生保数理（問題）

問題１． 次の（１）～（６）について、各問の指示に従い解答しなさい。

各４点（計２４点）

（１） $\ddot{a}_{\infty}=51$ のとき、$(Ia)_{\infty}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。

（Ａ） 2,500　（Ｂ） 2,510　（Ｃ） 2,520　（Ｄ） 2,530　（Ｅ） 2,540
（Ｆ） 2,550　（Ｇ） 2,560　（Ｈ） 2,570　（Ｉ） 2,580　（Ｊ） 2,590

（2） $\mu_x = \dfrac{1}{2(a-x)+1}\left(0 \leqq x < a + \dfrac{1}{2}\right)$ のとき、$\dfrac{1-2\mu_{31}}{1+2\mu_{31}}$ の値に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、a は $a > 100$ を満たす定数とし、$l_{30} = 98{,}694$ 、$l_{32} = 97{,}460$ とする。

（Ａ） 0.950	（Ｂ） 0.955	（Ｃ） 0.960	（Ｄ） 0.965	（Ｅ） 0.970
（Ｆ） 0.975	（Ｇ） 0.980	（Ｈ） 0.985	（Ｉ） 0.990	（Ｊ） 0.995

（３） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険期間 10 年の定期保険特約付養老保険において、養老保険の保険金額が 1、定期保険特約の保険金額が 9 のときの第 7 保険年度末の平準純保険料式責任準備金の値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、 $A^{1}_{x:\overline{7|}} = 0.03588$ 、 $A_{x:\overline{7|}}^{\ \ 1} = 0.86654$ 、 $A^{1}_{x+7:\overline{3|}} = 0.02478$ 、 $A_{x+7:\overline{3|}}^{\ \ \ 1} = 0.93190$ とする。

（Ａ） 0.677	（Ｂ） 0.687	（Ｃ） 0.697	（Ｄ） 0.707	（Ｅ） 0.717
（Ｆ） 0.727	（Ｇ） 0.737	（Ｈ） 0.747	（Ｉ） 0.757	（Ｊ） 0.767

（４） x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年の養老保険において、予定利率 $i=1.00\%$ とし、死力は年齢によらず一定とする。
このとき、上記の基礎率から、

利力を 0.01 だけ加算した場合の年払純保険料を P_A、

死力を 0.01 だけ加算した場合の年払純保険料を P_B

とするとき、$P_B - P_A$ の値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、$e^{0.01}=1.01$ とする。

（Ａ）	0.00970	（Ｂ）	0.00972	（Ｃ）	0.00974	（Ｄ）	0.00976	（Ｅ）	0.00978
（Ｆ）	0.00980	（Ｇ）	0.00982	（Ｈ）	0.00984	（Ｉ）	0.00986	（Ｊ）	0.00988

（５）40 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 25 年の養老保険において、責任準備金をチルメル割合 0.03 の 10 年チルメル式で積み立てるとする。
このとき、第 3 保険年度の貯蓄保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、予定利率 $i = 0.25\%$ 、$\ddot{a}_{40:\overline{25}|} = 23.5410$ 、$\ddot{a}_{42:\overline{23}|} = 21.7059$ 、$\ddot{a}_{43:\overline{22}|} = 20.7866$ 、$\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 9.8227$ 、$\ddot{a}_{42:\overline{8}|} = 7.8849$ 、$\ddot{a}_{43:\overline{7}|} = 6.9117$ とする。

（Ａ） 0.0397　（Ｂ） 0.0400　（Ｃ） 0.0403　（Ｄ） 0.0406　（Ｅ） 0.0409
（Ｆ） 0.0412　（Ｇ） 0.0415　（Ｈ） 0.0418　（Ｉ） 0.0421　（Ｊ） 0.0424

（6）50 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 20 年の養老保険において、10 年経過後に延長保険へ変更した場合の生存保険金額を S とする。なお、10 年経過時に貸付金 L があるものとする。

貸付金 L が一定金額以上の場合、延長保険の生存保険金額 S が発生しないが、生存保険金額 S が発生しない場合の最小の貸付金 L の値に最も近いものは次のうちどれか。

ただし、次のとおりとする。

・延長保険の予定事業費は、毎年度始の死亡保険金額 1 に対し 0.001 とし、生存保険金額に対する予定事業費はないものとする。
・生存保険金額を計算する際は、解約控除は考慮しないものとし、変更時点の平準純保険料式責任準備金 V から貸付金 L を差し引いたものを原資とする。
・延長保険の死亡保険金額については、変更前の死亡保険金額から貸付金 L を差し引いた額に変更する。
・貸付金 L についての利息は考慮しないものとする。
・予定利率 $i=1.50\%$、$D_{50}=45,767$、$D_{60}=37,808$、$D_{70}=29,478$、$N_{50}=1,178,505$、$N_{60}=756,738$、$N_{70}=415,541$ とする。

（A） 0.372　（B） 0.377　（C） 0.382　（D） 0.387　（E） 0.392
（F） 0.397　（G） 0.402　（H） 0.407　（I） 0.412　（J） 0.417

問題２． 次の（１）～（８）について、各問の指示に従い解答しなさい。

各７点（計５６点）

（１）x 歳における死力 μ_x が以下のとおりであり、平均寿命 $\mathring{e}_0$ が 65 歳であるとき、α の値に最も近いものは次のうちどれか。

$$\mu_x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - x} & (0 \leqq x \leqq 60) \\ \dfrac{3}{100 - x} & (60 < x < 100) \end{cases}$$

（Ａ） 460	（Ｂ） 470	（Ｃ） 480	（Ｄ） 490	（Ｅ） 500
（Ｆ） 510	（Ｇ） 520	（Ｈ） 530	（Ｉ） 540	（Ｊ） 550

（２）ある企業グループに所属する会社員（主集団）が死亡と自己都合退職により減少していく 2 重脱退残存表を考える。この企業グループの自己都合退職者により形成される集団（副集団）は死亡のみにより減少し、再度元の企業グループの会社員に復帰することはないものとする。このような 2 重脱退残存表が表す人員構成が定常人口を形成しており、ある年齢 x 歳と $x+1$ 歳の間で以下の条件を満たすものとする。

(a) x 歳と $x+1$ 歳の間における会社員である人の数は、x 歳と $x+1$ 歳の間における自己都合退職者である人の数の 3 倍である。

(b) x 歳の者（全員）の中央死亡率は $\dfrac{1}{100}$ である。

(c) x 歳の会社員が $x+1$ 歳に達するまでに会社員のままで死亡する確率は $\dfrac{1}{117}$ である。

(d) x 歳において自己都合退職者である人が $x+1$ 歳に達するまでに死亡する確率（絶対死亡率）は $\dfrac{2}{151}$ である。

このとき、以下の①および②の値に最も近いものをそれぞれ次の選択肢の中から選びなさい。
① x 歳の会社員の中央自己都合退職率
② x 歳の会社員の絶対死亡率
なお、死亡および自己都合退職はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。

【①の選択肢】

（Ａ） 0.0707	（Ｂ） 0.0709	（Ｃ） 0.0711	（Ｄ） 0.0713	（Ｅ） 0.0715
（Ｆ） 0.0717	（Ｇ） 0.0719	（Ｈ） 0.0721	（Ｉ） 0.0723	（Ｊ） 0.0725

【②の選択肢】

（Ａ） 0.00850	（Ｂ） 0.00855	（Ｃ） 0.00860	（Ｄ） 0.00865	（Ｅ） 0.00870
（Ｆ） 0.00875	（Ｇ） 0.00880	（Ｈ） 0.00885	（Ｉ） 0.00890	（Ｊ） 0.00895

（３）次の（Ａ）～（Ｅ）のうち、常に正しい関係を表している等式をすべて選びなさい。ただし、該当するものが 1 つもないときは（Ｆ）を選びなさい。なお、$f≧1$ 、$n≧2$ 、$k≧2$ とし、予定利率は 0 より大きい値で一定とする。

（Ａ）期末払 f 年据置生命年金の現価

$${}_{f|}a_{x:\overline{n}|}=\frac{N_{x+f+1}-N_{x+f+n+1}}{D_x}$$

（Ｂ）年 k 回払の期始払生命年金の現価

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{nk-1}v^{\frac{t}{k}}\cdot {}_{\frac{t}{k}}p_x$$

（Ｃ）計算基数

$$C_x=v\cdot D_x-D_{x+1}$$

（Ｄ）期始払確定年金の現価と期始払生命年金の現価の差

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n-1}\frac{C_{x+t-1}}{D_x}\cdot\ddot{a}_{\overline{n-t}|}$$

（Ｅ）保険金年度末支払の累減定期保険の一時払純保険料

$$(DA)^{\ 1}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{D_x}\cdot\left\{n\cdot M_x-\left(R_x-R_{x+n}\right)\right\}$$

（４）x 歳加入、保険金年度末支払、保険金額１の終身保険において、予定利率 $i\left(i>0\right)$ の変化に対する一時払純保険料の変化を、一時払純保険料の予定利率による微分 $\dfrac{d}{di}A_x$ により表すこととする。このとき、$\dfrac{d}{di}A_x$ を表す式は次のうちどれか。

（Ａ） $\dfrac{d\cdot A_x+\ddot{a}_x}{1+i}$　　（Ｂ） $\dfrac{d\cdot A_x-\ddot{a}_x}{1+i}$

（Ｃ） $\dfrac{d\cdot\left(IA\right)_x+\ddot{a}_x}{1+i}$　　（Ｄ） $\dfrac{d\cdot\left(IA\right)_x-\ddot{a}_x}{1+i}$

（Ｅ） $\dfrac{d\cdot a_x+\ddot{a}_x}{1+i}$　　（Ｆ） $\dfrac{d\cdot a_x-\ddot{a}_x}{1+i}$

（Ｇ） $\dfrac{d\cdot\left(Ia\right)_x+\ddot{a}_x}{1+i}$　　（Ｈ） $\dfrac{d\cdot\left(Ia\right)_x-\ddot{a}_x}{1+i}$

（Ｉ） $\dfrac{d\cdot\left(I\ddot{a}\right)_x+\ddot{a}_x}{1+i}$　　（Ｊ） $\dfrac{d\cdot\left(I\ddot{a}\right)_x-\ddot{a}_x}{1+i}$

（５）60 歳加入、保険料一時払、保険期間終身の次の給付を行う２つの保険種類を考える。

【給付内容】

保険種類１	保険種類２
・第 5 保険年度末以前に死亡した場合、死亡した年度末に、一時払営業保険料を保険金として支払う。 ・第 6 保険年度始以降に死亡した場合、死亡した年度末に、保険金額 1 を支払う。	・第 5 保険年度末以前に死亡した場合、死亡した年度末に、その年度末の平準純保険料式責任準備金を保険金として支払う。 ・第 6 保険年度始以降に死亡した場合、死亡した年度末に、保険金額 1 を支払う。

これらの保険の予定事業費は、新契約時にのみ一時払営業保険料 1 に対してαとする。保険種類 1 と保険種類２の一時払営業保険料が等しくなるようなαの値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、予定利率$i = 2.00\%$とし、計算基数は下表のとおりとする。

【計算基数】

x	D_x	M_x
60	28,154	17,734
65	24,510	16,707

（**A**） 0.030　（**B**） 0.035　（**C**） 0.040　（**D**） 0.045　（**E**） 0.050
（**F**） 0.055　（**G**） 0.060　（**H**） 0.065　（**I**） 0.070　（**J**） 0.075

（６）同一の生命表に従う x 歳が 2 人、y 歳が 2 人からなる 4 人の被保険者$(x),(x),(y),(y)$について、以下のような期始払年金を支払うとき、この年金の現価に等しい式は次のうちどれか。

- 生存者が 4 人のときは、生存者各人に年金額 1.5 を支払う。
- 生存者が 3 人のときは、生存者各人に年金額 1 を支払う。
- 生存者が 2 人のときは、生存者各人に年金額 0.5 を支払う。
- 生存者が 1 人以下のときは、支払は行われない。（すなわち、生存者が 1 人以下になった時点で年金支払は終了する。）

（Ａ）	$\ddot{a}_{xx}+\ddot{a}_{yy}+2\ddot{a}_{xy}$	（Ｂ）	$\ddot{a}_{xx}+\ddot{a}_{yy}+4\ddot{a}_{xy}$
（Ｃ）	$\ddot{a}_{xx}+\ddot{a}_{yy}+2\ddot{a}_{xy}+2\ddot{a}_{xxyy}$	（Ｄ）	$\ddot{a}_{xx}+\ddot{a}_{yy}+4\ddot{a}_{xy}+2\ddot{a}_{xxyy}$
（Ｅ）	$\ddot{a}_{xx}+\ddot{a}_{yy}+2\ddot{a}_{xy}+\ddot{a}_{xxy}+\ddot{a}_{xyy}$	（Ｆ）	$\ddot{a}_{xx}+\ddot{a}_{yy}+4\ddot{a}_{xy}+\ddot{a}_{xxy}+\ddot{a}_{xyy}$
（Ｇ）	$4\ddot{a}_{xx}+4\ddot{a}_{yy}+2\ddot{a}_{xy}-2\ddot{a}_{xxy}-2\ddot{a}_{xyy}$	（Ｈ）	$4\ddot{a}_{xx}+4\ddot{a}_{yy}+4\ddot{a}_{xy}-2\ddot{a}_{xxy}-2\ddot{a}_{xyy}$
（Ｉ）	$2\ddot{a}_{xx}+2\ddot{a}_{yy}+2\ddot{a}_{xy}-2\ddot{a}_{xxy}-2\ddot{a}_{xyy}+2\ddot{a}_{xxyy}$	（Ｊ）	$2\ddot{a}_{xx}+2\ddot{a}_{yy}+4\ddot{a}_{xy}-2\ddot{a}_{xxy}-2\ddot{a}_{xyy}+2\ddot{a}_{xxyy}$

（７）就業者である 40 歳の被保険者が次の給付を行う保険期間 20 年の保険に加入する場合を考える。
・被保険者が就業不能になった場合、その年度末に 0.5 を支払う。
・被保険者が死亡した場合、死亡時に就業者であれば 1 を、就業不能者であれば 0.5 を、その年度末に支払う。

保険料は年払とし、保険期間にわたり毎年度始に被保険者が就業者である場合に払い込むものとする。
この保険の年払純保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。

ただし、計算基数は下表のとおりとする。

x	D_x^{aa}	D_x^{ii}	D_x^{i}	N_x^{aa}	N_x^{ii}	N_x^{i}
40	65,576	337	55,996	1,403,486	28,836	1,030,118
60	46,410	1,704	29,585	257,714	13,472	157,743

x	M_x^{aa}	M_x^{ii}	M_x^{i}	$M_x^{(i)}$
40	9,125	849	22,979	3,659
60	3,222	450	5,206	1,740

なお、死亡および就業不能はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

（Ａ） 0.0047　（Ｂ） 0.0049　（Ｃ） 0.0051　（Ｄ） 0.0053　（Ｅ） 0.0055
（Ｆ） 0.0057　（Ｇ） 0.0059　（Ｈ） 0.0061　（Ｉ） 0.0063　（Ｊ） 0.0065

（8）下表の給付を行う、x 歳加入、保険料年払全期払込、入院日額 δ 、保険期間 n 年の災害入院保障保険 A および B を考える。

商品	給付種類	給付内容
A	災害入院給付金	災害入院の発生時に、入院日数×入院日額を支払う。
B	災害入院給付金	災害入院の発生時に、入院日数÷30 の小数点以下を切り上げた数に、30×入院日額を乗じた金額を支払う。 たとえば、災害入院の入院日数が 1 日以上 30 日以下である場合は「30×入院日額」を、31 日以上 60 日以下である場合は「60×入院日額」を支払う。

この 2 商品について、予定死亡率、予定利率および災害入院の予定発生率は同一とする。

入院日数が i 日である災害入院の予定発生率 q^{ahi} を年齢によらず 1 年間あたり、

$$q^{ahi}=\begin{cases}10h & (1\leqq i\leqq 10)\\ 3h & (11\leqq i\leqq 30)\\ h & (31\leqq i\leqq 120)\\ 0 & (121\leqq i)\end{cases}\qquad \text{（ただし、}h\text{ は }0<h<\frac{1}{250}\text{ を満たす定数）}$$

としたとき、商品 B の年払純保険料は商品 A の年払純保険料の k 倍となったという。k の値に最も近いものは次のうちどれか。
なお、災害入院の発生および災害入院給付金の支払は入院日数によらず年央に発生するものとし、災害入院は 1 年間に 2 回以上発生しないものとする。

（A） 1.15	（B） 1.20	（C） 1.25	（D） 1.30	（E） 1.35
（F） 1.40	（G） 1.45	（H） 1.50	（I） 1.55	（J） 1.60

問題３． 次の①～⑩の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（１０点）

2 人の被保険者 X 、Y の年齢をそれぞれ x 歳、y 歳とし、2 人は同一の生命表に従うものとする。ここで、X 、Y の最終生存者が死亡したとき、保険金 1 を即時に支払い、契約が消滅する連生終身保険を考える。
保険料は一時払で、${}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ はこの保険の経過 t における X と Y が共存中の平準純保険料式責任準備金を表すものとする。ここでは、以下の流れに沿って $Thiele$ の微分方程式を導出していく。

（１） X 、Y の少なくとも一方が生存している場合に支払われる連続払の連生年金 $\bar{a}_{\overline{xy}}$ について、経過 t における微分 $\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ を考える。

$$\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = \bar{a}_{x+t} + \bar{a}_{y+t} - \boxed{①}$$

となる。
したがって、経過 t における微分 $\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ は、

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = -\boxed{②}\cdot\left\{\boxed{③}\cdot\bar{A}_{x+t} + \boxed{④}\cdot\bar{A}_{y+t} - (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \boxed{⑤})\cdot\bar{A}_{x+t,y+t}\right\}$$

と表すことができる。

（２）次に、X と Y が共存中の平準純保険料式責任準備金 ${}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ について、経過 t における微分 $\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ を考える。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}} &= \frac{d}{dt}\boxed{⑥}\\ &= \frac{d}{dt}\left(1-\boxed{⑦}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left\{1-\delta\cdot\left(\bar{a}_{x+t} + \bar{a}_{y+t} - \boxed{⑧}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる。
したがって、経過 t における微分 $\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ は、$\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}} = (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta)\cdot\boxed{⑨} - \boxed{⑩}$
と表すことができる。

（A）	μ_{x+t}	（B）	μ_{y+t}	（C）	$\mu_{x+t} + \mu_{y+t}$
（D）	δ	（E）	$\frac{1}{\delta}$	（F）	$\mu_{x+t} + \delta$
（G）	$\mu_{y+t} + \delta$	（H）	$\bar{a}_{x+t,y+t}$	（I）	$\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$
（J）	$\delta\cdot\bar{a}_{x+t,y+t}$	（K）	$\delta\cdot\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$	（L）	$\bar{A}_{x+t,y+t}$
（M）	$\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}$	（N）	$\delta\cdot\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}$	（O）	$\mu_{x+t,y+t}\cdot\bar{A}_{x+t,y+t}$
（P）	$\mu_{x+t,y+t}\cdot\bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}$	（Q）	$\mu_{x+t}\cdot\bar{A}_{x+t} + \mu_{y+t}\cdot\bar{A}_{y+t}$	（R）	$\mu_{x+t}\cdot\bar{A}_{y+t} + \mu_{y+t}\cdot\bar{A}_{x+t}$

問題４． 次の①～⑩の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（１０点）

60 歳加入、保険料一時払、保険期間終身の次の給付を行う保険の一時払営業保険料を求める。ただし、予定事業費は新契約時にのみ一時払営業保険料 1 に対して 0.01 とし、$a_{60} = 20.26996$ 、$A^{\,1}_{60:\overline{t}|}$、$(DA)^{\,1}_{60:\overline{t}|}$ は次ページの別表のとおりとする。

【給付内容】

・60 歳年金開始、<u>年度末支払</u>、年金額 1 の終身年金を支払う（初回の年金支払は第 1 保険年度末であることに注意）。

・死亡時に既払年金総額が一時払営業保険料に達していない場合、死亡した年度末にその差額を死亡保険金として支払う。

一時払営業保険料を P^* 、P^* の整数部分を $[P^*]$ とする。また、P^* は 1 より大きい値で、整数ではないものとする。この年金が<u>年度末支払</u>であることに注意すると、死亡保険金が支払われるのは第 $\boxed{①}$ 年度の死亡までであり、第 t 年度 $\left(1 \leqq t \leqq \boxed{①}\right)$ の死亡保険金額は $\boxed{②}$ である。

一時払純保険料は $0.99P^*$ であるから、収支相等の式を書くと次のとおりである。

$$0.99P^* = a_{60} + \sum_{t=1}^{\boxed{①}} \boxed{②} \cdot v^t \cdot {}_{t-1|}q_{60}$$

$$= a_{60} + \boxed{③} \cdot \sum_{t=1}^{\boxed{①}} v^t \cdot {}_{t-1|}q_{60} + \sum_{t=1}^{\boxed{①}-1} \boxed{④} \cdot v^t \cdot {}_{t-1|}q_{60}$$

$$= a_{60} + \boxed{③} \cdot A^{\,1}_{60:\overline{\boxed{①}}|} + (DA)^{\,1}_{60:\overline{\boxed{①}-1}|}$$

【①～④の選択肢】

（Ａ） $P^* - 1$	（Ｂ） P^*	（Ｃ） $P^* + 1$
（Ｄ） $[P^*] - 1$	（Ｅ） $[P^*]$	（Ｆ） $[P^*] + 1$
（Ｇ） $P^* - t - 1$	（Ｈ） $P^* - t$	（Ｉ） $P^* - t + 1$
（Ｊ） $[P^*] - t - 1$	（Ｋ） $[P^*] - t$	（Ｌ） $[P^*] - t + 1$
（Ｍ） $P^* - [P^*] - 1$	（Ｎ） $P^* - [P^*]$	（Ｏ） $P^* - [P^*] + 1$

（次ページに続く）

まず、収支相等の式について「左辺と右辺はP^*について連続であり、この方程式を満たす唯一の解が存在する（※）」ことを前提として、試行によりP^*の整数部分$[P^*]$を求める。

便宜的にP^*に整数値を代入して、収支相等の式を満たすP^*が存在する範囲を調べる。a_{60}の整数部分は 20 であるから、$P^*=20$を初期値として代入すると、（左辺）＜（右辺）であることがわかる。

続けて、$P^*=21, 22, \ldots$と逐次代入していくと、左辺と右辺の大小関係が初めて逆転するのは$P^*=\boxed{⑤}$のときであることが分かる。したがって、（※）の前提より収支相等の式の解は$\boxed{⑤}-1<P^*<\boxed{⑤}$に存在すると言えるから、$[P^*]=\boxed{⑥}$と求められる。

次に、P^*の小数部分を求める。

$P^*=\boxed{⑥}+x\ (0<x<1)$とおいて収支相等の式をxについて解くと、

$$x=\frac{a_{60}+(DA)^{\ 1}_{60:\overline{⑦}|}-0.99\cdot\boxed{⑧}}{0.99-A^{\ 1}_{60:\overline{⑨}|}}$$

となることから、$x=\boxed{⑩}$である。

以上より、$P^*=[P^*]+x=\boxed{⑥}+\boxed{⑩}$と求めることができる。

【別表】

t	$A^{\ 1}_{60:\overline{t}|}$	$(DA)^{\ 1}_{60:\overline{t}|}$
20	0.27447	2.23852
21	0.30260	2.54112
22	0.33258	2.87370
23	0.36418	3.23788
24	0.39729	3.63517
25	0.43164	4.06681
26	0.46669	4.53350
27	0.50196	5.03546
28	0.53696	5.57242
29	0.57113	6.14355
30	0.60395	6.74750

【⑤～⑨の選択肢】

（Ａ） 20　（Ｂ） 21　（Ｃ） 22　（Ｄ） 23　（Ｅ） 24
（Ｆ） 25　（Ｇ） 26　（Ｈ） 27　（Ｉ） 28　（Ｊ） 29

【⑩の選択肢】

（Ａ） 0.200　（Ｂ） 0.215　（Ｃ） 0.230　（Ｄ） 0.245　（Ｅ） 0.260
（Ｆ） 0.275　（Ｇ） 0.290　（Ｈ） 0.305　（Ｉ） 0.320　（Ｊ） 0.335

以上

生保数理（解答例）

問題１.

設問	解答	配点	設問	解答	配点
（１）	**（Ｆ）**	4 点	（４）	**（Ｆ）**	4 点
（２）	**（Ｆ）**	4 点	（５）	**（Ｈ）**	4 点
（３）	**（Ｇ）**	4 点	（６）	**（Ｇ）**	4 点

（１）

$\ddot{a}_{\infty}=\dfrac{1}{d}=\dfrac{1+i}{i}=51$ より、 $i=0.02$

よって、$\left(Ia\right)_{\infty}=\dfrac{1}{id}=\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}=2{,}550$

解答 **（Ｆ）**

（2）

求めるべき値は、

$$\frac{1-2\mu_{31}}{1+2\mu_{31}}=\frac{1-\dfrac{1}{a-31+\dfrac{1}{2}}}{1+\dfrac{1}{a-31+\dfrac{1}{2}}}=\frac{a-31+\dfrac{1}{2}-1}{a-31+\dfrac{1}{2}+1}=\frac{a-(31+1)+\dfrac{1}{2}}{a-(31-1)+\dfrac{1}{2}}\cdots①$$ と書ける。

ここで、$\mu_x=-\dfrac{d\log l_x}{dx}$ より、$\log l_x=\displaystyle\int\frac{-1}{2(a-x)+1}dx=\log\left(a-x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\log A$（$A$は定数）

したがって、$l_x=A\cdot\left(a-x+\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ より、$l_x{}^2=A^2\cdot\left(a-x+\dfrac{1}{2}\right)\cdots②$

②を①に代入して整理すると、

$$\frac{a-(31+1)+\dfrac{1}{2}}{a-(31-1)+\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{l_{32}{}^2}{A^2}}{\dfrac{l_{30}{}^2}{A^2}}=\frac{l_{32}{}^2}{l_{30}{}^2}$$ となる。以上より、$\dfrac{l_{32}{}^2}{l_{30}{}^2}=\dfrac{97,460^2}{98,694^2}=0.97515$

解答（**F**）

（3）

純保険料は $\dfrac{A_{x:\overline{10|}}+9A^{1}_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}=P_{x:\overline{10|}}+9P^{1}_{x:\overline{10|}}$ であるため、

第 7 保険年度末の平準純保険料式責任準備金は

$$A_{x+7:\overline{3|}}+9A^{1}_{x+7:\overline{3|}}-\left(P_{x:\overline{10|}}+9P^{1}_{x:\overline{10|}}\right)\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}={}_{7}V_{x:\overline{10|}}+9\,{}_{7}V^{1}_{x:\overline{10|}}$$

ここで、

$$A^{1}_{x:\overline{10|}}=\frac{M_x-M_{x+10}}{D_x}=\frac{M_x-M_{x+7}}{D_x}+\frac{D_{x+7}}{D_x}\cdot\frac{M_{x+7}-M_{x+10}}{D_{x+7}}=A^{1}_{x:\overline{7|}}+A_{x:\overset{1}{\overline{7|}}}\cdot A^{1}_{x+7:\overline{3|}}=0.05735$$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}}=\frac{D_{x+7}}{D_x}\cdot\frac{D_{x+10}}{D_{x+7}}=A_{x:\overset{1}{\overline{7|}}}\cdot A_{x+7:\overset{1}{\overline{3|}}}=0.80753$$

より、

$A_{x:\overline{10|}}=A^{1}_{x:\overline{10|}}+A_{x:\overset{1}{\overline{10|}}}=0.86488$ 、

$d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{10|}}=1-A_{x:\overline{10|}}=1-0.86488=0.13512$ 、 $d\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}=1-A_{x+7:\overline{3|}}=1-\left(0.02478+0.93190\right)=0.04332$

以上を用いて、

$${}_{7}V_{x:\overline{10|}}=A_{x+7:\overline{3|}}-\frac{A_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}=1-d\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}-\frac{1-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}=1-\frac{d\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}}{d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}=1-\frac{0.04332}{0.13512}=0.67940$$

$$9\,{}_{7}V^{1}_{x:\overline{10|}}=9\cdot\left(A^{1}_{x+7:\overline{3|}}-\frac{A^{1}_{x:\overline{10|}}}{d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{10|}}}\cdot d\cdot\ddot{a}_{x+7:\overline{3|}}\right)=9\cdot\left(0.02478-\frac{0.05735}{0.13512}\cdot0.04332\right)=0.05754$$

$${}_{7}V_{x:\overline{10|}}+9\,{}_{7}V^{1}_{x:\overline{10|}}=0.67940+0.05754=0.73694$$

解答（**G**）

（4）

利力を δ 、死力を μ とすると、

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\cdot{}_tp_x=\sum_{t=0}^{n-1}e^{-\delta t}\cdot e^{-\mu t}=\sum_{t=0}^{n-1}e^{-(\delta+\mu)t}=\frac{1-e^{-(\delta+\mu)n}}{1-e^{-(\delta+\mu)}}$$

である。

A,B を付した現価率 $\left(v_A,v_B\right)$ 、割引率 $\left(d_A,d_B\right)$ 、年金現価 $\left(\ddot{a}^A_{x:\overline{n}|},\ddot{a}^B_{x:\overline{n}|}\right)$ をそれぞれ利力、死力を 0.01 だけ加算して計算されたものとすると、

$$P_B-P_A=\left(\frac{1}{\ddot{a}^B_{x:\overline{n}|}}-d_B\right)-\left(\frac{1}{\ddot{a}^A_{x:\overline{n}|}}-d_A\right)$$

$$=\left(\frac{1-e^{-(\delta+\mu+0.01)}}{1-e^{-(\delta+\mu+0.01)\cdot n}}-d_B\right)-\left(\frac{1-e^{-(\delta+\mu+0.01)}}{1-e^{-(\delta+\mu+0.01)\cdot n}}-d_A\right)$$

$$=d_A-d_B=(1-v_A)-(1-v_B)=v_B-v_A$$

$$=e^{-\delta}-e^{-(\delta+0.01)}$$

$$=\frac{1}{1+i}\cdot\left(1-e^{-0.01}\right)$$

$$=\frac{1}{1.01}\cdot\left(1-\frac{1}{1.01}\right)$$

$$=0.0098030$$

解答（**F**）

（5）

第 t 保険年度末の 10 年チルメル式責任準備金を ${}_tV^{[10z]}_{40:\overline{25|}}$ とすると、第 3 保険年度の貯蓄保険料は、

$$v \cdot {}_3V^{[10z]}_{40:\overline{25|}} - {}_2V^{[10z]}_{40:\overline{25|}}$$

となる。

$${}_3V^{[10z]}_{40:\overline{25|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{43:\overline{22|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{25|}}} - 0.03\frac{\ddot{a}_{43:\overline{7|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{10|}}} = 0.095895$$

$${}_2V^{[10z]}_{40:\overline{25|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{42:\overline{23|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{25|}}} - 0.03\frac{\ddot{a}_{42:\overline{8|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{10|}}} = 0.053872$$

以上より、第 3 保険年度の貯蓄保険料は、

$$\frac{1}{1.0025} \cdot 0.095895 - 0.053872 = 0.041784$$

解答（H）

（6）

変更時点の平準純保険料式責任準備金Vは、

$$V = {}_{10}V_{50:\overline{20|}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{60:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{50:\overline{20|}}} = 1 - \frac{N_{60} - N_{70}}{N_{50} - N_{70}} \cdot \frac{D_{50}}{D_{60}} = 0.45866$$

$V - L$を原資に購入できる延長保険を考えると、生存保険金額Sが発生しない条件は、

$$\begin{aligned} V - L &\leqq (1-L) \cdot \left(A^{1}_{60:\overline{10|}} + 0.001 \cdot \ddot{a}_{60:\overline{10|}} \right) \\ &= (1-L) \cdot \left(1 - d \cdot \ddot{a}_{60:\overline{10|}} - A_{60:\overset{1}{\overline{10|}}} + 0.001 \cdot \ddot{a}_{60:\overline{10|}} \right) \\ &= (1-L) \cdot \left\{ 1 + \left(0.001 - \frac{i}{1+i} \right) \cdot \frac{N_{60} - N_{70}}{D_{60}} - \frac{D_{70}}{D_{60}} \right\} \\ &= (1-L) \cdot 0.09598 \end{aligned}$$

これを解いて、

$$L \geqq \frac{V - 0.09598}{1 - 0.09598} = \frac{0.45866 - 0.09598}{1 - 0.09598} = 0.40119$$

解答（**G**）

問題２.

<table>
<tr><td colspan="2">設問</td><td>解答</td><td>配点</td><td>設問</td><td>解答</td><td>配点</td></tr>
<tr><td colspan="2">（１）</td><td>**（Ｃ）**</td><td>7 点</td><td>（５）</td><td>**（Ｇ）**</td><td>7 点</td></tr>
<tr><td rowspan="2">（２）</td><td>①</td><td>**（Ｃ）**</td><td>3 点</td><td rowspan="2">（６）</td><td rowspan="2">**（Ｂ）**</td><td rowspan="2">7 点</td></tr>
<tr><td>②</td><td>**（Ｈ）**</td><td>4 点</td></tr>
<tr><td colspan="2">（３）</td><td>**（Ａ）（Ｃ）（Ｄ）**</td><td>7 点</td><td>（７）</td><td>**（Ｈ）**</td><td>7 点</td></tr>
<tr><td colspan="2">（４）</td><td>**（Ｊ）**</td><td>7 点</td><td>（８）</td><td>**（Ｈ）**</td><td>7 点</td></tr>
</table>

※（３）は完答の場合のみ得点。

（１）

与えられた死力より、$t \leqq 60$ のとき、

$$ {}_t p_0 = \exp\left(-\int_0^t \mu_{0+s} ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\alpha-(0+s)}\right) $$

$$ = \exp\left(\log(\alpha-t)-\log\alpha\right) = \exp\left(\log\left(\frac{\alpha-t}{\alpha}\right)\right) = \frac{\alpha-t}{\alpha} $$

$t > 60$ のとき、

$$ {}_t p_0 = {}_{60}p_0 \cdot {}_{t-60}p_{60} = \frac{\alpha-60}{\alpha}\cdot\exp\left(-\int_0^{t-60}\mu_{60+s}ds\right) = \frac{\alpha-60}{\alpha}\cdot\exp\left(-\int_0^{t-60}\frac{3ds}{100-(60+s)}\right) $$

$$ = \frac{\alpha-60}{\alpha}\cdot\exp\left(3\log(100-t)-3\log 40\right) = \frac{\alpha-60}{\alpha}\cdot\exp\left(\log\left(\frac{100-t}{40}\right)^3\right) $$

$$ = \frac{\alpha-60}{\alpha}\cdot\left(\frac{100-t}{40}\right)^3 $$

となる。ここから、

$$ \mathring{e}_0 = \int_0^{100} {}_t p_0 dt = \int_0^{60}\frac{\alpha-t}{\alpha}dt + \frac{\alpha-60}{\alpha}\cdot\int_{60}^{100}\left(\frac{100-t}{40}\right)^3 dt $$

$$ = 60-\frac{1800}{\alpha}+10-\frac{600}{\alpha} = 70-\frac{2400}{\alpha} = 65 $$

となることから、$\alpha = 480$

解答（Ｃ）

（２）

x歳における会社員である人の数をl_x^{aa}、x歳における自己都合退職者である人の数をl_x^{ii}、x歳と$x+1$歳の間における会社員の死亡者数をd_x^{aa}、x歳と$x+1$歳の間における自己都合退職者の死亡者数をd_x^{ii}、x歳と$x+1$歳の間において会社員が自己都合退職者となる数をi_xとおくと、

$l_{x+1}^{aa}=l_x^{aa}-d_x^{aa}-i_x$ …（Ⅰ）

$l_{x+1}^{ii}=l_x^{ii}-d_x^{ii}+i_x$ …（Ⅱ）

である。また、x歳と$x+1$歳の間の定常人口をSとし、(a)～(d)の条件を式で表すと以下である。

(a) $\dfrac{l_x^{aa}+l_{x+1}^{aa}}{2}=\dfrac{3}{4}S$ …（Ⅲ）

$\dfrac{l_x^{ii}+l_{x+1}^{ii}}{2}=\dfrac{1}{4}S$ …（Ⅳ）

(b) $\dfrac{d_x^{aa}+d_x^{ii}}{S}=\dfrac{1}{100}$ …（Ⅴ）

(c) $\dfrac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}}=\dfrac{1}{117}$ …（Ⅵ）

(d) $\dfrac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x}=\dfrac{2}{151}$ …（Ⅶ）

（Ⅱ）より、

$$\frac{l_x^{ii}+l_{x+1}^{ii}}{2}=l_x^{ii}-\frac{1}{2}d_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x$$

であり、この左辺と（Ⅳ）により、以下を得る。

$$l_x^{ii}-\frac{1}{2}d_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x=\frac{1}{4}S$$

式を整理し、（Ⅶ）に代入することで、以下を得る。

$$\frac{d_x^{ii}}{\frac{1}{4}S+\frac{1}{2}d_x^{ii}}=\frac{2}{151}$$

したがって、$d_x^{ii}=\dfrac{1}{300}S$

（Ⅴ）より、$d_x^{aa}=\dfrac{1}{150}S$

（Ⅵ）より、$l_x^{aa}=\dfrac{39}{50}S$

（Ⅲ）より、$l_{x+1}^{aa}=\dfrac{18}{25}S$

（Ⅰ）より、$i_x=\dfrac{4}{75}S$

（Ⅶ）より、$l_x^{ii}=\dfrac{9}{40}S$

（Ⅳ）より、$l_{x+1}^{ii}=\dfrac{11}{40}S$

求める値は

$$①=\frac{i_x}{\frac{l_x^{aa}+l_{x+1}^{aa}}{2}}=\frac{\frac{4}{75}S}{\frac{3}{4}S}=\frac{16}{225}=0.071111$$

$$②=\frac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}-\frac{1}{2}i_x}=\frac{\frac{1}{150}S}{\frac{39}{50}S-\frac{2}{75}S}=\frac{1}{113}=0.0088496$$

解答　①（**C**）②（**H**）

（３）

（A） 正しい

（B） 誤り：正しくは、$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{k} \cdot \displaystyle\sum_{t=0}^{nk-1} v^{\frac{t}{k}} \cdot {}_{\frac{t}{k}}p_x$

（C） 正しい：

$$\begin{aligned} C_x &= v^{x+1} \cdot d_x \\ &= v^{x+1} \cdot \left(l_x - l_{x+1}\right) \\ &= v \cdot D_x - D_{x+1} \end{aligned}$$

（D） 正しい：

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t - \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot \left(1 - {}_t p_x\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} v^t \cdot \left(q_x + {}_{1|}q_x + \cdots + {}_{t-1|}q_x\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} {}_{t-1|}q_x \cdot \left(v^t + v^{t+1} + \cdots + v^{n-1}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} v^t \cdot {}_{t-1|}q_x \cdot \left(1 + v + \cdots + v^{n-t-1}\right) \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t}|} \end{aligned}$$

（E） 誤り：正しくは、$\left(DA\right)^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{D_x} \cdot \left\{ n \cdot M_x - \left(R_{x+1} - R_{x+n+1}\right)\right\}$

<u>解答（A）（C）（D）</u>

（4）

x 歳加入、保険金年度末支払、保険金額 1 の終身保険の一時払純保険料は、

$$A_x = 1 - d \cdot \ddot{a}_x$$
$$= 1 - d \cdot \left(1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \cdots\right)$$

で表される。

$$\frac{d}{di} d = \frac{d}{di}\left(1 - v\right) = v^2 \text{、} \frac{d}{di} v^k = \frac{d}{di}\left(\frac{1}{1+i}\right)^k = -k \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{k+1} = -k \cdot v^{k+1}$$

より、

$$\frac{d}{di} A_x = -v^2 \cdot \ddot{a}_x + d \cdot \left\{v^2 \cdot p_x + 2v^3 \cdot {}_2p_x + \cdots + \left(k-1\right) \cdot v^k \cdot {}_{k-1}p_x + \cdots\right\}$$
$$= -v^2 \cdot \ddot{a}_x$$
$$+ d \cdot v \cdot \left\{\left(1 + 2v \cdot p_x + \cdots + k \cdot v^{k-1} \cdot {}_{k-1}p_x + \cdots\right) - \left(1 + v \cdot p_x + \cdots + v^{k-1} \cdot {}_{k-1}p_x + \cdots\right)\right\}$$
$$= -v^2 \cdot \ddot{a}_x + d \cdot v \cdot \left\{\left(I\ddot{a}\right)_x - \ddot{a}_x\right\}$$
$$= v \cdot \left\{d \cdot \left(I\ddot{a}\right)_x - \left(d + v\right) \cdot \ddot{a}_x\right\}$$
$$= \frac{d \cdot \left(I\ddot{a}\right)_x - \ddot{a}_x}{1+i}$$

<u>解答（**Ｊ**）</u>

（5）

保険種類１と保険種類２の一時払営業保険料をそれぞれ P_1 と P_2、
第 t 保険年度末の平準純保険料式責任準備金をそれぞれ ${}_tV^{(1)}$ と ${}_tV^{(2)}$ とする。

保険種類１について、ファクラーの再帰式より、

$${}_tV^{(1)} - P_1 \cdot v \cdot q_{60+t} = v \cdot p_{60+t} \cdot {}_{t+1}V^{(1)} \quad (0 \leqq t < 5)$$

$${}_tV^{(1)} - v \cdot q_{60+t} = v \cdot p_{60+t} \cdot {}_{t+1}V^{(1)} \quad (5 \leqq t)$$

これらの算式の両辺に $v^{60+t} \cdot l_{60+t}$ を乗じて計算基数を用いると、

$$D_{60+t} \cdot {}_tV^{(1)} - P_1 \cdot C_{60+t} = D_{60+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(1)} \quad (0 \leqq t < 5)$$

$$D_{60+t} \cdot {}_tV^{(1)} - C_{60+t} = D_{60+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(1)} \quad (5 \leqq t)$$

$0 \leqq t < 5$ 、$5 \leqq t$ において上記算式を合計すると、

$$D_{60} \cdot {}_0V^{(1)} = P_1 \cdot (C_{60} + C_{61} + \cdots + C_{64}) + D_{65} \cdot {}_5V^{(1)}$$

$$D_{65} \cdot {}_5V^{(1)} = C_{65} + C_{66} + \cdots + C_{\omega-1}$$

同様に保険種類２について、ファクラーの再帰式より、

$${}_tV^{(2)} - {}_{t+1}V^{(2)} \cdot v \cdot q_{60+t} = v \cdot p_{60+t} \cdot {}_{t+1}V^{(2)} \quad (0 \leqq t < 5) \quad \cdots(\mathrm{I})$$

$${}_tV^{(2)} - v \cdot q_{60+t} = v \cdot p_{60+t} \cdot {}_{t+1}V^{(2)} \quad (5 \leqq t) \quad \cdots(\mathrm{II})$$

(Ⅰ)は $p_{60+t} = 1 - q_{60+t}$ を用いて、さらに両辺に v^t を乗じて、(Ⅱ)は保険種類１の場合と同様にして整理すると、

$$v^t \cdot {}_tV^{(2)} = v^{t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(2)} \quad (0 \leqq t < 5)$$

$$D_{60+t} \cdot {}_tV^{(2)} - C_{60+t} = D_{60+t+1} \cdot {}_{t+1}V^{(2)} \quad (5 \leqq t)$$

$0 \leqq t < 5$ 、$5 \leqq t$ において上記算式を合計すると、

$${}_0V^{(2)} = v^5 \cdot {}_5V^{(2)}$$

$$D_{65} \cdot {}_5V^{(2)} = C_{65} + C_{66} + \cdots + C_{\omega-1}$$

よって ${}_5V^{(1)} = {}_5V^{(2)}$ となる。この両辺を ${}_0V^{(1)}$ と ${}_0V^{(2)}$ を用いて表すと、

$$\frac{D_{60} \cdot {}_0V^{(1)} - P_1 \cdot (M_{60} - M_{65})}{D_{65}} = v^{-5} \cdot {}_0V^{(2)}$$

ここに ${}_0V^{(1)} = P_1 \cdot (1-\alpha)$ および ${}_0V^{(2)} = P_2 \cdot (1-\alpha)$ を代入し、$P_1 = P_2$ を用いて整理すると、

$$\frac{D_{60} \cdot (1-\alpha) - (M_{60} - M_{65})}{D_{65}} = v^{-5} \cdot (1-\alpha)$$

これを α について解いて、

$$\alpha = 1 - \frac{M_{60} - M_{65}}{D_{60} - v^{-5} \cdot D_{65}} = 0.06037$$

解答（**G**）

（６）

生存者が 4 人のときの年金現価は、

$1.5 \cdot 4\ddot{a}_{xxyy} = 6\ddot{a}_{xxyy}$ ・・・①

生存者が 3 人のときの年金現価は、(x) の 2 人と (y) のうち 1 人が生存者の場合と、(x) のうち 1 人と (y) の 2 人が生存者の場合とを分けて考えることにより、

$1 \cdot 3 \cdot \left\{ {}_2C_1 \cdot \left(\ddot{a}_{xxy} - \ddot{a}_{xxyy} \right) + {}_2C_1 \cdot \left(\ddot{a}_{xyy} - \ddot{a}_{xxyy} \right) \right\} = 6\ddot{a}_{xxy} + 6\ddot{a}_{xyy} - 12\ddot{a}_{xxyy}$ ・・・②

生存者が 2 人のときの年金現価は、(x) の 2 人が生存者の場合と、(x) のうち 1 人と (y) のうち 1 人が生存者の場合と、(y) の 2 人が生存者の場合とを分けて考えることにより、

$0.5 \cdot 2 \cdot \left\{ {}_2C_2 \cdot \left(\ddot{a}_{xx} - 2\ddot{a}_{xxy} + \ddot{a}_{xxyy} \right) + {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot \left(\ddot{a}_{xy} - \ddot{a}_{xxy} - \ddot{a}_{xyy} + \ddot{a}_{xxyy} \right) + {}_2C_2 \cdot \left(\ddot{a}_{yy} - 2\ddot{a}_{xyy} + \ddot{a}_{xxyy} \right) \right\}$

$= \ddot{a}_{xx} + \ddot{a}_{yy} + 4\ddot{a}_{xy} - 6\ddot{a}_{xxy} - 6\ddot{a}_{xyy} + 6\ddot{a}_{xxyy}$ ・・・③

求める年金現価は上記①～③の合計であるので、

$\ddot{a}_{xx} + \ddot{a}_{yy} + 4\ddot{a}_{xy}$

解答（**B**）

（7）

この保険の年払純保険料を P とすると、収支相等の原則より、

$$P\cdot\ddot{a}^{aa}_{40:\overline{20}|}=\frac{\sum_{t=0}^{19}v^{t+1}\left\{0.5i_{40+t}+0.5\cdot\left(d^{ii}_{40+t}-l^{ii}_{40}\cdot{}_{t|}q^{i}_{40}\right)+d^{aa}_{40+t}\right\}}{l^{aa}_{40}}$$

$$=\frac{\sum_{t=0}^{19}\left\{0.5C^{(i)}_{40+t}+0.5\cdot\left(C^{ii}_{40+t}-D^{ii}_{40}\cdot\frac{C^{i}_{40+t}}{D^{i}_{40}}\right)+C^{aa}_{40+t}\right\}}{D^{aa}_{40}}$$

$$=\frac{0.5\cdot\left\{\left(M^{(i)}_{40}-M^{(i)}_{60}\right)+\left(M^{ii}_{40}-M^{ii}_{60}\right)-D^{ii}_{40}\cdot\frac{M^{i}_{40}-M^{i}_{60}}{D^{i}_{40}}\right\}+M^{aa}_{40}-M^{aa}_{60}}{D^{aa}_{40}}$$

よって、

$$P=\frac{0.5\cdot\left\{\left(M^{(i)}_{40}-M^{(i)}_{60}\right)+\left(M^{ii}_{40}-M^{ii}_{60}\right)-D^{ii}_{40}\cdot\frac{M^{i}_{40}-M^{i}_{60}}{D^{i}_{40}}\right\}+M^{aa}_{40}-M^{aa}_{60}}{N^{aa}_{40}-N^{aa}_{60}}$$

$$=\frac{0.5\cdot\left\{(3,659-1,740)+(849-450)-337\cdot\frac{22,979-5,206}{55,996}\right\}+9,125-3,222}{1,403,486-257,714}$$

$$=0.006117$$

解答：（H）

（8）

商品 A の年払純保険料を P_A、商品 B の年払純保険料を P_B とすると、

$$
\begin{aligned}
P_A \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} \cdot {}_t p_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} 10h \cdot i \cdot \delta + \sum_{i=11}^{30} 3h \cdot i \cdot \delta + \sum_{i=31}^{120} h \cdot i \cdot \delta \right) \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} \cdot {}_t p_x \cdot \left(550h \cdot \delta + 1{,}230h \cdot \delta + 6{,}795h \cdot \delta \right) \\
&= 8{,}575 v^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot \delta \cdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x \\
&= 8{,}575 v^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot \delta \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

よって、

$$P_A = 8{,}575 v^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot \delta$$

$$
\begin{aligned}
P_B \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} \cdot {}_t p_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} 10h \cdot 30 \cdot \delta + \sum_{i=11}^{30} 3h \cdot 30 \cdot \delta + \sum_{i=31}^{60} h \cdot 60 \cdot \delta + \sum_{i=61}^{90} h \cdot 90 \cdot \delta + \sum_{i=91}^{120} h \cdot 120 \cdot \delta \right) \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}} \cdot {}_t p_x \cdot \left(3{,}000h \cdot \delta + 1{,}800h \cdot \delta + 1{,}800h \cdot \delta + 2{,}700h \cdot \delta + 3{,}600h \cdot \delta \right) \\
&= 12{,}900 v^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot \delta \cdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot {}_t p_x \\
&= 12{,}900 v^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot \delta \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

よって、

$$P_B = 12{,}900 v^{\frac{1}{2}} \cdot h \cdot \delta$$

以上より、

$$k = \frac{P_B}{P_A} = \frac{12{,}900}{8{,}575} = 1.5044$$

が得られる。

<u>解答：（H）</u>

問題３.

設問	解答	配点
①	（Ｈ）	2 点
②	（Ｅ）	3 点（完答のみ）
③	（Ｆ）	
④	（Ｇ）	
⑤	（Ｄ）	
⑥	（Ｍ）	2 点（完答のみ）
⑦	（Ｋ）	
⑧	（Ｈ）	
⑨	（Ｍ）	3 点（完答のみ）
⑩	（Ｒ）	

（1） X 、Y の少なくとも一方が生存している場合に支払われる連続払の連生年金 $\bar{a}_{\overline{xy}}$ について、

経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ を考える。

$\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = \bar{a}_{x+t} + \bar{a}_{y+t} - \boxed{①\bar{a}_{x+t,y+t}}$

となる。

ここで、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{x+t}$ は、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t} &= \frac{d}{dt}\int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} ds \\
&= \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot (\mu_{x+t} - \mu_{x+t+s}) ds \\
&= \mu_{x+t} \cdot \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} ds - \int_0^\infty v^s \cdot {}_s p_{x+t} \cdot \mu_{x+t+s} ds \\
&= \mu_{x+t} \cdot \bar{a}_{x+t} - \bar{A}_{x+t} \\
&= \mu_{x+t} \cdot \frac{1-\bar{A}_{x+t}}{\delta} - \bar{A}_{x+t} \\
&= -\frac{1}{\delta} \cdot \left\{ (\mu_{x+t} + \delta) \cdot \bar{A}_{x+t} - \mu_{x+t} \right\}
\end{aligned}$$

となる。

同様にして、

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{y+t} = -\frac{1}{\delta} \cdot \left\{ (\mu_{y+t} + \delta) \cdot \bar{A}_{y+t} - \mu_{y+t} \right\}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t,y+t} = -\frac{1}{\delta} \cdot \left\{ (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \delta) \cdot \bar{A}_{x+t,y+t} - (\mu_{x+t} + \mu_{y+t}) \right\}$$ となる。

したがって、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}$ は、

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}} = -\boxed{②\frac{1}{\delta}} \left\{ \boxed{③(\mu_{x+t} + \delta)} \cdot \bar{A}_{x+t} + \boxed{④(\mu_{y+t} + \delta)} \cdot \bar{A}_{y+t} - (\mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \boxed{⑤\delta}) \cdot \bar{A}_{x+t,y+t} \right\}$$

と表すことができる。

（２）次に、X と Y が共存中の平準純保険料式責任準備金 ${}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ について、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ を考える。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}} &= \frac{d}{dt}\boxed{⑥\ \bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}}\\ &= \frac{d}{dt}\left(1-\boxed{⑦\ \delta\cdot\bar{a}_{\overline{x+t,y+t}}}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left\{1-\delta\cdot\left(\bar{a}_{x+t}+\bar{a}_{y+t}-\boxed{⑧\ \bar{a}_{x+t,y+t}}\right)\right\}\end{aligned}$$

となる。

したがって、経過 t における微分 $\dfrac{d}{dt}{}_t\bar{V}_{\overline{xy}}$ は、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{1-\delta\cdot\left(\bar{a}_{x+t}+\bar{a}_{y+t}-\boxed{⑧\ \bar{a}_{x+t,y+t}}\right)\right\}\\ &=\left\{(\mu_{x+t}+\delta)\cdot\bar{A}_{x+t}+(\mu_{y+t}+\delta)\cdot\bar{A}_{y+t}-(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\cdot\bar{A}_{x+t,y+t}\right\}\\ &=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\cdot(\bar{A}_{x+t}+\bar{A}_{y+t}-\bar{A}_{x+t,y+t})-\mu_{y+t}\cdot\bar{A}_{x+t}-\mu_{x+t}\cdot\bar{A}_{y+t}\\ &=(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}+\delta)\cdot\boxed{⑨\ \bar{A}_{\overline{x+t,y+t}}}-\boxed{⑩\ (\mu_{x+t}\cdot\bar{A}_{y+t}+\mu_{y+t}\cdot\bar{A}_{x+t})}\end{aligned}$$

と表すことができる。

問題４.

設問	解答	配点
①	（Ｆ）	1 点
②	（Ｉ）	2 点（完答のみ）
③	（Ｎ）	
④	（Ｌ）	
⑤	（Ｆ）	3 点（完答のみ）
⑥	（Ｅ）	
⑦	（Ｅ）	1 点（完答のみ）
⑧	（Ｅ）	
⑨	（Ｆ）	
⑩	（Ｅ）	3 点

60 歳加入、保険料一時払、保険期間終身の次の給付を行う保険の一時払営業保険料を求める。ただし、予定事業費は新契約時にのみ一時払営業保険料 1 に対して 0.01 とし、$a_{60}=20.26996$、$A^{\ 1}_{60:\overline{t|}}$、$(DA)^{\ 1}_{60:\overline{t|}}$ は次ページの別表のとおりとする。

【給付内容】
・60 歳年金開始、<u>年度末支払</u>、年金額 1 の終身年金を支払う（初回の年金支払は第 1 保険年度末であることに注意）。
・死亡時に既払年金総額が一時払営業保険料に達していない場合、死亡した年度末にその差額を死亡保険金として支払う。

一時払営業保険料を P^*、P^* の整数部分を $[P^*]$ とする。また、P^* は 1 より大きい値で、整数ではないものとする。この年金が<u>年度末支払</u>であることに注意すると、死亡保険金が支払われるのは第 $\boxed{①[P^*]+1}$ 年度の死亡までであり、第 t 年度 $\left(1\leqq t\leqq \boxed{①[P^*]+1}\right)$ の死亡保険金額は $\boxed{② P^*-t+1}$ である。一時払純保険料は $0.99P^*$ であるから、収支相等の式を書くと次のとおりである。

$$
\begin{aligned}
0.99P^* &= a_{60}+\sum_{t=1}^{\boxed{①[P^*]+1}}\boxed{②\left(P^*-t+1\right)}\cdot v^t\cdot {}_{t-1|}q_{60} \\
&= a_{60}+\boxed{③\left(P^*-[P^*]\right)}\cdot\sum_{t=1}^{\boxed{①[P^*]+1}}v^t\cdot {}_{t-1|}q_{60}+\sum_{t=1}^{\boxed{①[P^*]+1}-1}\boxed{④\left([P^*]-t+1\right)}\cdot v^t\cdot {}_{t-1|}q_{60} \\
&= a_{60}+\boxed{③\left(P^*-[P^*]\right)}\cdot A^{\ 1}_{60:\overline{\boxed{①[P^*]+1}|}}+(DA)^{\ 1}_{60:\overline{\boxed{①[P^*]+1}-1|}}
\end{aligned}
$$

まず、収支相等の式について「左辺と右辺は P^* について連続であり、この方程式を満たす唯一の解が存在する（※）」ことを前提として、試行により P^* の整数部分 $[P^*]$ を求める。

便宜的に P^* に整数値を代入して、収支相等の式を満たす P^* が存在する範囲を調べる。a_{60} の整数部分は 20 であるから $P^*=20$ を初期値として代入すると、（左辺）＜（右辺）であることがわかる。

続けて、$P^*=21, 22,\ldots$ と逐次代入していくと、左辺と右辺の大小関係が初めて逆転するのは

$P^* = \boxed{\text{⑤ 25}}$ のときであることが分かる。したがって、(※) の前提より収支相等の式の解は $\boxed{\text{⑤ 25}} - 1 < P^* < \boxed{\text{⑤ 25}}$ に存在すると言えるから、$[P^*] = \boxed{\text{⑥ 24}}$ と求められる。

次に、P^* の小数部分を求める。

$P^* = \boxed{\text{⑥ 24}} + x \ (0 < x < 1)$ とおいて収支相等の式を x について解くと、

$$x = \frac{a_{60} + (DA)^{\ 1}_{60:\overline{\boxed{\text{⑦ 24}}}|} - 0.99 \cdot \boxed{\text{⑧ 24}}}{0.99 - A^{\ 1}_{60:\overline{\boxed{\text{⑨ 25}}}|}}$$

となることから、$x = 0.25992$ より $\boxed{\text{⑩ 0.260}}$ である。

以上より、$P^* = [P^*] + x = \boxed{\text{⑥ 24}} + \boxed{\text{⑩ 0.260}}$ と求めることができる。

以上