年 金 数 理（問 題）

（各問20点）

1．次の(1)～(4)までについて，それぞれ５つの選択肢の中から正しいものを選んで所定の解答用紙にその記号を記入せよ。

(1) n年後に，年金の給付原資１を積み立てるものとし，

Ａ：毎年一定額を積み立てるものとした場合の積立額の合計額

Ｂ：毎年r%（$i \neq r$，$r > 0$　iは予定利率）づつ増加するように積み立てるものとした場合の積立額の合計額

とした場合，Ｂ／Ａを表すものは次のうちどれか。

(A) $$\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-1\right\}}{\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-\left(1+\frac{r}{100}\right)^n\right\}}$$

(B) $$\frac{\left(\frac{i}{100}-\frac{r}{100}\right)\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-1\right\}}{\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-\left(1+\frac{r}{100}\right)^n\right\}\cdot n}$$

(C) $$\frac{\left(\frac{i}{100}-\frac{r}{100}\right)\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n-1\right\}\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-1\right\}}{\frac{r}{100}\cdot\frac{i}{100}\cdot n\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^n-\left(1+\frac{r}{100}\right)^n\right\}}$$

(D) $$\frac{\left(\frac{i}{100}-\frac{r}{100}\right)\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}-1\right\}\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-n}-1\right\}}{\frac{r}{100}\cdot\frac{i}{100}\cdot n\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-n}-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}\right\}}$$

(E) $$\frac{\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}-1\right\}\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-n}-1\right\}}{\left\{\left(1+\frac{i}{100}\right)^{-n}-\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}\right\}\cdot n}$$

(2) 次の①～⑤の年金現価のうち等式が正しくないものの個数はどれか。

① $\bar{a}_{\overline{n}|}=\dfrac{1-v^n}{\log(1+i)}$　　② $Ia_{\overline{n}|}=\left(1+\dfrac{1}{i}\right)a_{\overline{n}|}-\dfrac{nv^n}{i}$

③ ${}_{n|}a_{\overline{xy}}=v^n\,{}_nP_{\overline{xy}}\,a_{\overline{x+n:y+n}}$　　④ $a_{\overline{xyz}}^{[2]}=a_{xy}+a_{yz}+a_{zx}-3a_{xyz}$

⑤ $a_{\overline{xy}|z}=a_z-a_{xz}-a_{yz}+a_{xyz}$

(A) 0個　(B) 1個　(C) 2個　(D) 3個　(E) 4個

(3) ある年金制度において，ある年度に関して次のことがわかっている。この年金の実利回りはいくらか。

・年初の責任準備金　：200　　・年間給付（期初払い）　：10
・年初の年金資産　：100　　・年度末未償却過去勤務債務：80
・年間標準保険料（期初払い）：30　　・予定利回り　：年複利 5.5%
・年間特別保険料（期初払い）：30

ただし，利差損益以外の損益は発生していない。

(A) 1.1%　(B) 1.2%　(C) 1.3%　(D) 1.4%　(E) (A)から(D)のいずれでもない

(4) 60歳支給開始，毎月初に10万円を給付する終身年金がある。今，60歳時点の年金原資を５%増加し，15年間保証期間付終身年金に変更したい。保証期間中の年金額を現行と同じ10万円とした場合，保証期間終了後の年金額はどの範囲にあるか。ただし条件は以下のとおりとする。

・予定利率：5.5%　　・D_{75}　：1,153.1
・$\ddot{a}_{\overline{15}|}$　：10.58965　　・N_{61}　：39,636.9
・$v^{\frac{1}{12}}$　：0.99555　　・N_{76}　：7,710.3
・D_{60}　：3,555.7

(A) 6万円未満　(B) 6万円以上7万円未満　(C) 7万円以上8万円未満
(D) 8万円以上9万円未満　(E) 9万円以上

2．制度発足時および1年後の貸借対照表は次のとおりであるとして，以下の空欄に下記の記号を使用し適当な算式を記入せよ。

（発足時貸借対照表） ⇨ （1年後貸借対照表）

（資産）	（負債）		（資産）	（負債）
発足時年金資産 ${}_0V^{RR}$	発足時責任準備金 ${}_0V^{NR}$	⇨	1年後の年金資産 ${}_1V^{RR}$	1年後の責任準備金 ${}_1V^{NR}$
初期過去勤務債務 ${}_0U$			未償却過去勤務債務 ${}_1U$	

ここに

${}_1V^{RR}={}_0V^{RR}+P+I-S$

${}_1U={}_0U\times(1+i)-\boxed{①}$

制度発足時の収支相等を表わすと

$\boxed{②}+\boxed{③}+P(N\cdot C)\times\boxed{④}\doteqdot\boxed{⑤}$

1年後，この算式は

$(\boxed{②}+\boxed{③})\times(1+i)+\boxed{⑥}+I^{P(N\cdot C)}+P(N\cdot C)\times\boxed{⑦}\times(1+i)=\boxed{⑧}$ …(A)

いま

${}_0U\times(1+i)-\boxed{①}={}_1U$ だから，

これを(A)の左辺に代入し，更に移項を施し項の順序を変えると

${}_0V^{RR}+\boxed{⑥}+\boxed{⑨}+\boxed{⑩}-({}^1S^p+{}^1S^q)+{}_1U=S_{2\sim}\times(1+i)-P(N\cdot C)\times G_{2\sim}\times(1+i)$

となる。${}^1S^p$ を左辺から右辺に移すと，右辺は ${}_1V^{NR}$ を表しているので

結局 ${}_1V^{RR}+{}_1U={}_1V^{NR}$ となることがわかる。

〔記号〕

P ：保険料（標準保険料および特別保険料）収入

I ：利息収入

S ：給付金の支払い

i ：予定利率

P^{PSL} ：特別保険料収入

$I^{P(PSL)}$ ：特別保険料収入にかかる利息収入

$P(N\cdot C)$ ：標準保険料率

G_1 ：発足時給与現価のうち，第1年度の給与に相当する分

$G_{2\sim}$ ：発足時給与現価のうち，第2年度以降の給与に相当する分

S_1 ：発足時給付現価のうち，第1年度の脱退（死亡）に相当する分

$S_{2\sim}$ ：発足時給付現価のうち，第2年度以降の脱退（死亡）に相当する分

${}^1G_1$ ：1年目における標準保険料収入にかかる給与総額

$I^{P(N\cdot C)}$ ：標準保険料収入にかかる利息収入

${}^1S^p$ ：S_1 のうち年度末に年金受給者（待期者）の年金原資として残存する分

${}^1S^q$ ：S_1 のうち年度中に年金または一時金として支払われる分

I^S ：S_1 にかかる第1年度末における利息

3．定常状態にある団体に対し，Trowbridgeのモデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）による年金制度を導入するものとし，制度導入時在職中の者の過去勤務期間は通算するが，既に退職した者に対する給付は行わないものとする。

財政方式として加入年齢方式を採用し，過去勤務債務の償却を永久償却とした場合の保険料が開放型総合保険料方式の保険料に等しいことを証明せよ。

証明にあたって必要な場合には，次の記号を用いること。

X_e　：加入年齢（X_e歳以外で加入することはないものとする）

X_r　：定年年齢

L_x　：X 歳の被保険者数

L　：在職中の被保険者総数（$L=L_{x_e}+L_{x_e+1}+\cdots+L_{x_r-1}$）

i　：予定利率

v　：$v=1/(1+i)$

d　：$d=1-v$

D_x　：計算基数

G^f　：将来被保険者の給与現価

G^a　：現在被保険者の給与現価

S^f　：将来被保険者の給付現価

S^a　：現在被保険者の給付現価

a_x　：X 歳即時支給開始終身年金の年金現価率

4．次のような年金制度のモデルを仮定する。

① 給付の内容

ア．期初 X 歳の生存脱退者には，年金額（$X-X_e+1$）/（X_r-X_e）を X_r 歳まで生存していた場合に限り終身給付する。

イ．死亡脱退者及び生存脱退者で X_r 歳に到達する前に死亡した者には給付を行わない。

② 財政方式および数理的事項

ア．財政方式は，開放基金方式を採用

イ．保険料は年 1 回期初払い

ウ．死亡および中途脱退は期初（保険料の積立後）に発生し，定年退職は期末に発生する。

今，この制度の積立金は，在職中の被保険者の過去の被保険者期間に対応する年金額の給付現価に等しく，年金の待期者および受給者はいない。このような前提のもとに，以下の設問に答えよ。

(1) X 歳の被保険者 1 人当たりの給付現価を求めよ。

(2) 財政再計算で中途（生存）脱退率のみを洗い替えた場合，これによって特別保険料は発生しないことを示せ。

(3) 同じく X_r 歳以降の死亡率のみを洗い替えた結果 $\ddot{a}_{x_r}$ が従前の（$1+\alpha$）倍になったとする。このとき，以下のものを求めよ。

(ｱ) 標準保険料

(ｲ) 特別保険料で償却すべき未償却債務の額

計算にあたって必要があれば，つぎの記号を用いること。

X_e　：新規加入年齢

X_r　：定年年齢

$^*D_x$　：脱退残存表による残存にかかる計算基数

$^*C_x^w$　：脱退残存表による生存脱退にかかる計算基数

D_x　：死亡生残表による生存にかかる計算基数

$\ddot{a}_x$　：年金現価率

F　：積立金

5．年金制度を発足しようとするある集団にたいして，次の3つの財政方式を考え設問に答えよ。なお，制度発足時には年金受給者はいないものとし，年金資産もないものとする。

加入年齢方式，総合保険料方式，開放基金方式

設問　「過去勤務期間を通算するとした場合の加入年齢方式の過去勤務債務の額」と「過去勤務期間を通算するとした場合の開放基金方式の過去勤務債務の額」の差額を(A)とする。

「過去勤務期間を通算しない場合の総合保険料方式の保険料収入現価」と「過去勤務期間を通算しない場合の加入年齢方式の標準保険料収入現価」の差額を(B)とする。

このとき，(A)=(B)が成り立つことを示せ。

計算にあたって必要があれば，つぎの記号を用いること。

${}_pS^a$　：過去勤務期間を通算する場合の現在加入者の給付現価

${}_oS^a$　：過去勤務期間を通算しない場合の現在加入者の給付現価

S^f　：将来加入者の給付現価

G^a　：現在加入者の給与現価

G^f　：将来加入者の給与現価

${}_tA_x$　：X歳で過去勤務期間 t 年の給与1に対する給付現価

a_x　：X歳の給与1に対する給与現価

P^e　：加入年齢方式の標準保険料率

${}_pP^c$　：過去勤務期間を通算する場合の総合保険料方式の保険料率

${}_oP^c$　：過去勤務期間を通算しない場合の総合保険料方式の保険料率

P^o　：開放基金方式の標準保険料率

$B_{x,t}$　：現在年齢X歳過去勤務期間 t 年の加入員の給与総額

P_x　：$P_x={}_0A_x/a_x$

年金数理（解答例）

1.

問題番号	正　　解
(1)	(C)
(2)	(B)
(3)	(D)
(4)	(D)

正解は上記のとおりであるが，以下に解法を略記する。

(1)　一般性を失わせないために，積立時期（期初，期末等）を考慮し，その年度に積み立てた金額の年度末における終価率をSとする。

また，$\frac{i}{100} \to i$, $\frac{r}{100} \to r$ とおく。

Aについて

$$(\text{年金終価率}) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times S$$

従って，毎年の積立額は，1／(年金終価率)

積立額の合計額は，n／(年金終価率) だから，

$$A = \frac{n \cdot i}{\{(1+i)^n - 1\} \cdot S}$$

Bについて

$$(\text{年金終価率}) = \frac{(1+r)^{n-1} \cdot \left\{ \left(\frac{1+i}{1+r} \right)^n - 1 \right\}}{\frac{1+i}{1+r} - 1} \times S$$

$$= \frac{(1+i)^n - (1+r)^n}{i - r} \times S$$

従って，初年度の積立額は，1／(年金終価率)

積立額の合計額は

$$(\text{初年度積立額}) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \text{だから}$$

$$B = \frac{i - r}{\{(1+i)^n - (1+r)^n\} \cdot S} \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$B／A=\frac{i-r}{\{(1+i)^n-(1+r)^n\}\cdot S}\times\frac{(1+r)^n-1}{r}\times\frac{\{(1+i)^n-1\}\cdot S}{n\cdot i}$$

$$=\frac{(i-r)\{(1+r)^n-1\}\{(1+i)^n-1\}}{n\cdot r\cdot i\{(1+i)^n-(1+r)^n\}}$$

従って　(C) が正しい。

(2)　③が正しくない。

左辺　$${}_{n|}a_{\overline{xy}}=\sum_{t=n}^{\infty}v^t P_{\overline{xy}}$$
$$=\sum_{t=n}^{\infty}v^t({}_tP_x+{}_tP_y-{}_tP_{xy})$$
$$=v^n\,{}_nP_x a_{x+n}+v^n\,{}_nP_y a_{y+n}-v^n\,{}_nP_{xy}a_{x+n:y+n}$$

右辺　$$v^n\,{}_nP_{\overline{xy}}\,a_{\overline{x+n:y+n}}=v^n({}_nP_x+{}_nP_y-{}_nP_{xy})(a_{x+n}+a_{y+n}-a_{x+n:y+n})$$
$$=v^n\,{}_nP_x a_{x+n}+v^n\,{}_nP_y a_{y+n}-v^n\,{}_nP_{xy}a_{x+n:y+n}$$
$$+v^n\,{}_nP_x(a_{y+n}-a_{x+n:y+n})$$
$$+v^n\,{}_nP_y(a_{x+n}-a_{x+n:y+n})$$
$$-v^n\,{}_nP_{xy}(a_{x+n}+a_{y+n})$$

よって右辺≠左辺

(3)　年度末予定未償却過去勤務債務－年度末未償却過去勤務債務

＝利差………①となる。

運用利回りを i とおけば①は

$$\{(200-100)-30\}\times 1.055-80$$

$$=(100+30+30-10)\times(i-0.055)$$

これを i について解くと $i=0.014=1.4\%$

よって (D) が正しい。

(4)　$m\ddot{a}_x^{(m)}\doteqdot m(a_x+\frac{m+1}{2m})$を用いて

100千円× $12\ddot{a}_{60}^{(12)}\times 1.05$

$$=100\times 12\left(\frac{N_{61}}{D_{60}}+\frac{13}{24}\right)\times 1.05$$

＝14,728千円

一方，保証期間経過後の年金（月額）をxとすると

$$100 \times 12\,\ddot{a}^{(12)}_{\overline{15}|} + x \times \frac{D_{75}}{D_{60}} \times 12\,\ddot{a}^{(12)}_{75}$$

$$= 100 \times 12\,\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}|} \times \ddot{a}_{\overline{15}|} + x \times \frac{D_{75}}{D_{60}} \times 12\left(\frac{N_{76}}{D_{75}} + \frac{13}{24}\right)$$

$$= 12{,}406 + 28.129x$$

以上より　　$x = 82.5$（千円）

従って（D）が正しい。

2.

問題番号	
①	$(P^{PSL} + I^{P(PSL)})$
②	${}_{\circ}V^{RR}$
③	${}_{\circ}U$
④	$(G_1 + G_{2\sim})$
⑤	$S_1 + S_{2\sim}$
⑥	$P(N \cdot C) \times {}^1G_1$
⑦	$G_{2\sim}$
⑧	${}^1S^P + {}^1S^q + I^S + S_{2\sim} \times (1+i)$
⑨	P^{PSL}
⑩	${}_{\circ}V^{RR}i + I^{P(N \cdot C)} + I^{P(PSL)} - I^S$
	または　I

⑨と⑩は順番逆でも正解

「年金数理」の教科書（P103～105）より出題。

3. 加入年齢方式で過去勤務債務を永久償却とした場合の保険料をPとすると，

$$P = L \cdot P^e + \frac{S^a - G^a \cdot P^e}{\ddot{a}_{\overline{\infty}|}}$$

とかける。（ここでは，P^eは標準保険料率とする。）

題意より特定年齢および将来加入年齢はともにX_e歳であるから，P^eは

$$P^e = \frac{S^f}{G^f}$$

とかけ，また

$\ddot{a}_{\infty}=\dfrac{1}{1-v}$ であるから，

$$P = L \cdot \frac{S^f}{G^f} + \frac{S^a - G^a \cdot \dfrac{S^f}{G^f}}{\dfrac{1}{1-V}}$$

となる。これをさらに変形すると，

$$P = L \cdot \left[\frac{S^f}{G^f} + \frac{S^a - G^a \cdot \dfrac{S^f}{G^f}}{\dfrac{L}{d}} \right]$$

となる。

ここでは定常状態が仮定されているから，

$$\frac{L}{d} = G^a + G^f$$

であるので，Pは次のように書ける。

$$P = L \cdot \left[\frac{S^f}{G^f} + \frac{S^a - G^a \cdot \dfrac{S^f}{G^f}}{G^a + G^f} \right]$$

これを変形すると

$$P = L \cdot \frac{S^a + S^f}{G^a + G^f}$$

となる。

$\dfrac{S^a + S^f}{G^a + G^f}$ は，開放型総合保険料方式の保険料率であるから，これでPが開放型総合保険料方式の保険料であることが示された。

4. (1)　x歳の被保険者1人当たりの給付現価をS_xとすると，

S_xは，次のとおりとなる。

$$S_x = \frac{1}{{}^*D_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*C_y^w \cdot \frac{y - x_e + 1}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{xr}}{D_y} \cdot \ddot{a}_{x_r} + {}^*D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \right)$$

(2) S_xを過去分と将来分に分けてみる。

$$S_x = \frac{\ddot{a}_{x_r}}{{}^*D_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*C_y^w \cdot \frac{D_{x_r}}{D_y} + {}^*D_{x_r} \right) \frac{x - x_e}{x_r - x_e}$$

$$+ \frac{\ddot{a}_{x_r}}{{}^*D_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*C_y^w \cdot \frac{D_{x_r}}{D_y} \cdot \frac{y - x + 1}{x_r - x_e} + {}^*D_{x_r} \cdot \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \right)$$

右辺第1項のカッコ内に注目すると，

$$\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*C_y^w \cdot \frac{D_{x_r}}{D_y} + {}^*D_{x_r}\right) / {}^*D_x$$

$$= \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*d_y^w \cdot v^y \cdot \frac{\ell_{x_r} \cdot v^{x_r}}{\ell_y \cdot v^y} + {}^*\ell_{x_r} \cdot v^{x_r}\right) / {}^*\ell_x \cdot v^x$$

$$= \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*d_y^w \cdot \frac{\ell_{x_r}}{\ell_y} + {}^*\ell_{x_r}}{{}^*\ell_x}\right) \cdot \frac{v^{x_r}}{v^x} \cdots\cdots\cdots ①$$

ところで，x歳の被保険者がx_r歳で生存している確率は，

x_r歳までに生存脱退した者がx_r歳まで生存する確率と

x_r歳まで在職する確率の和であるから，上式のカッコ内は，

ℓ_{x_r}/ℓ_xとなる。

従って① $= D_{x_r}/D_x$

$$S_x = \frac{x - x_e}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r} + \frac{\ddot{a}_{x_r}}{{}^*D_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^*C_y^w \cdot \frac{D_{x_r}}{D_y} \cdot \frac{y - x + 1}{x_r - x_e} + {}^*D_{x_r} \frac{x_r - x}{x_r - x_e}\right)$$

となり，給付現価のうち，過去の期間に係る部分は，脱退率によらないことがわかった。

開放基金方式の標準保険料および未償却債務は，

$${}^{OAN}P = (S^f + S^a_{F.S.}) / (G^f + G^a)$$

$$U = S^a_{P.S.} - F$$

仮定より，現在 $F = S^a_{P.S.}$ であるから $U = 0$

$S^a_{P.S.}$が脱退率によらないことから，中途脱退率を洗い替えても $U = 0$ が成立する。

従って脱退率の洗い替えは，標準保険料のみに影響し，特別保険料は計上されない。

(3)　x歳以降の死亡率を洗い替えたことにより脱退残存表及びその基数

死亡生残表及びその基数のうち x_{r-1} 歳までの部分は不変。

従って，上記算式中，洗い替えにより変動するのは $\ddot{a}_{x_r}$ のみである。

$$\ddot{a}_{x_r} \to (1+\alpha)\,\ddot{a}_{x_r}$$

$$S^f \to (1+\alpha)\,S^f$$

$$S^a_{F.S.} \to (1+\alpha)\,S^a_{F.S.}$$

$S^{a}_{P.S.} \rightarrow (1+\alpha)\, S^{a}_{P.S.}$

G^{f}, G^{a}, F は不変

$\therefore {}^{OAN}P \rightarrow (1+\alpha) \cdot {}^{OAN}P$

$U = (1+\alpha)\, S^{a}_{P.S.} - F$　　　$S^{a}_{P.S.} = F$ だから

$= (1+\alpha) F - F$

$= \alpha \cdot F$

従って，標準保険料は $(1+\alpha)$ 倍となり特別保険料で償却すべき未償却債務の額は $\alpha \cdot F$ となる

5. 「過去勤務期間を通算するとした場合の加入年齢方式の過去勤務債務」は，

$${}_{P}S^{a} - G^{a} \cdot P^{e}$$

と書ける。また，

「過去勤務期間を通算するとした場合の開放基金方式の過去勤務債務」は，

$$({}_{P}S^{a} + S^{f}) - (G^{a} + G^{f}) \cdot P^{o}$$

とかけるが，

$$P^{o} = \frac{{}_{O}S^{a} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}}$$

であるから，これは

$${}_{P}S^{a} - {}_{O}S^{a}$$

と書ける。

これから（A）は次のように書ける。

$$(A) = |\,{}_{O}S^{a} - G^{a} \cdot P^{e}\,|$$

一方，「過去勤務期間を通算しない場合の総合保険料方式の保険料収入現価」は

$$G^{a} \cdot P^{e}$$

であるが，

$$P^{e} = \frac{{}_{O}S^{a}}{G^{a}}$$

であるから，上の収入現価は

$${}_{O}S^{a}$$

である。

加入年齢方式の標準保険料収入現価は過去勤務期間の通算によらず同じであるか

ら,「過去勤務期間を通算しない場合の加入年齢方式の標準保険料収入現価」は

$$G^a \cdot P^e$$

と書ける。

従って,(B)は次のように書ける。

$$(B) = | {}_0S^a - G^a \cdot P^e |$$

よって,(A) ＝ (B) が示された。