保険数学2（問題）

1．次の（1）から（5）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔(A)から(E)のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。（40点）

（1）2重脱退表で、原因Aによる脱退力μ_x^A、原因Bによる脱退力μ_x^Bがそれぞれ$\mu_x^A=\dfrac{2}{a-x}$、$\mu_x^B=1$で$\ell_0=a^2$（aは正の定数）のとき、原因Aによる脱退者数d_x^Aは$d_x^A=f(x)\cdot e^{-(x+1)}+2(a-x-1)e^{-x}$となる。

このf(x)は次のうちどれに等しいか。

(A) $2(x+2-a)$　(B) $2(x-a)$　(C) $a-x+1$　(D) $2a-x$　(E) $a-x$

（2）40歳加入年払全期払込30年満期養老保険（保険金額1、保険金期末払）において、責任準備金をチルメル割合0.0200の5年チルメル式で積み立てるとしたとき、第1年度の付加保険料は次のうちどれに最も近いか。

但し、予定新契約費は保険金額1に対し0.0250、予定集金費は営業保険料1に対し0.0300、予定維持費は保険金額1に対し0.0024とし、予定利率は0.0500、$\ddot{a}_{40:\overline{30}|}=15.3690$、$\ddot{a}_{40:\overline{5}|}=4.5300$とする。

(A) 0.0199　(B) 0.0201　(C) 0.0203　(D) 0.0205　(E) 0.0207

（3）${}_\infty q_{xyz}^{2}={}_\infty q_{xyz}^{3}$、${}_\infty q_{xy}^{1}=0.60$、${}_\infty q_{xz}^{1}=0.55$、${}_\infty q_{xyz}^{1}=0.50$のとき、${}_\infty q_{xyz}^{\;1}$の値に最も近いのは次のうちどれか。

(A) 0.20　(B) 0.25　(C) 0.30　(D) 0.35　(E) 0.40

（4）$\mu_x=\dfrac{1}{100-x}$　$(0\leqq x<100)$のとき、40歳と45歳の両人のうち一方が60歳までに死亡し、他方が60歳と61歳の間で死亡する確率の値に最も近いのは次のうちどれか。

(A) 0.0104　(B) 0.0106　(C) 0.0108　(D) 0.0110　(E) 0.0112

（5）一部が空欄となっている死亡・就業不能脱退残存表がある。この空欄のうち(f)に入るべき数値に最も近いのは次のうちどれか。

年令x	ℓ_x^{aa}	d_x^{aa}	i_x	ℓ_x^{ii}	d_x^{ii}	q_x^{aa}	q_x^{i}
45	96,330	276	(a)	756	(b)	(c)	0.0163624
46	(d)	308	(e)	(f)	(g)	0.0032091	(h)

(A) 814　(B) 816　(C) 818　(D) 820　(E) 822

2．x歳加入年払全期払込n年満期養老保険（保険金額1、保険金即時払）において、チルメル割合α、チルメル期間h年のチルメル式責任準備金を考えるとき、次の各問に答えよ。 （20点）

（1）第1年度の純保険料P_1、第2年度以降第h年度までの純保険料P_2、それぞれを $\bar{P}_{x:\overline{n|}}$、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$、$\alpha$を用いて表わせ。（結果のみ示すこと。）

（2）t年経過後のチルメル式責任準備金の過去法による式をP_1、P_2、$\bar{P}_{x:\overline{n|}}$ および計算基数を用いて表わせ。（結果のみ示すこと。）

なお、解答に使用する計算基数は記号D、N、C、M、$\bar{C}$、$\bar{M}$と添字x、h、tによって定義された記号のみとする。

（3）前問（2）における過去法の式が将来法の式と一致することを証明せよ。純保険料式責任準備金について両者が一致することは前提としてもよいが、その前提を用いた箇所を明示すること。

3．x歳加入の一時払終身保険（保険料A_x、保険金額1、保険金期末払）が多数あり、すべて同一年月日に契約されている保険群団を仮定するとき、次の各問に答えよ。なお、この保険は無配当であるとし、かつ予定事業費および実際事業費はそれぞれ0とする。

また、記号は次のとおり定義する。

i	：予定利率（正の定数）	i'	：実際利回り（正の定数）
q_x	：予定死亡率	q'_x	：実際死亡率
d_{x+k-1}	：第k保険年度予定死亡数	d'_{x+k-1}	：第k保険年度実際死亡数
ℓ_{x+k-1}	：第k保険年度始予定生存数	ℓ'_{x+k-1}	：第k保険年度始実際生存数

（$k \geqq 1$、$\ell_{x+k-1} > 0$、$\ell'_{x+k-1} > 0$）

$\ell_x = \ell'_x$とし、これらを契約日の契約件数とする。

$d_{x+k-1} = \ell_{x+k-1} \cdot q_{x+k-1} = \ell_{x+k-1} - \ell_{x+k}$

$d'_{x+k-1} = \ell'_{x+k-1} \cdot q'_{x+k-1} = \ell'_{x+k-1} - \ell'_{x+k}$

$\Delta i = i' - i$

$\Delta q_{x+k-1} = q_{x+k-1} - q'_{x+k-1}$ （20点）

（1）第k保険年度の剰余金G_kは次式により表わされることを示せ。

$G_k = \{\Delta i \cdot A_{x+k-1} + \Delta q_{x+k-1} \cdot (1 - A_{x+k})\} \cdot \ell'_{x+k-1}$

（2）第k保険年度末収支残をR_k（$R_1 = G_1$、$R_k = (1 + i') \cdot R_{k-1} + G_k$）とし、

ある正の整数m（$m \geqq 2$）について$R_m = 0$、

$k \leqq m$で$q'_{x+k-1} = q_{x+k-1} - \dfrac{c}{\ddot{a}_{x+k}}$ （cは正の定数）

$\{q_{x+k-1}\}$ は全年齢で単調増加とする。

（ア）このとき、前問（1）の結果を利用し、$\Delta i \cdot \sum_{k=1}^{m} A_{x+k-1} \cdot D'_{x+k-1}$を求めることにより$\Delta i < 0$となることを示せ。

（ここに$D'_{x+k-1} = (1 + i')^{-x-k+1} \cdot \ell'_{x+k-1}$）

（イ）$g_k = \dfrac{G_k}{\ell'_{x+k-1}}$が単調減少関数であることを示し、$k = 1$、……、$\ell$で$G_k \geqq 0$、$k = \ell + 1$、……、mで$G_k < 0$となるような$\ell$（$< m$）がただ1つ存在することを示せ。

（ウ）$k < m$であるすべてのkについて$R_k > 0$が成り立つことを帰納法により示せ。

4．保険料連続払のｘ歳加入終身保険（終身払込、保険金額1、保険金即時払）を考える。

標準体と条件体について基礎率が下表のとおり与えられているものとするとき、次の各問に答えよ。

この場合、条件体とは疾病等のため死亡危険等が標準の被保険者（すなわち標準体）より高い者をいう。

	標準体	条件体
特定疾病にならずに死亡する場合の死力　：$\mu^{(ad)}$	μ	2μ
特定疾病の瞬間発生率　：$\mu^{(ai)}$	2μ	3μ
特定疾病となったのち死亡する場合の死力　：$\mu^{(id)}$	4μ	9μ

（μは定数）

なお、特定疾病になった時点では給付は行わず、特定疾病状態からの回復率は無視できるものとする。また、保険料は特定疾病状態になっても生きている限り払い続けることとし、付加保険料は考慮しないものとする。

以下、使用する記号は次のとおりとする。解答する際もこれらの記号を使用すること。

δ　：利力

P　：標準体契約の純保険料（$\bar{P}$を簡略し、Pとしている。以下同じ）

$P_1^{(R)}$　：条件体契約の純保険料（条件体契約についての記号は（R）を付して明示する。）

$\Delta P_1^{(R)}$：条件体契約の特別保険料（すなわち、$\Delta P_1^{(R)} = P_1^{(R)} - P$）

なお、保険料については上記のとおり“－”を省略してよいが、保険料以外の記号は即時払であることを明示すること。(例) $\bar{a}_x^a$, $\bar{a}_x^{a(R)}$ など　（20点）

（1）条件体契約の特別保険料$\Delta P_1^{(R)}$は次のとおりの式となることを証明せよ。

$$\Delta P_1^{(R)} = \frac{\mu\cdot(\delta^2+33\mu\delta+126\mu^2)}{(\delta+6\mu)(\delta+12\mu)}$$

（2）条件体契約について死亡時に死亡保険金に加えて既払込の特別保険料を返還する終身払込終身保険を考える。この保険の特別保険料$\Delta P_2^{(R)}$は次のとおりの式となることを証明せよ。

$$\Delta P_2^{(R)} = \frac{\Delta P_1^{(R)}}{1 - I\cdot(P+\Delta P_1^{(R)}+\delta)}$$

但し、$I = \dfrac{35}{4}\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{(\delta+5\mu)^2} - \dfrac{27}{4}\cdot\mu\cdot\dfrac{1}{(\delta+9\mu)^2}$ とする。

保 険 数 学 2（解答例）

1．

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解答欄	(A)	(C)	(D)	(B)	(D)

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解答方法を略記する。

(1) …… (A)

$$\mu_x=\mu_x^A+\mu_x^B=\frac{2}{a-x}+1$$

$$\ell_x=\ell_0\exp\left\{-\int_0^x\mu_t dt\right\}=a^2\cdot\exp\left\{-\int_0^x\left(\frac{2}{a-t}+1\right)dt\right\}$$

$$=(a-x)^2e^{-x}$$

$$d_x^A=\int_0^1\ell_{x+s}\,\mu_{x+s}^A ds=\int_x^{x+1}\ell_t\,\mu_t^A dt=\int_x^{x+1}(a-t)^2e^{-t}\frac{2}{a-t}dt$$

$$=2\int_x^{x+1}(a-t)e^{-t}\,dt$$

$$=2(x+2-a)e^{-(x+1)}+2(a-x-1)e^{-x}$$

(2) …… (C)

$$P_{40:\overline{30|}}=\frac{1}{\ddot{a}_{40:\overline{30|}}}-d=\frac{1}{15.369}-\frac{0.05}{1.05}=0.017447$$

営業保険料を P^*、第1年度の純保険料を P_1 とすると

$$P^*=\frac{1}{1-0.03}\left(P_{40:\overline{30|}}+\frac{0.025}{\ddot{a}_{40:\overline{30|}}}+0.0024\right)$$

$$=\frac{1}{0.97}\left(0.017447+\frac{0.025}{15.369}+0.0024\right)=0.022138$$

$$P_1=P_{40:\overline{30|}}-0.02\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{40:\overline{5|}}}\right)=0.017447-0.02\left(1-\frac{1}{4.530}\right)=0.001862$$

従って第1年度の付加保険料は

$$P^*-P_1=0.022138-0.001862=0.020276$$

(3) …… (D)

x, y, z の順で死亡する確率を f(x, y, z) で表わす。

$f(x, y, z)=A$, $f(x, z, y)=B$, $f(y, x, z)=C$

$f(y, z, x)=D$, $f(z, x, y)=E$, $f(z, y, x)=F$ とすると

$A+B+C+D+E+F=1$

${}_{\infty}q_{x\overset{2}{y}z}={}_{\infty}q_{xy\overset{3}{z}}$ より　$A+F=A+C$　　$\therefore F=C$

${}_{\infty}q^{\,1}_{xy}=0.6$ より　　$A+B+E=0.6$

${}_{\infty}q^{\,1}_{xz}=0.55$ より　　$A+B+C=0.55$

${}_{\infty}q^{\,1}_{xyz}=0.5$ より　　$A+B=0.5$　　$\therefore F=C=0.05$

従って　${}_{\infty}q_{x\overset{1}{y}z}=C+D=1-(A+B+E+F)$

$=1-(0.6+0.05)=0.35$

(4) …… (B)

$$\mu_x=-\frac{d\log \ell_x}{dx}=\frac{1}{100-x} \text{ より}$$

$\ell_x=C(100-x)$　　(Cは定数)

従って求める確率は

$${}_{20}q_{40}\cdot{}_{15|}q_{45}+{}_{15}q_{45}\cdot{}_{20|}q_{40}$$

$$=\frac{\ell_{40}-\ell_{60}}{\ell_{40}}\ \frac{\ell_{60}-\ell_{61}}{\ell_{45}}+\frac{\ell_{45}-\ell_{60}}{\ell_{45}}\ \frac{\ell_{60}-\ell_{61}}{\ell_{40}}=\frac{(\ell_{60}-\ell_{61})(\ell_{40}+\ell_{45}-2\ell_{60})}{\ell_{40}\ell_{45}}$$

$$=\frac{C\cdot(40-39)\cdot C\cdot(60+55-80)}{C\cdot 60\cdot C\cdot 55}=\frac{7}{660}$$

$$=0.010606$$

(5) …… (D)

(d)　$q^{aa}_{x+1}=\dfrac{d^{aa}_{x+1}}{\ell^{aa}_{x+1}}$　より　$\ell^{aa}_{46}=\dfrac{d^{aa}_{46}}{q^{aa}_{46}}=\dfrac{308}{0.0032091}=95{,}977$

(a)　$\ell^{aa}_{x+1}=\ell^{aa}_{x}-d^{aa}_{x}-i_x$　より　$i_{45}=\ell^{aa}_{45}-d^{aa}_{45}-\ell^{aa}_{46}=96{,}330-276-95{,}977=77$

(b)　$q^{i}_{x}=\dfrac{d^{ii}_{x}}{\ell^{ii}_{x}+\frac{1}{2}i_x}$　より　$d^{ii}_{45}=q^{i}_{45}\left(\ell^{ii}_{45}+\dfrac{1}{2}i_{45}\right)$

$$=0.0163624\left(756+\frac{1}{2}\times 77\right)$$

$$=13$$

(f) $\ell^{ii}_{x+1}=\ell^{ii}_{x}+i_{x}-d^{ii}_{x}$ より $\ell^{ii}_{46}=\ell^{ii}_{45}+i_{45}-d^{ii}_{45}=756+77-13=820$

2. (1) $P_1=\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)$

$P_2=\overline{P}_{x:\overline{n}|}+\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$

(2) t = 1のとき

$$\frac{1}{D_{x+1}}\left(P_1D_x-\overline{C}_x\right)$$

2≦t＜hのとき

$$\frac{1}{D_{x+t}}\left\{P_1D_x+P_2(N_{x+1}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right\}$$

h≦tのとき

$$\frac{1}{D_{x+t}}\left\{P_1D_x+P_2(N_{x+1}-N_{x+h})+\overline{P}_{x:\overline{n}|}(N_{x+h}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right\}$$

(3) t = 1のとき

$$\frac{1}{D_{x+1}}(P_1D_x-\overline{C}_x)=\frac{1}{D_{x+1}}\left[\left\{\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right\}D_x-\overline{C}_x\right]$$

$$=\frac{D_x}{D_{x+1}}\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\overline{C}_x}{D_{x+1}}-\alpha\frac{D_x}{D_{x+1}}\ \frac{vp_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

$$=\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}$$

$$\left(\text{前提より}\ \frac{D_x}{D_{x+1}}\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\overline{C}_x}{D_{x+1}}=\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}\right)$$

2≦t＜hのとき

$$\frac{1}{D_{x+t}}\left\{P_1D_x+P_2(N_{x+1}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right\}$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}\left[\left\{\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right\}D_x+\left(\overline{P}_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right.$$

$$\left.\times(N_{x+1}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right]$$

$$=\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\left(\frac{D_{x+1}}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}-\frac{N_{x+1}-N_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

$$=\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$$

(前提より $\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}=\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$)

$h\leqq t$のとき

$$\frac{1}{D_{x+t}}\left\{P_1D_x+P_2(N_{x+1}-N_{x+h})+\bar{P}_{x:\overline{n}|}(N_{x+h}-N_{x+t})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+t})\right\}$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}\left[\left\{\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right\}D_x+\left(\bar{P}_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)(N_{x+1}-N_{x+h})\right.$$

$$\left.+\bar{P}_{x:\overline{n}|}(N_{x+h}-N_{x+t})-(\bar{M}_x-\bar{M}_{x+t})\right]$$

$$=\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\left(\frac{D_{x+1}}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}-\frac{N_{x+1}-N_{x+h}}{D_{x+t}}\right)$$

$$=\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(前提より $\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}}=\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\bar{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$)

〔別解〕

$t=1$のとき

$$\frac{1}{D_{x+1}}(P_1D_x-\bar{C}_x)=\frac{1}{D_{x+1}}\left[\left\{\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right\}D_x-\bar{C}_x\right]$$

$$=\frac{D_x}{D_{x+1}}\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\bar{C}_x}{D_{x+1}}-\alpha\frac{D_x}{D_{x+1}}\quad\frac{vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}$$

$$=\left\{\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+1}}-\bar{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+1}}\right\}+\frac{D_x}{D_{x+1}}\bar{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\bar{C}_x}{D_{x+1}}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}$$

$$\left(\because\quad\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+1}}=\bar{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+1}}\right)$$

$$=\frac{\overline{M}_{x+1}-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+1}}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_{x+1}-N_{x+n}}{D_{x+1}}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}$$

$$=\overline{A}_{x+1:\overline{n-1}|}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}$$

$2\leqq t<h$のとき

$$\frac{1}{D_{x+t}}\left\{P_1D_x+P_2(N_{x+1}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right\}$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}\left[\left\{\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right\}D_x+\left(\overline{P}_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)(N_{x+1}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right]$$

$$=\left\{\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+t}}\right\}+\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\left(\frac{D_{x+1}}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}-\frac{N_{x+1}-N_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

$$\left(\because\ \frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}=\overline{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+t}}\right)$$

$$=\frac{\overline{M}_{x+t}-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$$

$$=\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}$$

$h\leqq t$のとき

$$\frac{1}{D_{x+t}}\left\{P_1D_x+P_2(N_{x+1}-N_{x+h})-\overline{P}_{x:\overline{n}|}(N_{x+h}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right\}$$

$$=\frac{1}{D_{x+t}}\left[\left\{\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\alpha\left(1-\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\right\}D_x+\left(\overline{P}_{x:\overline{n}|}+\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)(N_{x+1}-N_{x+h})\right.$$

$$\left.-\overline{P}_{x:\overline{n}|}(N_{x+h}-N_{x+t})-(\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t})\right]$$

$$=\left\{\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}-\overline{P}_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+t}}\right\}+\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}\overline{P}_{x:\overline{n}|}-\frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\left(\frac{D_{x+1}}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x+1:\overline{h-1}|}-\frac{N_{x+1}-N_{x+t}}{D_{x+t}}\right)$$

$$\left(\because \quad \frac{\overline{M}_x-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}=\overline{P}_{x:\overline{n|}}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+t}}\right)$$

$$=\frac{\overline{M}_{x+t}-\overline{M}_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}-\overline{P}_{x:\overline{n|}}\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$=\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}}-\overline{P}_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

3.(1) 第k保険年度末責任準備金は A_{x+k} なので

$\ell_{x+k-1}A_{x+k-1}(1+i)-d_{x+k-1}-\ell_{x+k}A_{x+k}=0$ ……①

$\ell'_{x+k-1}A_{x+k-1}(1+i')-d'_{x+k-1}-\ell'_{x+k}A_{x+k}=G_k$ ……②

①, ②の両辺を各々 ℓ_{x+k-1} , ℓ'_{x+k-1} で割ると

$A_{x+k-1}(1+i)-q_{x+k-1}-(1-q_{x+k-1})A_{x+k}=0$ ……③

$A_{x+k-1}(1+i')-q'_{x+k-1}-(1-q'_{x+k-1})A_{x+k}=\dfrac{G_k}{\ell'_{x+k-1}}$ ……④

(④−③)$\times\ell'_{x+k-1}$

$G_k=\{\Delta i\ A_{x+k-1}+\Delta q_{x+k-1}(1-A_{x+k})\}\ell'_{x+k-1}$

(2) (ア) $R_m=(1+i')R_{m-1}+G_m=(1+i')^{m-1}G_1+(1+i')^{m-2}G_2+\cdots+G_m$

$=\sum_{k=1}^{m}(1+i')^{m-k}G_k$ となる。

ここで (1) の式をG_Kに代入すると

$R_m=\sum_{k=1}^{m}(1+i')^{m-k}\{\Delta i A_{x+k-1}+\Delta q_{x+k-1}(1-A_{x+k})\}\ell'_{x+k-1}=0$

$R_m=0$ と $k\leqq m$ のとき $\Delta q_{x+k-1}=q_{x+k-1}-q'_{x+k-1}=\dfrac{c}{\ddot{a}_{x+k}}$ より

$\Delta i\sum_{k=1}^{m}A_{x+k-1}(1+i')^{m-k}\ell'_{x+k-1}=-\sum_{k=1}^{m}\Delta q_{x+k-1}(1-A_{x+k})(1+i')^{m-k}\ell'_{x+k-1}$

両辺に $(1+i')^{-x-m+1}$ を掛けると

$$\Delta i\sum_{k=1}^{m}A_{x+k-1}D'_{x+k-1}=-\sum_{k=1}^{m}\Delta q_{x+k-1}(1-A_{x+k})D'_{x+k-1}$$

$$=-\sum_{k=1}^{m}\frac{c}{\ddot{a}_{x+k}}d\ddot{a}_{x+k}D'_{x+k-1}$$

$$=-cd\sum_{k=1}^{m}D'_{x+k-1}$$

$A_{x+k-1}>0$, $D'_{x+k-1}>0$, $c>0$, $d>0$ より $\Delta i<0$

（イ） $g_k = \dfrac{G_k}{\ell'_{x+k-1}} = \Delta i A_{x+k-1} + \Delta q_{x+k-1}(1 - A_{x+k})$

$= \Delta i A_{x+k-1} + cd$

また、$\ddot{a}_{x+k} = 1 + vp_{x+k} + v^2 p_{x+k} p_{x+k+1} + \cdots$

$\ddot{a}_{x+k+1} = 1 + vp_{x+k+1} + v^2 p_{x+k+1} p_{x+k+2} + \cdots$

q_{x+k-1}は単調増加なので $p_{x+k+j} > p_{x+k+j+1}$

従って $\ddot{a}_{x+k} > \ddot{a}_{x+k+1}$

また、$A_{x+k} = 1 - d\ddot{a}_{x+k}$ より $A_{x+k} < A_{x+k+1}$

従って A_{x+k-1} が単調増加なので g_k は単調減少関数となる

従って G_k も単調減少関数となる。

もし $G_1 < 0$ とすると G_k は $k \leqq m$ ですべて負となる。従って $R_m < 0$

となり矛盾

$G_m > 0$ とすると G_k は $k \leqq m$ ですべて正となる。従って $R_m > 0$

となり矛盾

ゆえに必ず $G_1 > 0$, $G_1 > G_2 > \cdots > G_m$, $G_m < 0$となる。

すなわち $k = 1$, … ,ℓ で $G_k \geqq 0$, $k = \ell + 1$, … ,m で $G_k < 0$となるような ℓ （$< m$）がただ1つ存在する。

（ウ） $k \leqq \ell$ の場合と $k > \ell$ の場合に分けて帰納法で証明する。

(i) $k \leqq \ell$の場合

$k = 1$ のとき $R_1 = G_1 > 0$

$k = j - 1$ のとき $R_{j-1} > 0$ が成り立つと仮定すると

$R_j = (1 + i')R_{j-1} + G_j > 0$ （$\because$ $j < \ell$ より $G_j > 0$）

(ii) $k > \ell$の場合

$k = m - 1$のとき $R_{m-1} = \dfrac{1}{1+i'}(R_m - G_m) > 0$

（$\because$ $R_m = 0$, $G_m < 0$）

$k = j + 1$ のとき $R_{j+1} > 0$ が成り立つと仮定すると

$R_j = \dfrac{1}{1+i'}(R_{j+1} - G_{j+1}) > 0$ （$\because$ $j + 1 > \ell$ より $G_{j+1} < 0$）

(i)(ii) より $k < m$ であるすべての k について $R_k > 0$

4. (1) $P=\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}-\delta$, $P_1^{(R)}=\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a(R)}}-\delta$, 従って $\Delta P_1^{(R)}=\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a(R)}}-\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}$

また、${}_tp_x^{aa}=e^{-\int_0^t(\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})ds}=e^{-(\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})t}$

${}_tp_x^{i}=e^{-\int_0^t\mu^{(id)}ds}=e^{-\mu^{(id)}t}$ より

$${}_tp_x^{ai}=\int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu^{(ai)}\ {}_{t-s}p_{x+s}^{i}ds=\int_0^t e^{-(\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})s}\ \mu^{(ai)}e^{-\mu^{(id)}(t-s)}ds$$

$$=\frac{\mu^{(ai)}}{\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)}-\mu^{(id)}}\left\{e^{-\mu^{(id)}t}-e^{-(\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})t}\right\}$$

${}_tp_x^{a}={}_tp_x^{aa}+{}_tp_x^{ai}$ より

$$\bar{a}_x^{a}=\int_0^\infty v^t{}_tp_x^{a}dt=\int_0^\infty v^t({}_tp_x^{aa}+{}_tp_x^{ai})dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[e^{-(\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})t}+\frac{\mu^{(ai)}}{\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)}-\mu^{(id)}}\left\{e^{-\mu^{(id)}t}-e^{-(\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})t}\right\}\right]dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-(\delta+\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})t}dt+\frac{\mu^{(ai)}}{\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)}-\mu^{(id)}}$$

$$\times\int_0^\infty\left(e^{-(\delta+\mu^{(id)})t}-e^{-(\delta+\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{\delta+\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)}}+\frac{\mu^{(ai)}}{\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)}-\mu^{(id)}}\left(\frac{1}{\delta+\mu^{(id)}}-\frac{1}{\delta+\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)}}\right)$$

$$=\frac{\delta+\mu^{(ai)}+\mu^{(id)}}{(\delta+\mu^{(ad)}+\mu^{(ai)})(\delta+\mu^{(id)})}$$

従って $\Delta P_1^{(R)}=\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a(R)}}-\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}=\dfrac{(\delta+5\mu)(\delta+9\mu)}{\delta+12\mu}-\dfrac{(\delta+3\mu)(\delta+4\mu)}{\delta+6\mu}$

$$=\frac{\mu(\delta^2+33\mu\delta+126\mu^2)}{(\delta+6\mu)(\delta+12\mu)}$$

(2) この条件体契約の純保険料を $P_2^{(R)}$ とすると

$$P_2^{(R)}\bar{a}_x^{a(R)}=\bar{A}_x^{(R)}+\int_0^\infty v^t t(P_2^{(R)}-P)({}_tp_x^{aa(R)}\mu^{(ad)(R)}+{}_tp_x^{ai(R)}\mu^{(id)(R)})dt$$

ここで $I=\int_0^\infty tv^t({}_tp_x^{aa(R)}\mu^{(ad)(R)}+{}_tp_x^{ai(R)}\mu^{(id)(R)})dt$ とおくと

$$P_2^{(R)}\bar{a}_x^{a(R)}=\bar{A}_x^{(R)}+(P_2^{(R)}-P)I$$

$$P_2^{(R)}=\frac{\bar{A}_x^{(R)}-PI}{\bar{a}_x^{a(R)}-I}$$

$$\therefore\quad \Delta P_2^{(R)}=P_2^{(R)}-P=\frac{\bar{A}_x^{(R)}-PI}{\bar{a}_x^{a(R)}-I}-P=\frac{\bar{A}_x^{(R)}-P\bar{a}_x^{a(R)}}{\bar{a}_x^{a(R)}-I}$$

$\bar{A}_x^{(R)}=1-\delta\bar{a}_x^{a(R)}$, $P+\delta=\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}$, $\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a(R)}}-\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}=\Delta P_1^{(R)}$ より

$$\Delta P_2^{(R)}=\frac{1-(P+\delta)\bar{a}_x^{a(R)}}{\bar{a}_x^{a(R)}-I}=\frac{\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a(R)}}-\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}}{1-\dfrac{I}{\bar{a}_x^{a(R)}}}=\frac{\Delta P_1^{(R)}}{1-\dfrac{I}{\bar{a}_x^{a(R)}}}$$

また $\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a(R)}}=\Delta P_1^{(R)}+\dfrac{1}{\bar{a}_x^{a}}=\Delta P_1^{(R)}+P+\delta$ より

$$\Delta P_2^{(R)}=\frac{\Delta P_1^{(R)}}{1-I(P+\Delta P_1^{(R)}+\delta)}$$

ここで $I=\displaystyle\int_0^\infty tv^t\Big[e^{-(\mu^{(ad)(R)}+\mu^{(ai)(R)})t}\cdot\mu^{(ad)(R)}+\frac{\mu^{(ai)(R)}}{\mu^{(ad)(R)}+\mu^{(ai)(R)}-\mu^{(id)(R)}}$

$$\times\Big\{e^{-\mu^{(id)(R)}t}-e^{-(\mu^{(ad)(R)}+\mu^{(ai)(R)})t}\Big\}\mu^{(id)(R)}\Big]dt$$

$$=\int_0^\infty t\cdot e^{-\delta t}\Big\{2\mu e^{-5\mu t}-\frac{27}{4}\mu(e^{-9\mu t}-e^{-5\mu t})dt$$

$$=\frac{35}{4}\mu\int_0^\infty t\,e^{-(\delta+5\mu)t}dt-\frac{27}{4}\mu\int_0^\infty te^{-(\delta+9\mu)t}dt$$

$$=\frac{35}{4}\mu\frac{1}{(\delta+5\mu)^2}-\frac{27}{4}\mu\frac{1}{(\delta+9\mu)^2}$$