保険数学1（問題）

1．次の（1）から（10）までについて、それぞれ五つの選択肢の中から正しいものを一つ選んで、所定の解答用紙にその記号（（A）から（E）のうちいずれか一つ）を記入せよ。（50点）

（1）$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|}=168.75$ のとき、i の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A）0.075　（B）0.080　（C）0.085　（D）0.090　（E）0.095

（2）$l_x = \dfrac{2}{e^x}$ のとき、m_x に等しいものは次のうちどれか。

（A）2　（B）$\dfrac{2(e-1)}{e+1}$　（C）e^x　（D）1　（E）$\dfrac{e-1}{e+1}$

（3）年1回期末払で年金額が $r,\ 2r^2,\ 3r^3,\ \cdots\cdots,\ nr^n$ である確定年金現価を $a^{*}_{\overline{n}|}$ とするとき、$\lim_{n\to\infty} a^{*}_{\overline{n}|}$ に等しいものは次のうちどれか。ただし、$0 < vr < 1$ とする。

（A）$\dfrac{(1+vr)^2}{1-vr}$　（B）$\dfrac{vr}{1-vr}$　（C）$\dfrac{1+vr}{1-vr}$　（D）$\dfrac{1+vr}{(1-vr)^2}$　（E）$\dfrac{vr}{(1-vr)^2}$

（4）$l_x = l_0\left(1-\dfrac{x^2}{\omega^2}\right)$，$0 \leqq x \leqq \omega$ のとき、$\mathring{e}_0$ に等しいものは次のうちどれか。

（A）$\dfrac{3\omega}{4}$　（B）$\dfrac{2\omega}{3}$　（C）$\dfrac{3\omega}{5}$　（D）$\dfrac{\omega}{2}$　（E）$\dfrac{\omega}{3}$

（5）次の式のうちで、${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ に等しくないものはどれか。

（A）$\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$　（B）$v^m{}_m p_x\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$　（C）$\ddot{a}_x-{}_{n|}\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$　（D）${}_{m|}\ddot{a}_x-{}_{m+n|}\ddot{a}_x$

（E）$A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$

（6）$i=0.04$，$\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}=0.95417$ のとき、q_x の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A）0.064　（B）0.066　（C）0.068　（D）0.070　（E）0.072

（7）$\dfrac{d}{dx}(l_x\ \bar{a}_x)$ に等しいものは次のうちどれか。

（A）$-l_x\bar{A}_x$　（B）$-\bar{A}_x$　（C）$\bar{A}_x$　（D）$2l_x\mu_x\ \bar{a}_x$　（E）$(\mu_x+\delta)\ \bar{a}_x$

（8）次の式のうちで、${}_tV_x$ に等しくないものはどれか。

（A）$1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$　（B）$\dfrac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$　（C）$A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$　（D）$\dfrac{P_x-P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}}{P_{x:\overline{t}|}}$

（E）$1-(1-{}_1V_x)(1-{}_1V_{x+1})\cdots\cdots(1-{}_1V_{x+t-1})$

（9）$2A_x+A_{x+3t}=3A_{x+t}$ が成立し、${}_tV_x=0.2$ のとき、${}_{3t}V_x$ に等しいものは次のうちどれか。

（A）0.3　（B）0.4　（C）0.5　（D）0.6　（E）0.8

（10）終身保険（保険金期末払）で、$P_x=0.02418$，${}_{\omega-x-1}V_x=0.9379$ とするとき、i の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A）0.0388　（B）0.0390　（C）0.0392　（D）0.0394　（E）0.0396

2．保険料払込期間が l 年と m 年の2つの養老保険（いずれも x 歳加入、n 年満期、保険金期末払）において、$l < m$ のとき、純保険料式責任準備金について、${}^{l}_{t}V_{x:\overline{n|}} \geqq {}^{m}_{t}V_{x:\overline{n|}}$ であることを算式を用いて証明せよ。　（25点）

3．保険金期末払の定期保険について、予定死亡率が $q_x < q_{x+1} < q_{x+2} < \cdots\cdots < q_{x+n-1}$ のとき、次の問に答えよ。　（25点）

（1）$\dfrac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \dfrac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} > \dfrac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}}$ を示せ。

（2）${}_{t}V^{1}_{x:\overline{n|}} > 0$ $(t = 1, \cdots\cdots, n-1)$ を示せ。（（1）の結果を用いてもよい。）

（3）$\sum_{k=0}^{n-1} P^{1}_{x+k:\overline{1|}} > nP^{1}_{x:\overline{n|}}$ を示せ。（（2）の結果を用いてもよい。）

保険数学１（解答例）

1.

問題番号	解答欄
(1)	（B）
(2)	（D）
(3)	（E）
(4)	（B）
(5)	（C）
(6)	（A）
(7)	（A）
(8)	（D）
(9)	（D）
(10)	（D）

正解は上表のとおりであるが，以下問題を再掲するとともに解法を略記する。

(1)　$(Ia)_\infty = 168.75$ のとき，i の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A）0.075　（B）0.080　（C）0.085　（D）0.090　（E）0.095

（答）　（B）

$$(Ia)_\infty=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}=168.75$$

$$i=0.08$$

(2)　$l_x=\dfrac{2}{e^x}$ のとき，m_x に等しいものは次のうちどれか。

（A）2　（B）$\dfrac{2(e-1)}{e+1}$　（C）e^x　（D）1　（E）$\dfrac{e-1}{e+1}$

（答）　（D）

$$m_x=\frac{d_x}{L_x}=\frac{l_x-l_{x+1}}{\int_0^1 l_{x+t}dt}=\frac{\frac{2}{e^x}-\frac{2}{e^{x+1}}}{\int_0^1\frac{2}{e^{x+t}}dt}=\frac{\frac{2}{e^{x+1}}(e-1)}{\frac{2}{e^x}\left[-e^{-t}\right]_0^1}=\frac{\frac{2}{e^{x+1}}(e-1)}{\frac{2}{e^x}\left(\frac{e-1}{e}\right)}=1$$

(3)　年１回期末払で年金額が r，2 r^2，3 r^3，……，nr^n である確定年金現価を $a^*_{\overline{n|}}$ とするとき，

$\lim_{n\to\infty} a^*_{\overline{n|}}$ に等しいものは次のうちどれか。ただし，$0<vr<1$ とする。

（A）$\dfrac{(1+vr)^2}{1-vr}$　（B）$\dfrac{vr}{1-vr}$　（C）$\dfrac{1+vr}{1-vr}$　（D）$\dfrac{1+vr}{(1-vr)^2}$　（E）$\dfrac{vr}{(1-vr)^2}$

（答）　（E）

$$a^{*}_{\overline{n}|}(1-vr)=vr+(vr)^2+\cdots+(vr)^n-n(vr)^{n+1} \qquad \text{より}$$

$$\ddot{a}^{*}_{\overline{n}|}=\frac{vr\{1-(vr)^n\}}{(1-vr)^2}-\frac{n(vr)^{n+1}}{1-vr} \qquad \lim_{n\to\infty} a^{*}_{\overline{n}|}=\frac{vr}{(1-vr)^2}$$

(4) $l_x=l_0\left(1-\dfrac{x^2}{\omega^2}\right)$, $0\leqq x\leqq\omega$ のとき，$\mathring{e}_0$ に等しいものは次のうちどれか。

（A） $\dfrac{3\omega}{4}$ （B） $\dfrac{2\omega}{3}$ （C） $\dfrac{3\omega}{5}$ （D） $\dfrac{\omega}{2}$ （E） $\dfrac{\omega}{3}$

（答） （B）

$$\mathring{e}_0=\frac{1}{l_0}\int_0^{\omega} l_x d_x=\int_0^{\omega}\left(1-\frac{x^2}{\omega^2}\right)dx=\left[x-\frac{x^3}{3\omega^2}\right]_0^{\omega}=\omega-\frac{\omega^3}{3\omega^2}=\frac{2}{3}\omega$$

(5) 次の式のうちで，${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ に等しくないものはどれか。

（A） $\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$ （B） $v^m\,{}_m p_x\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$ （C） $\ddot{a}_x-{}_{n|}\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ （D） ${}_m\ddot{a}_x-{}_{n\cdot m}\ddot{a}_x$

（E） $A_{x:\overline{m}|}^{\ \ 1}\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$

（答） （C）

$$\ddot{a}_x-{}_{n|}\ddot{a}_x-\ddot{a}_{x:\overline{m}|}=\frac{N_x}{D_x}-\frac{N_{x+n}}{D_x}-\frac{N_x-N_{x+m}}{D_x}=\frac{N_{x+m}-N_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_{x+m}-N_{x+n+m}}{D_x} \qquad \text{より}$$

(6) $i=0.04$, $\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}=0.95417$ のとき，q_x の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A） 0.064 （B） 0.066 （C） 0.068 （D） 0.070 （E） 0.072

（答） （A）

$$\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}=1-\frac{11}{24}(1-vp_x) \quad \text{より} \quad p_x=\frac{1}{v}\left\{1-\frac{24}{11}\left(1-\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}\right)\right\}$$

従って $1-q_x=(1+i)\left\{1-\dfrac{24}{11}\left(1-\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}\right)\right\}$ より

$$q_x=1-(1+i)\left\{1-\frac{24}{11}\left(1-\ddot{a}^{(12)}_{x:\overline{1}|}\right)\right\}=0.063992$$

(7) $\dfrac{d}{dx}(l_x\bar{a}_x)$ に等しいものは次のうちどれか。

（A） $-l_x\bar{A}_x$ （B） $-\bar{A}_x$ （C） $\bar{A}_x$ （D） $2l_x\mu_x\bar{a}_x$ （E） $(\mu_x+\delta)\bar{a}_x$

（答） （A）

$$\frac{d\bar{a}_x}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}v^t{}_tp_x dt=\int_0^{\infty}v^t{}_tp_x(\mu_x-\mu_{x+t})dt$$

$$=\mu_x\int_0^{\infty}v^t{}_tp_x dt-\int_0^{\infty}v^t{}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

$$=\mu_x\bar{a}_x-\bar{A}_x$$

$$\frac{d}{dx}(l_x\bar{a}_x)=\frac{dl_x}{d_x}\bar{a}_x+l_x\frac{d\bar{a}x}{dx}$$

$$=(-l_x\mu_x)\bar{a}_x+l_x(\mu_x\bar{a}_x-\bar{A}_x)$$

$$=-l_x\bar{A}_x$$

(8) 次の式のうちで，${}_tV_x$ に等しくないものはどれか。

（A） $1-\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$ （B） $\dfrac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$ （C） $A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$ （D） $\dfrac{P_x-P^{\,1}_{x:\overline{t|}}}{P_{x:\overline{t|}}}$

（E） $1-(1-{}_1V_x)(1-{}_1V_{x+1})\cdots\cdots(1-{}_1V_{x+t-1})$

（答）　（D）

$${}_tV_x=P_x\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}=\frac{P_x-\dfrac{M_x-M_{x+t}}{N_x-N_{x+t}}}{\dfrac{D_{x+t}}{N_x-N_{x+t}}}$$ より

$\dfrac{P_x-P^{\,1}_{x:\overline{t|}}}{P_{x:\overline{t|}}^{\ \ 1}}$ であれば ${}_tV_x$ と等しい。

(9) $2A_x+A_{x+3t}=3A_{x+t}$ が成立し，${}_tV_x=0.2$ のとき，${}_{3t}V_x$ に等しいものは次のうちどれか。

（A） 0.3　（B） 0.4　（C） 0.5　（D） 0.6　（E） 0.8

（答）　（D）

$${}_tV_x=\frac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$$

従って $${}_{3t}V_x=\frac{A_{x+3t}-A_x}{1-A_x}=\frac{(3A_{x+t}-2A_x)-A_x}{1-A_x}=\frac{3(A_{x+t}-A_x)}{1-A_x}=3{}_tV_x=0.6$$

(10) 終身保険（保険金期末払）で，$P_x = 0.02418$，${}_{\omega-x-1}V_x = 0.9379$ とするとき，i の値に最も近いものは次のうちどれか。

（A） 0.0388　　（B） 0.0390　　（C） 0.0392　　（D） 0.0394　　（E） 0.0396

（答）　（D）

$$l_{\omega-1}({}_{\omega-x-1}V_x+P_x)(1+i)-d_{\omega-1}=l_{\omega}\,{}_{\omega-x}V_x$$

$$l_\omega=0 \qquad \frac{d_{\omega-1}}{l_{\omega-1}}=1$$

$$1+i=\frac{1}{{}_{\omega-x-1}V_x+P_x}=1.039414 \quad \therefore i\fallingdotseq 0.0394$$

2. 各々の養老保険の純保険料を

$$ {}_lP_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{l}|}} \quad , \quad {}_mP_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \quad \text{とすると}$$

各々の責任準備金は以下のとおりとなる。

$$ {}^l_tV_{x:\overline{n}|}=\begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|}-{}_lP_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{l-t}|} & ,(t\leqq l)\ \cdots\cdots\cdots① \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} & ,(t>l)\ \cdots\cdots\cdots② \end{cases}$$

$$ {}^m_tV_{x:\overline{n}|}=\begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|}-{}_mP_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} & ,(t\leqq m)\ \cdots\cdots\cdots③ \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} & ,(t>m)\ \cdots\cdots\cdots④ \end{cases}$$

(1) $t\leqq l$ の場合，①および③より

$$ {}^l_tV_{x:\overline{n}|}-{}^m_tV_{x:\overline{n}|}=-{}_lP_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{l-t}|}+{}_mP_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$$

$$=A_{x:\overline{n}|}\cdot\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot\left(\frac{N_{x+t}-N_{x+m}}{N_x-N_{x+m}}-\frac{N_{x+t}-N_{x+l}}{N_x-N_{x+l}}\right)$$

$$=A_{x:\overline{n}|}\cdot\frac{D_x}{D_{x+t}}\cdot\frac{(N_x-N_{x+t})(N_{x+l}-N_{x+m})}{(N_x-N_{x+m})(N_x-N_{x+l})}\geqq 0$$

（$t=0$ のとき等号成立）

(2) $l<t\leqq m$ の場合，②および③より

$$ {}^l_tV_{x:\overline{n}|}-{}^m_tV_{x:\overline{n}|}={}_mP_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\geqq 0$$

（$t=m$ のとき等号成立）

(3) $t>m$ の場合　②および④より

$$ {}^l_tV_{x:\overline{n}|}-{}^m_tV_{x:\overline{n}|}=0 \qquad \text{（等号成立）}$$

3. (1) $q_x < q_{x+1} \cdots\cdots < q_{x+n-1}$ より

$$\frac{C_x}{D_x} < \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}} < \cdots < \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}$$ となる。 $C_{x+k} > 0(k=1,\ 2,\ \cdots, n-1), D_{x+k} > 0$ に注意して

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}} \text{ より } \frac{C_{x+n-1}}{C_{x+n-2}} + 1 > \frac{D_{x+n-1}}{D_{x+n-2}} + 1$$ これより，

$$\frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}}$$

又 $$\frac{D_{x+n-1}}{C_{x+n-1}} < \frac{D_{x+n-2}}{C_{x+n-2}} \text{ より } \frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} < \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}$$

故に

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-2}}{D_{x+n-2}}$$ が成立する。

なお，$C_{x+n-2} = 0$ となる場合も不等号が成立する。

(2) $${}_tV^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P^1_{x:\overline{n}|}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$= (P^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P^1_{x:\overline{n}|})\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

${}_tV^1_{x:\overline{n}|} > 0$を証明するためには，$P^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P^1_{x:\overline{n}|} > 0\ (t=1, 2, \cdots, n-1)$
を証明すればよい。

(1)と同様に

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-3}}{D_{x+n-3}}$$ より

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} > \frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2} + C_{x+n-3}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2} + D_{x+n-3}} > \frac{C_{x+n-3}}{D_{x+n-3}}$$

同様に

$$\frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > \frac{C_{x+n-1} + C_{x+n-2}}{D_{x+n-1} + D_{x+n-2}} > \cdots > \frac{C_{x+n-1} + \cdots + C_{x+1} + C_x}{D_{x+n-1} + \cdots + D_{x+1} + D_x} > \frac{C_x}{D_x}$$

故に

$$P^{\,1}_{x+n-1:\overline{1}|} > P^{\,1}_{x+n-2:\overline{2}|} > \cdots > P^{\,1}_{x:\overline{n}|} > v\,q_x$$

$$P^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{\,1}_{x:\overline{n}|} > 0$$

(3) 責任準備金の再帰公式より

$${}_tV^{\,1}_{x:\overline{n}|} + P^{\,1}_{x:\overline{n}|} - v\cdot q_{x+t} = v\cdot p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^{\,1}_{x:\overline{n}|}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left(P^{\,1}_{x:\overline{n}|} - v\cdot q_{x+t}\right) = \sum_{t=0}^{n-1}\left(v\cdot p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^{\,1}_{x:\overline{n}|} - {}_tV^{\,1}_{x:\overline{n}|}\right)$$

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left(P^{\,1}_{x:\overline{n}|} - v\cdot q_{x+t}\right) = \sum_{t=0}^{n-2}\left(v\cdot p_{x+t}\cdot{}_{t+1}V^{\,1}_{x:\overline{n}|} - {}_{t+1}V^{\,1}_{x:\overline{n}|}\right) - {}_0V^{\,1}_{x:\overline{n}|}$$

$$+\, v\cdot p_{x+n-1}\cdot{}_nV^{\,1}_{x:\overline{n}|}$$

ここで、${}_0V^{\,1}_{x:\overline{n}|} = {}_nV^{\,1}_{x:\overline{n}|} = 0$　　および、$v\,p_{x+t} - 1 < 0$, ${}_tV^{\,1}_{x:\overline{n}|} > 0$ より

$$\sum_{t=0}^{n-1}\left(P^{\,1}_{x:\overline{n}|} - v\,q_{x+t}\right) < 0$$

$$n\cdot P^{\,1}_{x:\overline{n}|} < v q_x + v\cdot q_{x+1} + \cdots + v q_{x+n-1}$$

$$\frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}} + \cdots + \frac{C_{x+n-1}}{D_{x+n-1}} > n\cdot\frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}$$

よって $\sum_{k=0}^{n-1} P^{\,1}_{x+k:\overline{1}|} > n\,P^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ となる。