数　学　1　（問題）

1．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを、所定の解答用紙に記入せよ。　（50点）

（1）　確率変数Xは次の確率密度関数を持つ。

$$f(x)=\begin{cases} Kx^2 exp(-x^2) & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

このとき、K（正の定数）＝ $\boxed{①}$ ，E（X）＝ $\boxed{②}$ である。

（2）　確率変数X，Yが独立で、共に正規分布N（0，σ^2）にしたがうとき、U＝X／Yの確率密度関数は　$f(u)=\boxed{}$ である。

（3）　ある製品を作る機械が3台あって、それをA，B，Cとする。A，B，Cはそれぞれ全体の20%，30%，50%を生産する。またA，B，Cの各機械から生産される製品のうち 5%，4%，2%の割合で不良品の生ずることが経験的に知られている。いま、製品全体の中から1個を取り出したら不良品であった。
その不良品がAの機械から生産されたものである確率は $\boxed{}$ である。

（4）　確率変数X_1，X_2，X_3が独立で、共に区間［0，1］上の一様分布にしたがうとき、$Y=\min(X_1, X_2, X_3)$ の確率密度関数は　$f(y)=\boxed{}$ （$0 \leqq y \leqq 1$）である。

（5）　A，B，Cの3者が次のルールで優勝を競う。3者の実力が同じであるとするとき、Aが優勝する確率は $\boxed{}$ である。

（ルール）①初回にはAとBが対戦し、Cは対戦が無い。
②2回目以降は直前回の対戦の勝者と直前に対戦の無かった者とが対戦し、直前回の対戦の勝者が勝った場合にはその者が優勝する。
③優勝が決まるまで②の対戦を繰り返す。

（6）　確率変数Xが正規分布N（0，σ^2）にしたがうとき、$E(|X|)=\boxed{}$ である。

（7）　確率変数X，Yがそれぞれ有界な分散V（X）＞0，V（Y）＞0を持つとき、

$$f(t, s)=E\{(Y-tX-s)^2\} \quad (-\infty<t, s<\infty)$$

の最小値をV（Y）と相関係数R（X，Y）を用いて表わすと $\boxed{}$ となる。

（8）　円周上に無作為に3点A，B，Cをとるとき、△ABCが鋭角三角形になる確率は $\boxed{}$ である。

（9）　2個の不良品を含む1ダースの小型モーターがある。この1ダースのモーターが1つの木箱に詰められた場合は、その中からランダムに2個を抽出して検査し、半ダースずつ2つの木箱に詰められた場合は、それぞれの箱から1つずつランダムに2個を抽出して検査するものとする。次の3つのケースのうち、最も不良品の発見される可能性が低いケースにおける不良品の発見される確率は $\boxed{}$ である。

ケース1．1ダースが1つの木箱に詰められる場合
ケース2．1ダースが2つの木箱に詰められる場合で、それぞれの箱に1個ずつの不良品が入っていたとき
ケース3．1ダースが2つの木箱に詰められる場合で、一方の箱に2個の不良品が入っていたとき

(10) 任意の３つの実数を四捨五入して整数にした上で和をとるのと、和をとってから四捨五入して整数にする場合で数値が異なる確率は $\boxed{}$ である。

２． 平面に立方体が置いてある。ここで、平面に接している面を「底面」、平面に垂直な面を「側面」と呼ぶことにする。いま、この立方体を任意の方向に倒す（現在の側面の１つが底面となるように動かす）操作をｎ回（$n \geqq 1$）行なったときに、最初の底面と同じ面が底面となっている確率を求めよ。 （２５点）

３． 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が次の条件 i)，ii) を満たしているとき、次の(1)，(2)に答えよ。

i) X_1 は平均 μ，分散 $a^2\mu^2$ の正規分布にしたがう。（$a>0$，$\mu>0$）

ii) $X_1=x_1$，$X_2=x_2$，$\cdots$，$X_k=x_k$ のときの X_{k+1} の条件付確率分布は平均 x_k，分散 $a^2x_k^2$ の正規分布である。（$k=1, 2, \cdots, n-1$）

(1) X_n の平均を求めよ。

(2) X_n の分散を求めよ。 （２５点）

数学１（解答例）

１．

(1) $$1=K\int_0^{\infty}(-x/2)\{-2x\,exp(-x^2)\}dx$$

$$=K\cdot\left\{\left[(-x/2)exp(-x^2)\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}(1/2)\{exp(-x^2)\}dx\right\}$$

（$x^2=z^2/2$とおく）

$$=K\cdot(1/2)\cdot\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}(1/\sqrt{2\pi})\ exp(-z^2)dz=K\sqrt{\pi}/4$$

$$\boxed{\therefore K=4/\sqrt{\pi}}$$

$$EX=K\int_0^{\infty}(-x^2/2)\{-2x\,exp(-x^2)\}dx$$

$$=K\cdot\left\{\left[(-x^2/2)exp(-x^2)\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}x\{exp(-x^2)\}dx\right\}$$

$$=K/2=\boxed{2/\sqrt{\pi}}$$

(2) $\begin{cases}u=x/y\\ v=y\end{cases}$ と変数変換すると、ヤコビアン$J=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix}=v$

だから、X，Yの密度関数を$g(t)$とおくとき、U，Vの同時密度関数は

$$g(uv)g(v)|J|$$

である。

従って、Uの密度関数は次のとおり計算される。

$$f(u)=\int_{-\infty}^{\infty}1/(2\pi\sigma^2)exp\{-(uv/\sigma)^2/2\}exp\{-(v/\sigma)^2/2\}\ |v|dv$$

$$=1/(\pi\sigma^2)\int_0^{\infty}exp\{-(1+u^2)(v/\sigma)^2/2\}v\,dv$$

$$=1/(\pi\sigma^2)\cdot\left[-\sigma^2(1+u^2)exp\{-(1+u^2)(v/\sigma)^2/2\}\right]_0^{\infty}$$

$$=\boxed{1/\{\pi(1+u^2)\}}$$

(3) 事象A，B，Cは製品がそれぞれの機械から生産されたことを表わすものとし、事象Eは製品が不良品であることを示すものとする。題意より、

P（A）＝0．2，P（B）＝0．3，P（C）＝0．5，

P（E｜A）＝0．05，P（E｜B）＝0．04，P（E｜C）＝0．02

ベイズの定理を用いて

P（A｜E）＝P（A∩E）／{P（A）P（E｜A）＋P（B）P（E｜B）

＋P（C）P（E｜C）}

＝0．2・0．05／0．032＝$\boxed{5/16}$

(4) $P(Y \leqq y) = 1 - P(Y > y)$

$= 1 - P(X_1 > y)\,P(X_2 > y)\,P(X_3 > y)$

$= 1 - \{1 - P(X_1 \leqq y)\}\{1 - P(X_2 \leqq y)\}\{1 - P(X_3 \leqq y)\}$

$= 1 - (1 - y)^3$

従って、Yの密度関数は$P(Y \leqq y)$をyで1回微分して

$\boldsymbol{f}(y) = \boxed{3(1-y)^2}$

(5) Awで1回の対戦でAが勝つことを示す。

Aが初回の対戦で勝つ場合にAが優勝する事象は次の排反事象の和である。

AwAw, AwBwCwAwAw, AwBwCwAwBwCwAwAw, ・・・

この確率は

$(1/2)^2\{1 + (1/8) + (1/8)^2 + \cdots\} = 2/7$

Aが初回の対戦で負ける場合にAが優勝する事象は次の排反事象の和である。

BwCwAwAw, BwCwAwBwCwAwAw,

BwCwAwBwCwAwBwCwAwAw, ・・・

この確率は

$(1/2)^4\{1 + (1/8) + (1/8)^2 + \cdots\} = 1/14$

従って、Aが優勝する確率は$2/7 + 1/14 = \boxed{5/14}$

(6) $N(0, \sigma^2)$の密度関数を$\boldsymbol{f}(x)$，分布関数を$F(x)$とおく。

$P(|X| \leqq x) = P(-x \leqq X \leqq x) = F(x) - F(-x)$

従って、$|X|$の密度関数は$P(|X| \leqq x)$をxで1回微分して

$\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{f}(-x) = 2\boldsymbol{f}(x) \qquad (x \geqq 0)$

$\boldsymbol{f}(x) = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma)\,\boldsymbol{exp}\{-(x/\sigma)^2/2\}$ だから

$\boldsymbol{f}'(x) = -x/\sigma^2 \cdot \boldsymbol{f}(x)$

$$\therefore E(|X|) = \Big[-2\sigma^2 \cdot \boldsymbol{f}(x)\Big]_0^{\infty} = \boxed{\sqrt{2/\pi} \cdot \sigma}$$

(7) $\boldsymbol{f}(t, s) = E(Y^2) + t^2E(X^2) + s^2 - 2tE(XY)$
$\quad + 2stE(X) - 2sE(Y)$

$\therefore \partial \boldsymbol{f}/\partial t = 2tE(X^2) - 2E(XY) + 2sE(X)$

$\partial \boldsymbol{f}/\partial s = 2s + 2tE(X) - 2E(Y)$

$\partial \boldsymbol{f}/\partial t = 0$より　$tE(X^2) - E(XY) + sE(X) = 0$ ・・・①

$\partial \boldsymbol{f}/\partial s = 0$より　$s = -tE(X) + E(Y)$ ・・・・・・・・・・②

②を①へ代入して解くと　$t = cov(X, Y)/V(X)$ ・・・・・・③

③を②へ代入して解くと

$s = E(Y) - E(X)\,cov(X, Y)/V(X)$ ・・・・・・・・④

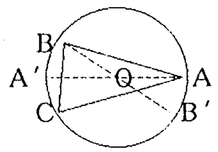
$\boldsymbol{f}(t, s)$は下に凸であるから、t，sが③，④のとき最小となる。

③，④を$\boldsymbol{f}(t, s)$に代入して展開して整理すると、最小値は次のとおり計算さ

れる。

$$\boldsymbol{f}(t,s)=E(Y^2)-E(Y)^2$$
$$+\{cov(X,Y)/V(X)\}^2[E(X^2)-\{E(X)\}^2]$$
$$-2cov(X,Y)/V(X)\ \{E(XY)-E(X)E(Y)\}$$
$$=V(Y)-\{cov(X,Y)\}^2/V(X)$$
$$=\boxed{V(Y)\ [1-\{R(X,Y)\}^2]}$$

(8) 円周上で点Ａを固定し、ＡＯを通る直径で分けられる一方の半円周上に点Ｂはあり、点Ｃは円周上の任意の位置にあるとして考えても一般性を失わない。
そこで、$\angle AOB=x$，$\angle AOC=y$とすると　$0<x<\pi$，$0<y<2\pi$ がx，yのとりうる範囲Ωである。
さて、ＡＯを通る直径が円周と交わる点をＡ′，ＢＯを通る直径が円周と交わる点をＢ′とすると、△ＡＢＣが鋭角三角形になるx，yのとりうる範囲Ｄは、
弧Ａ′Ｂ′上に点Ｃがあるときだから、　$0<x<\pi$，$\pi<y<\pi+x$　である。
求める確率は（領域Ｄの面積）÷（領域Ωの面積）＝$(\pi^2/2)\div 2\pi^2=\boxed{1/4}$



(9) ケース１の場合、不良品の発見されないのは${}_{12}C_2$通りの組み合わせのうち${}_{10}C_2$通りだから、その確率は　$(10\times 9)\div(12\times 11)=15/22$
∴不良品の発見される確率は　$1-15/22=7/22=0.318\cdots$

ケース２の場合、不良品の発見されないのは、両方の６個入りの木箱から５個の正常品の１つが選ばれるときだから、その確率は　$(5/6)^2$
∴不良品の発見される確率は　$1-25/36=11/36=0.305\cdots$

ケース３の場合、不良品の発見されないのは、不良品の入った６個入りの木箱から４個の正常品の１つが選ばれるときだから、その確率は　$4/6$
∴不良品の発見される確率は　$1-4/6=1/3=0.333\cdots$

従って、不良品の発見される確率が最も低いのはケース２の場合で、
その確率は$\boxed{11/36}$である。

(10) 任意の実数をａ，ｂ，ｃで表わし、それぞれを四捨五入した結果をＡ，Ｂ，Ｃで表わすとき、ａ－Ａ，ｂ－Ｂ，ｃ－Ｃは区間［－０．５，０．５］の一様分布を示し、ａ－Ａ＋ｂ－Ｂ＋ｃ－Ｃはａ＋ｂ＋ｃとＡ＋Ｂ＋Ｃの差を示す。従って、求める確率は、区間［－０．５，０．５］上の独立な一様分布Ｘ，Ｙ，Ｚについ

ての確率P（｜X＋Y＋Z｜≧０．５）で与えられる。
ところで、x，y，z∈［−０．５，０．５］のとき、x＋y＋z≧０．５
$\Leftrightarrow x \geq 0.5-(y+z)$ かつ $(y+z)\geq 0$
だから、

$$P(X+Y+Z\geq 0.5)=\int_{-0.5}^{0.5}\int_{-z}^{0.5}\int_{0.5-y-z}^{0.5} dx\,dy\,dz=1/6$$

同様に

$P(X+Y+Z\leq -0.5)=1/6$

$\therefore P(|X+Y+Z|\geq 0.5)=\boxed{1/3}$

2．底面と平行な面を上面と名付ける。また、ｎ回の操作を行なった後、最初の底面が平面に接している確率をp_nとし、最初の上面が平面に接している確率をr_nとする。
このとき、底面と上面は対となった動き（天地の関係）をするから

$p_k=r_k \quad (k\geq 1)$ ・・・①

また、ｋ＋１回目の操作で最初の底面が底面に戻ってくるのは、ｋ回後最初の底面が側面になっていて、ｋ＋１回目で４つの側面のうち最初の底面が底面となる場合であるから、

$p_{k+1}=(1-p_k-r_k)\cdot(1/4) \quad (k\geq 1)$ ・・・②

①，②より

$p_{k+1}=(1-2p_k)/4$ ・・・③

③式のp_{k+1}とp_kをβとおくと　$\beta=(1-2\beta)/4$　$\therefore \beta=1/6$
そこで、③式はβを用いて次のように変形できる。

$$p_{k+1}-\beta=(-1/2)(p_k-\beta)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ p_{k+1}-1/6&=(-1/2)(p_k-1/6)\\&=(-1/2)^2(p_{k-1}-1/6)\\&\cdots\cdots\\&=(-1/2)^k(p_1-1/6)\end{aligned}$$

ここで、$p_1=0$は明らかであるから、

$p_n=1/6-1/6(-1/2)^{n-1} \quad (n\geq 2)$ ・・・④

なお、④式で$n=1$とすると、$p_1=0$となり、④式は$n\geq 1$で成立する解である。

3．

(1)　X_1の確率密度関数を$f_1(x)$とおく。また、$X_1=x_1$，・・・，$X_k=x_k$のときのX_{k+1}の条件付密度関数を$f(x_{k+1}|x_1,\cdots,x_k)$とおく。
このとき、$(X_1,\cdots,X_n)$の同時密度関数を$f(x_1,\cdots,x_n)$とすると

$$\begin{aligned}f(x_1,\cdots,x_n)=&f(x_n|x_1,\cdots,x_{n-1})\times\\&f(x_{n-1}|x_1,\cdots,x_{n-2})\times\cdots\times\\&f(x_2|x_1)\times f_1(x_1)\end{aligned}$$

$$\therefore E(X_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_n\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x_n\boldsymbol{f}(x_n\mid x_1,\cdots,x_{n-1})\,dx_n\right\}\times$$
$$\boldsymbol{f}(x_{n-1}\mid x_1,\cdots,x_{n-2})\times\cdots\times\boldsymbol{f}(x_2\mid x_1)\times$$
$$\boldsymbol{f}_1(x_1)\,dx_{n-1}\cdots dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x_{n-1}\boldsymbol{f}(x_{n-1}\mid x_1,\cdots,x_{n-2})\,dx_{n-1}\right\}\times$$
$$\boldsymbol{f}(x_{n-2}\mid x_1,\cdots,x_{n-3})\times\cdots\times\boldsymbol{f}(x_2\mid x_1)\times$$
$$\boldsymbol{f}_1(x_1)\,dx_{n-2}\cdots dx_1$$

$$=\cdots=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1\boldsymbol{f}_1(x_1)\,dx_1=\mu$$

(2) 題意と$E(X_k^2)=V(X_k)+\{E(X_k)\}^2$ であるから

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_k^2\boldsymbol{f}(x_k\mid x_1,\cdots,x_{k-1})\,dx_k=(a^2+1)\,x_{k-1}^2$$

$$\therefore E(X_n^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}x_n^2\boldsymbol{f}(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}x_n^2\boldsymbol{f}(x_n\mid x_1,\cdots,x_{n-1})\,dx_n\right\}\times$$
$$\boldsymbol{f}(x_{n-1}\mid x_1,\cdots,x_{n-2})\times\cdots\times\boldsymbol{f}(x_2\mid x_1)\times$$
$$\boldsymbol{f}_1(x_1)\,dx_{n-1}\cdots dx_1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(a^2+1)x_{n-1}^2\boldsymbol{f}(x_{n-1}\mid x_1,\cdots,x_{n-2})\,dx_{n-1}$$
$$\times\boldsymbol{f}(x_{n-2}\mid x_1,\cdots,x_{n-3})\times\cdots\times\boldsymbol{f}(x_2\mid x_1)\times$$
$$\boldsymbol{f}_1(x_1)\,dx_{n-2}\cdots dx_1$$

$$=\cdots=\int_{-\infty}^{+\infty}(a^2+1)^{n-1}x_1^2\boldsymbol{f}_1(x_1)\,dx_1=(a^2+1)^n\mu^2$$

$$\therefore\ V(X_n)=(a^2+1)^n\mu^2-\mu^2$$