平成５年12月20日

# 数　学　1　（問題）

1．次の各問の$\boxed{\phantom{xx}}$に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（３５点）

（1）　非負の整数値を取り平均がmの離散的確率変数Xのなかで、P（X≧M）を最大とする確率変数の分散V（X）は$\boxed{\phantom{xx}}$である。（M，mは正の整数で、M＞m）

（2）　a，b，cはそれぞれ（0，1）上の一様分布に従う互いに独立な確率変数とする。このとき、方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実根をもつ確率は$\boxed{\phantom{xx}}$である。

（3）　ある会社の内線電話における１通話あたりの回線使用料Yは、通話時間Xによって次のように定まっている。

$$Y=\begin{cases}0 & (0<X\leqq 1)\\ na & (n<X\leqq n+1\,;\,n=1,\,2,\,\cdots\cdots)\end{cases}\quad (a\text{は正の定数})$$

確率変数Xが、平均$\lambda^{-1}$（$\lambda>0$）の指数分布に従うとき、

E［Y］＝$\boxed{\phantom{xx}}$、V［Y］＝$\boxed{\phantom{xx}}$である。

（4）　X，Yが独立な確率変数で、ともに正規分布N（0，$\sigma^2$）に従うとき、

$U=X^2+Y^2$ の確率密度関数は、

$$f(u)=\begin{cases}\boxed{\phantom{xx}} & (u>0)\\ 0 & (u\leqq 0)\end{cases}\quad \text{である。}$$

（5）　X，Yは、ともに平均が$\alpha^{-1}$（$\alpha>0$）の指数分布に従う独立な確率変数とする。これらの和S＝X＋Yに対して、S＝sが与えられたときのXの条件付分布の密度関数は$\boxed{\phantom{xx}}$である。

2．ある保険会社が１年間に新規に獲得する期間１年の保険契約の件数は平均r（r＞0）のポアソン分布に従っている。それぞれの契約は１年ごとに確率p（0＜p＜1）でそれぞれ独立に更新されていく。ただし、更新時以外での契約の消滅はないものとする。

この会社が保険を発売してから十分な時間がたっているとき、この会社の保有する契約の件数の分布を求めよ。

（２０点）

3．確率変数Nは平均λ（λ＞0）のポアソン分布に従う。確率変数Yを次のとおり定義するとき、E（Y）を求めよ。

$$Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{N+1}\exp(-x^2/2)\,dx$$

（２０点）

4．次の問に答えよ。

（1）　長さLの線分を無作為に３分割する。得られた３つの線分を３辺とする三角形ができる確率を求めよ。

（2）　長さLの線分を無作為に２分割し、長い方を更に無作為に２分割する。得られた３つの線分を３辺とする三角形ができる確率を求めよ。

（２５点）

# 数学１　解答例

１．（１）$m=E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) \underset{①}{\geqq} \sum_{k=M}^{\infty} kP(X=k)$

$\underset{②}{\geqq} M\sum_{k=M}^{\infty} P(X=k) = MP(X \geqq M)$

よって　$P(X \geqq M) \leqq \dfrac{m}{M}$ ………③

さて　①で等号が成り立つ〈＝〉$\sum_{k=0}^{M-1} kP(X=k)=0$

〈＝〉$P(X=k)=0$　$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1)$

また　②で等号が成り立つ〈＝〉$\sum_{k=M+1}^{\infty}(k-M)P(X=k)=0$

〈＝〉$P(X=k)=0$　$(k=M+1,\ M+2,\ \cdots\cdots)$

よって　③で等号をとるには　$P(X=k)=0$　$(k \neq 0,\ M)$

したがって　$P(X=0)+P(X=M)=1$

$m=0\cdot P(X=0)+M\cdot P(X=M)$　より

$P(X=0)=(M-m)/M$　，$P(X=M)=m/M$

この確率分布を持つXが　$P(X \geqq M)$ を最大とする。

Xの分散は、$V(X)=(0-m)^2P(X=0)+(M-m)^2P(X=M)$

$=m^2(M-m)/M+(M-m)^2m/M$

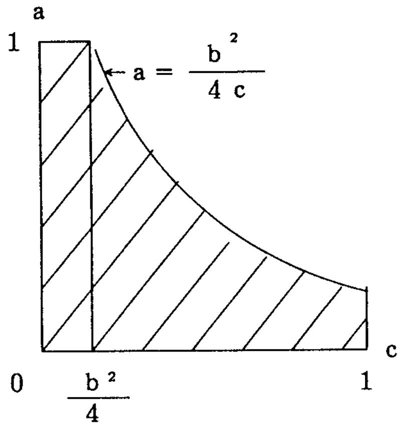
$=\boxed{(M-m)m}$

（２）$ax^2+bx+c=0$　は　$b^2-4ac \geqq 0$　のときに実根をもつ。

あるbについて、これは右図の斜線の部分となるから、

bを固定した場合に上式が実根をもつ条件付確率は、

この面積であらわせ、




$$\int_0^{b^2/4} 1\ dc + \int_{b^2/4}^{1} \frac{b^2}{4c}\,dc$$

$$=\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}\Big[\log c\Big]_{b^2/4}^{1}$$

$$=\frac{b^2}{4}+\frac{b^2}{4}\left\{-\log\left(\frac{b^2}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}\log\left(\frac{b}{2}\right)$$

これを、bについて（0，1）で積分した結果が解である。

$$\int_0^1\left(\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}\log\frac{b}{2}\right)db$$

$$= \left[\frac{b^3}{4\cdot 3}\right]_0^1 - \left[\frac{b^3}{2\cdot 3}\ \log\ \frac{b}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{b^2}{2\cdot 3}\, db$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\log\frac{1}{2} + \left[\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot 3}\right]_0^1$$

$$= \frac{3+2+6\log\ 2}{36} = \boxed{\frac{5+6\log\ 2}{36}}$$

（3）Ｙの積率母関数 $f(\theta)$ は

$$f(\theta) = E[e^{\theta Y}]$$

$$= P[0<X\leqq 1]\ E[e^{\theta Y} \mid 0<X\leqq 1] + \sum_{n=1}^{\infty} P[n<X\leqq n+1]\ E[e^{\theta Y} \mid n<X\leqq n+1]$$

$$= P[0<X\leqq 1]\ E[1] + \sum_{n=1}^{\infty} P[n<X\leqq n+1]\ E[e^{\theta na}]$$

$$= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\theta a} \int_n^{n+1} \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\theta a}\ e^{-\lambda n}\ (1-e^{-\lambda})$$

$$= (1-e^{-\lambda}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\theta a-\lambda)} = \frac{1-e^{-\lambda}}{1-e^{\theta a-\lambda}}$$

$$\therefore f'(\theta) = \frac{a\, e^{\theta a-\lambda}(1-e^{-\lambda})}{(1-e^{\theta a-\lambda})^2} \qquad \therefore E[Y] = f'(0) = \boxed{\frac{a\, e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}}$$

$$f''(\theta) = \frac{a^2\, e^{\theta a-\lambda}(1+e^{\theta a-\lambda})\ (1-e^{-\lambda})}{(1-e^{\theta a-\lambda})^3}$$

$$\therefore E[Y^2] = f''(0) = \frac{a^2\, e^{-\lambda}(1+e^{-\lambda})}{(1-e^{-\lambda})^2}$$

$$\therefore V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \boxed{\frac{a^2\, e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}}$$

（4）Ｘ，Ｙが独立であるから、結合密度関数 $f(x,\ y)$ はＸ，Ｙの各密度関数の積で

$$f(x,\ y) = f_X(x)\ f_Y(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\ \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\ \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$$

$U=X^2+Y^2$ の分布関数を $F(u)$、密度関数を $f(u)$ とすると、

n≦0のとき　　$F(u)=0,\ f(u)=0$

n＞0のとき

$$F(u)=P(U\leqq u)=P(X^2+Y^2\leqq u)$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqq u} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{x^2+y^2\leqq u}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)dx\,dy$$

$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$　と極座標変換して

$$F(u)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\iint_{r\leqq\sqrt{u}}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{\sqrt{u}} r\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr\cdot\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{2\pi}{2\pi\sigma^2}\left[-\sigma^2\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)\right]_0^{\sqrt{u}}$$

$$=1-\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right)$$

$$\therefore f(u)=F'(u)=\frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{u}{2\sigma^2}\right)$$

$$\therefore\ f(u)=\begin{cases}\boxed{\dfrac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\dfrac{u}{2\sigma^2}\right)} & (u>0)\\ 0 & (u\leqq 0)\end{cases}$$

（5）X，Yの密度関数をそれぞれ $f(x)$，$g(y)$ とする。

Sの密度関数 $h(s)$ は、$S=s$ に対して、

$$h(s)=\int_0^s f(x)\,g(s-x)\,dx$$

$$=\int_0^s \alpha e^{-\alpha x}\,\alpha e^{-\alpha(s-x)}\,dx=\alpha^2 s e^{-\alpha s}$$

Xの条件付分布の密度関数 $f(x\mid s)$ は $0<x<s$ のとき、

$$f(x\mid s)=\frac{f(x)\,g(s-x)}{h(s)}=\frac{\alpha e^{-\alpha x}\,\alpha e^{-\alpha(s-x)}}{\alpha^2 s e^{-\alpha s}}=\frac{1}{s}$$

$$\therefore f(x\mid s)=\boxed{\begin{cases}\dfrac{1}{s} & (0<x<s)\\ 0 & (x\leqq 0,\ x\geqq s)\end{cases}}$$

2．新規契約の件数を$X_0$とおくと$X_0$は平均$r$のポアソン分布に従っている。

1回更新された件数を$X_1$とおくと、更新率は$p$でそれぞれの契約は独立であるから、

$$P(X_1=x)=\sum_{t=x}^{\infty}\frac{e^{-r}r^t}{t!}\,{}_tC_x\,p^x(1-p)^{t-x}$$

$$=\sum_{t=x}^{\infty}\frac{e^{-r}r^t}{t!}\cdot\frac{t!}{x!(t-x)!}\,p^x(1-p)^{t-x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-r}r^{k+x}}{x!k!}\,p^x(1-p)^k\quad（ただし、k=t-x）$$

$$=\frac{e^{-r}r^x p^x}{x!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k(1-p)^k}{k!}$$

$$=\frac{e^{-r}(rp)^x}{x!}\,e^{r(1-p)}$$

$$=\frac{e^{-rp}(rp)^x}{x!}\quad\text{……平均}rp\text{のポアソン分布}$$

2回更新された件数を$X_2$とおくと、

$$P(X_2=x)=\sum_{t=x}^{\infty}P(X_1=t)\,{}_tC_x\,p^x(1-p)^{t-x}$$

$$=\sum_{t=x}^{\infty}\frac{e^{-rp}(rp)^t\,t!}{t!\,x!\,(t-x)!}\,p^x(1-p)^{t-x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-rp}(rp)^{k+x}}{x!k!}\,p^x(1-p)^k\quad（ただし、k=t-x）$$

$$=\frac{e^{-rp}(rp)^x p^x}{x!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(rp)^k(1-p)^k}{k!}$$

$$=\frac{e^{-rp}(rp^2)^x}{x!}\,e^{rp(1-p)}$$

$$=\frac{e^{-rp^2}(rp^2)^x}{x!}\quad\text{……平均}rp^2\text{のポアソン分布}$$

$$P(X_n=x)=\frac{e^{-rp^n}(rp^n)^x}{x!}\quad\text{……平均}rp^n\text{のポアソン分布と仮定すると}$$

$$P(X_{n+1}=x)$$

$$=\sum_{t=x}^{\infty}P(X_n=t)\,{}_tC_x\,p^x(1-p)^{t-x}$$

$$=\sum_{t=x}^{\infty}\frac{e^{-rp^n}(rp^n)^t\,t!}{t!\,x!\,(t-x)!}\,p^x(1-p)^{t-x}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-rp^n}(rp^n)^{k+x}}{x!k!}\,p^x(1-p)^k\quad（ただし、k=t-x）$$

$$= \frac{e^{-rp^n}(rp^n)^x p^x}{x!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rp^n)^k (1-p)^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-rp^n}(rp^{n+1})^x}{x!} e^{rp^n(1-p)}$$

$$= \frac{e^{-rp^{n+1}}(rp^{n+1})^x}{x!}$$ ……平均$rp^{n+1}$のポアソン分布

従って、$X_n$は平均$rp^n$のポアソン分布に従う。

十分に時間が経った後の保有契約件数をXとおくと

$X = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots\cdots$

ポアソン分布の再生性によりXもまたポアソン分布に従い、その平均値は

$r + rp + rp^2 + \cdots\cdots = r/(1-p)$　となる。

3. $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$　とおく

nが奇数のとき　$I_n = 0$

nが偶数（$=2m$）のとき

$$I_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \left[ x^{2m-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} (2m-1) x^{2m-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= (2m-1) I_{2m-2}$$

$\therefore I_{2m} = (2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 3\cdot 1\cdot 1$

よって、Yは値0、1、$1\cdot 3$、……、$1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2m-1)$、……

をとる確率変数で

$P(Y = 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2m-1)) = P(N = 2m-1)$　$(m = 1, 2, \cdots\cdots)$

$P(Y=0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=2k)$　となる。

従って、$E(Y) = \sum_{m=1}^{\infty} 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2m-1) P(N=2m-1)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} 1 \cdot 3 \cdot \cdots\cdots \cdot (2m-1)\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2m-1}}{2 \cdot 4 \cdot \cdots\cdots \cdot (2m-2)}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2m-1}}{2^{m-1}\ (m-1)!}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda e^{-\lambda} \frac{(\lambda^2 / 2)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) = \lambda \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} - \lambda\right)$$

4．（1）　線分［0，L］上の分割点の座標をそれぞれｘ，ｙとする。

①　$x < y$のとき

3つの線分の長さは各々$x$，$y-x$，$L-y$となる。

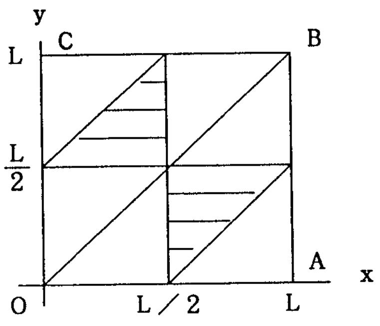
三角形ができる条件は　$x + y - x > L - y$　$\therefore y > L/2$

$x + L - y > y - x$　$\therefore y < L/2 + x$

$y - x + L - y > x$　$\therefore x < L/2$

②　$x \geqq y$のとき、$x$，$y$の対称性より

$x > l/2$，$x < L/2 + y$，$y < L/2$




（ｘ，ｙ）は四角形ＯＡＢＣ上で一様分布するから

求める確率は $\dfrac{\text{上図の２つの三角形の面積の和}}{\text{四角形ＯＡＢＣの面積}} = \dfrac{2\ (1/2)(L/2)^2}{L^2} = \dfrac{1}{4}$

（2）最初の分割でできた短い線分の長さをｘとすると、ｘは［0，$L/2$］上で一様分布する。また、2回目の分割でできた線分の一方の長さをｙとすると、ｙは［0，$L-x$］上で一様分布する。3本目の線分の長さは$L-x-y$である。

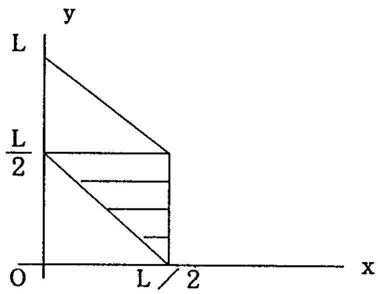
三角形のできる条件は

$x + y > L - x - y$　$\therefore y > L/2 - x$

$x + L - x - y > y$　$\therefore y < L/2$

$y + L - x - y > x$　$\therefore x < L/2$

すなわち、下図の三角形の範囲である。




従って、求める確率は、

$$\frac{2}{L}\int_{0}^{L/2}\int_{L/2-x}^{L/2}\frac{1}{L-x}\,dy\,dx=\frac{2}{L}\int_{0}^{L/2}\frac{x}{L-x}\,dx$$

$\frac{L-x}{L}=t$ として

$$=-2\int_{1}^{1/2}\frac{1-t}{t}\,dt$$

$$=2\int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{t}-1\right)dt$$

$$=2\Big[\log t-t\Big]_{1/2}^{1}$$

$$=2\,(\log 2-1/2)$$

$$=\log 4-1$$