数学 1（問題）

1．　次の各問の $\boxed{}$ に入る答のみを，所定の解答用紙に記入せよ。　　（各問５点，計50点）

(1) 確率変数 X_1, X_2 が独立で，パラメータ p の同じ幾何分布

$P(X=i)=pq^i$　$(i=0,1,2,\cdots;\ q=1-p)$　に従うとき，

$P(X_2=j \mid X_1+X_2=k)=\boxed{}$

$(k=0,1,2,\cdots;\ j=0,1,2,\cdots,k)$ である。

(2) 確率密度関数が次の式で与えられる分布の積率母関数は，

$m(\theta)=\boxed{}$　（ここに，$|\theta|<\alpha$）　である。

$f(x)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|x|}$　$(\alpha>0,\ -\infty<x<\infty)$

(3) サイコロをn回（$n\geqq 2$）振って１の目が出る回数をX，６の目が出る回数をYとするとき，共分散 $Cov(X,Y)=\boxed{}$ である。

(4) いま，２つの袋A，Bがあり，Aの中には赤球２個と白球３個，Bの中には赤球１個と白球１個が入っている。A，Bから任意に１球ずつ取り出し交換するという操作を３回行った後，Aの中が赤玉１個と白玉４個となる確率は $\boxed{}$ である。

(5) 事象A，Bが独立で，$P(A)=p_a$，$P(B)=p_b$ であるとき，

$P\{(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\}=\boxed{}$

(6) 硬貨をn回投げたとき，表の出る回数をXとする。$\left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqq 0.05$ となる確率を0.01以下にするためには，$n\geqq\boxed{}$ とすればよい。チェビシェフの不等式を用いて計算せよ。

(7) 年間の入院件数は平均値λのポアソン分布に従い，入院したときの入院者の年齢が60歳以上である確率は p とする。60歳以上で入院する人が年間k人である確率は $\boxed{}$ である。
$(k=0,1,2,\cdots\cdots)$

(8) 平均値０，分散１の正規分布に従う確率変数Xのr次の絶対モーメント $E(|X|^r)$ をΓ関数を用いて表すと $\boxed{}$ となる。

(9) 確率変数 X_i　$(i=1,2,3,\cdots\cdots)$　は互いに独立で共に次の確率密度関数をもつ指数分布に従う。

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

$Y_n=\min(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n)$　とする。

このとき，$\lim_{n\to\infty}P\{Y_n>\log(1+\frac{1}{n})\}=\boxed{}$

(10) X_1，X_2 は共に平均値０，分散１の正規分布に，Yは平均値λ（$\lambda>0$）のポアソン分布に従う。X_1，X_2，Y は互いに独立とするとき，

$$Z=\begin{cases}\min(X_1,X_2) & (X_1^2+X_2^2>Y)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

により確率変数Zを定める。このとき，$P(Z>0)=\boxed{}$

2．　確率変数　X，Yの同時密度関数が，

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (-|x| \leqq y \leqq |x|,\ |x| \leqq 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるとき，

(1) X，Yの周辺密度関数を計算せよ。

(2) 共分散　Cov(X，Y)　を求めよ。

(3) X，Yの独立性の有無について考察せよ。　（25点）

3．　X，Yは確率変数，$P(X=k) = qp^k$　$(0 < p < 1,\ q = 1-p,\ k = 0, 1, 2, \cdots)$

$X=k$　のとき，Yは $[0, 2^k]$ の上の一様分布とする。

(1) $P(n \leqq Y < n+1 \mid X=k)$　を求めよ。ただし，$k, n = 0, 1, 2, \cdots$

(2) 自然数 n_0 を固定し，k_0 を　$2^{k_0} \geqq n_0 + 1$　をみたす最小の自然数とする。このとき，

$P(X=k_0 \mid n_0 \leqq Y < n_0 + 1)$　を求めよ。　（25点）

数学1　（解答例）

1．（1）

$$P(X_1+X_2=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i,\ X_2=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}P(X_1=i)P(X_2=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}pq^{i}pq^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}p^2q^k$$
$$=p^2q^k\sum_{i=0}^{k}1\quad=(k+1)p^2q^k$$

$$P(X_1+X_2=k,\ X_2=j)=P(X_1=k-j)P(X_2=j)$$
$$=pq^{k-j}pq^{j}=p^2q^k$$

$$P(X_2=j\mid X_1+X_2=k)=\frac{P(X_1+X_2=k,\ X_2=j)}{P(X_1+X_2=k)}$$
$$=\frac{p^2q^k}{(k+1)p^2q^k}$$
$$=\boxed{\frac{1}{k+1}}$$

（2）

$$m(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}f(x)\,dx\quad=\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}e^{-\alpha|x|}\,dx$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0}e^{(\theta+\alpha)x}\,dx\ +\ \int_{0}^{\infty}e^{(\theta-\alpha)x}\,dx\right\}$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left\{\left[\frac{1}{\theta+\alpha}e^{(\theta+\alpha)x}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{1}{\theta-\alpha}e^{(\theta-\alpha)x}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$
$$=\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{1}{\theta+\alpha}-\frac{1}{\theta-\alpha}\right\}\quad=\boxed{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\theta^2}}\qquad(|\theta|<\alpha)$$

（3）X，Yは共に2項分布 Bin（n，$\frac{1}{6}$）に従うから，

$$E(X)=E(Y)=\frac{n}{6}$$
$$E(XY)=\sum_{i,j}ij\,P(X=i,\ Y=j)$$
$$=\sum_{i+j+k=n}\left\{ij\frac{n!}{i!\,j!\,k!}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{j}\left(\frac{4}{6}\right)^{k}\right\}$$
$$=\frac{n(n-1)}{36}\sum_{i+j+k=n}\left\{\frac{(n-2)!}{(i-1)!\,(j-1)!\,k!}\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{j-1}\left(\frac{4}{6}\right)^{k}\right\}$$

（$s=i-1$，$t=j-1$　とおく）

$$=\frac{n(n-1)}{36}\sum_{s+t+k=n}\left\{\frac{(n-2)!}{s!\,t!\,k!}\left(\frac{1}{6}\right)^{s}\left(\frac{1}{6}\right)^{t}\left(\frac{4}{6}\right)^{k}\right\}\quad=\quad\frac{n(n-1)}{36}$$

（多項定理より）

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=\frac{n(n-1)}{36}-\frac{n}{6}\cdot\frac{n}{6}\quad=\boxed{-\frac{n}{36}}$$

(4) 全部で赤玉3個，白玉4個で，Aに5個，Bに2個の玉が入っているのだから，Aの中の赤玉は1，2，3個のいずれか。3次正方行列 P を，その (i, j) 成分を，1回の交換でAの中の赤玉が i 個から j 個になる確率とすると，求める確率は P^3 の(2，1)成分。

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{2} & \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{2} & 0 \\ \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} & \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} & \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{2} & \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{2} \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} 0.152 & 0.584 & 0.264 \\ 0.146 & 0.569 & 0.285 \\ 0.132 & 0.570 & 0.298 \end{bmatrix}$$

$\boxed{0.146}$

(5) $P\{(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\}$

$=P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)-P(A\cap B^c\cap A^c\cap B)$

$=P(A)P(B^c)+P(A^c)P(B)-P(\phi)$

$=p_a(1-p_b)+(1-p_a)p_b-0$

$=\boxed{p_a+p_b-2p_ap_b}$

(6) Xは2項分布 $Bin(n, \frac{1}{2})$ に従うので $E(\frac{X}{n})=\frac{1}{2}$ ，$V(\frac{X}{n})=\frac{1}{4n}$ ．
チェビシェフの不等式から

$$P\left(X \,\middle|\, \left|\frac{X}{n}-\frac{1}{2}\right|\geqq 0.05\right) \leqq \frac{1}{0.05^2}V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{0.05^2\times 4n}$$

$\frac{1}{0.05^2\times 4n} \leqq 0.01$ を解いて $n\geqq \boxed{10{,}000}$

(7) 年間の入院件数を表わす確率変数を N とし，60歳以上の人の年間の入院件数を表わす確率変数をXとする。このとき，仮定より，

$$P(N=n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P(X=k\mid N=n)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{ただし，} k\leqq n.$$

となる。

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(X=k, N=n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N=n)P(X=k\mid N=n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\{\lambda(1-p)\}^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} = \boxed{e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}} \qquad (k=0, 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

(8)
$$E(|X|^r)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^r\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^r\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$\left(\frac{x^2}{2}=t \text{ とおけば, } x\,dx=dt\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(2t)^{\frac{r-1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=\frac{2^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^{\frac{r-1}{2}}e^{-t}dt$$

$$=\boxed{\frac{2^{\frac{r}{2}}\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}}$$

(9)
$$P(X_i>r)=\int_r^{\infty}f(x)\,dx=\int_r^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\Big[-e^{-\lambda x}\Big]_r^{\infty}=e^{-\lambda r}\qquad(i=1,2,\cdots)$$

$$P(Y_n>r)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>r)=(e^{-\lambda r})^n=(e^r)^{-n\lambda}$$

$$P\{Y_n>\log(1+\frac{1}{n})\}=[\exp\{\log(1+\frac{1}{n})\}]^{-n\lambda}=\{(1+\frac{1}{n})^n\}^{-\lambda}$$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ だから, $\lim_{n\to\infty}P\{Y_n>\log(1+\frac{1}{n})\}=\boxed{e^{-\lambda}}$

(10)
$$Z_k=\begin{cases}\min(X_1,\ X_2) & (X_1^2+X_2^2>k)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

とおく。

$$P(Z_k>0)=P(X_1^2+X_2^2>k,\ X_1>0,\ X_2>0)$$

$$=\int_{x_1^2+x_2^2>k,\ x_1>0,\ x_2>0}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)dx_1\,dx_2$$

$(x_1=r\cos\theta\ ,\ x_2=r\sin\theta$ とおく$)$

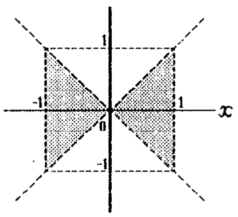
$$=\int_{0<\theta<\frac{\pi}{2},\ r>\sqrt{k}}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)\right]_{\sqrt{k}}^{\infty}=\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{k}{2}\right)$$

$$P(Z>0)=\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=k)\cdot P(Z_k>0)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{k}{2}\right)$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{-\frac{1}{2}})^k}{k!}=\boxed{\frac{1}{4}\exp\{\lambda(e^{-\frac{1}{2}}-1)\}}$$

2.



$f(x, y)$は░で$\frac{1}{2}$ ，その他で0

(1) X： $f_x(x) = \int_{-|x|}^{|x|} \frac{1}{2}\,dy = |x|$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 0 （それ以外）

Y： $f_y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx - \int_{-|y|}^{|y|} \frac{1}{2}\,dx = 1 - |y|$ $(-1 \leqq y \leqq 1)$

$= 0$ （それ以外）

(2) $E(XY) = \int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-|x|}^{|x|} \frac{xy}{2}\,dy \right\} dx = \int_{-1}^{1} x \left\{ \int_{-|x|}^{|x|} \frac{y}{2}\,dy \right\} dx$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4} x \left\{ |x|^2 - (-|x|)^2 \right\} dx = \int_{-1}^{1} 0\,dx = 0$

$E(X) = 0$ ， $E(Y) = 0$ （∵被積分関数が奇関数だから）

$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

(3) XとYが独立であるためには，

$\forall x \forall y \quad f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

となることが必要十分。ところが，

$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ で，$f_x(x) f_y(y) = x(1-y)$ となり，

例えば $x = 0.2$ ，$y = 0.1$ のとき，

$f_x(0.2) \cdot f_y(0.1) = 0.2 \times 0.9 = 0.18 \neq 0.5 = f(0.2, 0.1)$ であるから，

$f_x(x) f_y(y)$ と $f(x, y)$ が一致しないので，XとYは独立ではない。

なお，これは $Cov(X, Y) = 0$ でもXとYが独立とならない例である。

3．確率変数 Y_k ($k=0, 1, 2, \cdots$) を，区間 $[0, 2^k]$ 上の一様分布とする。

nを自然数とするとき，2^k は自然数だから $n+1 \leqq 2^k$ または $n \geqq 2^k$ のいずれかしかありえない。よって，

$$P(n \leqq Y_k < n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & (n+1 \leqq 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

$$P(X=k \text{ かつ } n \leqq Y < n+1) = P(X=k) \cdot P(n \leqq Y_k < n+1)$$

(1) $P(n \leqq Y < n+1 \mid X=k) = \dfrac{P(X=k \text{ かつ } n \leqq Y < n+1)}{P(X=k)}$

$$= P(n \leqq Y_k < n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & (n+1 \leqq 2^k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

(2) $P(n_0 \leqq Y < n_0+1)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) \cdot P(n_0 \leqq Y_k < n_0+1)$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} P(X=k) \frac{1}{2^k}$$

$$= \sum_{k=k_0}^{\infty} P(X=k_0)\, p^{k-k_0} \frac{1}{2^k}$$

$$= \sum_{k'=0}^{\infty} P(X=k_0)\, p^{k'} \frac{1}{2^{k'+k_0}} \qquad (k'=k-k_0)$$

$$= P(X=k_0) \frac{1}{2^{k_0}} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{p}{2}\right)^{k'} = P(X=k_0) \frac{1}{2^{k_0}} \quad \frac{2}{2-p}$$

一方，

$$P(X=k_0 \text{ かつ } n_0 \leqq Y < n_0+1)$$

$$= P(X=k_0) \cdot P(n_0 \leqq Y_{k_0} < n_0+1)$$

$$= P(X=k_0) \frac{1}{2^{k_0}} \qquad (n_0+1 \leqq 2^{k_0} \text{だから})$$

以上から，$P(n_0 \leqq Y < n_0+1) = P(X=k_0 \text{ かつ } n_0 \leqq Y < n_0+1) \dfrac{2}{2-p}$

$$P(X=k_0 \mid n_0 \leqq Y < n_0+1) = \frac{P(X=k_0 \text{ かつ } n_0 \leqq Y < n_0+1)}{P(n_0 \leqq Y < n_0+1)} = 1 - \frac{p}{2}$$