保 険 数 学 2（問題）

1．次の（1）から（5）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔（A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。 （40点）

（1）死亡解約脱退残存表における残存者が $\ell_x = a - bx$ で表され、解約率 q_x^{w} が死亡率 q_x の4倍であるとすると、絶対死亡率は $q_x^{*} = 1 - \dfrac{\ell_x - k_1 b}{\ell_x - k_2 b}$ となる。このときの k_1，k_2 は次のうちどれか。

（A）$\begin{cases} k_1 = 0.55 \\ k_2 = 0.45 \end{cases}$ （B）$\begin{cases} k_1 = 0.6 \\ k_2 = 0.4 \end{cases}$ （C）$\begin{cases} k_1 = 0.65 \\ k_2 = 0.35 \end{cases}$ （D）$\begin{cases} k_1 = 0.7 \\ k_2 = 0.3 \end{cases}$ （E）$\begin{cases} k_1 = 0.75 \\ k_2 = 0.25 \end{cases}$

（2）ある年齢における養老保険（保険金額1、保険金期末払）の一時払営業保険料は 0.38337、また年払全期払込の営業保険料は 0.02368である。但し、予定事業費は、

	一時払	年払
新契約費	保険金の25‰	保険金の25‰
維持費	保険金の2‰	保険金の3‰
集金費	なし	年払営業保険料の3％

とする。このとき予定利率は次のうちどれに最も近いか。

（A）4％ （B）4.5％ （C）5％ （D）5.5％ （E）6％

（3）終身払込終身保険（保険金額1、保険金期末払）に30歳で加入し、5年経過時点で解約返戻金 ${}_5W$ に基づいて払済終身保険に変更するとき、変更後の保険金額に最も近いものは次のうちどれか。

但し、${}_tW = {}_tV_x - 0.015\,\dfrac{10-t}{10}$ （$t \leqq 10$），${}_tV_x$ は純保険料式責任準備金とし、払済終身保険の予定事業費は、保険金1に対し毎年 0.002とする。また、$i = 0.055$，$P_{30} = 0.006078$，${}_5V_{30} = 0.0305$ とする。

（A）0.08 （B）0.11 （C）0.14 （D）0.17 （E）0.20

（4）$\ell_x = \ell_0 \cdot \left(1 - \dfrac{x}{\omega}\right)$，$0 \leqq x \leqq \omega$ のとき $\mathring{e}_{\overline{xx}}$ は次のうちどれか。

（A）$\dfrac{1}{3}(\omega - x)$ （B）$\dfrac{1}{2}(\omega - x)$ （C）$\dfrac{2}{3}(\omega - x)$ （D）$\dfrac{3}{4}(\omega - x)$ （E）$\dfrac{4}{5}(\omega - x)$

（5）$D_x^{aa} = 6602.506$，$D_x^{ii} = 43.063$，$M_x^{ii} = 680.008$，$M_{x+n}^{ii} = 653.447$，$A^{i}_{x:\overline{n}|} = 0.21561$，$A^{1}_{x:\overline{n}|} = 0.03611$

であるとき、$A^{ai\,1}_{x:\overline{n}|}$ は次のうちどれに最も近いか。

（A）0.00141 （B）0.00262 （C）0.00379 （D）0.00402 （E）0.00697

2．x歳加入n年満期養老保険（保険金額1、保険金期末払、$n>1$）について、予定利率iに基づく年払純保険料を$P_{x:\overline{n|}}$、第t保険年度末における純保険料式責任準備金を${}_tV_{x:\overline{n|}}$、チルメル歩合αに対する全期チルメル式責任準備金を${}_tV^{z}_{x:\overline{n|}}$で表すものとする。いま、予定利率$i'$（$i'>i$）に基づく年払純保険料を$P'_{x:\overline{n|}}$、第t保険年度末純保険料式責任準備金を${}_tV'_{x:\overline{n|}}$で表し、$\Delta V_t={}_tV_{x:\overline{n|}}-{}_tV'_{x:\overline{n|}}$，$\Delta P=P_{x:\overline{n|}}-P'_{x:\overline{n|}}$として次の問に答えよ。 (20点)

（1） $\Delta V_t=\dfrac{i'-i}{1+i}\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'_{x:\overline{n|}}+P'_{x:\overline{n|}})\dfrac{D_{x+s}}{D_{x+t}}-\Delta P\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$ $(1\leqq t\leqq n-1)$ を示せ。

ここに、D_{x+s}，$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$は予定利率iに基づくものとする。

（2） $\dfrac{\Delta V_t}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}\geqq\dfrac{\Delta V_{t-1}}{\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1|}}}$ $(1\leqq t\leqq n-1)$ を示し、さらに $\dfrac{\Delta V_1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}\geqq\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$ ならば、

${}_tV^{z}_{x:\overline{n|}}\geqq{}_tV'_{x:\overline{n|}}$ $(1\leqq t\leqq n-1)$ となることを証明せよ。但し、予定死亡率は単調増加とし、このとき養老保険の第t保険年度末純保険料式責任準備金がtに関して単調増加となることを用いてよい。

3．x歳加入n年満期養老保険（保険金額1、保険金期末払、保険料年払、$n>1$）について、予定利率iに対し、実際利率i'であるとき、次の各問に答えよ。 (20点)

（1）各保険年度末に予定利率iに基づく責任準備金を積み立てるとき、第t保険年度の剰余R_tを求めよ。（R_tは第t保険年度始生存者1人あたりの剰余とする。）但し、第$t-1$保険年度までの剰余は分配済であるとし、第t保険年度の剰余に影響しないものとする。

（2） ${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}}=v'-P_{x:\overline{n|}}+v'\cdot R_n$ を示せ。

（3） ${}_tV_{x:\overline{n|}}=A'_{x+t:\overline{n-t|}}-P_{x:\overline{n|}}\cdot\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t|}}+\sum_{s=1}^{n-t}(v')^s\cdot{}_{s-1}p_{x+t}\cdot R_{t+s}$ $(t=1,2,\cdots,n-1)$ を示せ。

ここに、$A'_{x+t:\overline{n-t|}}$，$\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t|}}$，$v'$は$i'$に基づくものとする。また、実際死亡率は予定死亡率に従い、死亡以外での脱退はないものとし、予定事業費は考えないこととする。

4．次の給付を行う保険料全期払込の親子連生保険（保険金即時払）の年払平準純保険料および純保険料式責任準備金を求めよ。なお、契約年齢は子供x歳、親y歳とし、保険期間はn年とする。 (20点)

（1）満期までの生存の場合

① 子供・親とも生存したときは保険金Sを支払う。

② 子供のみ生存したときは保険金1.5Sを支払う。

（2）満期までの死亡の場合

① 子供が第t保険年度に死亡したときは死亡給付金$\dfrac{t}{n}\cdot S$を支払い、保険契約は消滅する。

② 親が死亡したときは以後の保険料の払込を免除するとともに、以後子供が生存する限り契約応当日ごとに0.1Sを満期の1年前まで支払う。

保険数学２（解答例）

1．

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
解 答 欄	B	A	C	C	B

正解は上表のとおりであるが，以下に各設問の解法を略記する。

(1)…(B)

題意より $w_x=l_x q_x^{w}=l_x\cdot 4q_x=4d_x$ であるので，

$l_{x+1}=l_x-d_x-w_x=l_x-5d_x$ ゆえ $d_x=\dfrac{l_x-l_{x+1}}{5}=\dfrac{b}{5}$ $(\because l_x=a-bx)$

$$\therefore w_x=\frac{4b}{5}$$

$$\therefore q_x^*=\frac{d_x}{l_x-\frac{w_x}{2}}=\frac{0.2b}{l_x-0.4b}=1-\frac{l_x-0.6b}{l_x-0.4b}$$

(2)…(A)

題意より $\begin{cases} A_{x:\overline{n}|}+0.025+0.002\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=0.38337 \\ \dfrac{A_{x:\overline{n}|}+0.025+0.003\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{(1-0.03)\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=0.02368 \end{cases}$

これらを解いて，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=17.450$，$A_{x:\overline{n}|}=0.32347$

ここで $A_{x:\overline{n}|}=1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ より $\mathrm{d}=\dfrac{1-A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=0.03877$ $\qquad\therefore i=\dfrac{d}{1-d}=0.040\cdots$

(3)…(C)

$${}_5W={}_5V_{30}-0.015\times\frac{10-5}{10}=0.0305-0.0075=0.0230$$

$P_x=\dfrac{1}{\ddot{a}_x}-\mathrm{d}$，${}_tV_x=1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ より $\ddot{a}_{x+t}=\dfrac{1-{}_tV_x}{P_x+d}$ であるから，

$\ddot{a}_{35}=\dfrac{1-0.0305}{0.006078+\dfrac{0.055}{1.055}}=16.655$ また，$A_{35}=1-d\ddot{a}_{35}=0.13173$

$\therefore$ 払済終身保険金額 $=\dfrac{{}_5W}{A_{35}+0.002\ddot{a}_{35}}=\dfrac{0.0230}{0.13173+0.002\times 16.655}=0.139\cdots$

(4)…(C)

$$\mathring{e}_{xx}=\int_0^{\omega-x}{}_tp_{xx}dt=\int_0^{\omega-x}\left\{\frac{l_0\left(1-\dfrac{x+t}{\omega}\right)}{l_0\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)}\right\}^2dt=\frac{1}{(\omega-x)^2}\int_0^{\omega-x}(\omega-x-t)^2dt$$

$$=\frac{1}{(\omega-x)^2}\left[-\frac{1}{3}(\omega-x-t)^3\right]_0^{\omega-x}=\frac{1}{3}(\omega-x)$$

$$\mathring{e}_x=\int_0^{\omega-x}{}_tp_xdt=\int_0^{\omega-x}\frac{l_0\left(1-\dfrac{x+t}{\omega}\right)}{l_0\left(1-\dfrac{x}{\omega}\right)}dt=\frac{1}{\omega-x}\int_0^{\omega-x}(\omega-x-t)dt$$

$$=\frac{1}{\omega-x}\left[-\frac{1}{2}(\omega-x-t)^2\right]_0^{\omega-x}=\frac{1}{2}(\omega-x)$$

$$\mathring{e}_{\overline{xx}}=2\mathring{e}_x-\mathring{e}_{xx}=\frac{2}{3}(\omega-x)$$

(5)…(B)

$$A^{ai}_{x:\overline{n}|}=\frac{M^{ii}_x-M^{ii}_{x+n}-D^{ii}_x\cdot A^{\ i}_{x:\overline{n}|}}{D^{aa}_x}=\frac{680.008-653.447-43.063\times0.21561}{6602.506}$$

$$=0.002616\cdots$$

2．(1)再帰公式により， $({}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(1+i)=p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}+q_{x+t}\cdots①$

$({}_tV'_{x:\overline{n}|}+P'_{x:\overline{n}|})(1+i')=p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V'_{x:\overline{n}|}+q_{x+t}\cdots②$

①－②として$\Delta P=P_{x:\overline{n}|}-P'_{x:\overline{n}|}$，$\Delta V_t={}_tV_{x:\overline{n}|}-{}_tV'_{x:\overline{n}|}$と置けば

$$(\Delta V_t+\Delta P)(1+i)-({}_tV'_{x:\overline{n}|}+P'_{x:\overline{n}|})(i'-i)=p_{x+t}\Delta V_{t+1}$$

すなわち，$D_{x+t+1}\Delta V_{t+1}-D_{x+t}\Delta V_t=\Delta PD_{x+t}-\dfrac{i'-i}{1+i}({}_tV'_{x:\overline{n}|}+P'_{x:\overline{n}|})D_{x+t}$

この式のtに順次$t+1$，$t+2$，…，$n-1$を代入して辺々加えると，$\Delta V_n=0$により，

$$-D_{x+t}\Delta V_t=\Delta P\sum_{s=t}^{n-1}D_{x+s}-\frac{i'-i}{1+i}\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'_{x:\overline{n}|}+P'_{x:\overline{n}|})D_{x+s}$$

$$\therefore\Delta V_t=\frac{i'-i}{1+i}\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV_{x:\overline{n}|}+P'_{x:\overline{n}|})\frac{D_{x+s}}{D_{x+t}}-\Delta P\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

(2) (1)の結果より，$1\leqq t\leqq n-1$で

$$\frac{\Delta V_t}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}=\frac{i'-i}{1+i}\cdot\frac{1}{N_{x+t}-N_{x+n}}\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'+P')D_{x+s}-\Delta P\cdots③$$

$$\frac{\Delta V_{t-1}}{\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}}=\frac{i'-i}{1+i}\cdot\frac{1}{N_{x+t-1}-N_{x+n}}\sum_{s=t-1}^{n-1}({}_sV'+P')\,D_{x+s}-\Delta P\cdots④$$

が成り立つ。(${}_sV'_{x:\overline{n}|}$, $P'_{x:\overline{n}|}$ をそれぞれ ${}_sV'$, P' と略記した。) ③−④を作れば,

$$\frac{\Delta V_t}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}-\frac{\Delta V_{t-1}}{\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}}=\frac{i'-i}{1+i}\cdot\frac{1}{(N_{x+t}-N_{x+n})(N_{x+t-1}-N_{x+n})}$$

$$\times\Big\{(N_{x+t-1}-N_{x+n})\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'+P')\,D_{x+s}$$

$$-(N_{x+t}-N_{x+n})\sum_{s=t-1}^{n-1}({}_sV'+P')\,D_{x+s}\Big\}$$

となるが右辺の中括弧内は,

$$(N_{x+t-1}-N_{x+n})\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'+P')\,D_{x+s}-(N_{x+t}-N_{x+n})\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'+P')\,D_{x+s}$$

$$-(N_{x+t}-N_{x+n})\,({}_{t-1}V'+P')\,D_{x+t-1}$$

$$=D_{x+t-1}\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'+P')\,D_{x+s}-\sum_{s=t}^{n-1}D_{x+s}\,({}_{t-1}V'+P')\,D_{x+t-1}$$

$$=D_{x+t-1}\sum_{s=t}^{n-1}({}_sV'-{}_{t-1}V')\,D_{x+s}$$

$\geqq 0$ ($\because {}_sV'$ の単調増加性より $t\leqq s\leqq n-1$ で ${}_sV'\geqq{}_{t-1}V'$)

よって$\dfrac{\Delta V_t}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}\geqq\dfrac{\Delta V_{t-1}}{\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}}$ ($1\leqq t\leqq n-1$) が示された。

次に, $\dfrac{\Delta V_1}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}\geqq\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$を用いると, $1\leqq t\leqq n-1$ なる任意の t について,

$\dfrac{\Delta V_t}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}\geqq\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ が成り立つ。

ところが, ${}_tV^z_{x:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}-\dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$であるので, 与条件のもとで,

$${}_tV^z_{x:\overline{n}|}-{}_tV'_{x:\overline{n}|}=\Delta V_t-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\geqq 0\quad(1\leqq t\leqq n-1)$$

$\therefore {}_tV^z_{x:\overline{n}|}\geqq{}_tV'_{x:\overline{n}|}$ ($1\leqq t\leqq n-1$)

3. (1)再帰公式により, $({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(1+i)=p_{x+t-1}\cdot{}_tV_{x:\overline{n}|}+q_{x+t-1}$

また　$({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(1+i')=p_{x+t-1}\cdot{}_tV_{x:\overline{n}|}+q_{x+t-1}+R_t$

ゆえに　$R_t=({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(i'-i)$

(2) $({}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})(1+i')=({}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})\{(1+i)+(i'-i)\}=1+R_n$

$$\therefore {}_{n-1}V_{x:\overline{n|}} = -P_{x:\overline{n|}} + v'(1+R_n)$$
$$= v' - P_{x:\overline{n|}} + v'R_n$$

(3) 与式は(2)から$t=n-1$で成り立つことが示されている。ゆえに$t+1$のとき成立するとしてtのとき成立することを示せばよい。

$t+1$で成立するから，

$${}_{t+1}V_{x:\overline{n|}} = A'_{x+t+1:\overline{n-t-1|}} - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1|}} + \sum_{s=1}^{n-t-1}(v')^s \cdot {}_{s-1}p_{x+t+1} \cdot R_{t+1+s}$$

辺々に$v'p_{x+t}$を乗じて

$$v'p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}} = v'p_{x+t}\cdot A'_{x+t+1:\overline{n-t-1|}} - P_{x:\overline{n|}}\cdot v'p_{x+t}\cdot \ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1|}} + \sum_{s=1}^{n-t-1}(v')^{s+1}\cdot {}_sp_{x+t}\cdot R_{t+s+1}$$
$$= (A'_{x+t:\overline{n-t|}} - v'\cdot q_{x+t}) - P_{x:\overline{n|}}(\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t|}} - 1) + \sum_{s=1}^{n-t}(v')^s\cdot {}_{s-1}p_{x+t}\cdot R_{t+s} - v'\cdot R_{t+1}$$

$$\therefore A'_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t|}} + \sum_{s=1}^{n-t}(v')^s\cdot {}_{s-1}p_{x+t}\cdot R_{t+s} = v'(p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}} + q_{x+t} + R_{t+1}) - P_{x:\overline{n|}}$$
$$= {}_tV_{x:\overline{n|}}$$

$$\left[\because {}_tV_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}} = v'(p_{x+t}\cdot {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}} + q_{x+t} + R_{t+1})\right]$$

ゆえにtのとき成立することが示された。

4．保険料をPとすると，

㋑ 収入の現価 $P\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}$

㋺ (1)の給付の現価 $S\cdot v^n\cdot {}_np_x\cdot {}_np_y + 1.5S\cdot v^n\cdot {}_np_x(1-{}_np_y)$

$$= S(1.5v^n\cdot {}_np_x - 0.5v^n\cdot {}_np_x\cdot {}_np_y)$$
$$= S(1.5A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} - 0.5A_{xy:\overline{n|}}^{\ \ \ 1})$$

㋩ (2)の①の給付の現価 $S\cdot\dfrac{1}{n}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}}$

㋥ (2)の②の給付の現価 $0.1S\cdot a_{y|x:\overline{n-1|}} = 0.1S(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})$

収支相等の原則により，㋑＝㋺＋㋩＋㋥

すなわち，$P = \dfrac{S}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}\left\{1.5A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} - 0.5\cdot A_{xy:\overline{n|}}^{\ \ \ 1} + \dfrac{1}{n}(I\bar{A})^1_{x:\overline{n|}} + 0.1(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{xy:\overline{n|}})\right\}$

次に，第t保険年度末責任準備金を親子とも生存の場合${}_tV$，親が死亡の場合${}_t\tilde{V}$とすると，

$${}_tV = S\left\{1.5A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ 1} - 0.5A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}^{\ \ \ \ 1} + \frac{1}{n}\cdot\frac{(t+1)\bar{C}_{x+t} + (t+2)\bar{C}_{x+t+1} + \cdots + n\bar{C}_{x+n-1}}{D_{x+t}}\right.$$

$$+0.1\ (\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}-\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}})\ \Big\}-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$$

$$=S\Big[\ 1.5A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ 1}-0.5A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}^{\ \ 1}+\frac{1}{n}\Big\{\ (I\overline{A})_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t|}}+t\cdot\overline{A}_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t|}}\Big\}$$

$$+0.1\ (\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}-\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}})\ \Big]-P\cdot\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}}$$

$${}_{t}\tilde{V}=S\Big[\ 1.5A_{x+t:\overline{n-t|}}^{\ \ 1}+\frac{1}{n}\{(I\overline{A})_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t|}}+t\cdot\overline{A}_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t|}}\}+0.1\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\Big]$$

以　上