損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は 1 事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１．次の（１）～（５）について、各問の指示に従い解答しなさい。

（１）～（３）：各４点　（４），（５）：各５点（計 22 点）

（１）ある保険商品について、予定料率構成割合および直近年度の実績値は下表のとおりであった。このとき、次の（ア），（イ）の各問に答えなさい。

＜現行の予定料率構成割合＞

料率構成	割合
損害率	55%
社費率	20%
代理店手数料率	20%
利潤率	5%
合計	100%

＜直近年度の実績値＞

項目	実績
元受正味保険料	550
アーンド保険料	570
支払保険金	310
インカード保険金	335
社費	120
代理店手数料	105

（ア）実績に基づいて、損害率法により求めた営業保険料の料率改定率に最も近いものは $\boxed{\text{①}}$ である。ただし、クレディビリティ係数は 0.6 を用い、社費率および代理店手数料率については、直近年度のリトンベースの実績値をもとに算出することとする。また利潤率は 5%とする。

【①の選択肢】

（Ａ）4.2%	（Ｂ）4.4%	（Ｃ）4.6%	（Ｄ）4.8%	（Ｅ）5.0%
（Ｆ）5.2%	（Ｇ）5.4%	（Ｈ）5.6%	（Ｉ）5.8%	（Ｊ）6.0%

（イ）保険金の平均支払額として D_1、D_2 を次のとおり定義する。このとき、$D_1 \div D_2 - 1$ の値に最も近いものは ② である。ただし、条件は下表のとおりとする。

D_1：当年度始期契約に基づき支払われる保険金の、事故 1 件あたり平均支払額

D_2：当年度に支払われる保険金の、事故 1 件あたり平均支払額

契約の始期	すべて 4 月 1 日（年度はじめ）
契約の保険期間	1 年間
契約件数の増加率	毎年＋2%
事故頻度の増加率	毎年＋5%
保険金支払パターン（各事故の保険金は 1 度に支払われる）	支払年度：事故発生年度と同一年度　50% 事故発生年度の翌年度　50% 支払単価：事故発生年度と同一年度に支払われる場合と翌年度に支払われる場合で単価（インフレーション影響は除く）の比率は 1：2 とする
インフレーション率	毎年＋10%（保険金の支払年度に応じて発現するものとする）

【②の選択肢】

（Ａ）7.1%　（Ｂ）7.3%　（Ｃ）7.5%　（Ｄ）7.7%　（Ｅ）7.9%
（Ｆ）8.1%　（Ｇ）8.3%　（Ｈ）8.5%　（Ｉ）8.7%　（Ｊ）8.9%

（２）Minimum Bias 法に関して、次の（ア），（イ）の各問に答えなさい。

（ア）ある保険会社の火災保険の料率は、地域（地域 A か地域 B か）と築年数（築年数 15 年以下か築年数 15 年超か）の 2 つの危険標識で複合的に区分されており、実績は下表のとおりであった。

＜エクスポージャ（E_{ij}）＞

	築年数 15 年以下	築年数 15 年超	計
地域 A	E_{11}=200	E_{12}=500	$E_{1\bullet}$=700
地域 B	E_{21}=250	E_{22}=200	$E_{2\bullet}$=450
計	$E_{\bullet 1}$=450	$E_{\bullet 2}$=700	$E_{\bullet\bullet}$=1,150

＜クレーム総額（C_{ij}）＞

	築年数 15 年以下	築年数 15 年超	計
地域 A	C_{11}=100	C_{12}=420	$C_{1\bullet}$=520
地域 B	C_{21}=180	C_{22}=220	$C_{2\bullet}$=400
計	$C_{\bullet 1}$=280	$C_{\bullet 2}$=640	$C_{\bullet\bullet}$=920

リスクの構造が加法型であると仮定して、2 つの危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、築年数区分「築年数 15 年超」に対応する料率係数y_2の値に最も近いものは $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。
なお、地域区分「地域 A」に対応する料率係数 x_1は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものとする。また、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、すべて小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

【③の選択肢】

（A）0.108	（B）0.118	（C）0.128	（D）0.138	（E）0.148
（F）0.158	（G）0.168	（H）0.178	（I）0.188	（J）0.198

（イ）Bailey と Simon が 1960 年に発表した論文の中で、料率の満たすべき基準として挙げた 4 条件を数学的に表現すると、以下の a～d となる。

なお、n_{ij}はエクスポージャ数、r_{ij}は相対クレームコスト指数（i=1,2,...,k; j=1,2,...,l）とする。

a.	$\dfrac{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\hat{r}_{ij}}{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\, r_{ij}} \approx 1 \quad (i = 1,2,\dots,k)$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}\, r_{ij}} \approx 1 \quad (j = 1,2,\dots,l)$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} r_{ij}} \approx 1$
b.	$\dfrac{\sqrt{n_{ij}}(r_{ij} - \hat{r}_{ij})}{\hat{r}_{ij}} \approx 0 \quad (i = 1,2,\dots,k; j = 1,2,\dots,l)$
c.	$\dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\lvert r_{ij} - \hat{r}_{ij}\rvert}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} r_{ij}} \approx 0$
d.	$\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{n_{ij}(r_{ij} - \hat{r}_{ij})^2}{K\hat{r}_{ij}} \approx 0$ （Kは定数で、i、jによらない）

Minimum Bias 法は、どの条件に着目した料率算定方法であるか。正しいものをすべて選び『④』に解答しなさい。なお、すべて誤っている場合は、（E）を選択しなさい。

【④の選択肢】

（A）a　（B）b　（C）c　（D）d　（E）すべて誤り

（３）ある保険商品について、100 件の実績データに基づき損害額を予測するモデルを作成した。

モデル	最大対数尤度 $\log(L)$	自由パラメータの数 k
A	$-1{,}463.424$	2
B	$-1{,}457.716$	3
C	$-1{,}451.868$	4
D	$-1{,}450.212$	5
E	$-1{,}449.954$	6

このとき、次の（ア）～（ウ）の各問に答えなさい。

なお、必要があれば、$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$を使用すること。

（ア）モデル A の赤池情報量基準（AIC）に最も近いものは ⑤ である。

（イ）モデル C のベイズ情報量基準（BIC）に最も近いものは ⑥ である。

【⑤、⑥の選択肢】

（**A**）2,900　（**B**）2,910　（**C**）2,920　（**D**）2,930　（**E**）2,940

（**F**）2,950　（**G**）2,960　（**H**）2,970　（**I**）2,980　（**J**）2,990

（ウ）モデリングに関する次の（**A**）～（**C**）の記述のうち、内容が<u>正しいもの</u>をすべて選び『⑦』に解答しなさい。なお、いずれも正しくない場合、（**D**）を選択しなさい。

【⑦の選択肢】

（**A**）重回帰において、決定係数は 0 から 1 までの値をとる。

（**B**）ある回帰式に対して説明変数を追加すると、その説明変数が妥当なものであるか否かにかかわらず、決定係数は必ず増加する。

（**C**）モデルの比較基準としては、χ^2適合度検定統計量よりは同検定におけるp値の方が望ましい。それは、p値はモデルの複雑さが増すことを、自由度を増やすことで自動的に修正するからである。

（４）満期返れい金W、保険期間n年、一時払契約の積立保険について、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）第t年度末の払戻積立金 ${}_tV'$は$\boxed{\quad ⑧ \quad}$となる。なお、 ${}_tV$は回払契約（年払契約）で平準式積立保険料を採用した場合の第t年度末の払戻積立金とし、期初払年金現価率を$\ddot{a}_{\overline{n|}}$、予定契約消滅率qを考慮した現価率、期初払年金現価率をそれぞれϕ、$\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}$とする。

【⑧の選択肢】

（Ａ） ${}_tV + W\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｂ） ${}_tV + W\phi^n\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｃ） ${}_tV + W\phi^{n-1}\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｄ） ${}_tV + W\phi^{n-t}\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｅ） ${}_tV + W\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｆ） ${}_tV + W\phi^n\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｇ） ${}_tV + W\phi^{n-1}\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｈ） ${}_tV + W\phi^{n-t}\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

（Ｉ）いずれにも該当しない

（イ）第 1 保険年度から第t保険年度末の間に全損失効となる契約に支払う返戻金の第 1 保険年度初における現価は$\boxed{\quad ⑨ \quad}$となる。

【⑨の選択肢】

（Ａ）$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left\{\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) - \phi^t\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)\right\}$

（Ｂ）$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left\{\phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) - \left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)\right\}$

（Ｃ）$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left\{\phi^t\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) - \left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)\right\}$

（Ｄ）$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left\{\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) - \phi^{-t}\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)\right\}$

（Ｅ）$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right)$

（Ｆ）$\dfrac{W\phi^{n-t}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right)$

（Ｇ）$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)$

（Ｈ）$\dfrac{W\phi^{n-t}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)$

（Ｉ）いずれにも該当しない

（５）ある保険商品は、保険期間 1 年の間に支払いが発生する確率が 2%であり、保険金の支払額は保険金額と同額である。当該保険商品について、補償プラン A だと保険金額は 3,000、補償プラン B だと保険金額は 100 が設定されている。このとき、以下の場合のリスク量の多寡を、リスク尺度を用いて比較したい。なお、各プランとも、同一の保険契約において 1 年の間に 2 回以上の支払いが発生することはない。

＜Case.1＞当該保険商品の補償プラン A を 1 人の顧客と締結する場合
＜Case.2＞当該保険商品の補償プラン B を 30 人の顧客と締結する場合（契約始期日は同一とし、顧客ごとの保険事故の発生は独立とする）

なお、以下の表は二項分布$B(30,0.02)$の累積分布関数 F(x)の一部である。計算に当たっては必要に応じて表中の値を用いてよい。また、F(6)～F(30)の値は F(5)と同一としてよい。

x	F(x)
0	0.5455
1	0.8795
2	0.9783
3	0.9971
4	0.9997
5	1.0000

リスク量は保険金の支払額を正として計測し、それ以外の損益は 0 として扱う。このとき、次の（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）リスク尺度として計測期間 1 年の 97.5%VaR を用いるとき、Case.1 のリスク量に最も近いものは $\boxed{⑩}$、Case.2 のリスク量に最も近いものは $\boxed{⑪}$ である。ただし、リスク尺度の計測期間と各補償プランの保険期間は同一とする。

【⑩、⑪の選択肢】

（A）0	（B）100	（C）200	（D）300	（E）400
（F）500	（G）600	（H）700	（I）800	（J）900

（イ）リスク尺度として計測期間 1 年の 97.5%TVaR を用いるとき、Case.1 のリスク量に最も近いものは[⑫]、Case.2 のリスク量に最も近いものは[⑬]である。ただし、リスク尺度の計測期間と各補償プランの保険期間は同一とする。

【⑫、⑬の選択肢】

（A）0	（B）300	（C）600	（D）900	（E）1,200
（F）1,500	（G）1,800	（H）2,100	（I）2,400	（J）2,700

（ウ）上記の結果より、リスク尺度として 97.5%VaR を用いた場合と、97.5%TVaR を用いた場合では、各 Case におけるリスク量の大小関係は異なる結果となることがわかる。一般に、Case.2 の方がリスクの分散効果が働いており、リスク量として Case.1 よりも小さい値が測定されることが望ましいと考えられるが、そのような結果になっていないのは、リスク尺度[⑭]が、リスク尺度が満たすべき条件のうち『⑮』を満たさないためであると考えられる。なお、⑮については選択肢のうち当てはまるものをすべて選びなさい。

【⑭の選択肢】

（A）VaR　　（B）TVaR

【⑮の選択肢】

（A）平行移動不変性　（B）単調性　（C）劣加法性　（D）正の同次性

問題２．次の（１）～（４）について、各問の指示に従い解答しなさい。

（１），（２）：各７点　（３），（４）：各８点　（計 30 点）

（１）ある保険商品について、いずれの契約もクレーム件数が月平均 0.5 件のポアソン過程に従い、クレーム額の分布が期待値 20 万円の指数分布に従うことが判明している。今般、この商品に免責金額 10 万円（エクセス方式）を導入することを検討している。このとき、次の（ア）～（ウ）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$e^{-0.5}=0.6$、$e^{-0.1}=0.9$として計算すること。

（ア）免責金額を導入する以前について、ある契約ではじめて事故が起きるまでの月数の期待値に最も近いものは$\boxed{\quad ① \quad}$カ月である。

【①の選択肢】

（Ａ）0.3	（Ｂ）0.5	（Ｃ）1.0	（Ｄ）1.5	（Ｅ）2.0
（Ｆ）2.5	（Ｇ）3.0	（Ｈ）3.5	（Ｉ）4.0	（Ｊ）4.5

（イ）免責金額 10 万円（エクセス方式）を導入した後、ある契約で 1 年間支払が生じない確率に最も近いものは$\boxed{\quad ② \quad}$である。

【②の選択肢】

（Ａ）0.5%	（Ｂ）1.5%	（Ｃ）2.5%	（Ｄ）3.5%	（Ｅ）4.5%
（Ｆ）4.5%	（Ｇ）5.5%	（Ｈ）6.5%	（Ｉ）7.5%	（Ｊ）8.5%

（ウ）免責金額を導入した場合、ある契約では新規契約後 1 年間の間は免責金額がなく、1 年後の契約更新のタイミングから免責金額 10 万円（エクセス方式）が導入されることとなる。このとき、当該契約のクレーム件数は、以下のオペレーショナル・タイム$\tau(t)$の非斉時ポアソン過程に従うと考えることができる。ただし、t は新規契約からの月数を表す。

$$\tau(t) = \begin{cases} \boxed{\quad ③ \quad} t + \boxed{\quad ④ \quad} & (0 \leq t \leq 12) \\ \boxed{\quad ⑤ \quad} t + \boxed{\quad ⑥ \quad} & (12 < t) \end{cases}$$

③～⑥に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【③、⑤の選択肢】

（A）0.1	（B）0.2	（C）0.3	（D）0.4	（E）0.5
（F）0.6	（G）0.7	（H）0.8	（I）0.9	（J）1.0

【④、⑥の選択肢】

（A）0	（B）0.3	（C）0.6	（D）0.9	（E）1.2
（F）1.5	（G）1.8	（H）2.1	（I）2.4	（J）2.7

（２）以下のような累計支払保険金実績データのある保険種目に関して、2024 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2024 年度末の累計支払保険金の合計」）の評価を行うことを考える。なお、この保険種目は第 4 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の事故年度別のロスディベロップメントファクターを事故年度に対応するi（下表参照）にて加重平均した値を用いるものとする。

また、計算の途中において、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計支払保険金の推移＞

事故年度		経過年度			
	i	1	2	3	4
2021	1	1,590	2,870	3,290	3,640
2022	2	1,860	3,340	3,680	
2023	3	2,210	3,810		
2024	4	2,990			

このとき、次の（ア）,（イ）の各問に答えなさい。

（ア）チェイン・ラダー法を用いて評価を行う場合、2024 年度末の支払備金に最も近いものは　⑦　である。

【⑦の選択肢】

（Ａ）4,400　（Ｂ）4,450　（Ｃ）4,500　（Ｄ）4,550　（Ｅ）4,600
（Ｆ）4,650　（Ｇ）4,700　（Ｈ）4,750　（Ｉ）4,800　（Ｊ）4,850

（イ）実績データの十分性に疑義があるため、さらにボーンヒュッター・ファーガソン法を用いて評価を行うこととした。

下表の契約年度ごとの営業保険料および予定損害率から事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値を算出するものとすると、ボーンヒュッター・ファーガソン法による 2024 年度末の支払備金に最も近いものは $\boxed{⑧}$ である。なお、最終発生保険金の当初予測値算出に用いる事故年度別の既経過保険料は 2 分の 1 法により算出するものとする。

契約年度	営業保険料	予定損害率
2020	8,200	40%
2021	9,000	50%
2022	10,200	50%
2023	11,300	60%
2024	12,800	60%

【⑧の選択肢】

（Ａ）5,400　（Ｂ）5,450　（Ｃ）5,500　（Ｄ）5,550　（Ｅ）5,600
（Ｆ）5,650　（Ｇ）5,700　（Ｈ）5,750　（Ｉ）5,800　（Ｊ）5,850

（３）比例再保険やストップロス再保険のように、再保険者の責任額が保険会社の年間の支払保険金総額から直接的に算出される再保険方式を関数型再保険と呼ぶこととする。このとき、次の（ア），（イ）の各問に答えなさい。

（ア）ある保険会社の元受保険金Xは確率密度関数$f(x)=\dfrac{3}{x^4}\ (x>1)$に従い、この元受保険金$X$に対して、再保険金が$I(X)$である関数型再保険を再保険会社から手配する。ネット再保険料$E(I(X))$が 0.125 となるような関数型再保険を手配するとき、<u>保有保険金$X-I(X)$の分散の最小値に最も近いものは</u>$\boxed{\quad ⑨ \quad}$である。

【⑨の選択肢】

（A）0.08　（B）0.09　（C）0.10　（D）0.11　（E）0.12
（F）0.13　（G）0.14　（H）0.15　（I）0.16　（J）0.17

（イ）ある保険会社の元受保険金Yは確率密度関数$f(y)=\dfrac{3}{y^4}\ (y>1)$に従い、この元受保険金$Y$に対して、再保険金が$J(Y)$である関数型再保険を再保険会社から手配する。保険会社の保有保険金の分散が$\dfrac{1}{3}$となるような関数型再保険を手配するとき、<u>再保険金$J(Y)$の分散の最小値に最も近いもの</u>は$\boxed{\quad ⑩ \quad}$である。

【⑩の選択肢】

（A）0.08　（B）0.09　（C）0.10　（D）0.11　（E）0.12
（F）0.13　（G）0.14　（H）0.15　（I）0.16　（J）0.17

（４）ある契約者集団における、各契約者の各年のクレーム件数Xは、あるパラメータ$\Theta=\theta$の下で独立であり、同一の確率密度関数$f_{X|\Theta}(x|\theta)$に従う。また、パラメータθは確率密度関数$\pi(\theta)$をもつ確率変数Θの実現値であり、当該契約者集団の全体的傾向を表現する。Xの標本ベクトル$\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots X_n)$に対し、$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots x_n)$が実現した時、$n+1$年目のクレーム件数$X_{n+1}$の推定値を考える。このとき、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア）条件付き期待値の性質から、$E[X_{n+1}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]=E[\boxed{\quad ⑪ \quad}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]$の関係式が成り立つ。ここで、$E\left[\left(\boxed{\quad ⑪ \quad}-a-b\bar{X}\right)^2\right]$を最小にするパラメータ$a,b$を最小二乗法で推定し、$T=a+b\bar{X}$を$n+1$年目のクレーム件数$X_{n+1}$の推定値としたい。このとき

$$a=(1-b)\times\boxed{\quad ⑫ \quad}$$

$$b=\frac{\boxed{\quad ⑬ \quad}}{V[\bar{X}]}$$

となる。ただし、$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{\mathrm{i}}$である。

【⑪～⑬の選択肢】

（Ａ） $E[X|\Theta]$　（Ｂ） $E[V(X|\Theta)]$　（Ｃ） $E[\Theta|X]$　（Ｄ） $V[X|\Theta]$

（Ｅ） $V[E(X|\Theta)]$　（Ｆ） $V[\Theta|X]$　（Ｇ） $E[V(\Theta|X)]$　（Ｈ） $V[E(\Theta|X)]$

（Ｉ） $E[X]$　（Ｊ） いずれにも該当しない

（イ）各契約者の各年度の年間事故件数はパラメータΘのポアソン分布に従うと仮定する。また、過去のデータから、契約者のパラメータΘの値は$\theta_1 = 0.7$か$\theta_2 = 1.2$のいずれかであり、そのようなパラメータを持つ契約者の、契約者集団全体に占める割合がそれぞれ$p_1 = 0.8$、$p_2 = 0.2$であることがわかっている。当該契約者集団に属するある契約者 1 人の過去10年間の事故件数実績が$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots x_{10})$であったとき、（ア）で求めた$T$を用いてクレーム件数$X_{11}$を推定すると、その推定値に最も近いものは ⑭ である。ただし、当該契約者の過去10年間の事故件数実績に基づく標本平均の実現値は$\bar{x} = 0.2$であったとする。

【⑭の選択肢】

（A）0.25	（B）0.30	（C）0.35	（D）0.40	（E）0.45
（F）0.50	（G）0.55	（H）0.60	（I）0.65	（J）0.70

問題３．次の（１）～（５）について、各問の指示に従い解答しなさい。

（１），（２）：各９点　（３）～（５）：各 10 点　（計 48 点）

（１）ある自動車運転ドライバーの集団は、危険度の異なるドライバーが混ざり合っており、1 年間に発生する自動車事故件数は平均λのポアソン分布に従う。

また、λは確率密度関数が$f(\lambda)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta\lambda}(\beta\lambda)^{\alpha-1}$であるガンマ分布$\Gamma(\alpha,\beta)$に従う。

このとき次の（ア）～（エ）の各問に答えなさい。なお、必要があれば、$\log 2=0.693$、$\log 3=1.099$を使用すること。

（ア）この集団における、各ドライバーの年間自動車事故件数Nの確率関数$P(N=n)$は次のとおりとなる。

$$P(N=n)=\frac{\boxed{①}!}{\boxed{②}!\,n!}(\boxed{③})^{\alpha}(1-\boxed{③})^{n}$$

①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【①～③の選択肢】

（A）	α	（B）	$\alpha-1$	（C）	$\alpha+1$	（D）	$n+\alpha$
（E）	$n+\alpha-1$	（F）	$n+\alpha+1$	（G）	β	（H）	$\beta-1$
（I）	$\beta+1$	（J）	$n+\beta$	（K）	$n+\beta-1$	（L）	$n+\beta+1$
（M）	$\frac{1}{\alpha}$	（N）	$\frac{1}{\alpha+1}$	（O）	$\frac{\alpha}{\alpha+1}$	（P）	$\frac{1}{\beta}$
（Q）	$\frac{1}{\beta+1}$	（R）	$\frac{\beta}{\beta+1}$	（S）	いずれにも該当しない		

（イ）保有する富xに対する効用関数が$u(x) = -e^{-0.01x}$であり、現在保有している富が 10,000 である保険会社が、この集団に対して保険期間 1 年の自動車保険を販売することを検討する。保険販売を前提とすれば、保険を販売したときの期待効用が保険を販売しないときの効用よりも大きくなるように保険料を定めるべきである。

(a) この保険を販売したときの自動車事故 1 件当たりのクレーム額が平均 50 の指数分布に従い、ガンマ分布のパラメータが$\alpha = 3$、$\beta = 3$であるとき、保険会社が設定できる保険料の下限値に最も近いものは $\boxed{\quad ④ \quad}$ である。なお、当該自動車保険において、保険期間中のクレーム回数に上限は定めておらず、保険会社は個々のドライバーの危険度を事前に把握していないものとする。

【④の選択肢】

（A）113	（B）114	（C）115	（D）116	（E）117
（F）118	（G）119	（H）120	（I）121	（J）122

(b) 保険会社の前提条件を（a）からそれぞれ以下のとおり変更し、その他の条件は変更しないものとする。

＜条件 A＞効用関数を$u(x) = -e^{-0.01x}$から$u(x) = -e^{-0.011x}$に変更
＜条件 B＞現在保有している富を 10,000 から 11,000 に変更

保険会社が設定できる保険料の下限値は（a）と比べて、
＜条件 A＞では $\boxed{\quad ⑤ \quad}$、＜条件 B＞では $\boxed{\quad ⑥ \quad}$。

⑤,⑥に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【⑤、⑥の選択肢】

（A）高くなる　（B）低くなる　（C）変化しない

（ウ）（イ）と同様に、保険期間 1 年の自動車保険を販売したときの自動車事故 1 件当たりのクレーム額が平均 50 の指数分布に従い、ガンマ分布のパラメータが$\alpha = 3$、$\beta = 3$であるとする。また、当該自動車保険において、保険期間中のクレーム回数に上限は定めておらず、保険会社は個々のドライバーの危険度を事前に把握していないものとする。

(a) 当該自動車運転ドライバーの集団のうち、あるドライバーの効用関数は、保有する富yに対する効用関数が$u(y) = -e^{-0.012y}$であり、現在保有している富が 500 であることがわかった。このドライバーが、当該自動車保険に加入するために支払う保険料の上限値に最も近いものは $\boxed{⑦}$ である。なお、自動車保険を契約していない状態で自動車事故が発生した際にドライバーに生じる損害額は、当該自動車保険を契約した際のクレーム額と等しいものとする。

【⑦の選択肢】

（A）167	（B）168	（C）169	（D）170	（E）171
（F）172	（G）173	（H）174	（I）175	（J）176

(b) 当該自動車保険について、期待値原理に基づいて各ドライバーの 1 年間当たりのクレーム額の期待値μに安全割増$\theta\mu$を付加するとともに、社費を定額 45 で、代理店手数料率、利潤率を営業保険料（年払）に対する割合でそれぞれ 15%、5%織り込んで販売することにした。

（イ）(a) で求めた保険料の下限値を当該自動車保険に設定できる営業保険料（年払）の下限値、（ウ）(a) で求めた保険料の上限値を当該自動車保険に設定できる営業保険料（年払）の上限値として考慮すると、保険会社が設定できる安全割増率θの下限値に最も近いものは $\boxed{⑧}$ であり、上限値に最も近いものは $\boxed{⑨}$ である。ただし、計算に当たっては④, ⑦の選択肢から選んだ値（整数値）を用いることとする。

【⑧の選択肢】

（A）0.02	（B）0.03	（C）0.04	（D）0.05	（E）0.06
（F）0.07	（G）0.08	（H）0.09	（I）0.10	（J）0.11

【⑨の選択肢】

（A）0.84	（B）0.85	（C）0.86	（D）0.87	（E）0.88
（F）0.89	（G）0.90	（H）0.91	（I）0.92	（J）0.93

（２）初期サープラスがuの Lundberg モデルにおいて、個々のクレーム額が

$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{x+1}\right)^3 \quad (x > 0)$$

に従い、安全割増率は$\theta = 0.25$とする。n回目にサープラスの「最低記録」を更新したときにおける「記録の更新幅」をL_nとすると、破産とは$L = L_1 + L_2 + \cdots$がuを超えることを意味する。また、初期サープラスがuのときの破産確率を$\varepsilon(u)$とする。このとき、次の（ア）～（ウ）の各問に答えなさい。

（ア）「最低記録」の更新が起こる回数Kの確率分布は、

$$P(K = k) = \left(\boxed{⑩}\right)^k \left(\boxed{⑪}\right) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

となる。

⑩, ⑪に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【⑩、⑪の選択肢】

（A） θ	（B） $1+\theta$	（C） $1-\theta$	（D） $\frac{1}{\theta}$	（E） $\frac{1}{1+\theta}$
（F） $\frac{1}{1-\theta}$	（G） $\frac{\theta}{1+\theta}$	（H） $\frac{\theta}{1-\theta}$	（I） $\frac{1-\theta}{1+\theta}$	（J） $\frac{1+\theta}{1-\theta}$

（イ）初期サープラス$u = 0$で破産が発生したときの欠損額Yの分布$F_Y(y)$を、ラウンド法を用いて離散分布$P(Y = y)$により近似する。ただし、Yのとりうる値は0,1,2,3とし、$P(Y = 3)$は$1 - \sum_{y=0}^{2} P(Y = y)$により求めることとする。このとき、$P(Y = 3)$に最も近いものは$\boxed{⑫}$である。なお、計算の途中において、$P(Y)$は小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの数値を用いることとする。

【⑫の選択肢】

（A）0.01	（B）0.02	（C）0.03	（D）0.04	（E）0.05
（F）0.06	（G）0.07	（H）0.08	（I）0.09	（J）0.10

（ウ）（イ）の近似を用いて求めた破産確率$\varepsilon(2) = P(L > 2) = P(\sum_{n=1}^{K} L_n > 2)$に最も近いものは ⑬ である。なお、計算の途中において、$P(Y), P(L)$は小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの数値を用いることとする。

【⑬の選択肢】

（A）0.10	（B）0.20	（C）0.30	（D）0.40	（E）0.50
（F）0.60	（G）0.70	（H）0.80	（I）0.90	（J）1.00

（３）ある保険会社は保険契約Aと保険契約Bの 2 種類の 1 年契約を 1 契約ずつ引き受けている。年間の事故件数は、いずれも 30%の確率で 1 件、70%の確率で 0 件となる。また、事故発生時の保険金の額およびその発生確率はそれぞれ以下のとおりである。

【保険契約A】

保険金の額	20	50	320
発生確率	20%	50%	30%

【保険契約B】

保険金の額	30	130	340
発生確率	50%	20%	30%

このとき、次の（ア）～（ウ）の各問に答えなさい。

（ア）保険契約A、保険契約Bいずれも 20%比例出再する場合のネット再保険料総額に最も近いものは ⑭ である。

【⑭の選択肢】

（Ａ）15.0　（Ｂ）15.5　（Ｃ）16.0　（Ｄ）16.5　（Ｅ）17.0
（Ｆ）17.5　（Ｇ）18.0　（Ｈ）18.5　（Ｉ）19.0　（Ｊ）19.5

（イ）保険契約Aと保険契約Bの事故件数は互いに独立とし、また、年間の事故件数がどちらの保険契約も 1 件となった場合における保険金の額の同時分布は共単調コピュラで構成されるものとする。年間支払保険金総額に対してエクセスポイント 270 のストップロス再保険を手配するとき、ネット再保険料に最も近いものは ⑮ である。

【⑮の選択肢】

（Ａ）15.0　（Ｂ）15.5　（Ｃ）16.0　（Ｄ）16.5　（Ｅ）17.0
（Ｆ）17.5　（Ｇ）18.0　（Ｈ）18.5　（Ｉ）19.0　（Ｊ）19.5

（ウ）保険契約Aと保険契約Bの事故件数は互いに独立とし、また、年間の事故件数がどちらの保険契約も 1 件となった場合における保険金の額の同時分布は以下のクレイトン・コピュラで構成されるものとする。

$$C(u_1, u_2) = (u_1^{-1} + u_2^{-1} - 1)^{-1}$$

(a) 年間支払保険金総額が 180 となる確率に最も近いものは $\boxed{⑯}$ である。

【⑯の選択肢】

（A）0.82%	（B）0.84%	（C）0.86%	（D）0.88%	（E）0.90%
（F）0.92%	（G）0.94%	（H）0.96%	（I）0.98%	（J）1.00%

(b) 年間支払保険金総額に対してエクセスポイント 270 のストップロス再保険を手配するとき、ネット再保険料に最も近いものは $\boxed{⑰}$ である。

【⑰の選択肢】

（A）15.0	（B）15.5	（C）16.0	（D）16.5	（E）17.0
（F）17.5	（G）18.0	（H）18.5	（I）19.0	（J）19.5

（４）以下の条件を満たすクレーム総額過程$\{S_t\}$における連続時間型モデルの破産確率を考える。

- 個々のクレーム額$X_1, X_2, \cdots$および期間$[0, t]$において発生するクレーム件数N_tは互いに独立である。
- 個々のクレーム額$X_1, X_2, \cdots$は、平均μの指数分布に従う。
- $\{N_t\}$は非斉時ポアソン過程に従い、強度関数$\lambda(t)$は正の定数λ_0を用いて以下のように表される。
  $\lambda(t) = \lambda_0 \exp(t/T)\ (t \geq 0)$
- 期間$[0, t]$の累計収入保険料$c(t)$は、強度関数$\lambda(t)$、安全割増率θ、ある定数Δtにより以下のとおり定義される。

$$c(t) = (1+\theta)\mu \int_0^t \lambda(s + \Delta t) ds \quad (0 \leq \Delta t < \infty)$$

このとき、サープラスの推移U_tは

$$U_t = u_0 + c(t) - S_t$$

u_0：時刻$t = 0$時点のサープラス

と書ける。このとき、（ア），（イ）の空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

なお、必要があれば、$e^{0.1} = 1.105$、$\log 2 = 0.693$を使用すること。

（ア）期間$[0,t]$のクレーム件数N_tは、平均が$\int_0^t \lambda(s)ds$のポアソン分布に従うことから、調整係数が満たす方程式は、

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta')\mu r$$

ここに、$M_X(r)$はクレーム額Xの積率母関数で、$\theta' =$ ⑱ -1

となり、$\{S_t\}$が複合ポアソン過程に従う Lundberg モデルに帰着することがわかる。また、$u_0 = 30$、$\theta = 0.5$、$\mu = 4$、$T = 10$、$\Delta t = 1$のとき、Lundberg の不等式を用いて最も保守的に破産確率を評価すると$\exp(-$ ⑲ $)$となる。

ただし、本設問においては以下がマルチンゲールとなることを前提に解答してよい。

$$\Phi_t = \exp(\tau(c(t) - \sum_{i=1}^{N_t} X_i)) / \mathrm{E}[\exp(\tau(c(t) - \sum_{i=1}^{N_t} X_i))] \qquad (\tau \text{ は定数})$$

【⑱の選択肢】

（A）$(1+\theta)(\Delta t/T)^2$　（B）$(1+\theta)\exp(\Delta t/T)$　（C）$(1+\theta)^{-1}\exp(\Delta t/T)$
（D）$(1+\theta)$　（E）$(1+\theta)^2$　（F）$(1+\theta)\exp(-\Delta t/T)$
（G）$(1+\theta)\Delta t/T$　（H）$(1-\theta)^{-1}\exp(\Delta t/T)$　（I）θ^2
（J）いずれにも該当しない

【⑲の選択肢】

（A）2.00　（B）2.20　（C）2.40　（D）2.60　（E）2.80
（F）3.00　（G）3.20　（H）3.40　（I）3.60　（J）3.80

（イ）あるパラメータu_0, θ, μ, Δtの下で、$T \to \infty$の場合、$t = 10$までに破産する確率がPであったとする。このとき、同じパラメータu_0, θ, μの下で、$T = 10$かつ$\Delta t = 0$の場合に、破産する確率がPとなる時刻tに最も近いものは ⑳ である。

【⑳の選択肢】

（A）6　（B）7　（C）8　（D）9　（E）10
（F）11　（G）12　（H）13　（I）14　（J）15

（５）ある保険契約のクレーム 1 件あたりの損害額Xが、対数正規分布

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x}\exp\left(-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (x > 0)$$

に従っている。この保険契約につき 20 件の損害額の実績値x_i $(i = 1,2,\cdots,20)$が得られており、x_iは

$$\sum_{i=1}^{20} \log x_i = 30, \quad \sum_{i=1}^{20} (\log x_i)^2 = 65$$

を満たしている。このとき、次の（ア）～（ウ）の空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、必要があれば、$e = 2.718$および下表（標準正規分布の上側ε点）の数値を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側ε点： $u(\varepsilon)$

ε	0.100	0.075	0.050	0.025
$u(\varepsilon)$	1.282	1.440	1.645	1.960

（ア）最尤法によりパラメータμおよびσを推定する。μの最尤推定値$\hat{\mu}$に最も近いものは ㉑ であり、σの最尤推定値$\hat{\sigma}$に最も近いものは ㉒ である。

【㉑、㉒の選択肢】

（Ａ）1.0　（Ｂ）1.1　（Ｃ）1.2　（Ｄ）1.3　（Ｅ）1.4
（Ｆ）1.5　（Ｇ）1.6　（Ｈ）1.7　（Ｉ）1.8　（Ｊ）1.9

（イ）最尤推定量の漸近分布を用いて$E[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$の最尤推定量の 95%信頼区間を求めた場合、95%信頼区間の上限に最も近いものは ㉓ である。なお、μおよびσの真なる値は未知であるため、μおよびσの値には（ア）で選択肢から選んだ最尤推定値（小数点以下第 1 位までの数値）を用いること。

【㉓の選択肢】

（Ａ）10.0　（Ｂ）10.2　（Ｃ）10.4　（Ｄ）10.6　（Ｅ）10.8
（Ｆ）11.0　（Ｇ）11.2　（Ｈ）11.4　（Ｉ）11.6　（Ｊ）11.8

（ウ）来年 100 件のクレームが発生することを既知とする。（イ）で求めた$E[X]$の最尤推定量の漸近分布を用いて、来年発生する損害額総額Sの 95%信頼区間を求めることを考える。

(a) 来年発生する損害額総額$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$の期待値$E[S]$の最尤推定量は

$$\widehat{E[S]} = \boxed{㉔} \exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)$$

であり、この推定量の残差平方の期待値は

$$E\left[\left(S - \widehat{E[S]}\right)^2\right] = \boxed{㉕} \exp(2\mu + 2\sigma^2)$$
$$+\left\{\boxed{㉖} \sigma^2(2 + \sigma^2) - \boxed{㉗}\right\} \exp(2\mu + \sigma^2)$$

となる。なお、算出には以下の条件を適用すること。

- 来年発生するクレーム 1 件あたりの損害額Xと$E[X]$の最尤推定量は独立であるとする。
- μおよびσの値には最尤推定値を用いない。

【㉔～㉗の選択肢】

（A）100	（B）150	（C）200	（D）250	（E）300
（F）350	（G）400	（H）450	（I）500	（J）550

(b) Sの 95%信頼区間の上限に最も近いものは$\boxed{㉘}$である。なお、算出には以下の条件を適用すること。

- μおよびσの値には（ア）で選択肢から選んだ最尤推定値（小数点以下第 1 位までの数値）を用いる。
- Sは、期待値が$E[S]$の最尤推定量$\widehat{E[S]}$、分散が$E\left[\left(S - \widehat{E[S]}\right)^2\right]$の正規分布に従うと近似する。

【㉘の選択肢】

（A）1,000	（B）1,020	（C）1,040	（D）1,060	（E）1,080
（F）1,100	（G）1,120	（H）1,140	（I）1,160	（J）1,180

以上

損保数理（解答例）

問題 1

（１）

（ア）①（Ａ）　（イ）②（Ｅ）

［（ア）1 点　（イ）3 点 ］

（ア）

以下のとおり、料率改定率は 4.2%と求められる。

$$損害率 = \frac{335}{570} \times 0.6 + 55\% \times (1-0.6) = 57.3\%$$

$$社費率 = \frac{120}{550} = 21.8\%$$

$$代理店手数料率 = \frac{105}{550} = 19.1\%$$

$$料率改定率 = \frac{57.3\% + 21.8\%}{1 - 19.1\% - 5\%} - 1 = 4.2\%$$

（イ）

D_1、D_2 の算出にあたり、支払件数（A）と支払保険金総額（B）を整理する。

		会計年度				
		前年度	当年度	次年度	合計	平均支払額
契約年度	前年度	A_1 件 B_1	A_2 件 B_2			
	当年度		A_3 件 B_3	A_4 件 B_4	A_3+A_4 件 B_3+B_4	$\frac{B_3+B_4}{A_3+A_4}$
	合計		A_2+A_3 件 B_2+B_3			
	平均支払額		$\frac{B_2+B_3}{A_2+A_3}$			

与えられている条件から、

$A_2=A_1$

$A_3=A_1\times1.02\times1.05=1.071A_1$

$A_4=A_3= 1.071A_1$

$B_2=B_1\times2\times1.1=2.2B_1$

$B_3=B_1\times1.02\times1.05\times1.1=1.178B_1$

$B_4=B_3\times2\times1.1=2.592B_1$

これにより、

$D_1=(1.178B_1+2.592B_1)\div(1.071A_1+1.071A_1)=1.760\times B_1\div A_1$

$D_2=(2.2B_1+1.178B_1)\div(A_1+1.071A_1)=1.631\times B_1\div A_1$

したがって、$D_1\div D_2-1=1.760\div1.631-1=\underline{7.9\%}$

（２）

（ア）③（C）　（イ）④（A）

［（ア）3 点　（イ）1 点 ］

（ア）各リスク区分のクレームコスト$R_{ij}=\frac{C_{ij}}{E_{ij}}$および相対クレームコスト指数$r_{ij}=\frac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$を計算すると、

＜クレームコスト＞

	築年数 15 年以下	築年数 15 年超	計
地域 A	0.500	0.840	0.743
地域 B	0.720	1.100	0.889
計	0.622	0.914	0.800

＜相対クレームコスト＞

	築年数 15 年以下	築年数 15 年超	計
地域 A	0.625	1.050	0.929
地域 B	0.900	1.375	1.111
計	0.778	1.143	1.000

各リスク区分のエクスポージャをE_{ij}、相対クレームコスト指数の推定値を$\hat{r}_{ij}$としたとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12})=0$$
$$E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21})+E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$
$$E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})+E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21})=0$$
$$E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12})+E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22})=0$$

この連立方程式において、C を定数として

$$E_{11}(r_{11}-\hat{r}_{11})=E_{22}(r_{22}-\hat{r}_{22})=C$$
$$E_{21}(r_{21}-\hat{r}_{21})=E_{12}(r_{12}-\hat{r}_{12})=-C$$

と表すことができる。

この分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j$ (i=1,2 j=1,2)と表される。

これを、上記の連立方程式に代入して整理すると、

$$x_1 + y_1 = r_{11} - \frac{C}{E_{11}} \quad ・・・(a)$$

$$x_1 + y_2 = r_{12} + \frac{C}{E_{12}} \quad ・・・(b)$$

$$x_2 + y_1 = r_{21} + \frac{C}{E_{21}} \quad ・・・(c)$$

$$x_2 + y_2 = r_{22} - \frac{C}{E_{22}} \quad ・・・(d)$$

となる。(a)+(d)=(b)+(c)より、

$$\left(r_{11} - \frac{C}{E_{11}}\right) + \left(r_{22} - \frac{C}{E_{22}}\right) = \left(r_{12} + \frac{C}{E_{12}}\right) + \left(r_{21} + \frac{C}{E_{21}}\right)$$

$$\left(0.625 - \frac{C}{200}\right) + \left(1.375 - \frac{C}{200}\right) = \left(1.050 + \frac{C}{500}\right) + \left(0.900 + \frac{C}{250}\right)$$

$$0.625 + 1.375 - 1.050 - 0.900 = \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \frac{1}{500} + \frac{1}{250}\right) C$$

これを解いて C=3.125

したがって

$$y_2 = -x_1 + r_{12} + \frac{C}{E_{12}} = -0.929 + 1.05 + 3.125 \div 500 = 0.128$$

（イ）テキスト 4-9～12 のとおり、a のみ当てはまる。

（３）

<u>（ア）⑤（D）　（イ）⑥（C）　（ウ）⑦（A）（B）</u>

［（ア）１点　（イ）１点　（ウ）完答２点 ］

（ア）　モデル A の AIC は、

$$\mathrm{AIC} = -2\log(L) + 2k = -2 \times (-1{,}463.424) + 2 \times 2 = 2{,}930.848$$

（イ）　モデル C の BIC は、標本の大きさ$n = 100$より、

$$\begin{aligned}\mathrm{BIC} &= -2\log(L) + k\log(n) \\ &= -2 \times (-1{,}451.868) + 4 \times \log 100 \\ &= -2 \times (-1{,}451.868) + 4 \times (2 \times \log 2 + 2 \times \log 5) \\ &= -2 \times (-1{,}451.868) + 4 \times 2 \times (0.693 + 1.609) \\ &= 2{,}922.152\end{aligned}$$

【補足】

各モデルについて、AIC と BIC を計算すると以下のとおり。

モデル	最大対数尤度 $\log(L)$	自由パラメータの数 k	AIC	BIC
A	−1,463.424	2	2,930.848	2,936.056
B	−1,457.716	3	2,921.432	2,929.244
C	−1,451.868	4	2,911.736	<u>2,922.152</u>
D	−1,450.212	5	<u>2,910.424</u>	2,923.444
E	−1,449.954	6	2,911.908	2,927.532

モデル選択においては、AIC と BIC ともに、値が最小となるモデルが選択される。よって、

・比較基準として AIC を用いた場合、モデル D が選択される。

・比較基準として BIC を用いた場合、モデル C が選択される。

（ウ）

（A） 正しい。（テキスト「モデリング」1-9）

（B） 正しい。（テキスト「モデリング」1-9）

（C） モデルの比較基準としては、χ^2適合度検定統計量よりは同検定におけるp値の方が望ましい。それは、p値はモデルの複雑さが増すことを、自由度を<u>減らす</u>ことで自動的に修正するからである。（テキスト 2-5）

（４）

（ア）⑧（Ｆ）　（イ）⑨（Ａ）

［（ア）2 点　（イ）3 点 ］

（ア）　テキスト 6-16、6-19 のとおり。

$$ {}_tV' = W\phi^{n-t} + \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right) = \left(W\phi^{n-t} - \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\cdot \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right) + \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\cdot \ddot{a}_{\overline{n-t|}} $$

$$ = {}_tV + W\phi^n \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} $$

（イ）　（テキスト 6-19、6-20 参照）

保険期間中に全損失効となる契約に支払う返戻金の第 1 保険年度初における現価は、

$$ \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) $$

同様に、第 t+1 保険年度から満期までに全損失効になる契約に支払う返戻金の第 1 保険年度初における現価は、

$$ \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\phi^t\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right) $$

以上より、第 1 保険年度から第t保険年度末の間に全損失効となる契約に支払う返戻金の第 1 保険年度初における現価は、

$$ \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) - \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\phi^t\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right) = \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left\{\left(\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\right) - \phi^t\left(\ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}\right)\right\} $$

（５）

（ア）⑩（Ａ）⑪（Ｃ）　（イ）⑫（Ｉ）⑬（Ｂ）　（ウ）⑭（Ａ）⑮（Ｃ）

［（ア）各１点　（イ）各１点　（ウ）完答１点 ］

（ア）

各 Case の支払件数をN_A、N_B、各 Case で計測対象とする支払保険金をX_A、X_Bとすると

$$F_{N_A}(0) = P_{N_A}(N_A \le 0) = 0.98 > 0.975$$

より

$$VaR_{97.5\%}(X_A) = \min\left\{x_A \middle| F_{X_A}(x_A) \ge 97.5\%\right\} = 0$$

同様に、与えられた数表より

$$F_{N_B}(1) = P_{N_B}(N_B \le 1) = 0.8795 < 0.975$$

$$F_{N_B}(2) = P_{N_B}(N_B \le 2) = 0.9783 > 0.975$$

であるので

$$VaR_{97.5\%}(X_B) = \min\{x_B | F_{X_B}(x_B) \ge 97.5\%\} = 2 \times 100 = 200$$

（イ）

$$TVaR_{97.5\%}(X_A) = \frac{1}{1-0.975}\int_{0.975}^{1} VaR_t\,(X_A)dt = \frac{1}{0.025}(3{,}000 \times 0.02) = 2{,}400$$

$$TVaR_{97.5\%}(X_B) = \frac{1}{1-0.975}\int_{0.975}^{1} VaR_t\,(X_B)dt$$

$$= \frac{1}{0.025}\{(0.9783 - 0.975) \times 100 \times 2 + (0.9971 - 0.9783) \times 100 \times 3$$

$$+(0.9997 - 0.9971) \times 100 \times 4 + (1.0000 - 0.9997) \times 100 \times 5\} = 299.6$$

（ウ）

（ア），（イ）の結果より、Case.2 の方がリスク量が大きく測定されているのは VaR である。VaR は「劣加法性」が成り立っておらず、複数のリスクをあわせたリスクに対する評価が、それぞれのリスクについての評価（=0）の合計額以下となっていないことからこのような結果となっていると考えられる。

また、「平行移動不変性」「単調性」「正の同次性」については、VaR はいずれも満たしている。（テキスト 10-51）

問題２

（１）

（ア）①（Ｅ）　（イ）②（Ｃ）　（ウ）③（Ｅ）④（Ａ）⑤（Ｃ）⑥（Ｉ）

［（ア）2 点　（イ）2 点　（ウ）完答 3 点 ］

（ア）テキスト 8-58 練習問題 2 より、パラメータλのポアソン過程に従うクレーム件数過程$\{N_{\mathrm{t}}\}$に対して、$T_n =$（n 回目のクレームが発生する時刻）として定義される確率変数T_{n}は、$\Gamma(n,\lambda)$に従う。そのため、初めての事故が発生するまでの期待値は、T_1～$\Gamma(1, 0.5)$の期待値である 2 か月となる。

（イ）免責の導入による支払いの生じる事故件数の減少割合は

$$P(X \leq 10) = F_X(10) = 1 - e^{-\frac{10}{20}} = 0.4$$

免責金額の導入後の支払いの生じる事故件数は、パラメータ$\lambda' = 0.5 \times (1 - 0.4) = 0.3$件のポアソン過程に従う。そのため、12 カ月無事故の確率は、

$$P(N_{12} = 0) = e^{-0.3\times12} = 0.0252 \ldots$$

となる。

なお、問題文中の選択肢（Ｅ）（Ｆ）に同一の数値が与えられていたが、正答である（Ｃ）のみを加点対象とした。

（ウ）（イ）より

$$\begin{cases} P(N_t = 0) = e^{-0.5t} \quad (0 \leq t \leq 12) \\ P(N_t - N_{12} = 0) = e^{-0.3(t-12)} \quad (12 < t) \end{cases}$$

よって、$0 \leq t \leq 12$のとき、

$$\tau(t) = -\log P(N_t = 0) = 0.5t$$

$12 < t$のとき、ポアソン過程が独立増分過程である（テキスト 8-13～16）ことから

$$\begin{aligned} P(N_t = 0) &= P(N_t - N_{12} = 0 \cap N_{12} = 0) \\ &= P(N_t - N_{12} = 0) \times P(N_{12} = 0) \\ &= e^{-0.3(t-12)} \times e^{-0.5\times 12} \\ &= e^{-0.3t-2.4} \end{aligned}$$

となり、

$$\tau(t) = -\log P(N_t = 0) = 0.3t + 2.4$$

（２）

（ア）⑦（Ｉ）　（イ）⑧（Ｃ）

［（ア）３点　（イ）４点 ］

（ア）

ロスディベロップメントファクターを計算すると以下のとおりとなる。

事故年度		経過年度		
	i	1→2	2→3	3→4
2021	1	1.805	1.146	1.106
2022	2	1.796	1.102	
2023	3	1.724		

経過年度	適用ロスディベロップメントファクター	
1→2	1.762	＝ (1.805×1＋1.796×2＋1.724×3) / 6
2→3	1.117	＝ (1.146×1＋1.102×2) / 3
3→4	1.106	＝ 1.106

事故年度	累積支払保険金のロスディベロップメントファクター	
2021	1.000	
2022	1.106	＝ 1.106
2023	1.235	＝ 1.106×1.117
2024	2.177	＝ 1.106×1.117×1.762

これらを各事故年度の直近累計支払保険金に乗じると、予想最終発生保険金は以下のとおりとなる。

事故年度	予想最終発生保険金	
2021	3,640	
2022	4,070	＝ 3,680×1.106
2023	4,705	＝ 3,810×1.235
2024	6,509	＝ 2,990×2.177

したがって、支払備金は

（3,640＋4,070＋4,705＋6,509）－（3,640＋3,680＋3,810＋2,990）＝ 4,804

となる。

（イ）

与えられた契約年度ごとの営業保険料と予定損害率から、事故年度ごとの最終発生保険金の当初予測値を計算すると以下のとおりとなる。

事故年度	最終発生保険金の当初予測値	
2021	3,890	＝ (8,200×40%＋9,000×50%) / 2
2022	4,800	＝ (9,000×50%＋10,200×50%) / 2
2023	5,940	＝ (10,200×50%＋11,300×60%) / 2
2024	7,230	＝ (11,300×60%＋12,800×60%) / 2

これより、各事故年度のボーンヒュッター・ファーガソン法による予想最終累計発生保険金は以下のとおり算出される。

事故年度	ボーンヒュッター・ファーガソン法による予想最終累計発生保険金	
2021	3,640	$= \left(1-\frac{1}{1}\right)\times 3{,}890 + 3{,}640$
2022	4,140	$= \left(1-\frac{1}{1.106}\right)\times 4{,}800 + 3{,}680$
2023	4,940	$= \left(1-\frac{1}{1.235}\right)\times 5{,}940 + 3{,}810$
2024	6,899	$= \left(1-\frac{1}{2.177}\right)\times 7{,}230 + 2{,}990$

したがって、支払備金は

（3,640＋4,140＋4,940＋6,899）－（3,640＋3,680＋3,810＋2,990）＝ <u>5,499</u>

となる。

（３）

（ア）⑨（D）　（イ）⑩（A）

［（ア）4 点　（イ）4 点 ］

（ア）ネット再保険料が等しい再保険処理のうちで、ストップロス再保険$I(X)=\max(X-d,0)$が保有保険金の分散を最小にする。（テキスト 9-18 より）

$$E\big(I(X)\big)=\int_d^\infty (x-d)\frac{3}{x^4}dx=3\int_d^\infty\left(\frac{1}{x^3}-\frac{d}{x^4}\right)dx=3\left[-\frac{1}{2x^2}+\frac{d}{3x^3}\right]_d^\infty=\frac{1}{2d^2}=0.125$$

より、エクセスポイントdは、$d=2$である。

保有保険金をZとすると、

$$Z=\begin{cases}X\ (1<X\le 2)\\ 2\ (X>2)\end{cases}$$

であるから、

$$E(Z)=\int_1^2 x\frac{3}{x^4}dx+\int_2^\infty 2\frac{3}{x^4}dx=\left[-\frac{3}{2x^2}\right]_1^2+\left[-\frac{2}{x^3}\right]_2^\infty=\left(-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}\right)+\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{8}$$

$$E(Z^2)=\int_1^2 x^2\frac{3}{x^4}dx+\int_2^\infty 2^2\frac{3}{x^4}dx=\left[-\frac{3}{x}\right]_1^2+\left[-\frac{4}{x^3}\right]_2^\infty=\left(-\frac{3}{2}+3\right)+\left(0+\frac{1}{2}\right)=2$$

$$V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=2-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{7}{64}=0.109375$$

（イ）保有保険金の分散が等しい再保険処理のうちで、比例再保険$J(X)=kY\ (0\le k\le 1)$が再保険金の分散を最小にする。（テキスト 9-19 より）

$V(Y)=\frac{3}{4}$、$V(J(Y)-Y)=\frac{1}{3}$、$Cov(Y,J(Y)-Y)=\sqrt{V(Y)V(J(Y)-Y)}=\frac{1}{2}$より、

$$V\big(J(Y)\big)=V(Y+J(Y)-Y)=V(Y)+V(J(Y)-Y)-2Cov(Y,J(Y)-Y)$$
$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}=0.083$$

なお、kの値は、$V(J(Y)-Y)=V(kY-Y)=(k-1)^2V(Y)=(k-1)^2\times\frac{3}{4}=\frac{1}{3}$より、

$k=\frac{1}{3}$となり、確かに$0\le k\le 1$を満たす。

（４）

（ア）⑪（A）⑫（I）⑬（E）　（イ）⑭（H）

［（ア）完答 4 点　（イ）4 点 ］

（ア）

条件付き期待値の性質から、

$E[X_{n+1}|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}] = E[E[X_{n+1}|\Theta]|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}] = E[E[X|\Theta]|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}]$

の関係式が成り立つ。

$E[(E[X|\Theta]-a-b\bar{X})^2]$を$a,b$それぞれについて偏微分して 0 とおくと

$$\begin{cases} E[E[X|\Theta]-a-b\bar{X}]=0 \\ E[\bar{X}(E[X|\Theta]-a-b\bar{X})]=0 \end{cases}$$

第 1 式より、$E[\bar{X}]\,E[E[X|\Theta]-a-b\bar{X}]=0$に注意すると、第 2 式より

$$\begin{aligned} 0 &= Cov[\bar{X}, E[X|\Theta]-a-b\bar{X}] \\ &= Cov\big[\bar{X}, E[X|\Theta]\big] - bCov[\bar{X},\bar{X}] \\ &= Cov\big[\bar{X}, E[X|\Theta]\big] - bV[\bar{X}] \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{V[E(X|\Theta)]}{V[\bar{X}]}$$

また、連立方程式の第 1 式から、以下を得る。

$a = E[E(X|\Theta)] - bE[\bar{X}] = (1-b)\,E[X]$

（イ）

$$b = \frac{V[E(X|\Theta)]}{V[\overline{X}]} = \frac{n}{n + \frac{E[V(X|\Theta)]}{V[E(X|\Theta)]}}$$

であり、aとbをTに整理して代入すると、

$T = b\overline{X} + (1-b)E[X]$

が得られる。（すなわち、（ア）は Bühlmann モデルである。）

よって、

$E[X] = E[E(X|\Theta)] = E[\Theta] = p_1\theta_1 + p_2\theta_2 = 0.8$

$E[V(X|\Theta)] = E[\Theta] = p_1\theta_1 + p_2\theta_2 = 0.8$

$V[E(X|\Theta)] = V[\Theta] = E[\Theta^2] - E[\Theta]^2 = p_1p_2(\theta_1 - \theta_2)^2 = 0.04$

より、

$b = 0.333\cdots$

$T = 0.6$を得る。

問題３

（１）

（ア）①（Ｅ）②（Ｂ）③（Ｒ）　（イ）(a) ④（Ｊ）　(b) ⑤（Ａ）⑥（Ｃ）

（ウ）(a) ⑦（Ｇ）　(b) ⑧（Ｄ）⑨（Ｄ）

［（ア）完答 1 点　（イ）(a) 2 点　(b) 完答 2 点　（ウ）(a) 2 点　(b) 完答 2 点 ］

（ア）

テキスト 2-8、2-9 のとおり。

（イ）

(a)

現在保有している富をcとすると、保険を販売しないときの効用は$u(c)$となる。
保険料をP、保険金をXとすると、保険販売を前提とした期待効用$E(u(c+P-X))$はPの増加関数であるので、$E(u(c+P-X))$と$u(c)$が一致するときの値が保険料の下限値となる。

$$u(c) = -e^{-hc}$$
$$E(u(c+P-X)) = E(-e^{-h(c+P-X)}) = -e^{-hc}e^{-hP}M_X(h)$$

であるので、Pについて解くと、

$$u(c) = E(u(c+P-X))$$
$$1 = e^{-hP}M_X(h)$$
$$P = \frac{\log M_X(h)}{h}$$

となる。

また、（ア）の数式にガンマ分布のパラメータが$\alpha = 3$、$\beta = 3$を代入することで、各ドライバーの年間自動車事故件数Nは$NB(3, 0.75)$に従うことが分かり、1 件当たりのクレーム額をYとすると、

$M_y(t) = \frac{1}{1-50t}$となることから、テキスト 2-14 より

$$M_X(t) = \left(\frac{0.75}{1-0.25M_y(t)}\right)^3 = \left(\frac{0.75}{1-\frac{0.25}{1-50t}}\right)^3$$

したがって、Pに$h = 0.01$を代入すると、

$$P=\frac{\log(\frac{3}{2})^3}{0.01}=\frac{3(\log 3-\log 2)}{0.01}=121.8$$

となる。

（b）

（a）より、

$$P=\frac{\log M_X\,(h)}{h}$$

であり、Pの値はhのみに依存する（現在保有している富cには依存しない）。

また、Pに$h=0.011$を代入すると、

$$P=\frac{\log(\frac{27}{16})^3}{0.011}=\frac{3(3\log 3-4\log 2)}{0.011}=143.1818\ldots$$

となる。

（ウ）

（a）

テキスト 7-21 練習問題 2 より、効用関数が$u(y)=-e^{-\mathrm{h}_0 y}$である人が保有しているリスク$X$に対して支払う保険料の上限$P_0$は

$$P_0=\frac{\log M_X\,(h_0)}{h_0}$$

となる。したがって、P_0に$h_0=0.012$を代入すると、

$$P_0=\frac{\log 2^3}{0.012}=\frac{3\log 2}{0.012}=173.25$$

（b）

各ドライバーの 1 年間当たりの事故発生件数の期待値は$\frac{3\times(1-0.75)}{0.75}=1$なので、1 年間当たりのクレーム額の期待値は$\mu=1\times 50=50$となる。

したがって、保険会社が 1 年間当たりの保険金の期待値μに対して設定できる安全割増率θの上限値と下限値は以下の不等式によって与えられる。

$$122\leq\frac{50\times(1+\theta)+45}{1-(0.15+0.05)}\leq 173$$

$$\therefore 0.052\leq\theta\leq 0.868$$

（２）

（ア）⑩（E）⑪（G）　（イ）⑫（H）　（ウ）⑬（D）

［（ア）完答2点　（イ）3点　（ウ）4点 ］

（ア）

テキスト8-44〜8-46のとおり、

$$P(K=k)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

となり、Kは成功確率$\theta/(1+\theta)$の幾何分布に従う。

（イ）

$$\mu=E[X]=\int_0^\infty\{1-F(x)\}dx=\int_0^\infty(x+1)^{-3}dx=\left[-\frac{(x+1)^{-2}}{2}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}$$

であり、テキスト(8.5)式より、

$$F_Y(y)=\frac{1}{\mu}\int_0^y\{1-F(u)\}du=\frac{1}{\mu}\int_0^y(x+1)^{-3}du=1-(y+1)^{-2}$$

ラウンド法は、連続分布における離散値の前後一定区間の確率を当該離散値の確率とする手法であるので、$P(Y<0.5)$、$P(0.5\le Y<1.5)$、$P(1.5\le Y<2.5)$をそれぞれ$P(Y=0)$、$P(Y=1)$、$P(Y=2)$とし、残りを$P(Y=3)$とすればよい。

$$P(Y=0)=F_Y(0.5)=1-1.5^{-2}=0.5556$$
$$P(Y=1)=F_Y(1.5)-F_Y(0.5)=1.5^{-2}-2.5^{-2}=0.2844$$
$$P(Y=2)=F_Y(2.5)-F_Y(1.5)=2.5^{-2}-3.5^{-2}=0.0784$$
$$P(Y=3)=1-\sum_{y=0}^{2}P(Y=y)=0.0816$$

（ウ）

求める破産確率は

$$\varepsilon(2)=P(L>2)$$

と表される。

Kは成功確率$p=\theta/(1+\theta)=0.2$の幾何分布に従うので、

$$p_k=(1-p)^kp=(1-p)p_{k-1}$$

であり、$a=1-p,\ b=0$とおくと、

$$p_k=\left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}$$

の形に表すことができる。

また、L_nはYと同一の分布に従うので、（イ）により離散化したYの確率分布を用いると、再帰法によりLの確率分布を求めることができる。ここで、$P_K(t)$をKの確率母関数とすると、

$$P(L=0)=P_K\big(P(Y=0)\big)=\frac{p}{1-P(Y=0)(1-p)}=0.3600$$

$$P(L=1)=\frac{\sum_{y=1}^{1}\left(a+\frac{by}{1}\right)P(Y=y)P(L=1-y)}{1-a\cdot P(Y=0)}=\frac{1-p}{1-(1-p)P(Y=0)}P(Y=1)P(L=0)=0.1474$$

$$P(L=2)=\frac{\sum_{y=1}^{2}\left(a+\frac{by}{2}\right)P(Y=y)P(L=2-y)}{1-a\cdot P(Y=0)}$$

$$=\frac{1-p}{1-(1-p)P(Y=0)}\{P(Y=1)P(L=1)+P(Y=2)P(L=0)\}=0.1010$$

したがって、

$$\varepsilon(2)=P(L>2)=1-\sum_{l=0}^{2}P(L=l)=0.3916$$

（３）

（ア）⑭（C）　（イ）⑮（G）　（ウ）（a）⑯（Ｉ）　（b）⑰（C）

［（ア）２点　（イ）２点　（ウ）（a）３点　（b）３点 ］

（ア）

保険契約 A のネット出再保険料は、$30\% \times (20 \times 20\% + 50 \times 50\% + 320 \times 30\%) \times 20\% = 7.5$

保険契約 B のネット出再保険料は、$30\% \times (30 \times 50\% + 130 \times 20\% + 340 \times 30\%) \times 20\% = 8.58$

よって、ネット再保険料総額は$7.5 + 8.58 = 16.08$

（イ）

①保険契約Aのみ事故発生

②保険契約Bのみ事故発生

③保険契約A, Bいずれも事故発生

の 3 パターンに分けて考える。

①保険契約Aのみ事故発生

ストップロス再保険金の回収が発生するのは、保険金の額が 320 となった場合のみ。

したがって、この場合の回収保険金の期待値は、$21\% \times (320 - 270) \times 30\% = 3.15$

②保険契約Bのみ事故発生

ストップロス再保険金の回収が発生するのは、保険金の額が 340 となった場合のみ。

したがって、この場合の回収保険金の期待値は、$21\% \times (340 - 270) \times 30\% = 4.41$

③保険契約A, Bいずれも事故発生

共単調コピュラから、保険金総額の発生確率を計算すると以下のとおりとなる。

＜保険金総額の発生確率＞

保険金総額	50	80	180	660
発生確率	20%	30%	20%	30%

このうち、ストップロス再保険金の回収が発生するのは、保険金総額が660となった場合のみ。

したがって、この場合の回収保険金の期待値は、$9\% \times (660 - 270) \times 30\% = 10.53$

①～③を合計すると、ネット再保険料は$3.15 + 4.41 + 10.53 = 18.09$

（ウ）

（a）

年間支払保険金総額が 180 となる事象は保険契約Aの保険金の額が 50、かつ、保険契約Bの保険金の額が 130 のときのみである。

保険金の額の同時分布がクレイトン・コピュラ$C(u_1,u_2)=(u_1^{-1}+u_2^{-1}-1)^{-1}$で構成されることから、保険契約$A,B$いずれも事故が発生したとき、それぞれの事象の発生確率は以下のように求められる。

$C(u_1,u_2)$		u_1		
		20	50	320
u_2	30	$C(0.2,0.5)$ $=(0.2^{-1}+0.5^{-1}-1)^{-1}$ $=0.166667$	$C(0.7,0.5)$ $=(0.7^{-1}+0.5^{-1}-1)^{-1}$ $=0.411765$	$C(1,0.5)$ $=(1^{-1}+0.5^{-1}-1)^{-1}$ $=0.5$
	130	$C(0.2,0.7)$ $=(0.2^{-1}+0.7^{-1}-1)^{-1}$ $=0.184211$	$C(0.7,0.7)$ $=(0.7^{-1}+0.7^{-1}-1)^{-1}$ $=0.538462$	$C(1,0.7)$ $=(1^{-1}+0.7^{-1}-1)^{-1}$ $=0.7$
	340	$C(0.2,1)$ $=(0.2^{-1}+1^{-1}-1)^{-1}$ $=0.2$	$C(0.7,1)$ $=(0.7^{-1}+1^{-1}-1)^{-1}$ $=0.7$	$C(1,1)$ $=(1^{-1}+1^{-1}-1)^{-1}$ $=1$

発生確率		u_1		
		20	50	320
u_2	30	0.166667	$0.411765-0.166667$ $=0.245098$	$0.5-0.411765$ $=0.088235$
	130	$0.184211-0.166667$ $=0.017544$	$0.538462-0.411765$ -0.017544 $=0.109153$	$0.7-0.5-0.017544$ -0.109153 $=0.073303$
	340	$0.2-0.184211$ $=0.015789$	$0.7-0.538462$ -0.015789 $=0.145749$	$1-0.7-0.015789$ -0.145749 $=0.138462$

保険契約A、保険契約Bいずれも事故が発生する確率は 9%であるため、求める確率は

$$9\%\times 0.109153=0.9824\%$$

（b）

（イ）と同様に、①保険契約Aのみ事故発生、②保険契約Bのみ事故発生、③保険契約A,Bいずれも事故発生の 3 パターンに分けて考えるが、①および②は（イ）と全く同じであるため、③のみ考えればよい。

③保険契約 A,B いずれも事故発生

与えられたクレイトン・コピュラから、270 を超える保険金総額になる場合の発生確率を計算すると以下のとおりとなる。

＜保険金総額の発生確率（保険金総額が 270 を超える場合）＞

Aの保険金	320	320	20	50	320
Bの保険金	30	130	340	340	340
保険金総額	350	450	360	390	660
再保険回収額	80	180	90	120	390
発生確率 （9%を乗じる前）	0.088235	0.073303	0.015789	0.145749	0.138462

したがって、この場合の回収保険金の期待値は、

$$9\% \times \{80 \times 0.088235 + 180 \times 0.073303$$
$$+90 \times 0.015789 + 120 \times 0.145749 + 390 \times 0.138462\} = 8.3848$$

①～③を合計すると、ネット出再保険料は$3.15 + 4.41 + 8.3848 = 15.9448$

（４）

（ア）⑱（Ｂ）⑲（Ｆ）　（イ）⑳（Ｂ）

［（ア）各３点　（イ）４点 ］

（ア）

調整方程式 r は、$\tau = -r$としたときにΦ_tの分母が 1 となるような値として求められる。すなわち、

$e^{-rc(t)} M_{N_t}\left(\log M_X(r)\right) = 1$

を任意の時刻で満たすようなrを求めればよい。

本問の場合、クレーム件数N_tは平均が$\int_0^t \lambda(s)ds$のポアソン分布に従うことから、N_tの積率母関数は、

$$M_{N_t}(\rho) = \exp\left(\int_0^t \lambda(s)ds \cdot (e^{\rho} - 1)\right)$$

と書けるので、上記の調整方程式は以下のように変形される。

$$-rc(t) + \int_0^t \lambda(s)ds \cdot (M_X(r) - 1) = 0$$

$$-r(1+\theta)\mu \int_0^t \lambda(s+\Delta t)ds + \int_0^t \lambda(s)ds \cdot (M_X(r) - 1) = 0$$

$$-r(1+\theta)\mu \cdot \exp(\Delta t/T) \int_0^t \lambda(s)ds + \int_0^t \lambda(s)ds \cdot (M_X(r) - 1) = 0$$

$$-r(1+\theta)\mu \cdot \exp(\Delta t/T) + (M_X(r) - 1) = 0$$

$$M_X(r) = 1 + (1+\theta) \cdot \exp(\Delta t/T)\mu r$$

次に、$\theta = 0.5$、$\mu = 4$、$T = 10$、$\Delta t = 1$の場合に上記の調整方程式は、指数分布の積率母関数$M_X(r) = 1/(1 - \mu r)$を代入すると、以下のようになる。

$$r = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{1}{(1+\theta)\exp(\Delta t/T)}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1.5\exp(0.1)}\right)$$

よって、最も保守的に評価した破産確率は、$u_0 = 30$ と合わせると、

$$\exp(-ru_0) = \exp\left(-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1.5\exp(0.1)}\right) \cdot 30\right) = \exp(-2.98)$$

となる。

（イ）

あるパラメータ$u_0,\ \theta,\ \mu$の下で$T \to \infty$とするとき、$\theta' = \theta$、クレーム強度λ_0、個々のクレーム額の期待値μの Lundberg モデルに帰着する。この Lundberg モデルにおいて、ある時刻 t までに破産する確率を$P_1(t)$とおく。
このとき、オペレーショナル・タイムは$\tau_1(t) = \lambda_0 t$であるから、このモデルは、$\theta' = \theta$、クレーム強度 1、個々のクレーム額の期待値μ、クレーム件数$N_{\tau_1(t)}$すなわち時間軸を$\tau_1(t)$とした Lundberg モデルと考えることもできる。

他方、同じパラメータ$u_0,\ \theta,\ \mu$の下で、$T = 10$かつ$\Delta t = 0$の場合を考えると、$\theta' = \theta$、クレーム強度$\lambda_0 \exp(t/10)$、個々のクレーム額の期待値μの Lundberg モデルに帰着する。この Lundberg モデルにおいて、ある時刻 t までに破産する確率を$P_2(t)$とおく。
このとき、オペレーショナル・タイムは$\tau_2(t) = 10\lambda_0(\exp(t/10) - 1)$であるから、このモデルは、$\theta' = \theta$、クレーム強度 1、個々のクレーム額の期待値$\mu$、クレーム件数$N_{\tau_2(t)}$すなわち時間軸を$\tau_2(t)$とした Lundberg モデルと考えることもできる。

ここで、パラメータ$u_0,\ \theta,\ \mu$の下で$\theta' = \theta$、クレーム強度1、個々のクレーム額の期待値μ、クレーム件数N_tすなわち時間軸をtとした Lundberg モデルにおいて、ある時刻tまでに破産する確率を$P_3(t)$とおく。
上記の分析から、$P_1(t) = P_3(\tau_1(t))$、$P_2(t) = P_3(\tau_2(t))$と書けることに注意する。

したがって、求める時刻 t は条件$P_1(10) = P_2(t)$を満たすが、これは条件$P_3(\tau_1(10)) = P_3(\tau_2(t))$と同値であることがわかる。よって、$\tau_1(10) = \tau_2(t)$を満たす$t$が求める時刻とわかるので、

$10\lambda_0 = 10\lambda_0(\exp(t/10) - 1)$

$t = 10\log 2 = 6.93\cdots$が求める時刻である。

（５）

（ア）㉑（Ｆ）㉒（Ａ）　（イ）㉓（Ｈ）

（ウ）（a）㉔（Ａ）㉕（Ａ）㉖（Ｄ）㉗（Ａ）　（b）㉘（Ｊ）

［（ア）各１点　（イ）４点　（ウ）（a）完答２点　（b）２点 ］

（ア）

対数尤度関数

$$l(\mu,\sigma)=\log L(\mu,\sigma)=\log\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x_i}\exp\left(-\frac{(\log x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\quad (n=20)$$

に対して、

$$\frac{\partial}{\partial\mu}l(\mu,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\log x_i-\mu}{\sigma^2}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial\sigma}l(\mu,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{(\log x_i-\mu)^2}{\sigma^3}\right)=0$$

を解いて、

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i=\frac{30}{20}=1.5$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\hat{\mu})^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\log x_i)^2-2\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n}\log x_i+n\hat{\mu}^2\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{20}(65-2\times1.5\times30+20\times1.5^2)}=1$$

（イ）

次に、クレーム１件あたりの損害額Xの期待値$E[X]$の最尤推定量の漸近分布を求める。

テキスト 2-2～4 よりデルタ法を用いると、$E[X]=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)$の最尤推定量は近似的に正規分布

$N\left(\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right),\ \frac{\sigma^2(2+\sigma^2)}{2n}\exp(2\mu+\sigma^2)\right)$に従う。

μ、σの真なる値を$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$で推定すると、$E[X]$の最尤推定量の 95%信頼区間の上限値は

$$\exp\left(\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)+u(0.025)\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2(2+\hat{\sigma}^2)}{2n}\exp(2\hat{\mu}+\hat{\sigma}^2)}$$

$$= \exp\left(1.5 + \frac{1^2}{2}\right) + 1.960\sqrt{\frac{1^2(2+1^2)}{2\times 20}\exp(2\times 1.5 + 1^2)} = \exp(2) + 1.960\sqrt{\frac{3}{40}\exp(4)} = 11.4$$

（ウ）

（a）

来年発生する損害額総額$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$の期待値$E[S]$の最尤推定量は

$\widehat{E[S]} = 100\widehat{E[X]} = 100\exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)$である。この推定量の残差平方の期待値は

$$\begin{aligned}
E\left[\left(S - \widehat{E[S]}\right)^2\right] &= E\left[\left\{S - 100\exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right\}^2\right] \\
&= E\left[\left\{\left(S - 100\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) + \left(100\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - 100\exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right)\right\}^2\right] \\
&= E\left[\left\{S - 100\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}^2\right] + 10{,}000E\left[\left\{\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right\}^2\right] \\
&\quad +200E\left[\left\{S - 100\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}\left\{\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right\}\right] \cdots (*) \\
&= E\left[\left\{S - 100\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}^2\right] + 10{,}000E\left[\left\{\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) - \exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right\}^2\right] \\
&= V(S) + 10{,}000V\left[\exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

となる。なお、$(*)$第三項は独立な確率変数の積の期待値であり、計算するとゼロとなる。

ここで、第一項について

$$\begin{aligned}
V(S) &= 100V(X) = 100(E[X^2] - E[X]^2) \\
&= 100\{\exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)\}
\end{aligned}$$

第二項について（イ）より

$$V\left[\exp\left(\hat{\mu} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right)\right] = \frac{\sigma^2(2+\sigma^2)}{2n}\exp(2\mu + \sigma^2)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
E\left[\left(S - \widehat{E[S]}\right)^2\right] &= 100\{\exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)\} + 10{,}000\frac{\sigma^2(2+\sigma^2)}{2n}\exp(2\mu + \sigma^2) \\
&= 100\exp(2\mu + 2\sigma^2) + \left\{10{,}000\frac{\sigma^2(2+\sigma^2)}{2\times 20} - 100\right\}\exp(2\mu + \sigma^2) \\
&= 100\exp(2\mu + 2\sigma^2) + \{250\sigma^2(2+\sigma^2) - 100\}\exp(2\mu + \sigma^2)
\end{aligned}$$

（b）

μ、σの真なる値を$\hat{\mu}$、$\hat{\sigma}$で推定して

$$E\left[\left(S-\widehat{E[S]}\right)^2\right]=100\exp(2\times 1.5+2\times 1^2)+\{250\times 1^2\times(2+1^2)-100\}\exp(2\times 1.5+1^2)$$

$$=100\exp(5)+650\exp(4)$$

を得る。したがって、Sの 95%信頼区間の上限値は

$$\widehat{E[S]}+u(0.025)\sqrt{E\left[\left(S-\widehat{E[S]}\right)^2\right]}=100\exp\left(1.5+\frac{1^2}{2}\right)+1.960\sqrt{100\exp(5)+650\exp(4)}$$

$$=1{,}178$$