年金数理（問題）

（各問　２０点）

１．次の（１）～（５）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しいものを一つ選んで、所定の解答用紙に、その記号（（Ａ）から（Ｅ）のうちいずれか一つ）を記入せよ。

（１）$\mathring{e}_x = 0.8(75-x)$ とするとき、l_x は次のうちのうちどれか。ただし、$l_0 = 100{,}000$ とする。

（Ａ）$100{,}000 \times (1 - x/75)$　　（Ｂ）$100{,}000 \times (1 - x/75)^2$

（Ｃ）$100{,}000 \times \{1 - (x/75)^2\}$　　（Ｄ）$100{,}000 \times (1 - x/75)^{1/4}$

（Ｅ）$100{,}000 \times \{1 - (x/75)^{1/2}\}$

（２）$1/a_{\overline{n}|} - 1/s_{\overline{n}|}$ に等しいのは次のうちのどれか。

（Ａ）d　（Ｂ）i　（Ｃ）i/v　（Ｄ）d/v　（Ｅ）$1/v$

（３）死力が年齢に関係なく定数ｃに等しいとき、$\bar{a}_x$ を表す式は次のうちどれか。ただし、δ は利力とする。

（Ａ）$1/(\delta - c)$　（Ｂ）$1/(c - \delta)$　（Ｃ）$1/(\delta + c)$

（Ｄ）c/δ　（Ｅ）$\delta/(1 + c)$

（４）二種類の生命表Ａ、Ｂによる計算基数をそれぞれ $\{D_x^A ; N_x^A\}$、$\{D_x^B ; N_x^B\}$　$(x = x_e, \cdots, x_\omega)$ とする。いま、ｙ＜ｚとし、ｙ歳時点におけるｚ歳支給開始の期初払い終身年金現価率を求めたい。受給待期中は生命表Ａ、支給開始後は生命表Ｂによるものとすると、求める現価率は次のうちのどれか。

（Ａ）$(D_z^B \cdot N_z^B)/(D_y^A \cdot D_z^A)$　（Ｂ）$(D_z^A \cdot N_z^B)/(D_y^A \cdot D_z^B)$

（Ｃ）$(D_z^B \cdot N_z^B)/(D_y^B \cdot D_z^A)$　（Ｄ）N_z^B / D_y^A　（Ｅ）N_z^B / D_y^B

（５）ある年金制度の制度発足後の最初の年度に関して、次のことが分かっている。この制度の初年度の年間保険料は次のうちのどれか。

年初の年金資産	０，	年初の過去勤務債務	１００，	給付金	５，
年末の責任準備金	１２５，	年末の年金資産	４７，	利息収入	４，
過去勤務債務償却額	２０，				

（Ａ）４２　（Ｂ）４４　（Ｃ）４６　（Ｄ）４８　（Ｅ）５０

２．次の文章は財政方式について述べたものである。（　）内に補充すべき語句を番号に対応させて記入せよ。

・事前積立方式のうち平準積立方式に属する財政方式としては、（　①　）、（　②　）、（　③　）、（　④　）の四つがあげられる。

・（　①　）は、制度に加入してくる標準的な被保険者について必要な費用を、平準的な保険料により算出し、在職中の被保険者全員に対し（　⑤　）として一律に適用し、積立不足分は別途（　⑥　）として一定の期間にわたり償却する方式である。

・（　②　）は、個々の被保険者がそれぞれ給付に要する費用を、被保険者期間にわたり平準的に積み立てる方式である。（　⑦　）においては、積立金は（　①　）による（　⑧　）と（　⑨　）年度期初に一致する。ここで x_e は新規加入者の加入時年齢、x_r は定年年齢である。

・（　③　）は、在職中の被保険者について、全員が退職するまでの間に必要な給付費用を、平準的な保険料として積み立てる方法である。保険料は、（　①　）による（　⑤　）に、未償却の（　⑩　）の償却費用を加えたものに分解できる。保険料を一定期間毎に見直すことにより、積立金は（　①　）の（　⑧　）に収束する。

3．ある年金制度は既に定常人口状態になっているものとする。
期初の加入者の総数をL、脱退残存表による x 歳の加入者数を l_x 、$\varepsilon_x = (\sum_{y=x}^{r-1} l_y) / l_x$ （ここで、rは定年年齢）とする。次の各問に答えよ。

（1）毎年期初に x_0 歳で新規加入があるとした場合、毎年の新規加入者数を求めよ。

（2）毎年期初に x_1 歳と x_2 歳で３：１の割合で新規加入があるとした場合、それぞれの年齢の毎年の新規加入者数を求めよ。

（3）上記（2）の場合にこの年金制度を加入年齢方式で運営したとする。標準保険料率を決定するために加入年齢 x_1 歳を用いた場合、毎年発生する後発過去勤務債務の額を示せ。
ここで、$x_1 < x_2$ とし、制度内容はＴｒｏｗｂｒｉｄｇｅのモデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）によるものとする。

4．年金が年６回期末払い、かつ、死亡の際死亡した日の属する月までの給付が支払われる場合の終身年金現価率は計算基数を用いて

$${}^{(12)}a_x^{(6)} = (N_x - 7/12 \cdot D_x + 1/8 \cdot \overline{M}_x) / D_x$$

と表せることを証明せよ。

5．定年退職者のみに対し、定年ｒ歳時より終身年金（年金年額を α とし、年１回期初払い）を給付する年金制度において、財政方式を退職時年金現価積立方式によるものとすれば、定常状態における積立金Ｆは次式で表せることを示せ。

$$F = \alpha \times l_r \times (e_r - a_r) / d \qquad \text{ただし、} \quad e_r = (\sum_{t=1}^{w-r} l_{r+t}) / l_r \qquad \text{とする。}$$

年金数理（解答例）

1.

問題番号	正　　解
(1)	(D)
(2)	(B)
(3)	(C)
(4)	(B)
(5)	(D)

正解は上記のとおりであるが，以下に解法を略記する。

(1)　$\mathring{e}_x=60-0.8x$

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx}=-0.8$$

一方，
$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\int_x^\infty l_y\cdot dy}{l_x}\right)$$

$$=\frac{-l_x^2-\frac{dl_x}{dx}\cdot\int_x^\infty l_y\cdot dy}{l_x^2}$$

$$=\mathring{e}_x\cdot\mu_x-1$$

$$\therefore\quad \mu_x=\frac{1}{300-4x}$$

$$l_x=l_0\cdot\exp\left\{-\int_0^x\mu_y dy\right\}$$

$$=l_0\cdot\exp\left[\frac{1}{4}\log(300-4x)\right]_0^x$$

$$=100{,}000\times\left(\frac{300-4x}{300}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$=100{,}000\times\left(1-\frac{x}{75}\right)^{\frac{1}{4}}$$

よって正解は(D)

(2)

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-v^n}{i} \quad , \quad S_{\overline{n|}}=\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad より$$

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{S_{\overline{n|}}}=\frac{i}{1-v^n}-\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$=\frac{i\times(1+i)^n}{(1+i)^n-1}-\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$=\frac{i\times\{(1+i)^n-1\}}{(1+i)^n-1}=i$$

よって正解は(B)

なお，(D)の d/v も i に変形できるので(D)も正解とした。

(3) $\mu_x=-\dfrac{d\log l_x}{dx}=c$ 　より　$l_x=l_0\cdot e^{-cx}$

$$\therefore \quad {}_tp_x=\frac{l_{x+t}}{l_x}=e^{-ct} \quad となる。$$

$$\bar{a}_x=\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_x dt=\int_0^\infty (ve^{-c})^t dt$$

$$=\left[\frac{(ve^{-c})^t}{\log(ve^{-c})}\right]_0^\infty=\frac{-1}{-\log(1+i)-c}=\frac{1}{\delta+c}$$

よって正解は(C)

(4) 求める年金の z 歳時点における現価率は

$\dfrac{N_z^B}{D_z^B}$ である。

これを y 歳時点で評価する場合は

$$v^{z-y}\times {}_{z-y}P_y^A=v^{z-y}\times\frac{l_z^A}{l_y^A}=\frac{D_z^A}{D_y^A}$$

を乗じればよいから，求める年金現価率は

$$\frac{N_z^B}{D_z^B}\times\frac{D_z^A}{D_y^A}=\frac{D_z^A\cdot N_z^B}{D_y^A\cdot D_z^B} \quad となる。$$

よって正解は(B)

(5) 年初の年金資産＋年間保険料－給付金＋利息収入＝年末の年金資産

から，年間保険料＝47－（0 － 5 ＋ 4）＝48

よって正解は(D)

2.

問題番号	最　適　解
①	加入年齢方式
②	個人平準保険料方式
③	総合保険料方式
④	到達年齢方式
⑤	標準保険料
⑥	特別保険料
⑦	定 常 人 口
⑧	責任準備金
⑨	$x_r - x_e$
⑩	過去勤務債務

3. (1) 求める新規加入者数をAとおくとy（$y \geqq x_0$）歳の加入者数は，

$A \times (l_y / l_{x0})$ となる。

加入者総数は，Lであるから，次式が成り立つ。

$$L = \sum_{y=x0}^{r-1} \{ A \times (l_y / l_{x0}) \}$$

ところで（右辺）$= A \times \left(\sum_{y=x0}^{r-1} l_y \right) / l_{x0}$

$$= A \times \varepsilon_{x0}$$

従って　$A = L / \varepsilon_{x0}$

(2) 求める新規加入数をそれぞれA_1，A_2とすると，

$$\begin{cases} A_1 : A_2 = 3 : 1 \\ A_1 \cdot \varepsilon_{x1} + A_2 \cdot \varepsilon_{x2} = L \end{cases}$$

上記の連立方程式を解くと　$A_1 = 3 \cdot L / (3 \cdot \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2})$

$A_2 = L / (3 \cdot \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2})$

(3) 定常状態を仮定しているのであるから，毎年発生する後発過去勤務債務は，x_2歳で加入する新規加入者の加入時責任準備金相当額である。

x_2 歳の人，1人あたりの責任準備金は，

$$\left\{ D_r \cdot \ddot{a}_r - {}^E P\left(\sum_{y=x2}^{r-1} D_y\right)\right\} \Big/ D_{x2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\ddot{a}_r = N_r / D_r$

$$\sum_{y=x2}^{r-1} D_y = N_{x2} - N_r$$

$${}^E P = D_r \cdot \ddot{a}_r \Big/ \left(\sum_{y=x1}^{r-1} D_y\right)$$

$$= N_r / (N_{x1} - N_r)$$ を代入すると①は，

$$\frac{1}{D_{x2}}\left\{ N_r - \frac{N_r}{N_{x1}-N_r}\cdot(N_{x2}-N_r)\right\}$$

$$= \frac{N_r}{D_{x2}} \cdot \frac{N_{x1}-N_{x2}}{N_{x1}-N_r}$$ となる。(2)より新規加入者数は $L / (3 \cdot \varepsilon_{x1} + \varepsilon_{x2})$

であるから

$$\frac{L}{3\varepsilon_{x1}+\varepsilon_{x2}} \cdot \frac{N_r}{D_{x2}} \cdot \frac{N_{x1}-N_{x2}}{N_{x1}-N_r}$$

4. (1) 年6回期末生存者に支払う分割払年金の現価は Woolhouse の公式から

$$a^{(m)}{}_x = \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \frac{d}{dx} D_x + \cdots\right)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{m-1}{2m} D_x\right)$$

ここで $m=6$ を代入して

$$a^{(6)}{}_x \fallingdotseq \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=1}^{\infty} D_{x+t} + \frac{5}{12} D_x\right) = \frac{1}{D_x}\left(N_x - \frac{7}{12} D_x\right)$$

(2) 一方，死亡者に対する給付現価は

$$a^{(12)}_x = \frac{1}{l_x}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{6}\left\{ \frac{1}{12}\left(l_{x+t+\frac{2j-2}{12}} - l_{x+t+\frac{2j-1}{12}}\right) + \frac{2}{12}\left(l_{x+t+\frac{2j-1}{12}} - l_{x+t+\frac{2j}{12}}\right)\right\} v^{t+\frac{2j}{12}}$$

$$= \frac{1}{12 l_x}\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{6}\left\{ \left(l_{x+t+\frac{2j-2}{12}} - l_{x+t+\frac{2j-1}{12}}\right) + 2\left(l_{x+t+\frac{2j-1}{12}} - l_{x+t+\frac{2j}{12}}\right)\right\} v^{t+\frac{2j}{12}}$$

（$x+t$ ，$x+t+1$）の死亡は一様に発生すると考えれば

$$l_{x+t+\frac{2j-2}{12}}-l_{x+t+\frac{2j-1}{12}}=l_{x+t+\frac{2j-1}{12}}-l_{x+t+\frac{2j}{12}}=\frac{1}{12}(l_{x+t}-l_{x+t+1})=\frac{d_{x+t}}{12}$$

となるので

$$=\frac{1}{12l_x}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{3}{12}d_{x+t}\left(\sum_{j=1}^{6}v^{t+\frac{2j}{12}}\right)$$

$$\fallingdotseq\frac{1}{48l_x}\sum_{t=0}^{\infty}d_{x+t}\cdot 6v^{t+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{8D_x}\sum_{t=0}^{\infty}\overline{C}_{x+t}$$

$$=\frac{\overline{M}_x}{8D_x}$$

求める年金現価率は(1)と(2)の合計である。

$$\therefore\quad {}^{(12)}a^{(6)}_x=\frac{1}{D_x}\left(N_x-\frac{7}{12}D_x+\frac{1}{8}\overline{M}_x\right)$$

よって証明された。

5. 毎年の掛金総額をC，給付総額をB，定常状態の積立金をF，割引率をdとすれば，極限方程式として次の関係が成立する。

$$C+d\cdot F=B\cdots\cdots(*)$$

題意より

$$C=\alpha\times l_r\times\ddot{a}_r$$

$$B=\alpha\times(l_r+l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots\cdots)$$

一方，（$*$）より

$$F=(B-C)/d=\alpha\times\{(l_r+l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots)-l_r\times\ddot{a}_r\}/d$$

$$=\alpha\times\{(l_r+l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots)-l_r\times(1+a_r)\}/d$$

$$=\alpha\times\{(l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots)-l_r\times a_r\}/d$$

$= \alpha \times (1_r \times e_r - 1_r \times a_r) / d$

$(\because e_r = (1_{r+1} + 1_{r+2} + \cdots) / 1_r)$

$= \alpha \times 1_r \times (e_r - a_r) / d$

$\therefore \ F = \alpha \times 1_r \times (e_r - a_r) / d$

よって証明された。