数学1（問題）

1．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。（35点）

(1) 箱の中に赤玉、青玉、白玉が合計32個入っている。今、箱の中の赤玉、青玉、白玉の数を x, y, z とするとき、無作為に取り出された2個の玉が同一色である確率が最低となるように x, y, z を定めた場合、その確率は $\boxed{}$ である。

(2) B_1, B_2, B_3 は互いに排反な事象で $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ とする。事象Aに対して

$$P(B_i) > 0,\ P(A \mid B_i) = 3q\ (\text{定数}),\ \left(i = 1, 2, 3 ; 0 < q < \frac{1}{3}\right)$$

が成り立つとき、$P(A \mid B) = \boxed{}$ である。

(3) 確率変数Xを区間 $[0, 2\pi]$ 上の一様分布とするとき、確率変数 $Y = \sin X$ の確率密度関数は、$f(y) = \boxed{}$ $(-1 < y < 1)$ である。

(4) 確率変数 X_1, X_2, X_3 が独立で、共に区間 $[0, 1]$ 上の一様分布にしたがうとき、X_1, X_2, X_3 のうち最も大きな値を半径とする円の面積の期待値は $\boxed{}$ である。

(5) Xは非負の整数値をとる確率変数で、

① $0 < p \equiv P(X = 0) < 1$

② $P(X = k + n \mid X \geq k) = P(X = n)$, $(n = 0, 1, 2, \cdots ; k = 0, 1, 2, \cdots)$

を満たすとき、

$P(X = k)$ を p を用いて表わすと $\boxed{}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ となる。

2．確率変数X, Yは互いに独立でそれぞれ次の確率密度関数を持つものとする。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} \exp\left(\dfrac{-x^2}{2\alpha}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\beta} \exp\left(\dfrac{-y^2}{2\beta}\right) & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases}$$

α, β は正の定数とするとき、$P\left(\dfrac{X}{Y} \leq 1\right)$ を求めよ。

（20点）

3．確率変数 X_i $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ は全て平均 λ の指数分布にしたがい、確率変数Nは平均 μ のポアソン分布にしたがう。N, X_1, X_2, ・・・は互いに独立とするとき、次の(1), (2)に答よ。

(1) $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ の分布関数を求めよ。ただし、$N = 0$ のとき $S_N = 0$ とする。

(2) S_N の期待値を求めよ。

（25点）

4．表の出る確率 p の硬貨を n 回続けて投げるとき、表が2回続けては出ない確率を q_n とする。

(1) q_n に関する漸化式を求めよ。

(2) p が $\dfrac{3}{7}$ のとき、q_n を n の関数として求めよ。

（20点）

数学１ 解答例

1.

（1） $z=32-(x+y)$であるから，取り出された２個の玉が同一色である確率は，x個から２個の場合か，y個から２個の場合か，z個から２個の場合の排反事象の和の確率である。これをP(x, y)で表わすと，

$$P(x, y) = \frac{{}_xC_2 + {}_yC_2 + {}_{32-x-y}C_2}{{}_{32}C_2}$$

$$= \frac{x(x-1)+y(y-1)+(32-x-y)(31-x-y)}{32\times 31}$$

ここで，P(x, y)を$0\leq x\leq 32,\ 0\leq y\leq 32$での連続関数とみなして極値を求める。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x-1+x-(31-x-y)-(32-x-y)}{32\times 31} = \frac{4x+2y-64}{32\times 31} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x+4y-64}{32\times 31} = 0 \qquad (x\text{と}y\text{は対象})$$

を解いて， $x=y=\dfrac{64}{6}=10.\dot{6}$ で極値を取る事が分る。

$\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{4}{32\times 31} > 0,\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \dfrac{4}{32\times 31} > 0,$ であるからこれは最小値を与える。

ところで，題意からx, y, zは整数であり，$x\leqq y\leqq z$としても一般性を失わない。

従って，P(x, y)を最小とする組合せは次の２通りのどちらかである。

$(x, y, z)=(10, 11, 11)$ でP$(x, y, z) = \dfrac{10\times 9+2\times 11\times 10}{32\times 31} = \dfrac{310}{32\times 31} = \dfrac{5}{16}$

$(x, y, z)=(10, 10, 12)$ でP$(x, y, z) = \dfrac{312}{32\times 31}$

従って求める確率は $\boxed{\dfrac{5}{16}}$

（2） $P(A_\cap B_1)=3q\,P(B_1)$，$P(A_\cap B_2)=3q\,P(B_2)$，$P(A_\cap B_3)=3q\,P(B_3)$

$P(A_\cap B)=P(A_\cap B_1)+P(A_\cap B_2)+P(A_\cap B_3)$

$=3q\{P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)\}=3q\,P(B)$

$\therefore P(A\,|\,B)=\dfrac{P(A_\cap B)}{P(B)}=\boxed{3q}$

（3） $Y=sinX$となるXは$0\leqq X\leqq 2\pi$で２つあり，Xの密度関数は

$0\leqq x\leqq 2\pi$で$\dfrac{1}{2\pi}$だから，$-1<y<1$でYの密度関係は変数変換により

$$\therefore 2\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{2}{2\pi}\cdot\left|\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right|=\frac{1}{\pi}\cdot\left|\frac{1}{\cos x}\right|=\frac{1}{\pi}\cdot\left|\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}\right|=\boxed{\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}}$$

(4) 確率変数Yを

$Y=\max(X_1, X_2, X_3)$

とし，Yの分布関数を$F(y)$とすると，

(i) $0\leqq y\leqq 1$のとき，

$$\begin{aligned}F(y)&=P\{\max(X_1, X_2, X_3)\leqq y\}\\&=P\{X_1\leqq y,\ X_2\leqq y,\ X_3\leqq y\}\\&=P(X_1\leqq y)P(X_2\leqq y)P(X_3\leqq y)=y^3\quad(\because X_1, X_2, X_3\text{は独立})\end{aligned}$$

(ii) $y<0$のとき　$F(y)=0$

(iii) $y>1$のとき　$F(y)=1$

従って，求める期待値は

$$\int_0^1 \pi y^2\frac{dF(y)}{dy}dy=\int_0^1 \pi y^2\cdot 3y^2\cdot dy=3\pi\int_0^1 y^4\,dy=\boxed{\frac{3}{5}\pi}$$

(5) 問題文の②式で　$n=0$とおくと

$P(X=k\mid X\geqq k)=P(X=0)=p$

$\therefore P(X=k)=p\cdot P(X\geqq k)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ —③

③式で　$k=1$とすると

$P(X=1)=p\cdot P(X\geqq 1)=p\cdot\{1-P(X=0)\}=p\cdot(1-p)$

③式で　$k=2$とすると

$$\begin{aligned}P(X=2)&=p\cdot P(X\geqq 2)=p\cdot\{1-P(X=0)-P(X=1)\}\\&=p\cdot\{1-p-p(1-p)\}=p\cdot(1-p)^2\end{aligned}$$

一般に

$P(X=k)=p(1-p)^k$とするとき

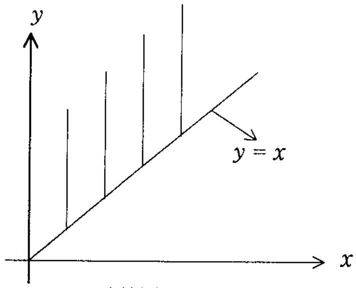
$$\begin{aligned}P(X=k+1)&=p\cdot P(X\geqq k+1)=p\{1-p-p(1-p)-\cdots-p\cdot(1-p)^k\}\\&=p\cdot\{1-\sum_{i=0}^{k}p(1-p)^i\}\\&=p\cdot\left\{1-p\frac{(1-p)^{k+1}-1}{1-p-1}\right\}=p\cdot(1-p)^{k+1}\end{aligned}$$

従って

$P(X=k)=\boxed{p\cdot(1-p)^k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

2. $P(X>0,\ Y>0)=1$ だから

$$P\left(\frac{X}{Y}\leqq 1\right)=P(X\leqq Y)$$
$$=\int_0^\infty \frac{x}{\alpha}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\int_x^\infty \frac{y}{\beta}\cdot e^{-\frac{y^2}{2\beta}}\,dy\,dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{x}{\alpha}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\left[-e^{-\frac{y^2}{2\beta}}\right]_x^\infty dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{x}{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\beta}}\,dx$$
$$=\int_0^\infty \frac{x}{\alpha}\cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\cdot\frac{x^2}{2}}\,dx$$
$$=\left[\frac{-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\cdot\frac{x^2}{2}}\right]_0^\infty=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$$



{斜線部　Y≧X}

3. (1) $X_1+\cdots+X_k$ の確率密度関数を $f_k(x)$ とおくと

$$f_1(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\quad(x>0)$$

$$f_2(x)=\int_0^x f_1(t)f_1(x-t)\,dt=\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{x}{\lambda}}\int_0^x dt=\frac{1}{\lambda^2}xe^{-\frac{x}{\lambda}}\qquad(x>0)$$
$$\vdots$$

一般に，$f_k(x)=\lambda^{-k}(x^{k-1}/(k-1)!)e^{-\frac{x}{\lambda}}\qquad(x>0)$ とすると，

$$f_{k+1}(x)=\int_0^x \frac{1}{\lambda^k}\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-t}{\lambda}}\,dt$$
$$=\frac{1}{\lambda^{k+1}}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}\int_0^x \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,dt=\frac{1}{\lambda^{k+1}}\cdot\frac{x^k}{k!}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}\qquad(x>0)$$

従って数学的帰納法により

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda^k}\cdot\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

そこで　$X_1+\cdots+X_k$ の分布関数を $F_k(x)$ とおくと

$$F_k(x)=\int_0^x f_k(t)\,dt=\int_0^x \frac{1}{\lambda^k}\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}\,dt$$
$$=\left[\frac{-\lambda}{\lambda^k}\cdot\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}\right]_0^x+\int_0^x \frac{1}{\lambda^{k-1}}\cdot\frac{k-1}{(k-1)!}t^{k-2}\cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{\lambda^{k-1}}\cdot\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda^{k-2}}\cdot\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\cdot e^{\frac{-x}{\lambda}} - \cdots - \frac{x}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} + \int_0^x \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^i$$

次に S_N の分布関数を $G(x)$ とおくと

$$G(x) = P(S_N \leqq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k,\ S_N \leqq x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k,\ X_1+\cdots+X_k \leqq x)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)F_k(x)$$

（i） $x<0$ のとき $G(x)=0$

（ii） $x \geqq 0$ のとき $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)F_k(x)$

$$= P(N=0,\ S_N \leqq x) + \sum_{k=1}^{\infty} P(N=k)F_k(x)$$
$$= P(N=0,\ S_N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}F_k(x)$$

$$= P(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}F_k(x)$$

$$= e^{-\mu} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot\left[1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^i\right]$$

（2） $E(S_N) = \int_0^{\infty} x dG(x)$

$$= \int_0^{\infty} x \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}dF_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\int_0^{\infty} x dF_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}E(X_1+\cdots+X_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!}\cdot\lambda k = \lambda\mu\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda\mu$$

4. （1） n 回のうち表が2回続けては出ない事象は次の2つの排反事象の和事象である。

（i） n 回目表が出てかつ $n-1$ 回目裏が出てかつ $n-2$ 回目迄表が2回続けては出ない。

（ii） n 回目裏が出てかつ $n-1$ 回目迄表が2回続けては出ない。

(i)の確率　$p\cdot(1-p)q_{n-2}$　　(ii)の確率　$(1-p)\cdot q_{n-1}$

$\therefore q_n = p\cdot(1-p)\cdot q_{n-2} + (1-p)\cdot q_{n-1} \quad (n \geqq 2)$

(2)　(1)　の差分方程式に $P=\dfrac{3}{7}$ を代入すると，$q_n = \dfrac{4}{7}q_{n-1} + \dfrac{12}{49}q_{n-2}$

この差分方程式を $q_n - aq_{n-1} = b(q_{n-1} - aq_{n-2})$ の形に変形する (a, b) を求めると

$a+b=\dfrac{4}{7},\ ab=-\dfrac{12}{49}$　より $a<b$ として a, b を求めると $a=-\dfrac{2}{7},\ b=\dfrac{6}{7}$

$$
\begin{aligned}
q_n - aq_{n-1} &= b(q_{n-1} - aq_{n-2}) \\
&= b^2(q_{n-2} - aq_{n-3}) \\
&\ \ \vdots \\
&= b^{n-1}(q_1 - aq_0) = b^{n-1}(1-a) \quad (\because q_0 = q_1 = 1) \quad \text{——①}
\end{aligned}
$$

同様に $q_n - bq_{n-1} = a^{n-1}(q_1 - bq_0) = a^{n-1}(1-b)$ ——②

①−② $(b-a)q_{n-1} = b^{n-1}(1-a) - a^{n-1}(1-b)$

$$\therefore q_{n-1} = \frac{1}{b-a}\left\{(1-a)b^{n-1} - (1-b)a^{n-1}\right\}$$

即ち $q_n = \dfrac{1}{\dfrac{6}{7}-\left(-\dfrac{2}{7}\right)}\left[\left\{1-\left(-\dfrac{2}{7}\right)\right\}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n - \left(1-\dfrac{6}{7}\right)\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n\right] = \dfrac{9}{8}\left(\dfrac{6}{7}\right)^n - \dfrac{1}{8}\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n$

なお，確率の意味から $q_0 = q_1 = 1$ だが，上記式は $n=0,\ n=1$ でも成立ち，$n \geqq 0$ で成立する。