年金数理（問題）

（各問２０点）

１．次の（１）～（４）までについて、それぞれ５つの選択肢の中から正しいものを選んで所定の解答用紙にその記号を記入せよ。

（１）定常状態に達した年金制度がある。この制度の年間の脱退者数は次のうちどれか。ただし、新規加入者は、常に２０歳で加入するものとし、定年年齢は６０歳、加入者の総数は１６００人、脱退者の平均加入年数は２５年とする。

（A）３６　　（B）４０　　（C）６４　　（D）７５　　（E）８０

（２）${}_{t|}q_x$＝０．１０（ｔ＝０，１，２，・・・，９）のとき ${}_2p_{x+5}$ は次のうちどれか。

（A）０．４０　　（B）０．６０　　（C）０．７２　　（D）０．８０　　（E）０．８１

（３）第ｎ年度の年度始からｔ年において$(-1)^{n-1}\cdot t$　（$0 \leq t < 1$，$n=1,2,3,\cdots$）なる資金収支（正の場合収入、負の場合支出）の現価は次のうちどれか。ただし、利力δは一定とする。

（A）$\dfrac{1}{1-v}\left(\dfrac{1}{\delta^2}-\dfrac{v}{\delta^2}\right)$　　（B）$\dfrac{1}{1-v}\cdot\dfrac{v}{\delta}$　　（C）$\dfrac{1}{1-v}\left(\dfrac{1}{\delta^2}+\dfrac{v}{\delta}+\dfrac{v^2}{\delta^2}\right)$

（D）$\dfrac{1}{1+v}\left(\dfrac{1}{\delta^2}-\dfrac{v}{\delta}-\dfrac{v}{\delta^2}\right)$　　（E）$\dfrac{1}{1+v}\left(\dfrac{v}{\delta}+\dfrac{v}{\delta^2}\right)$

（４）ある年金制度の初期過去勤務債務は１０００である。次の①、②の２つの償却方法を考えたとき、５年度末において①の未償却過去勤務債務残高が②のそれと等しくなるようなαはどの範囲にあるか正しいものを選べ。

① ６年の元利均等償却

② 前年度末未償却過去勤務債務残高に対する一定割合αを償却

ただし、償却は年１回年度始でおこなうものとし、後発過去勤務債務は発生しないものとする。
また、予定利率は５．５％とし、$a_{\overline{6|}}^{(5.5\%)}$ は４．９９５５３を使用するものとする。

(A) $\alpha<0.29$　(B) $0.29 \leqq \alpha < 0.30$　(C) $0.30 \leqq \alpha < 0.31$　(D) $0.31 \leqq \alpha < 0.32$　(E) $0.32 \leqq \alpha$

２．次の $\boxed{\quad\quad}$ の中に適当な語句又は算式を記入せよ。ただし、給付はTrowbridgeのモデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）にもとづくものとし、定常人口状態であるとする。

（１）$\boxed{\quad ① \quad}$ とは在職中の被保険者について全員が退職するまでの間に必要な給付費用を平準的な保険料として積み立てる財政方式である。今、加入年齢をＸｅ歳、定年年齢をＸｒ歳とすれば、この方式での初年度における標準保険料率 ${}^{(1)}P_1$ は当初の積立金をゼロとすれば

$${}^{(1)}P_1=\frac{S}{G}$$

と書ける。

ただし

$$S = \boxed{\quad ② \quad} + \sum_{x=x_r}^{x_\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$$

$$G = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left(l_x \times \boxed{\quad ③ \quad} \right)$$

である。

n年度においては、標準保険料率 ${}^{(1)}P_n$ は、その時の積立金を ${}^{(1)}F_n$ とすれば

$${}^{(1)}P_n = \frac{\boxed{\quad ④ \quad}}{G}$$

と書ける。これらの関係から

$${}^{(1)}F_n = \frac{1-\{(1-L/G)(1+i)\}^{n-1}}{1-(1-L/G)(1+i)} \times \left(\frac{S \cdot L}{G} - B \right) \times \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

が求められる。ここで $L = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x$ 、またBは年間給付額である。

（2） $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ は制度に新たに加入してくる標準的な被保険者について必要な費用を平準的な保険料により算出し、この保険料を在職中の被保険者全員に適用する財政方式である。この方式における加入年齢Ｘｅ歳の標準保険料率を ${}^{(2)}P$ とすれば

$${}^{(2)}P = \boxed{\quad ⑦ \quad}$$

で、年齢Ｘ歳の被保険者（Ｘｅ＜Ｘ＜Ｘｒ、Ｘｒは定年年齢）に対する責任準備金 ${}^{(2)}V_x$ は

$${}^{(2)}V_x = \boxed{\quad ⑧ \quad} - {}^{(2)}P \times \sum_{y=x}^{x_r-1} \frac{D_y}{D_x}$$

$$= \frac{{}^{(2)}P}{D_x} \times \boxed{\quad ⑨ \quad}$$

$$= {}^{(2)}P \times \frac{1}{l_x} \times \sum_{y=x_e}^{x-1} \boxed{\quad ⑩ \quad}$$

となる。

3．定年退職者に加入期間１年当り１／（Ｘｒ－X_0）の年金を終身給付する制度において、加入年齢毎の平準保険料率を適用するものとする。加入年齢Ｘ歳（X_0 ≦Ｘ≦Ｘｒ－１）の平準保険料率を P_x とおくと、P_x はＸについて単調増加であることを示せ。ここに X_0 は最低年齢、Ｘｒは定年年齢とする。

4．定年退職者に対して加入期間１年当り１／（Ｘｒ－Ｘｅ）の年金を終身給付する制度がある。
ある企業の人員構成は定常状態にあるとする。この企業が今から年金制度を実施するものとして次の問に答えよ。
なお、財政方式は開放型総合保険料方式、過去勤務期間の通算は無く、今後の人員構成は定常人口のまま推移するものとする。ここにＸｅは加入年齢、Ｘｒは定年年齢とする。

（1）初年度の保険料の総額を求めよ。

（2）１年後の年金資産は、その時における過去の加入期間に対応する給付の現価であることを示せ。

（3）一般に、制度発足後、各年度の保険料の総額は、初年度の保険料と同額であることを示せ。

5．加入年齢方式を採用している年金制度があるものとする。この制度の内容が次のとおりであるものとして、設問に答えよ。

・給付　　：年度始にX歳の者がその年度中に生存のまま脱退した場合、年度末に年金保険を購入するための一時払保険料相当額S_xを支給する。また死亡した場合は、年度末に遺族へ一時金$k \times S_x$を支給する。（ただし$k \geq 1$とする）

・保険料　：年1回年度始に払い込まれるものとし、過去勤務債務は償却が完了しているものとする。

・計算の基礎等

Xe	：加入年齢（Xe歳で年度始にのみ加入があるものとする）
Xr	：定年年齢（年度始にXr－1歳の者は年度末までに必ず脱退するものとする）
L_x	：年度始にX歳の現在加入員数（$Xe \leq X \leq Xr-1$）
i	：予定利率
v	：現価率［$v=1/(1+i)$］
$q_x^{(d)}$	：予定死亡率
$q_x^{(w)}$	：予定脱退率
V_x	：年度始にX歳の加入者の年度末責任準備金

設問　ある年度のX歳の脱退者数（死亡を除く）がW_xであった（X：年度始での年齢、$Xe \leq X \leq Xr-1$）としてその年度の脱退差益が

$$\sum_{X=Xe}^{Xr-2} (L_x \cdot q_x^{(w)} - W_x) \cdot (S_x - V_x)$$

とあらわされることを示し、その意味を説明せよ。　なお、上記以外の差損益は発生しないものとする。

年金数理（解答例）

1.

問題番号	正　解
(1)	(C)
(2)	(B)
(3)	(D)
(4)	(E)

正解は上記のとおりであるが，以下に解法を略記する。

(1)

題意より，x 歳の脱退力を μ_x とすると，

$$\left\{\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)l_x\cdot\mu_x\cdot dx+(x_r-x_e)l_{x_r}\right\}\Big/\left\{\int_{x_e}^{x_r}l_x\mu_x\,dx+l_{x_r}\right\}=25\cdots①$$

$A=\int_{x_e}^{x_r}l_x\mu_x\,dx+l_{x_r}$は，年間の脱退者数に等しい。

$$\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)l_x\mu_x\,dx$$

$$=\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)l_x\left(-\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}\right)dx$$

$$=-\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)\frac{dl_x}{dx}dx$$

$$=-\ [(x-x_e)l_x]_{x_e}^{x_r}+\int_{x_e}^{x_r}l_xdx$$

$$=-(x_r-x_e)l_{x_r}+\int_{x_e}^{x_r}l_xdx$$

$$\therefore\int_{x_e}^{x_r}(x-x_e)l_x\mu_x\,dx+(x_r-x_e)l_{x_r}=\int_{x_e}^{x_r}l_xdx$$

従って①式は

$$\int_{x_e}^{x_r}l_xdx/A=25$$

$\int_{x_e}^{x_r}l_xdx=1600$であるから

$A=1600/25=64$

従って，(C)が正しい。

(2)

$$_{t|}q_x=d_{x+t}/l_x=0.1\ (t=0,\ 1,\ \cdots 9)$$

より $d_{x+t}=0.1\times l_x$

$$\therefore l_{x+t}=(1-0.1\times t)l_x\ (t=0,\ 1,\ \cdots 9)$$

$$_2P_{x+5}=l_{x+7}/l_{x+5}$$

$$=(1-0.1\times 7)l_x/\{(1-0.1\times 5)l_x\}$$

$$=0.3/0.5$$

$$=0.6$$

従って，(B)が正しい。

(3)

毎年期初から t 年の資金収支の現価は，

$$te^{-\delta t}\times(1-v+v^2-v^3+v^4-v^5\cdots\cdots)dt$$

かっこ内 $=\sum_{n=0}^{\infty}v^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}v^{2n+1}$

$$=\frac{1}{1-v^2}-\frac{v}{1-v^2}$$

$$=\frac{1}{1+v}$$

従って，求める現価は，

$$\int_0^1 t\cdot e^{-\delta t}\frac{1}{1+v}dt$$

$$=\frac{1}{1+v}\int_0^1 t\cdot e^{-\delta t}dt$$

$$=\frac{1}{1+v}\left\{\left[-\frac{t}{\delta}e^{-\delta t}\right]_0^1+\frac{1}{\delta}\int_0^1 e^{-\delta t}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{1+v}\left\{-\frac{v}{\delta}+\frac{1}{\delta}\left[-\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\right]_0^1\right\}$$

$$=\frac{1}{1+v}\left(-\frac{v}{\delta}-\frac{v}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1+v}\left(\frac{1}{\delta^2}-\frac{v}{\delta}-\frac{v}{\delta^2}\right)$$

従って，(D)が正しい。

(4)

①の場合の未償却過去勤務債務残高は，

$$1000\times\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(5.5\%)}/\ddot{a}_{\overline{6|}}^{(5.5\%)}$$

$$\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(5.5\%)}=1$$

$$\ddot{a}_{\overline{6|}}^{(5.5\%)}=a_{\overline{6|}}^{(5.5\%)}\times 1.055 \text{ より}$$

$$=1000/(4.99553\times 1.055)$$

②の場合の未償却過去勤務債務残高は，

$$1000\times\{(1-\alpha)\times 1.055\}^5$$

①，②が等しくなるようなαを求めるためには，

$$1000/(4.99553\times 1.055)=1000\times\{(1-\alpha)\times 1.055\}^5$$

をαについて解けばよい。

$$(1-\alpha)^5=1/(4.99553\times 1.055^6)$$

$$\alpha\fallingdotseq 0.32020$$

従って，(E)が正しい。

試験では，関数電卓の使用が禁止されているため，上式に，αを代入して判定することになる。

2.

問題番号	
①	総合保険料方式
②	$\sum_{x=xe}^{xr-1} lx\dfrac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{D_x}$
③	$\dfrac{\sum_{y=x}^{xr-1} D_y}{D_x}$
④	$S-{}^{(1)}\mathrm{Fn}$
⑤	$(1+i)$
⑥	加入年齢方式
⑦	$\dfrac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{\sum_{x=xe}^{xr-1} D_x}$
⑧	$\dfrac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{D_x}$
⑨	$\sum_{y=xe}^{x-1} Dy$
⑩	$ly\times(1+i)^{x-y}$

「年金数理」の教科書（P51～53，P56～P62）より出題。

3. 解法にあたり，保険料は年１回年度始払と仮定する。

題意より，加入年齢 x 歳の平準保険料率は，

$$P_x=(x_r-x)D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}/\sum_{y=x}^{xr-1}D_y \text{ である。}$$

今 $x_0\leqq x\leqq x_r-2$ である任意の x に対して

$P_x<P_{x+1}$ を示すことができれば，題意が証明できたことになる。

$$P_{x+1}-P_x=D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}\left\{\frac{x_r-x-1}{\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_y}-\frac{x_r-x}{\sum_{y=x}^{xr-1}D_y}\right\}$$

$$=\frac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{\left(\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_y\right)\left(\sum_{y=x}^{xr-1}D_y\right)}\left\{(x_r-x-1)\sum_{y=x}^{xr-1}D_y-(x_r-x)\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_y\right\}$$

上式の ｛ ｝ 内を A とすると

$$A=(x_r-x-1)\sum_{y=x}^{xr-1}D_y-(x_r-x-1)\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_y-\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_y$$

$$=(x_r-x-1)\cdot D_x-\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_y$$

$$=\sum_{y=x+1}^{xr-1}(D_x-D_y)$$

D_x は，x について単調減少であるから $D_x>D_y$

従って $A>0$

また，$D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}$，$\sum_{y=x+1}^{xr-1}D_x$，$\sum_{y=x}^{xr-1}D_y$ の各項は正であるから

$$P_{x+1}-P_x>0$$

$\therefore P_x<P_{x+1}$ が示せた。

4. x 歳の加入者数は，脱退残存表の l_x と等しいとしても一般性を失なわないため l_x を使用する。

(1) $L=\sum_{x=x_0}^{xr-1}l_x$ とすると

保険料率は，$(S^f+S^a_{F.S.})/(G^f+G^a)$ だから

保険料の総額は，

$\{(S^f+S^a_{F\cdot S\cdot})/(G^f+G^a)\}\cdot L$ となる。

ここで

$$S^f=\frac{1}{i}l_{xe}\cdot D_{xr}\cdot \ddot{a}_{xr}/D_{xe}$$

$$S^a_{F\cdot S\cdot}=\sum_{x=xe}^{xr-1}\frac{x_r-x}{x_r-x_e}\cdot l_x\cdot D_{xr}\cdot \ddot{a}_{xr}/D_x$$

$$G^f=\frac{1}{i}l_{xe}\sum_{x=xe}^{xr-1}D_x/D_{xe}$$

$$G^a=\sum_{x=xe}^{xr-1}l_x\frac{\sum_{y=x}^{xr-1}D_y}{D_x}$$ である。

(2)

$$G^f+G^a=L/d$$

$$S^f=\frac{v}{d}{}^{In}C$$

$$S^a_{F\cdot S\cdot}=\frac{1}{d}({}^UC-v\,{}^{In}C)$$

故に，年間の保険料を，C とすると

$$C={}^UC=\frac{1}{x_r-x_e}\sum_{x=xe}^{xr-1}l_x\cdot\frac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{D_x}$$

1年後の年金資産は初年度に給付が発生しないことから$(1+i)C$となる。

$$(1+i)C=(1+i)\frac{1}{x_r-x_e}\sum_{x=xe}^{xr-1}l_x\frac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{D_x}$$

$$=\frac{1}{x_r-x_e}\sum_{x=xe}^{xr-1}\frac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{v^{x+1}}$$

$$=\frac{1}{x_r-x_e}\sum_{x=xe}^{xr-1}l_{x+1}\frac{D_{xr}\cdot\ddot{a}_{xr}}{D_{x+1}}$$

これは，1年後の加入者および受給者の過去の加入期間に対応する給付現価に等しい。

(3) 一般に，開放型総合保険料方式の保険料は，n を年度とすると

$(S^f+S^a_{(n)}+S^p_{(n)}-F_{(n)})/(G^a+G^f)$ である。

今$(n-1)$年度までの保険料が初年度と同額とする。

$F_{(n)}=\sum_{k=1}^{n-1}F^{k}_{(n)}$ とおく。

ここで，$F^{k}_{(n)}$ は k 年度に支払った保険料と k 年度の加入に対応する給付にもとづく n 年度期初の積立金残高とする。

仮定より，k 年度の保険料は，初年度と同額であるから，(2)の結果より $F^{k}_{(k+1)}$ が $(k+1)$ 年度における k 年度の加入に対応する給付現価であることがわかる。

従って，給付現価の定義より $F^{k}_{(n)}$ は，n 年度における加入者及び受給者の k 年度の加入に対応する給付現価に等しいことがいえる。

故に，$F_{(n)}$ は，n年度の加入者及び受給者の過去の加入期間に対応する給付現価である。

よって

$$F_{(n)}=S^{a}_{p\cdot s\,(n)}+S^{p}_{(n)}$$

$$S^{a}_{(n)}=S^{a}_{F\cdot s}+S^{a}_{p\cdot s\,(n)}$$

$$S^{f}+S^{a}_{(n)}+S^{p}_{(n)}-F_{(n)}=S^{f}+S^{a}_{F\cdot s} \text{ より}$$

$$(S^{f}+S^{a}_{(n)}+S^{p}_{(n)}-F_{(n)})/(G^{a}+G^{f})$$

$$=(S^{f}+S^{a}_{F\cdot s})/(G^{f}+G^{a})$$

$$=(\text{初年度の保険料})$$

がいえた。

5．脱退差益を R とすると，R は脱退以外の基礎率が予定通りであるとした場合の年度末年金資産 F と年度末の責任準備金 V を用いて

$$R=F-V \qquad \cdots①$$

とかける。

ここで，P を１人あたりの標準保険料とすると

$$F=\sum_{x=xe}^{xr-1}L_x(V_{x-1}+P)(1+i)-kS_xL_xq_x^{(d)}-S_xW_x \qquad \cdots②$$

$$V=\sum_{x=xe}^{xr-1}(L_x-L_xq_x^{(d)}-W_x)V_x \qquad \cdots③$$

ファクラーの公式から

$$(V_{x-1}+P)(1+i)-kS_xq_x^{(d)}-S_xq_x^{(W)}=(1-q_x^{(d)}-q_x^{(W)})V_x$$

$$\therefore V_x=\frac{(V_{x-1}+P)(1+i)-kS_xq_x^{(d)}-S_xq_x^{(W)}}{1-q_x^{(d)}-q_x^{(W)}} \qquad \cdots④$$

①，②，③から

$$R=\sum_{x=x_e}^{xr-1}L_x\left[(V_{x-1}+P)(1+i)-kS_xq_x^{(d)}-S_x\frac{W_x}{L_x}-\left(1-q_x^{(d)}-\frac{W_x}{L_x}\right)V_x\right]\cdots\text{⑤}$$

$\dfrac{W_x}{L_x}=q_x^{(W)}+\Delta q_x^{(W)}$ として⑤の［　］を④を使って書き替えると

⑤の［　］の内$=(V_{x-1}+P)(1+i)-kS_xq_x^{(d)}-S_xq_x^{(W)}-S_x\Delta q_x^{(W)}$

$$-(1-q_x^{(d)}-q_x^{(W)}-\Delta q_x^{(W)})\frac{(V_{x-1}+P)(1+i)-kS_xq_x^{(d)}-S_xq_x^{(W)}}{1-q_x^{(d)}-q_x^{(W)}}$$

$$=-S_x\Delta q_x^{(W)}+\Delta q_x^{(W)}V_x$$

$$=-\Delta q_x^{(W)}(S_x-V_x)$$

$$=\left(q_x^{(W)}-\frac{W_x}{L_x}\right)(S_x-V_x)$$

よって

$$R=\sum_{x=x_e}^{xr-1}L_x\left(q_x^{(W)}-\frac{W_x}{L_x}\right)(S_x-V_x)$$

$$=\sum_{x=x_e}^{xr-1}(L_xq_x^{(W)}-W_x)(S_x-V_x)$$

ここで，$xr-1$ 歳の年度末責任準備金 V_{xr-1} は，x_e 歳加入の場合の定年退職時の給付 S_{xr-1} に等しい。

よって $R=\displaystyle\sum_{x=x_e}^{xr-2}(L_xq_x^{(W)}-W_x)(S_x-V_x)$

（算式の意味の説明）

・年始に x 歳の者が１名脱退すると，制度は年度末において V_x を積立てるかわりに S_x を支払うこととなる。従って(S_x-V_x)は，脱退者１人が発生した場合に発生する脱退差損益ということができる。

・年金制度は収支相等の原則により，予定通り運営されれば損益は発生しない。これは，脱退に関していえば，年始に x 歳の者が $L_x\cdot q_x^{(W)}$ 人脱退した場合，脱退差損益はゼロということになる。

・従って $L_x\cdot q_x^{(W)}\neq W_x$ の場合，$L_x\cdot q_x^{(W)}-W_x$ 人分だけ①の脱退差損益が発生することになる。よって脱退差益は

$$R=\sum_{x=x_e}^{xr-1}(L_x\cdot q_x^{(W)}-W_x)(S_x-V_x)$$

・ここで年始に $Xr-1$ 歳の場合は，脱退しても定年に達しても同じ給付を受けることになるから，ここからは脱退差益は発生しない。

従って

$$R=\sum_{x=xe}^{xr-2}(L_x \cdot q_x^{(W)}-W_x)(S_x-V_x)$$

である。