保 険 数 学 1 (問題)

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しい答を一つ選んで、所定の解答用紙にその記号〔（A）から（E）のうちいずれか一つ。〕を記入せよ。 (50点)

（1）額面1、年利率7％（利息年1回期末払）、5年後の償還となる公社債について、購入時の帳簿価格を年8％の利回りとなるように定めた。この帳簿価格を毎年8％の利回りが実現するよう、年度末に評価益を計上していくとすると、第1年度の評価益に最も近いものは次のうちどれか。必要なら、$v^5 = 0.712986$（年利率7％）、$v^5 = 0.680583$（年利率8％）を用いよ。

（A）0.006302　（B）0.006806　（C）0.007350　（D）0.007938　（E）0.008573

（2）ある定常人口の社会で、出生率（総人口比）が1.25%、死亡数が25,000人であり、41歳以上の人口が総人口の50%を占め、その41歳以上の人口の平均死亡率が2.40%であるとき、次のⅠからⅣまでの結果を導いたという。

Ⅰ．総人口は 200万人である。

Ⅱ．この社会の平均寿命は80歳である。

Ⅲ．41歳の人口は24,000人である。

Ⅳ．40歳以下で死亡する人の平均年齢は15歳である。

これらⅠからⅣまでのうち正しいものだけを選ぶと、次のうちどれになるか。

（A）Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ　（B）Ⅰ・Ⅲ・Ⅳ　（C）Ⅰ・Ⅱ・Ⅳ　（D）Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ　（E）Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・Ⅳすべて

（3）$\mu_x = \dfrac{1}{2(121-x)}$ のとき、${}_{45}p_{40}$の値は次のうちどれか。

（A）$\frac{5}{9}$　（B）$\frac{3}{8}$　（C）$\frac{4}{7}$　（D）$\frac{2}{3}$　（E）$\frac{1}{2}$

（4）$\mu_x = A + Hx$（A, Hは定数）と表されるとき、${}_tp_x$は次のうちどの形で表されるか。但し、a, bはx, tによらない定数とする。

（A）$a^{xt}b^{t^2}$　（B）$a^t b^{(x+t)t}$　（C）$a^t b^{xt}$　（D）$a^t b^{2xt+t^2}$　（E）$a^t b^{t^2}$

（5）$\sum_{n=1}^{\omega-x} v^n \cdot {}_{n-1|}q_x \cdot s_{\overline{n}|}$ を求めよ。

（A）$\ddot{a}_x$　（B）a_x　（C）$a_x + A_x$　（D）$\ddot{a}_x + A_x$　（E）$v a_x$

（6）次の式のうちで正しくないものはどれか。但し、Pは保険金期末払の年払純保険料を表すものとする。

（A）$P_x = v - \dfrac{a_x}{\ddot{a}_x}$　（B）$P_{x:\overline{n}|} = v - \dfrac{a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$　（C）$P_x = \dfrac{1}{1+a_x} - d$　（D）$P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$

（E）$P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n+1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - 1$

（7）$P_x = 0.01682$, $\ddot{a}_x = 18.165$, $q_x = 0.00771$ のとき、A_{x+1} の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A）0.31226　（B）0.31230　（C）0.31234　（D）0.31238　（E）0.31242

（８）ｘ歳の人がｎ年後に生存している場合v^n，生存していない場合０の値をとる確率変数の平均値は$A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$であるが、この確率変数の分散は次のうちどれか。

（Ａ）$v^n \cdot {}_np_x$　（Ｂ）$v^n \cdot {}_nq_x$　（Ｃ）$v^{2n}({}_np_x)^2$　（Ｄ）$v^{2n}({}_nq_x)^2$　（Ｅ）$v^{2n} \cdot {}_np_x \cdot {}_nq_x$

（９）正整数ｔ，ｍ，ｎ（ｔ＜ｍ＜ｎとする）に対し、

$$1 - A_{x+m:\overline{n-m}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - A_{x:\overline{n}|} = A_{x+m:\overline{n-m}|} - A_{x+t:\overline{n-t}|}$$

が成立しているとき、${}_tV_{x:\overline{n}|}$の値は次のうちどれか。

（Ａ）$\frac{1}{4}$　（Ｂ）$\frac{1}{3}$　（Ｃ）$\frac{1}{2}$　（Ｄ）$\frac{2}{3}$　（Ｅ）$\frac{3}{4}$

（10）${}_tV_{x:\overline{n}|} = 0.6324$，${}_tV_{x:\overline{n}|}^{1} = 0.0452$，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 6.3185$としたとき、${}_tV_{x:\overline{n}|}^{(12)}$の値に最も近いものは次のうちどれか。

ここに、${}_tV_{x:\overline{n}|}^{(12)}$は、死亡保険金を各分割期間の期末に支払う養老保険の第ｔ保険年度末責任準備金を表す。

（Ａ）0.6329　（Ｂ）0.6336　（Ｃ）0.6343　（Ｄ）0.6350　（Ｅ）0.6357

２．ｘ歳加入ｎ年満期で、被保険者が死亡したとき、その保険年度末から満期まで（満期時を含む。）、毎年１の確定年金を支払う保険を考える。この保険について、次の問に答えよ。（25点）

（１）この保険の給付現価 $\sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_tp_x \cdot q_{x+t} \cdot a_{\overline{n-t}|}$ は$a_{\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}$に等しいことを示せ。

（２）この保険において、保険期間中に被保険者が生存している限り年払平準保険料を徴収する場合、被保険者生存中の純保険料式責任準備金は次の関係式が成り立っているときは負値となることを示せ。

$$\frac{a_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} + P_{x+t:\overline{n-t}|}^{1} < \frac{a_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + P_{x:\overline{n}|}^{1}$$

ここに、ｔは経過年数とし、$P_{x:\overline{n}|}^{1}$は定期保険（保険金額１、保険金期末払）の年払純保険料とする。

３．ｘ歳加入で死亡保険金１を保険年度末に支払う終身保険において、保険料払込期間をｎ年とする。保険料払込期間内に死亡した場合は既払純保険料もあわせて支払うものとする。また、保険料払込終了時に生存している場合は既払純保険料を生存給付金として支払うものとする。（第ｎ保険年度末に支払う。）この保険について、次の問に答えよ。（25点）

（１）年払平準純保険料を求めよ。

（２）ｔ＜ｎのとき、第ｔ保険年度末純保険料式責任準備金を過去法と将来法により求め、それらが一致することを示せ。

保険数学１（解答例）

１.

設問番号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
解 答 欄	B	D	D	D	C	B	D	E	B	E

正解は上表のとおりであるが、以下に各設問の解法を略記する。

(1)…(B)

簿価$=v^5+0.07a_{\overline{5|}}$（利率は８％で評価）

$$=v^5+0.07\times\frac{1-v^5}{0.08}$$

第１年度の評価益＝簿価×0.08－0.07

$$=v^5\times0.08+(1-v^5)\times0.07-0.07$$

$$=v^5\times0.01$$

$$\fallingdotseq 0.006806$$

(2)…(D)

「出生率1.25％」より$\dfrac{l_0}{T_0}=0.0125$　　$\therefore T_0=80l_0$

「死亡数25,000人」より$l_0=25,000$

「41歳以上の人口が総人口の50％」より$\dfrac{T_{41}}{T_0}=0.5$　　$\therefore T_{41}=0.5T_0$

「41歳以上の人口の平均死亡率が2.40％」より$\dfrac{l_{41}}{T_{41}}=0.024$　　$\therefore l_{41}=0.024T_{41}$

Ⅰ. $T_0=80\times25,000=2,000,000$（正）

Ⅱ. $\mathring{e}_0=\dfrac{T_0}{l_0}=80$（正）

Ⅲ. $T_{41}=0.5T_0=1,000,000$, $l_{41}=0.024T_{41}=24,000$（正）

Ⅳ. $\dfrac{T_0-T_{41}-41l_{41}}{l_0-l_{41}}=\dfrac{16,000}{1,000}=16$（誤）

(3)…(D)

$\dfrac{d\log l_x}{dx}=-\mu_x$より$\log l_x=-\displaystyle\int\mu_x dx=\frac{1}{2}\log(121-x)+\log k$（kは定数）

これより $l_x=k\sqrt{121-x}$ ゆえ ${}_tp_x=\dfrac{l_{x+t}}{l_x}=\dfrac{\sqrt{121-(x+t)}}{\sqrt{121-x}}$

$\therefore\ {}_{45}p_{40}=\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

(4)…(D)

$$l_x=\exp\left(-\int\mu_x dx\right)=\exp\left(-\int (A+Hx)\ dx\right)$$

$$=\exp\left(-Ax-\frac{H}{2}x^2+C\right)=e^{-Ax}e^{-\frac{H}{2}x^2}e^c$$

$\begin{cases}a=e^{-A}\\ b=e^{-\frac{H}{2}}\end{cases}$ とおくと ${}_tp_x=\dfrac{a^{x+t}b^{(x+t)^2}e^c}{a^xb^{x^2}e^c}=a^tb^{2xt+t^2}$

(5)…(C)

$$\sum_{n=1}^{\omega-x}v^n{}_{n-1|}q_x\cdot s_{\overline{n|}}=\sum_{n=1}^{\omega-x}v^n\cdot{}_{n-1|}q_x\ (1+\ddot{s}_{\overline{n-1|}})\ =\sum_{n=1}^{\omega-x}v^n{}_{n-1|}q_x+\sum_{n=1}^{\omega-x}{}_{n-1|}q_x\cdot a_{\overline{n-1|}}$$

($\ddot{s}_{\overline{0|}}=a_{\overline{0|}}=0$ とする)

$$=A_x+\frac{1}{l_x}\sum_{n=1}^{\omega-x}\ (l_{x+n-1}-l_{x+n})\ a_{\overline{n-1|}}$$

ここで $\displaystyle\sum_{n=1}^{\omega-x}\ (l_{x+n-1}-l_{x+n})\ a_{\overline{n-1|}}=\sum_{n=1}^{\omega-x}\ \{l_{x+n-1}a_{\overline{n-1|}}-l_{x+n}\ (a_{\overline{n|}}-v^n)\}\ =\sum_{n=1}^{\omega-x}v^nl_{x+n}$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\omega-x}v^n\cdot{}_{n-1|}q_x\cdot s_{\overline{n|}}=A_x+a_x$$

(6)…(B)

(A) $A_x=v\ddot{a}_x-a_x$ より $P_x=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}=v-\dfrac{a_x}{\ddot{a}_x}$ (正)

(B) $A_{x:\overline{n|}}=v\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-a_{x:\overline{n-1|}}$ より $P_{x:\overline{n|}}=v-\dfrac{a_{x:\overline{n-1|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$ (誤)

(C) $A_x=1-d\ddot{a}_x$ より $P_x=\dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}=\dfrac{1}{\ddot{a}_x}-d=\dfrac{1}{1+a_x}-d$ (正)

(D) $A_{x:\overline{n|}}=1-d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ より $P_{x:\overline{n|}}=\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}-d$ (正)

(E) $A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}=\ddot{a}_{x:\overline{n+1|}}-\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ より $P_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1}=\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n+1|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}-1$ (正)

(7)…(D)

$$A_x = P_x \ddot{a}_x = 0.01682 \times 18.165 \fallingdotseq 0.30554,\ v = 1-d = 1-\frac{1}{\ddot{a}_x}+P_x \fallingdotseq 0.96177$$

$$A_x = v\ (p_x A_{x+1} + q_x)\ \text{より}\ A_{x+1} = \frac{1}{1-0.00771}\left(\frac{0.30554}{0.96177}-0.00771\right) = 0.31238\cdots$$

(8)…(E)

Xをこの確率変数とすると，一般に Var（X）＝E(X^2) － {E(X)}^{2} より

$$Var(X) = \{{}_np_x \cdot (v^n)^2 + {}_nq_x \cdot 0^2\} - ({}_np_x \cdot v^n)^2$$
$$= v^{2n} \cdot {}_np_x \cdot (1-{}_np_x)$$
$$= v^{2n} \cdot {}_np_x \cdot {}_nq_x$$

(9)…(B)

公式 $A_{x:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ を利用すれば，題意により

$$d\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m|}} = d\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - d\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = d\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - d\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m|}}$$

これより $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} = \frac{2}{3}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ ゆえに ${}_tV_{x:\overline{n|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{1}{3}$

(10)…(E)

${}_tV^{(k)}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq {}_tV_{x:\overline{n|}} + \frac{k-1}{2k} \cdot \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \cdot {}_tV^1_{x:\overline{n|}}$ より

$${}_tV^{(12)}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq 0.6324 + \frac{11}{24} \times \frac{1}{6.3185} \times 0.0452 \fallingdotseq 0.6357$$

2．(1) 給付現価をAとすると，

$$A = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_tp_x \cdot q_{x+t} \cdot a_{\overline{n-t|}} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{v^t}{l_x}\ (l_{x+t} a_{\overline{n-t|}} - l_{x+t+1} a_{\overline{n-t|}})$$

$1 \leqq t \leqq n-1$ で $a_{\overline{n-t|}} = v + v a_{\overline{n-t-1|}}$ ($a_{\overline{0|}} = 0$ とする) により，

$$A = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{D_x}\ (D_{x+t} a_{\overline{n-t|}} - D_{x+t+1} - D_{x+t+1} a_{\overline{n-t-1|}})$$

$$= \frac{1}{D_x}\ \{(D_x a_{\overline{n|}} - D_{x+1} - D_{x+1} a_{\overline{n-1|}})$$
$$+\ (D_{x+1} a_{\overline{n-1|}} - D_{x+2} - D_{x+2} a_{\overline{n-2|}})$$
$$+\cdots$$
$$+\ (D_{x+n-2} a_{\overline{2|}} - D_{x+n-1} - D_{x+n-1} a_{\overline{1|}})$$
$$+\ (D_{x+n-1} a_{\overline{1|}} - D_{x+n})\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\ (D_x a_{\overline{n}|}-\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t+1})$$

$$=a_{\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}$$

(2) 保険料を P，第 t 保険年度末責任準備金を ${}_tV$ とすると，

$$P=\frac{a_{\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$${}_tV=a_{\overline{n-t}|}-a_{x+t:\overline{n-t}|}-P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

である。

ところで，$A^{1}_{x:\overline{n}|}=v\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}$ より $P^{1}_{x:\overline{n}|}=v-\dfrac{a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

$$\therefore\ \frac{a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=v-P^{1}_{x:\overline{n}|}$$

同様に $\dfrac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}=v-P^{\ \,1}_{x+t:\overline{n-t}|}$

であるから，

$${}_tV=\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\left(\frac{a_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}-\frac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}-\frac{a_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}+\frac{a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

$$=\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\left(\frac{a_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}+P^{\ \,1}_{x+t:\overline{n-t}|}-\frac{a_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-P^{1}_{x:\overline{n}|}\right)$$

これは $\dfrac{a_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}+P^{\ \,1}_{x+t:\overline{n-t}|}<\dfrac{a_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}+P^{1}_{x:\overline{n}|}$ のときは負値となる。

3．(1)求める保険料を P_x とすると，次式が成立する。

$$P_x\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=A_x+P_x\ (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}+n\cdot P_x\cdot A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \,1}$$

$$\therefore P_x=\frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}-n\cdot A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \,1}}=\frac{M_x}{N_x-N_{x+n}-(R_x-R_{x+n}-n\cdot M_{x+n})-n\cdot D_{x+n}}$$

(2) ${}_tV_x^{\,R}$ を過去法，${}_tV_x^{\,P}$ を将来法の責任準備金とすると

$${}_tV_x^{\,R}=\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot P_x\cdot\ddot{a}_{x:\overline{t}|}-\frac{D_x}{D_{x+t}}P_x\cdot(IA)^{1}_{x:\overline{t}|}-\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot A^{1}_{x:\overline{t}|}$$

$$=P_x\cdot\frac{N_x-N_{x+t}-(R_x-R_{x+t}-t\cdot M_{x+t})}{D_{x+t}}-\frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$${}_tV_x^{\,P}=A_{x+t}+\sum_{s=1}^{n-t}\frac{(t+s)\cdot P_x\cdot C_{x+t+s-1}}{D_{x+t}}+n\cdot P_x\cdot A_{x+t:\overline{n-t}|}^{\qquad\ 1}-P_x\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

$$=\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}}+P_x\frac{t(M_{x+t}-M_{x+n})+R_{x+t}-R_{x+n}-(n-t)M_{x+n}}{D_{x+t}}+P_x\frac{n\cdot D_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$-P_x\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$=P_x\cdot\frac{(R_{x+t}-R_{x+n}-n\cdot M_{x+n}+t\cdot M_{x+t})+n\cdot D_{x+n}-(N_{x+t}-N_{x+n})}{D_{x+t}}+\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

となる。そこで，辺々差引すると，

$${}_tV_x{}^R-{}_tV_x{}^P=P_x\cdot\frac{N_x-N_{x+n}-(R_x-R_{x+n}-n\cdot M_{x+n})-n\cdot D_{x+n}}{D_{x+t}}-\frac{M_x}{D_{x+t}}$$

となるので，(1)で求めた P_x をこれに代入する。

$${}_tV_x{}^R-{}_tV_x{}^P=\frac{M_x}{D_{x+t}}-\frac{M_x}{D_{x+t}}=0\quad\therefore {}_tV_x{}^R={}_tV_x{}^P$$

以　上