保険数学 2（問題）

1．次の（1）から（5）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔（A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。 (40点)

（1）保険期間 n 年で、(x)が(y)より前に死亡したときはその年度末に保険金 1 を支払って消滅し、(y)が(x)より前に死亡したときはその年度末に既払込営業保険料を返還して消滅する保険の年払営業保険料 P'（保険料は契約が継続している限り払い込むものとする。）に最も近い値を求めよ。但し、P' =（純保険料＋c）(1＋k) とし、c(1＋k)＝0.0011，

$\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}=12.8974$，$(1+k)A_{\overset{1}{x}y:\overline{n}|}=0.0218$，$(1+k)(IA)_{x\overset{1}{y}:\overline{n}|}=0.0628$ とする。

（A）0.0010　（B）0.0018　（C）0.0022　（D）0.0028　（E）0.0032

（2）終身払込終身保険（保険金額 1、保険金期末払）について、初年度定期式責任準備金 ${}_tV_x^{[PT]}$（$t\geqq 1$）に等しいものは次のうちどれか。

（A）$1-\dfrac{a_{x+t-1}}{a_x}$　（B）$1-\dfrac{a_{x+t}}{a_{x+1}}$　（C）$1-\dfrac{a_{x+t-1:\overline{n}|}}{a_{x:\overline{n}|}}$　（D）$1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t-1}}{\ddot{a}_x}$　（E）$1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}}$

（3）30年満期養老保険（保険金額 1、保険金即時払、保険料全期払込・年払）に30歳で加入し、3 年経過時点で解約返戻金 ${}_3W$ に基づいて延長定期保険に変更する。変更時点からの延長期間を T とするとき、$n\leqq T<n+1$（年）を満たす整数 n は次のうちどれか。

但し、${}_tW={}_tV-0.020\dfrac{10-t}{10}$（$t\leqq 10$），${}_tV$ は純保険料式責任準備金とし、延長定期保険の予定事業費は、保険金 1 に対し毎年 0.001とする。また、計算基数は下表で与えられているものとする。

x	30	33	46	47	48	49	50	51	60
D_x	19649.	16690.	8146.9	7700.2	7275.8	6872.2	6488.3	6122.9	3546.6
N_x	338603.	282722.	123270.5	115123.6	107423.4	100147.6	93275.4	86787.1	42859.2
$\overline{M}_x$	2051.114	2003.346	1767.124	1744.564	1720.979	1696.090	1669.744	1641.826	1347.812

（A）13　（B）14　（C）15　（D）16　（E）17

（4）x 歳契約の一時払即時開始終身年金が多数あり、すべて同一日に契約されている。第 t 保険年度始の契約は ℓ_{x+t-1} 件、年金年額はすべて 1 とし、その年度の実際死亡率は $q'_{x+t-1}=0.0035$、予定死亡率は $q_{x+t-1}=0.0065$、予定利率は 5 %とするとき、この年度の剰余金は 0 であるという。この年度の実際利回りに最も近いものは次のうちどれか。但し、死亡以外の脱退はないものとし、予定事業費および実際事業費は 0 とする。

（A）5.302%　（B）5.307%　（C）5.312%　（D）5.317%　（E）5.322%

（５）連続払復帰年金の一時払保険料$\bar{a}_{x|y:\overline{n}|}$に一致する値は①～④の中に何個あるか。

① $\displaystyle\int_0^n e^{-\delta t}{}_tp_y \cdot {}_tq_x \, dt$　　② $\displaystyle\int_0^n e^{-\delta t}{}_tp_{xy} \cdot \mu_{x+t} \cdot \bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|} \, dt$

③ $\displaystyle\int_0^n \bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{t}|} \{1-(\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}\} \, dt$　　④ $\displaystyle\bar{a}_{y:\overline{n}|} \cdot {}_nq_x - \int_0^n {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot \bar{a}_{y:\overline{t}|} \, dt$

（A）０個　　（B）１個　　（C）２個　　（D）３個　　（E）４個

２．x歳加入n年定期保険（保険金額１、保険金期末払、保険料全期払込、$n>1$）について、標準体の死亡率が$\{q_{x+k}\}$、特別条件体の死亡率が$\{q'_{x+k}\}$に従うものとする。($k=0,1,\cdots,n-1$)　この保険について、次の問に答えよ。

（20点）

（１）２つの死亡率$\{q_{x+k}\}$および$\{q'_{x+k}\}$に基づく年払平準純保険料をそれぞれPおよびP'とするとき、

$$P'-P=\frac{1}{N'_x-N'_{x+n}}\sum_{k=0}^{n-1} v\,D'_{x+k}(q'_{x+k}-q_{x+k})(1-{}_{k+1}V)$$

となることを示せ。

（２）$q'_{x+k}=(1+\alpha)\,q_{x+k}$の場合、標準体と特別条件体とで年払平準純保険料の額に差が生じないように、特別条件体に対する保険金額を１からβだけ削減することとした（$\alpha>0$, $0<\beta<1$）。このとき、

$$\beta=\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{M'_x-M'_{x+n}}\sum_{k=0}^{n-1} C'_{x+k}(1-{}_{k+1}V)$$

となることを示せ。

但し、D'_x, N'_x, C'_x, M'_xは特別条件体の死亡率に基づく計算基数とし、${}_tV$は標準体の死亡率に基づく第t保険年度末純保険料式責任準備金を表す。

３．夫婦を被保険者とする終身払込連生終身保険を考える。加入年齢は、夫x歳、妻y歳で、いずれか一方が死亡した後、他方が死亡したとき、保険金１を即時に支払って保険契約を消滅させる。保険料は連続払とし、保険契約が継続している限り払い込み続けるものとする。この保険について、次の問に答えよ。　（20点）

（１）次の微分方程式が成立することを証明せよ。

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}-(\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}+\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t})-1$$

（２）上の結果を用いて、次の微分方程式が成立することを証明せよ。

$$\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\,{}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}+\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}-(\mu_{x+t}\cdot{}_t\bar{V}'_y+\mu_{y+t}\cdot{}_t\bar{V}'_x)$$

ここに、$\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}$はこの保険の連続払平準純保険料、${}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}$, ${}_t\bar{V}'_y$, ${}_t\bar{V}'_x$はこの保険の経過tにおける純保険料式責任準備金で、それぞれ夫婦共存中、夫死亡後妻生存中、妻死亡後夫生存中の場合を表すものとする。

4．次の給付を行う x 歳加入、保険期間 n 年の就業不能保険を考える。

① 加入者（就業者）が満期まで就業のまま生存した場合、保険金 S^E を支払う。

② 加入者が保険期間中に就業のまま死亡した場合、その保険年度末に保険金 S^a を支払う。

③ 加入者が保険期間中に就業不能となった場合、その保険年度末に一時金 S^i を支払うとともに、その保険年度末から満期まで毎年度末(満期時を含む。)に生存している限り年金 R を支払う。

保険料は年払とし、保険期間中に加入者が就業している限り払い込むものとする。この保険について、次の問に答えよ。なお、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。 (20点)

（1）年払平準純保険料 P ならびに第 t 保険年度末の就業者の責任準備金 ${}_tV$ および就業不能者の責任準備金 ${}_t\widetilde{V}$（第 t 保険年度の年金支払前）を求めよ。

（2）

（i） $a^{ai}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{N^{ii}_x - N^{ii}_{x+n+1} - D^{ii}_x \ddot{a}^{i}_{x:\overline{n+1|}}}{D^{aa}_x}$ および $p^{ai}_x = \dfrac{\ell^{ii}_{x+1} - \ell^{ii}_x p^{i}_x}{\ell^{aa}_x}$ を用いて、

$a^{ai}_{x:\overline{n|}} = v\, p^{ai}_x \ddot{a}^{i}_{x+1:\overline{n|}} + v\, p^{aa}_x a^{ai}_{x+1:\overline{n-1|}}$ を示せ。

（ii）（1）および（2）(i) の結果を用いて、次の再帰式が成立することを示せ。但し、$0 \leqq t \leqq n-1$ とする。

$${}_tV + P = v\, q^{aa}_{x+t} S^a + v\, q^{(i)}_{x+t} S^i + v\, p^{ai}_{x+t} \cdot {}_{t+1}\widetilde{V} + v\, p^{aa}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$$

保険数学２（解答例）

1．

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解答欄	D	E	D	D	E

正解は上表のとおりであるが，以下に各設問の解法を略記する。

（1）… （D）

収支相等の原則により，$P\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = A^{\,1}_{xy:\overline{n|}} + (P+c)(1+k)(IA)^{\,1}_{xy:\overline{n|}}$（Pは純保険料）

これより　$P = \dfrac{A^{\,1}_{xy:\overline{n|}} + c(1+k)(IA)^{\,1}_{xy:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - (1+k)(IA)^{\,1}_{xy:\overline{n|}}}$　　$\therefore P+c = \dfrac{A^{\,1}_{xy:\overline{n|}} + c\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - (1+k)(IA)^{\,1}_{xy:\overline{n|}}}$

よって　$P' = (P+c)(1+k) = \dfrac{(1+k)A^{\,1}_{xy:\overline{n|}} + c(1+k)\,\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} - (1+k)(IA)^{\,1}_{xy:\overline{n|}}}$

$$= \frac{0.0218 + 0.0011 \times 12.8974}{12.8974 - 0.0628}$$
$$= 0.00280\cdots$$

（2）… （E）

${}_tV_x^{[PT]}$は初年度定期式責任準備金を表すから，

$${}_tV_x^{[PT]} = {}_{t-1}V_{x+1} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+1}}$$

（3）… （D）

$${}_3V = \frac{\overline{M}_{33} - \overline{M}_{60} + D_{60}}{D_{33}} - \left(\frac{\overline{M}_{30} - \overline{M}_{60} + D_{60}}{N_{30} - N_{60}}\right) \cdot \frac{N_{33} - N_{60}}{D_{33}} \fallingdotseq 0.04526$$

$${}_3W = {}_3V - 0.020 \times \frac{7}{10} = 0.03126$$

延長期間n年の延長定期保険料を$P(n)$とすると

$$P(n) = \overline{A}^{\,1}_{33:\overline{n|}} + 0.001\,\ddot{a}_{33:\overline{n|}} = \frac{(\overline{M}_{33} - \overline{M}_{33+n}) + 0.001(N_{33} - N_{33+n})}{D_{33}}$$

表より，$P(n) \leqq {}_3W < P(n+1)$となるnを求める。

$P(13)=0.02370,\ P(14)=0.02554,\ P(15)=0.02742,\ P(16)=0.02934,$

$P(17)=0.03133,\ P(18)=0.03340$ … よって　$n=16$

(4) … (D)

第t保険年度末責任準備金を${}_tV$，剰余金をG，実際利回りをi'とすると，

$$G=\ell_{x+t-1}({}_{t-1}V-1)(i'-i)+(d'_{x+t-1}-d_{x+t-1})\,{}_tV \qquad (i\text{は予定利率})$$

$$=\ell_{x+t-1}\cdot vp_{x+t-1}\cdot{}_tV(i'-i)+(d'_{x+t-1}-d_{x+t-1})\,{}_tV \qquad (\because\ {}_{t-1}V=1+vp_{x+t-1}\cdot{}_tV)$$

題意より　G = 0であるから，

$$i'-i=\frac{d_{x+t-1}-d'_{x+t-1}}{\ell_{x+t-1}}\cdot\frac{1}{vp_{x+t-1}}=(q_{x+t-1}-q'_{x+t-1})\cdot\frac{1+i}{p_{x+t-1}}$$

$$\therefore\ i'=i+(q_{x+t-1}-q'_{x+t-1})\cdot\frac{1+i}{1-q_{x+t-1}}=0.05+(0.0065-0.0035)\times\frac{1.05}{1-0.0065}$$

$$\fallingdotseq 0.05317$$

(5) … (E)

定義により $\bar{a}_{x|y:\overline{n}|}=\int_0^n e^{-\delta t}\,{}_tp_{xy}\,\mu_{x+t}\,\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}dt$　　(②)

この右辺において，${}_tp_{xy}={}_tp_x\cdot{}_tp_y$，また $\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}=\int_t^n e^{-\delta(s-t)}\,{}_{s-t}p_{y+t}ds$ を代入すれば，

$$\bar{a}_{x|y:\overline{n}|}=\int_0^n\int_t^n e^{-\delta s}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\cdot{}_sp_y\,dsdt$$

$$=\int_0^n e^{-\delta s}\,{}_sp_y\int_0^s{}_tp_x\,\mu_{x+t}dtds \qquad (\text{積分順序交換})$$

$$=\int_0^n e^{-\delta s}\,{}_sp_y(1-{}_sp_x)ds \qquad \left(\because\ \int_0^s{}_tp_x\,\mu_{x+t}dt=[-{}_tp_x]_{t=0}^{t=s}\right)$$

$$=\int_0^n e^{-\delta s}\,{}_sp_y\cdot{}_sq_x ds \qquad (①)$$

あるいは

$$\bar{a}_{x|y:\overline{n}|}=\int_0^n e^{-\delta s}\,{}_sp_y ds-\int_0^n e^{-\delta s}\,{}_sp_{xy}ds$$

$$=\bar{a}_{y:\overline{n}|}-\bar{a}_{xy:\overline{n}|} \qquad \cdots\cdots ㊟$$

式③については，$\frac{d}{dt}\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}=(\mu_{y+t}+\delta)\,\bar{a}_{y+t:\overline{n-t}|}-1$

および $\dfrac{d}{dt}\bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{t|}} = \dfrac{d}{dt}\int_0^t e^{-\delta s}\,{}_s p_{xy}\mu_{x+s}ds = e^{-\delta t}\,{}_t p_{xy}\mu_{x+t}$

に注意すれば，部分積分により，

$$式③ = \left[-\ \bar{A}^{\ 1}_{xy:\overline{t|}}\bar{a}_{y+t:\overline{n-t|}}\right]_{t=0}^{t=n} + \int_0^n e^{-\delta t}\,{}_t p_{xy}\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t:\overline{n-t|}}dt = 式②$$

式④については，第２項を変形すれば，

$$\int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t}\bar{a}_{y:\overline{t|}}\,dt = \int_0^n\int_0^t {}_t p_x\mu_{x+t}\cdot e^{-\delta s}\,{}_s p_y ds dt$$

$$= \int_0^n e^{-\delta s}\,{}_s p_y \int_s^n {}_t p_x \mu_{x+t}dtds \qquad （積分順序交換）$$

$$= \int_0^n e^{-\delta s}\,{}_s p_y\,({}_s p_x - {}_n p_x)\,ds$$

$$= \bar{a}_{xy:\overline{n|}} - {}_n p_x \bar{a}_{y:\overline{n|}}$$

となるので，$式④ = ({}_n q_x + {}_n p_x)\,\bar{a}_{y:\overline{n|}} - \bar{a}_{xy:\overline{n|}} = \bar{a}_{y:\overline{n|}} - \bar{a}_{xy:\overline{n|}}$

$= \bar{a}_{x|y:\overline{n|}} \quad (\because ⊛)$

以上により，①〜④の４個とも $\bar{a}_{x|y:\overline{n|}}$ に一致する。

2. （1） 標準体・特別条件体の各保険契約に対するFacklerの再帰式は，それぞれ次のとおりである。

$${}_kV + P = \upsilon q_{x+k} + \upsilon p_{x+k}\cdot{}_{k+1}V$$

$${}_kV' + P' = \upsilon q'_{x+k} + \upsilon p'_{x+k}\cdot{}_{k+1}V'$$

辺々差引して $\Delta_k V = {}_kV' - {}_kV,\ \Delta P = P' - P,\ \Delta q_{x+k} = q'_{x+k} - q_{x+k},\ \Delta p_{x+k} = p'_{x+k} - p_{x+k}$

とおけば，$\Delta_k V + \Delta P = \upsilon\Delta q_{x+k} + \upsilon\,(\Delta p_{x+k}\cdot{}_{k+1}V + p'_{x+k}\cdot\Delta_{k+1}V)$

$$= \upsilon\Delta q_{x+k}\,(1 - {}_{k+1}V) + \upsilon p'_{x+k}\cdot\Delta_{k+1}V \qquad (\because\ \Delta p_{x+k} = -\Delta q_{x+k})$$

ここで，両辺に $\upsilon^{x+k}\ell'_{x+k}$ を掛けて $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$ について加えると，

$$D'_x\cdot\Delta_0 V + \Delta P\sum_{k=0}^{n-1}D'_{x+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\upsilon D'_{x+k}\Delta q_{x+k}\,(1 - {}_{k+1}V) + D'_{x+n}\Delta_n V$$

$\Delta_0 V = \Delta_n V = 0$ より

$$\Delta P\,(N'_x - N'_{x+n}) = \sum_{k=0}^{n-1}\upsilon D'_{x+k}\Delta q_{x+k}\,(1 - {}_{k+1}V)$$

従って，

$$P' - P = \frac{1}{N'_x - N'_{x+n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\upsilon D'_{x+k}\,(q'_{x+k} - q_{x+k})\,(1 - {}_{k+1}V)\cdots\cdots①$$

(2) 題意により，

$$P=(1-\beta)\frac{M'_x-M'_{x+n}}{N'_x-N'_{x+n}} \qquad \therefore P'-P=\beta\frac{M'_x-M'_{x+n}}{N'_x-N'_{x+n}}$$

一方，①の右辺に $q'_{x+k}-q_{x+k}=q'_{x+k}-\dfrac{q'_{x+k}}{1+\alpha}=\dfrac{\alpha}{1+\alpha}q'_{x+k}$ を代入して，

$$\beta\cdot\frac{M'_x-M'_{x+n}}{N'_x-N'_{x+n}}=\frac{1}{N'_x-N'_{x+n}}\sum_{k=0}^{n-1}\upsilon D'_{x+k}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}q'_{x+k}(1-{}_{k+1}V)$$

$$\therefore\beta=\frac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{1}{M'_x-M'_{x+n}}\sum_{k=0}^{n-1}C'_{x+k}(1-{}_{k+1}V)$$

3. (1) 定義により，$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t}+\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{y+t}-\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t,y+t}$ である。

ここで，$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t,y+t}=\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^\infty\upsilon^s{}_sp_{x+t,y+t}ds=\int_0^\infty\upsilon^s\left\{\left(\frac{d}{dt}{}_sp_{x+t}\right){}_sp_{y+t}+{}_sp_{x+t}\left(\frac{d}{dt}{}_sp_{y+t}\right)\right\}ds$

$$=\int_0^\infty\left\{\upsilon^s{}_sp_{x+t,y+t}(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})-{}_sp_{x+t,y+t}(\mu_{x+t+s}+\mu_{y+t+s})\right\}ds$$

$$=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t})\bar{a}_{x+t,y+t}-\bar{A}_{x+t,y+t}$$

$$=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{x+t,y+t}-1 \quad (\because \bar{A}_{x+t,y+t}+\delta\bar{a}_{x+t,y+t}=1)$$

同様に，$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t}=(\mu_{x+t}+\delta)\bar{a}_{x+t}-1$，$\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{y+t}=(\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{y+t}-1$

$$\therefore\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=(\mu_{x+t}+\delta)\bar{a}_{x+t}-1+(\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{y+t}-1-(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{x+t,y+t}+1$$

$$=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)(\bar{a}_{x+t}+\bar{a}_{y+t}-\bar{a}_{x+t,y+t})-(\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}+\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t})-1$$

$$=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}-(\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}+\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t})-1$$

(2) ${}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}=\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}-\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ および $\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}+\delta\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=1$ により，

$${}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}=1-(\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}+\delta)\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} \qquad \cdots\cdots①$$

これを t で微分して(1)の結果を代入すれば，

$$\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}=-(\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}+\delta)(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}+(\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}+\delta)(\mu_{x+t}\bar{a}_{y+t}+\mu_{y+t}\bar{a}_{x+t})+\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}+\delta$$

ここで，①より $\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}=\dfrac{1-{}_t\bar{V}^{(\infty)}_{\overline{xy}}}{\bar{P}^{(\infty)}_{\overline{xy}}+\delta} \qquad \cdots\cdots①'$

また，${}_t\overline{V}'_x = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}^{(\infty)}_{xy}\,\overline{a}_{x+t}$，$\overline{A}_{x+t} + \delta\overline{a}_{x+t} = 1$ により $\overline{a}_{x+t} = \dfrac{1 - {}_t\overline{V}'_x}{\overline{P}^{(\infty)}_{xy} + \delta}$ ……②

同様に，$\overline{a}_{y+t} = \dfrac{1 - {}_t\overline{V}'_y}{\overline{P}^{(\infty)}_{xy} + \delta}$ ……③

①′，②，③を用いれば，

$$\frac{d}{dt}{}_t\overline{V}^{(\infty)}_{xy} = -(\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)(1 - {}_t\overline{V}^{(\infty)}_{xy}) + \mu_{x+t}(1 - {}_t\overline{V}'_y) + \mu_{y+t}(1 - {}_t\overline{V}'_x) + \overline{P}^{(\infty)}_{xy} + \delta$$

$$= (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\,{}_t\overline{V}^{(\infty)}_{xy} + \overline{P}^{(\infty)}_{xy} - (\mu_{x+t} \cdot {}_t\overline{V}'_y + \mu_{y+t} \cdot {}_t\overline{V}'_x)$$

4. (1)

$$P = \frac{\dfrac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_x}S^E + \dfrac{M^{aa}_x - M^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_x}S^a + \dfrac{M^{(i)}_x - M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_x}S^i + a^{ai}_{x:\overline{n}|}R}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}}$$

$${}_tV = \frac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^E + \frac{M^{aa}_{x+t} - M^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^a + \frac{M^{(i)}_{x+t} - M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^i + a^{ai}_{x+t:\overline{n-t}|}R - \ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t}|}P$$

$${}_t\widetilde{V} = \ddot{a}^{i}_{x+t:\overline{n-t+1}|}R$$

(2) (i)

$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N^{ii}_x - N^{ii}_{x+n+1} - D^{ii}_x\,\ddot{a}^i_{x:\overline{n+1}|}}{D^{aa}_x}$ …①，$p^{ai}_x = \dfrac{\ell^{ii}_{x+1} - \ell^{ii}_x p^i_x}{\ell^{aa}_x}$ …②を用いれば，

$$\text{右辺} = v\left(\frac{\ell^{ii}_{x+1} - \ell^{ii}_x p^i_x}{\ell^{aa}_x}\right)\ddot{a}^i_{x+1:\overline{n}|} + v\left(\frac{\ell^{aa}_{x+1}}{\ell^{aa}_x}\right)\frac{N^{ii}_{x+1} - N^{ii}_{x+n+1} - D^{ii}_{x+1}\ddot{a}^i_{x+1:\overline{n}|}}{D^{aa}_{x+1}} \quad (\because ②,①)$$

$$= \frac{1}{D^{aa}_x}\left\{\left(D^{ii}_{x+1}\,\ddot{a}^i_{x+1:\overline{n}|} - D^{ii}_x v p^i_x\,\ddot{a}^i_{x+1:\overline{n}|}\right) + \left(N^{ii}_{x+1} - N^{ii}_{x+n+1} - D^{ii}_{x+1}\,\ddot{a}^i_{x+1:\overline{n}|}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{D^{aa}_x}\left\{-D^{ii}_x\left(\ddot{a}^i_{x:\overline{n+1}|} - 1\right) + N^{ii}_{x+1} - N^{ii}_{x+n+1}\right\} \quad \left(\because \ddot{a}^i_{x:\overline{n+1}|} = 1 + v p^i_x\,\ddot{a}^i_{x+1:\overline{n}|}\right)$$

$$= \frac{1}{D^{aa}_x}\left(N^{ii}_x - N^{ii}_{x+n+1} - D^{ii}_x\,\ddot{a}^i_{x:\overline{n+1}|}\right) \quad \left(\because N^{ii}_x = D^{ii}_x + N^{ii}_{x+1}\right)$$

$$= \text{左辺} \quad (\because ①)$$

(ii) $\dfrac{D^{aa}_{x+t+1}}{D^{aa}_{x+t}} = \dfrac{v^{x+t+1}\ell^{aa}_{x+t+1}}{v^{x+t}\ell^{aa}_{x+t}} = vp^{aa}_{x+t}$ を用いれば，$\dfrac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^E = vp^{aa}_{x+t}\dfrac{D^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}S^E$ …③

$$\frac{M^{aa}_{x+t} - M^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^a = \frac{C^{aa}_{x+t}}{D^{aa}_{x+t}}S^a + \frac{M^{aa}_{x+t+1} - M^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^a = vq^{aa}_{x+t}S^a + vp^{aa}_{x+t}\frac{M^{aa}_{x+t+1} - M^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}S^a \quad \cdots ④$$

$$\frac{M^{(i)}_{x+t} - M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^i = \frac{C^{(i)}_{x+t}}{D^{aa}_{x+t}}S^i + \frac{M^{(i)}_{x+t+1} - M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t}}S^i = vq^{(i)}_{x+t}S^i + vp^{aa}_{x+t}\frac{M^{(i)}_{x+t+1} - M^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_{x+t+1}}S^i \quad \cdots ⑤$$

また，(2)の結果により，

$a^{ai}_{x+t:\overline{n-t}|}R = \upsilon p^{ai}_{x+t}\ \ddot{a}^{i}_{x+t+1:\overline{n-t}|}R + \upsilon p^{aa}_{x+t} a^{ai}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}R = \upsilon p^{ai}_{x+t} \cdot {}_{t+1}\widetilde{V} + \upsilon p^{aa}_{x+t} a^{aa}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}R \cdots$⑥

さらに，$\ddot{a}^{aa}_{x+t:\overline{n-t}|}P = P + \upsilon p^{aa}_{x+t}\ \ddot{a}^{aa}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}P \quad \cdots$⑦

以上より③＋④＋⑤＋⑥－⑦を作ると，左辺は ${}_tV$ となり，右辺の υp^{aa}_{x+t} を係数にもつ式は ${}_{t+1}V$ となる。すなわち，

$${}_tV = \upsilon q^{aa}_{x+t} S^a + \upsilon q^{(i)}_{x+t} S^i + \upsilon p^{ai}_{x+t} \cdot {}_{t+1}\widetilde{V} - P + \upsilon p^{aa}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$$

$$\therefore\ {}_tV + P = \upsilon q^{aa}_{x+t} S^a + \upsilon q^{(i)}_{x+t} S^i + \upsilon p^{ai}_{x+t} \cdot {}_{t+1}\widetilde{V} + \upsilon p^{aa}_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$$

以上