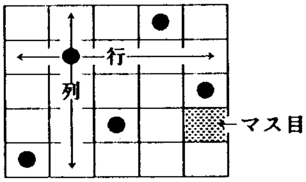
数　学　1（問題）

1．次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。（５０点）

（1）２つの確率変数　X，Y　が互いに独立で，それぞれ　［０，１］，［１，２］　上の一様分布に従うとき，　$P(XY>1)=$ $\boxed{}$ 。

（2）タテ，ヨコそれぞれｎ（ｎ≧３）のマス目がある。いま，このマス目の中にｍ個の石（ｍ≦ｎ）を重複せずに無作為に入れていくとき，どの列どの行をとっても２つ以上の石が入らない確率は $\boxed{}$ である。



（3）
$$f(x,\ y)=\begin{cases} C\dfrac{1-x^2}{1+y^2} & (|x|\leqq 1,\ |y|\leqq 1,\ C\text{は定数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$
を同時確率密度関数とする２次元確率変数（Ｘ，Ｙ）があるとき，　$C=$ $\boxed{}$ 。

（4）３つの箱　Ａ，Ｂ，Ｃ　のなかにそれぞれ白玉３個，白玉２個と赤玉１個，赤玉３個が入っている。３つの箱から１つを選んでそこから玉を１個取り出したところ，赤玉であった。このとき選んだ箱がＣである確率は $\boxed{}$ である。

（5）互いに独立な確率変数　X_1, X_2, X_3　の積率母関数を，それぞれ　$\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta)$　とするとき，確率変数　$Y=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+b$　（a_1, a_2, a_3, bは定数）　の積率母関数は，$\boxed{}$ である。

（6）確率変数　X_1, X_2　の結合確率分布が以下のとおり定義されている。

$$P\{X_1=1,\ X_2=1\}=\frac{n(n-1)}{N(N-1)},\quad P\{X_1=1,\ X_2=0\}=\frac{n(N-n)}{N(N-1)},$$
$$P\{X_1=0,\ X_2=1\}=\frac{n(N-n)}{N(N-1)},\quad P\{X_1=0,\ X_2=0\}=\frac{(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}.$$

このとき，共分散　$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)=$ $\boxed{}$ 。ただし，$N-1>n>1$　とする。

（7）確率変数　Ｘ　は，確率密度関数　$f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$　（$-\infty<x<\infty$）　をもつ。

このとき，$Y=X^2$ の確率密度関数
$$g(y)=\begin{cases} \boxed{} & (y\geqq 0) \\ 0 & (y<0) \end{cases}.$$

（8）２つの状態０，１をとるマルコフ連鎖　$\{X_n;\ n=0, 1, 2, \cdots\}$　がある。その推移確率は，
$p_{00}=1-p$，$p_{01}=p$，$p_{10}=q$，$p_{11}=1-q$　（$0<p<1$，$0<q<1$，$p+q\neq 1$）
とする。このとき　$P(X_1=0\mid X_0=0,\ X_2=0)=$ $\boxed{}$ 。

(9) 確率変数 X は，次の確率密度関数をもつとする。

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ \dfrac{1}{\sigma}\exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} & (m \leqq x < \infty)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

このとき，平均値 E(X) = $\boxed{}$ ， 分散 V(X) = $\boxed{}$ 。

2. (1) 1台の公衆電話の前に，n人の人が並んでいて，1人の通話時間は平均2分の指数分布に従っている。いま，n＋1人目の人が列に加わったとして，この人の待ち時間の分布の確率密度関数を $n \geqq 1$ の場合について求めよ。ただし，各人の通話時間は互いに独立であり，待ち時間はn人の通話時間の和とする。

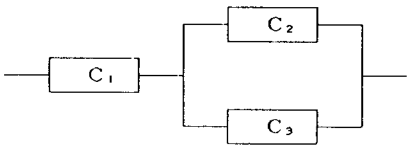
(2) 上記の公衆電話の前に並んでいる人数をNとして，Nが次の分布に従うとする。

$$P(N=n)=\frac{2^n}{3^{n+1}} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

新たに，この列に加わった人の待ち時間の分布を求めよ。ただし，Nと通話時間は独立とする。

（25点）

3. 右図のように，C_1，C_2，C_3 のユニットが連結して稼働しているシステムがある。このシステムは，C_1 が故障すると稼働しなくなるが，C_2，C_3 については，どちらか一方が故障しても，C_1 が故障をしない限り稼働することができるという。いま，C_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ の寿命を表す確率変数 X_i がそれぞれ平均 $\dfrac{1}{\lambda_i}$ の指数分布に従い，互いに独立であるとき，このシステムの平均寿命を求めよ。$(\lambda_i>0,\ i=1,\ 2,\ 3)$



（25点）

数学Ⅰ （解答例）

1. (1) $P(XY>1)=\displaystyle\iint_{xy>1} f(x)\,g(y)\,dx\,dy$

$u=xy$，$v=y$とおくと

$$=\int_1^2\int_1^v \left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| du\,dv$$

$$=\int_1^2\int_1^v \frac{1}{v}\,du\,dv$$

$$=\int_1^2 \frac{v-1}{v}\,dv$$

$$=\boxed{1-\log 2}$$

(2) m個の石の置き方は置く順序も考慮すると，

$$\prod_{i=0}^{m-1}(n^2-i)\quad\text{通り}$$

一方，どの列，どの行も複数の石が入らないように置くには置いた石を含む行，列を除いたマス目に置く必要があるから

最初の石の置き方　n^2　通り

第2番目の石の置き方　$(n-1)^2$　通り

⋮

第i番目の石の置き方　$(n-i+1)^2$　通り

つまり　m個の石の置き方は　$\displaystyle\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)^2$

以上から求める確率は　$\boxed{\dfrac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)^2}{\prod_{i=0}^{m-1}(n^2-i)}}$

(3) $$1=C\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{1+y^2}\,dx\,dy=4C\int_0^1(1-x^2)\,dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$=4C\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\left[\tan^{-1}y\right]_0^1=4C\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi C$$

$$C=\boxed{\frac{3}{2\pi}}$$

(4) ベイズの定理を用いて

$$P(C\mid 赤)=\frac{P(C)\ P(C|赤)}{P(A)\ P(A|赤)+P(B)\ P(B|赤)+P(C)\ P(C|赤)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

(5) $Y=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+b$ の積率母関数 $\Phi(\theta)$ は

$$\Phi(\theta)=E(e^{\theta Y})=E(e^{\theta(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\alpha_3X_3+b)})$$

$$=E(e^{\theta\alpha_1X_1}\ e^{\theta\alpha_2X_2}\ e^{\theta\alpha_3X_3}\ e^{\theta b})$$

($e^{\theta\alpha_1X_1}$, $e^{\theta\alpha_2X_2}$, $e^{\theta\alpha_3X_3}$ は互いに独立)

$$=E(e^{\theta\alpha_1X_1})E(e^{\theta\alpha_2X_2})E(e^{\theta\alpha_3X_3})E(e^{\theta b})$$

$$=\boxed{\phi_1(\alpha_1\theta)\phi_2(\alpha_2\theta)\phi_3(\alpha_3\theta)e^{\theta b}}$$

(6)

$$P\{X_1=1,X_2=1\}+P\{X_1=1,X_2=0\}+P\{X_1=0,X_2=1\}+P\{X_1=0,X_2=0\}$$

$$=\frac{n(n-1)+n(N-n)+n(N-n)+(N-n)(N-n-1)}{N(N-1)}=1$$

X_1 の周辺分布は，$P(X_1=1)=P\{X_1=1,X_2=1\}+P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{n}{N}$

$$P(X_1=0)=1-P(X_1=1)=\frac{N-n}{N}$$

X_2 の周辺分布は，$P(X_2=1)=P\{X_1=1,X_2=1\}+P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{n}{N}$

$$P(X_2=0)=1-P(X_2=1)=\frac{N-n}{N}$$

$E(X_1)=\frac{n}{N}$ ，$E(X_2)=\frac{n}{N}$ ，$E(X_1X_2)=1\cdot 1\cdot P\{X_1=1,X_2=1\}$

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E(X_1\cdot X_2)-E(X_1)-E(X_2)=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}-\left(\frac{n}{N}\right)^2$$

$$=\frac{1}{N^2(N-1)}\{nN(n-1)-n^2(N-1)\}=\boxed{\frac{n(n-N)}{N^2(N-1)}}$$

(7)

Yの分布関数　$G(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)\,dt & (y>0)\\ 0 & (y\leqq 0)\end{cases}$

$y>0$　で，Yの密度関数

$$g(y)=\frac{d}{dy}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(t)\,dt=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left\{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})\right\}$$

$$=\boxed{\frac{1}{\pi(1+y)\sqrt{y}}}$$

(8) $$P(X_1=0\mid X_0=0,\ X_2=0)=\frac{P(X_0=0,\ X_1=0,\ X_2=0)}{P(X_0=0,\ ,\ X_2=0)}$$

$$=\frac{P(X_0=0,\ X_1=0,\ X_2=0)}{P(X_0=0,\ X_1=0,\ X_2=0)+P(X_0=0,\ X_1=0,\ X_2=0)}$$

$$=\frac{P(X_0=0)\cdot(1-p)^2}{P(X_0=0)\cdot(1-p)^2+P(X_0=0)\,pq}=\boxed{\frac{\cdot(1-p)^2}{\cdot(1-p)^2+pq}}$$

(9) $E(X) = \int_m^\infty x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$= \int_m^\infty (x-m) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$+ \int_m^\infty m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$= \left[-\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)}{2\sigma^2}\right\}^2\right]_m^\infty + m\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$

$= \boxed{\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} + m}$

$E(X^2) = \int_m^\infty x^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$= \int_m^\infty (x-m)^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$+ 2m \int_m^\infty (x-m) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$+ m^2 \int_m^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$= \left[-(x-m)\,\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}\right]_m^\infty$

$+ \int_m^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \sigma \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dx$

$+ 2m\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma + m^2$

$= 2m\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma + \sigma^2 + m^2$

$V(X) = \boxed{\sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}$

2. (1)　n人の通話時間の和の確率密度関数を　$f_n(x)$ とおく。

$$f_1(x) = f(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \qquad (x>0)$$

$$f_2(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-y}{2}\right)dy = \frac{1}{2^2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\int_0^x dy = \frac{x}{2^2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$f_3(x) = \int_0^x \frac{y}{2^2}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\cdot\cdot\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-y}{2}\right)dy = \frac{1}{2^3}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\int_0^x y\,dy = \frac{1}{2^3}\frac{x^2}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$f_{n-1}(x) = \dfrac{x^{n-2}}{2^{n-1}(n-2)!}\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)$　とすると，

$$f_n(x) = \int_0^x \frac{y^{n-2}}{2^{n-1}(n-2)!}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x-y}{2}\right)dy$$

$$= \frac{1}{2^n}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\int_0^x \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}dy = \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

(2) 求める分布の確率密度関数を　$h(y)$　とおくと，

$$h(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}\frac{y^{n-1}}{2^n(n-1)!}\exp\left(-\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{9}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{y}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{9}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\exp\left(\frac{y}{3}\right) = \frac{1}{9}\exp\left(-\frac{y}{6}\right) \qquad (y>0)$$

$$P(0<Y<y) = \int_0^y h(x)\,dx = \frac{1}{9}\int_0^y \exp\left(-\frac{x}{6}\right)dx = \frac{2}{3}\left(1-\exp\left(-\frac{y}{6}\right)\right)$$

$$P(Y=0) = P(N=0) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} P(Y<y) = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(1-\exp\left(-\dfrac{y}{6}\right)\right) \\ P(Y=0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

3. このシステムの寿命を表わす確率変数をZとするとき，

$$Z = \min\{X_1, \max\{X_2, X_3\}\}$$

$$\begin{aligned} P(Z<x) &= 1-P(Z\geq x) = 1-P(X_1\geq x)P(\max\{X_2\ X_3\}\geq x) \\ &= 1-P(X_1\geq x)\{1-P(\max\{X_2\ X_3\}<x)\} \\ &= 1-P(X_1\geq x)\{1-P(X_2<x)P(X_3<x)\} \\ &= 1-e^{-\lambda_1 x}\{1-(1-e^{-\lambda_2 x})(1-e^{-\lambda_3 x})\} \\ &= 1-e^{-\lambda_1 x}\{e^{-\lambda_2 x}+e^{-\lambda_3 x}-e^{-(\lambda_2+\lambda_3)x}\} \\ &= 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}-e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x}+e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x} \qquad (x>0) \end{aligned}$$

$$E(Z) = \int_0^\infty x\{(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}+(\lambda_1+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_3)x}-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x}\}dx$$

$$= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_1+\lambda_3}-\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$