1$）を上回らないようにするとき、ｎに関して次の不等式が成立することを示せ。ただし、予定利率はｉ（$i > 0$、$(100 - k)(1 + i) < 100$）である。

（２０点）

$$n < \frac{\log\left\{\alpha - \dfrac{100 \cdot c}{k} - \dfrac{c \cdot k \cdot (1+i) - 100 \cdot c \cdot i}{k \cdot r}\right\}}{\log\{(100 - k) \cdot (1+i)\} - 2}$$

５．Trowbridgeのモデル（定年退職者に年１回期初払い即時支給開始の終身年金を支給する制度）において、被保険者集団の定常状態を仮定するとき次の問に答えよ。ただし、$v = 1/(1+i)$、$d = 1 - v$　である。（２０点）

(1)$S^{a} = (v/d) \cdot ({}^{T}C - {}^{In}C)$を証明せよ。

(2)$S^{a}_{P.S.} = (1/d)(v \cdot {}^{T}C - {}^{U}C)$を証明せよ。

(3)将来および現在の被保険者について、将来期間のみを対象とする開放型総合保険料方式による保険料は、いかなる財政方式の標準保険料に一致するか。(1)、(2)を用いて導け。

必要があれば次の記号を用いること

x_e ：加入年齢
x_r ：定年年齢
L ：被保険者数
G^{f} ：将来の被保険者の給与現価
G^{a} ：現在の被保険者の給与現価
S^{f} ：将来の被保険者の給付現価
S^{a} ：現在の被保険者の給付現価
$S^{a}_{F.S.}$ ：現在の被保険者の将来期間対応の給付現価
$S^{a}_{P.S.}$ ：現在の被保険者の過去期間対応の給付現価
${}^{T}C$：退職時年金現価積立方式の保険料
${}^{In}C$：加入時積立方式の保険料
${}^{U}C$：単位積立方式の保険料
${}^{E}C$：加入年齢方式の保険料

1．

問題	(1)	(2)	(3)	(4)
記号	(B)	(D)	(D)	(B)

正解は上記のとおりであるが、以下に解法を略記する。

(1)　求める年金現価率は以下のとおり

$(1/D_{55}) \times (M_{55} - M_{60} + D_{60}) \times \ddot{a}_{\overline{10}|}$

$= (1/1,246.7) \times (2,177.171 - 1,953.523 + 4,690.5) \times 8.10782$

$= 6.378252$

したがって、（B）が正しい。

(2)　ある年の年初PSLをPSL$_0$ とすると

$PSL_0 = \ddot{a}_{\overline{n}|} \times P_{PSL}$　である。

$(1+\alpha)\cdot P_{PSL}$ を償却した年度末のPSLは

$(PSL_0 - (1+\alpha)\cdot P_{PSL}) \times (1+i)$　と表される。

これが、$\ddot{a}_{\overline{n-1-\beta}|} \cdot P_{PSL}$ となったから

$$\{\ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot P_{PSL} - (1+\alpha)\cdot P_{PSL}\} \times (1+i) = \ddot{a}_{\overline{n-1-\beta}|} \cdot P_{PSL}$$

$$\{\ddot{a}_{\overline{n}|} - (1+\alpha)\} \times (1+i) = \ddot{a}_{\overline{n-1-\beta}|}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} - (1+\alpha) = a_{\overline{n-1-\beta}|}$$

$$1+\alpha = \ddot{a}_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-1-\beta}|}$$

$$\alpha = \ddot{a}_{\overline{n}|} - a_{\overline{n-1-\beta}|} - 1$$

したがって、（D）が正しい。

(3)　（甲）の制度に関する添字をA、（乙）の制度に関する添字をBとし、（乙）の一律減額は従前の（乙）の給付水準のα倍となるものとする。合併同時の制度変更後の過去勤務債務額償却のための費用をP'_{PSL}とすると

$P'_{PSL}=PSL'/a_{\overline{n}|}\cdot(B_A+B_B)=PSL'/a_{\overline{n}|}\cdot1.1\cdot B_A$ ………(1)

ここに、PSL' は制度変更後の過去勤務債務額、B_A、B_B は（甲）、（乙）それぞれの総人員給与である。また、（甲）の過去勤務債務額をPSL_A、減額後の（乙）の過去勤務債務額をPSL'_Bとし、給付現価M、年金資産F、給与現価Nおよび（甲）の財政評価に用いる掛金率Pでそれぞれを表すと題意より

$PSL_A=M_A-N_A\cdot P-F_A=0.5\cdot M_A$ ………(2)

$PSL'_B=M_B\cdot\alpha-N_B\cdot P\cdot\alpha-F_B=M_A\cdot0.1\cdot2\cdot\alpha-N_A\cdot0.1\cdot P\cdot\alpha-0.1\cdot F_A$

となる。合併後のPSL' は

$PSL'=PSL_A+PSL'_B=M_A+M_A\cdot0.2\cdot\alpha-1.1\cdot(N_A\cdot P+F_A)$

(2)式より$N_A\cdot P+F_A=0.5\cdot M_A$ だから

$PSL'=M_A+M_A\cdot0.2\cdot\alpha-1.1\cdot0.5\cdot M_A=M_A\cdot0.45+M_A\cdot0.2\cdot\alpha$ ………(3)

したがって、題意および(1)式より

$PSL'/a_{\overline{n}|}\cdot1.1\cdot B_A<1.05\cdot PSL_A/a_{\overline{n}|}\cdot B_A$

となり、(2)式および(3)式を代入し、$M_A\cdot0.45+M_A\cdot0.2\cdot\alpha<1.1\cdot1.05\cdot0.5\cdot M_A$

ゆえに　$\alpha<0.6375$　となり、（D）が正しい。

(4) 極限方程式より　$C+d\cdot F=B$ ………(1)

題意より　$C=\alpha\cdot l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$ 、$B=\alpha\cdot\sum_{t=0}^{\omega-x_r}l_{x_r+t}$

(1)より　$F=(B-C)/d=\alpha\cdot(\sum_{t=0}^{\omega-x_r}l_{x_r+t}-l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r})/d$

$=\alpha\cdot(\sum_{t=1}^{\omega-x_r}l_{x_r+t}-l_{x_r}\cdot a_{x_r})/d$

$=\alpha\cdot(l_{x_r}\cdot e_{x_r}-l_{x_r}\cdot a_{x_r})/d=\alpha\cdot l_{x_r}\cdot(e_{x_r}-a_{x_r})/d$

したがって（B）が正しい。

2．(1)

番号	解　　　答
①	$\{(V_0+PN_1)\cdot(1+i)-S_1\}\cdot(1+\alpha/100)$
②	$(PN_1+P_{PSL1})\cdot(1+j)-S_1$
③	$\{(V_0+PN_1)\cdot(1+i)-S_1\}\cdot\alpha/100$
④	$(V_0-P_{PSL1})\cdot(1+i)$

なお、①、③においては設問中の団体が定常状態であることから｛　｝内をV_0と記述してあっても正解である。

(2)

番号	解　　　答
⑤	10．0
⑥	1，700
⑦	4．9
⑧	10．0
⑨	1，700
⑩	3．3

(2)について各々の計数を求める算式は以下のとおり

⑤ $(S^f+S^a{}_{F.S.})/(G^f+G^a)$

⑥ $S^f+S^a+S^P-0.1\cdot(G^f+G^a)-F$　ここに 0.1は標準保険料率

⑦ $U/\overline{a}_{\overline{20}|}\cdot L$

⑧ $1.5\cdot(S^f+S^a{}_{F.S.})/1.5\cdot(G^f+G^a)$

⑨ $1.5\cdot(S^f+S^a{}_{F.S.})+(S^a-S^a{}_{F.S.})+S^P-0.1\cdot1.5\cdot(G^f+G^a)$
$-F$

ここに、題意より在職中の被保険者に係る過去分の給付現価$(S^a-S^a{}_{F.S.})$は1．5倍されない。

⑩ $U'/a_{\overline{20}|}\cdot1.5\cdot L$

3．$b^*{}_x=b_x\cdot\{1+k'(x_r-x_e)\}/\{1+k(x_r-x_e)\}$　とおくと

$b^*{}_{xr}=\{1+k(x_r-x_e)\}\cdot\{\{1+k'(x_r-x_e)\}/\{1+k(x_r-x_e)\}\}$

$=1+k'(x_r-x_e)=b'_{xr}$

また　$X<X_r$ において

$$b^*_x - b'_x = b_x\cdot\{1+k'(x_r-x_e)\}/\{1+k\,(x_r-x_e)\} - b'_x$$

$$=\{1+k\,(x-x_e)\}\cdot(\{1+k'(x_r-x_e)\}/\{1+k\,(x_r-x_e)\}$$

$$-\{1+k'(x-x_e)\}$$

$$=(1/\{1+k\,(x_r-x_e)\}\cdot(k'-k)\cdot(x_r-x)>0$$

よって　$b^*_x > b'_x$

命題中

$$^EP_{xe}=\frac{(Nx_r/\,Dx_e)\cdot b_{xr}\cdot\ \alpha}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(Dx\cdot b_x/Dx_e)}$$

の分母、分子に　$Dx_e\cdot\{1+k'(x-x_e)\}/\{1+k\,(x-x_e)$　を乗ずることにより

$$^EP_{xe}=\frac{Nx_r\bullet b^*_{xr}\cdot\alpha}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}Dx\cdot b^*_x}=\frac{Nx_r\bullet b'_{xr}\cdot\alpha}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}Dx\cdot b^*_x}<\frac{Nx_r\bullet b'_{xr}\cdot\alpha}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}Dx\cdot b'_x}={}^EP'_{xe}$$

$\therefore\quad {}^EP_{xe}\ <\ {}^EP'_{xe}$

（注）定年時の給与を b_{xr-1} とした解答例が見られたが、誤りとはしなかった。

4．当初責任準備金を V_0 、ｔ回目の給付改善を行ったときの償却前期初未償却過去勤務債務を U_t とする。

$$U_1=r\bullet V_0$$

$$U_t=\{U_{t-1}-(k/100)\cdot U_{t-1}\}\cdot(1+i)+r\cdot(1+r)^{t-1}\bullet V_0 \qquad \cdots\cdots\cdots①$$

①式の両辺を $(1+r)^t$　で割ると

$$\frac{U_t}{(1+r)^t}=\frac{U_{t-1}}{(1+r)^{t-1}}\bullet\frac{100-K}{100}\bullet\frac{1+i}{1+r}+\frac{r}{1+r}\bullet V_0 \qquad \cdots\cdots\cdots②$$

①式の両辺から $\dfrac{r/(1+r)\cdot V_0}{1-(100\text{-}k)\cdot(1+i)/\{100\cdot(1+r)\}}$ を減じると

$$\frac{U_t}{(1+r)^t}-\frac{r/(1+r)\cdot V_0}{1-(100\text{-}k)\cdot(1+i)/\{100\cdot(1+r)\}}=$$

$$\frac{U_{t-1}}{(1+r)^{t-1}}\bullet\frac{(100\text{-}k)\cdot(1+i)}{100\cdot(1+r)}+\frac{r}{1+r}\bullet V_0\cdot(1-\frac{1}{1-\{(100\text{-}k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}})$$

$$= \frac{U_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} \bullet \frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100\cdot(1+r)} - \frac{r\cdot V_0}{1+r} \cdot \frac{\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}}{1-\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}}$$

$$= \frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100\cdot(1+r)} \left[\frac{U_{t-1}}{(1+r)^{t-1}} - \frac{r\cdot V_0/(1+r)}{1-\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}} \right]$$

したがって、左辺をa_tとすれば

$a_t = [\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}]\cdot a_{t-1}$ と表せ、

$a_t = [\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}]^{t-1}\cdot\ a_1$ であることより、第２項を移行し

$$\frac{U_t}{(1+r)^t} = \left\{\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100\cdot(1+r)}\right\}^{t-1} \cdot \left[\frac{r}{1+r} V_0 - \frac{r\cdot V_0/(1+r)}{1-\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}}\right]$$

$$+ \frac{r/(1+r)\cdot V_0}{1-(100-k)\cdot(1+i)/\{100\cdot(1+r)\}}$$

$$\therefore U_t = (1+r)^t \cdot \frac{r\cdot V_0}{1+r} \cdot \left[\left\{\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100\cdot(1+r)}\right\}^{t-1} \cdot \left\{1 - \frac{1}{1-\{(100-k)\cdot(1+i)\}/\{100\cdot(1+r)\}}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1-(100-k)\cdot(1+i)/\{100\cdot(1+r)\}}\right]$$

$$= r\cdot V_0\cdot(1+r)^{t-1}\cdot\left[\frac{(100-k)^{t-1}\cdot(1+i)^{t-1}}{100^{t-1}\cdot(1+r)^{t-1}} \bullet \frac{-(100-k)\cdot(1+i)}{100\cdot(1+r)-(100-k)\cdot(1+i)}\right.$$

$$\left. + \frac{100\cdot(1+r)}{100\cdot(1+r)-(100-k)\cdot(1+i)}\right]$$

$$= \frac{r\cdot V_0}{100\cdot(1+r)-(100-k)\cdot(1+i)} \cdot \left\{100\cdot(1+r)^t - \frac{(100-k)^t\cdot(1+i)^t}{100^{t-1}}\right\}$$

$0<k<100$、$r>0$、$100\cdot(1+r)>100$、$(100-k)\cdot(1+i)<100$ よりU_tは単調増加関数であるので、題意より

$$(k/100)\cdot U_n \leqq c \bullet V_0$$

$$\frac{k}{100} \bullet \frac{r\cdot V_0}{100\cdot(1+r)-(100-k)\cdot(1+i)} \cdot \left\{100\cdot(1+r)^n - \frac{(100-k)^n\cdot(1+i)^n}{100^{n-1}}\right\} \leqq c \bullet V_0$$

$(1+r)^n = \alpha$　より

$$\frac{k}{100} \bullet \frac{r}{r+\{k\cdot(1+i)-100\cdot i\}/100} \cdot \left[\alpha - \left\{\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100}\right\}^n\right] \leqq c$$

$$\frac{k\cdot r}{100\cdot c} \cdot \left[\alpha - \left\{\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100}\right\}^n\right] \leqq r + \frac{k\cdot(1+i)-100\cdot i}{100}$$

$$\alpha - \left\{\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100}\right\}^n \leqq \frac{100\cdot c}{k\cdot r} \cdot \left\{r + \frac{k\cdot(1+i)-100\cdot i}{100}\right\}$$

$$\left\{\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100}\right\}^{n} \geqq \alpha-\frac{100\cdot c}{k\cdot r}\cdot\left\{r+\frac{k\cdot(1+i)-100\cdot i}{100}\right\}$$

$$n\cdot\log\frac{(100-k)\cdot(1+i)}{100}\geqq\log\left\{\alpha-\frac{100\cdot c}{k}-\frac{c\cdot k\cdot(1+i)-100\cdot c\cdot i}{k\cdot r}\right\}$$

$$n\leqq\frac{\log\left\{\alpha-\dfrac{100\cdot c}{k}-\dfrac{c\cdot k\cdot(1+i)-100\cdot c\cdot i}{k\cdot r}\right\}}{\log\{(100-k)\cdot(1+i)\}-2}$$

5. (1)

$$S^{a}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x\cdot(D_{x_r}/D_x)\cdot\ddot{a}_{x_r}=\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\upsilon^{x_r-x}$$

$$=\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\frac{\upsilon\cdot(1-\upsilon^{x_r-x_e})}{1-\upsilon}$$

$$=(\upsilon/d)\cdot\left(\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}-\ell_{x_e}\frac{\ell_{x_r}\bullet\upsilon^{x_r}}{\ell_{x_e}\bullet\upsilon^{x_e}}\ddot{a}_{x_r}\right)$$

$$=(\upsilon/d)\bullet({}^{T}C-{}^{In}C)$$

(2)

$$S^{a}{}_{P.S.}=\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}(x-x_e)\bullet\ell_x\cdot(D_{x_r}/D_x)\bullet\ddot{a}_{x_r}$$

$$=\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}(x-x_e)\bullet\ell_{x_r}\bullet\upsilon^{x_r-x}\bullet\ddot{a}_{x_r}$$

$$=\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}(x-x_e)\bullet\upsilon^{x_r-x}$$

$$=(1/d)\cdot\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1}i\cdot(x-x_e)\bullet\upsilon^{x_r-x+1}$$

$$=(1/d)\cdot\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\left\{(x_r-x_e)\bullet\upsilon-\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\upsilon^{x_r-x}\right\}$$

$$=(1/d)\cdot\left\{\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\upsilon-\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\ddot{a}_{x_r}\bullet\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_{x_r}\bullet\upsilon^{x_r-x}\right\}$$

$$=(1/d)\cdot\left[\ell_{x_r}\bullet\ddot{a}_{x_r}\bullet\upsilon-\{1/(x_r-x_e)\}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\ell_x\cdot(D_{x_r}/D_x)\bullet\ddot{a}_{x_r}\right]$$

$$=(1/d)\cdot(\upsilon\bullet{}^{T}C-{}^{U}C)$$

(3) $$P = \frac{S^{a}{}_{F.S.} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}}$$ であるから

保険料をCとすると　$C = P \bullet L$　となり、(1)、(2)より

$$C = \frac{(1/d) \cdot ({}^{U}C - \upsilon \bullet {}^{In}C) + (\upsilon/d) \cdot {}^{In}C}{(1/d) \cdot L} \bullet L = {}^{U}C$$

ゆえに単位積立方式の保険料に一致する。