数学（問題）

問題１から問題６を通じ、必要であれば「付表」に記載された数値を用いなさい。

「付表」には、以下の付表が掲載されている。

- 付表Ⅰ.「標準正規分布表（上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ から確率 ε を求める表）」
  「標準正規分布表（確率 ε から上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ を求める表）」
- 付表Ⅱ.「自由度 φ の χ^2 分布の上側 ε 点：$\chi^2_\varphi(\varepsilon)$」
- 付表Ⅲ.「分母の自由度 n 、分子の自由度 m の F 分布の上側 ε 点：$F^m_n(\varepsilon)$」
- 付表Ⅳ.「自由度 φ の t 分布の上側 ε 点：$t_\varphi(\varepsilon)$」
- 付表Ⅴ.「自然対数表」
- 付表Ⅵ.「指数関数表」

問題１． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。　各５点（計２０点）

（１）箱の中に３つの玉が入っており、それぞれ１から３までの数字が書いてある。また、裏表の区別がつく１枚のコインがある。まず箱から玉を一つ無作為に選び、その玉に書かれた数字の回数だけコインを投げ、表の出た回数を X とする。
このとき、$\{X=1\}$ である確率 $P(X=1)$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、X の期待値 $E[X]$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。ただし、箱から玉を１つ選ぶ確率はどれも同様に確からしいとし、コインの表と裏が出る確率も同様に確からしいものとする。

[①の選択肢]

（A） $\frac{5}{24}$	（B） $\frac{7}{24}$	（C） $\frac{1}{3}$	（D） $\frac{13}{36}$
（E） $\frac{3}{8}$	（F） $\frac{5}{12}$	（G） $\frac{11}{24}$	（H） $\frac{1}{2}$

[②の選択肢]

（A） $\frac{1}{3}$	（B） $\frac{1}{2}$	（C） $\frac{13}{24}$	（D） $\frac{3}{4}$
（E） 1	（F） $\frac{31}{24}$	（G） $\frac{3}{2}$	（H） 2

（２）Ａさんは、午前 0 時から午前 1 時の間に就寝し、同じ日の午前 6 時から午前 8 時の間に起床する。Ａさんの就寝時刻と起床時刻は互いに独立であり、それぞれの時刻は上記時間内に一様に分布しているものとする。

Ａさんの睡眠時間を Z とするとき、Z の確率密度関数 $f(z)$ は ③ である。また、Ａさんのある日の睡眠時間が t 時間以下である確率が 1/3 であるとき、t に最も近い数値は ④ である。

[③の選択肢]

（A） $\begin{cases} z-5 & (5 \le z \le 13/2) \\ 8-z & (13/2 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（B） $\begin{cases} (z-5)/2 & (5 \le z \le 13/2) \\ (8-z)/2 & (13/2 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（C） $\begin{cases} 4(z-5)/9 & (5 \le z \le 13/2) \\ 4(8-z)/9 & (13/2 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（D） $\begin{cases} 4(z-5)^2/9 & (5 \le z \le 13/2) \\ 4(8-z)^2/9 & (13/2 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（E） $\begin{cases} z-5 & (5 \le z \le 6) \\ 1 & (6 < z \le 7) \\ 8-z & (7 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（F） $\begin{cases} (z-5)/2 & (5 \le z \le 6) \\ 1/2 & (6 < z \le 7) \\ (8-z)/2 & (7 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（G） $\begin{cases} (z-5)/3 & (5 \le z \le 6) \\ 2/3 & (6 < z \le 7) \\ (8-z)/3 & (7 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（H） $\begin{cases} 4(z-5)/9 & (5 \le z \le 6) \\ 4/9 & (6 < z \le 7) \\ 4(8-z)/9 & (7 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（Ｉ） $\begin{cases} 12(z-5)/25 & (5 \le z \le 6) \\ 6(z-5)(8-z)/25 & (6 < z \le 7) \\ 12(8-z)/25 & (7 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（J） $\begin{cases} 3(z-5)^2/5 & (5 \le z \le 6) \\ 3/5 & (6 < z \le 7) \\ 3(8-z)^2/5 & (7 < z \le 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

[④の選択肢]

（A）5.67　（B）5.82　（C）6.00　（D）6.08　（E）6.15

（F）6.17　（G）6.22　（H）6.25　（Ｉ）6.27　（J）6.31

（３）n 回じゃんけんをしたところ、グーを出した回数が X_1 回、チョキを出した回数が X_2 回、パーを出した回数が X_3 回であった。グーを出す確率は p_1 、チョキを出す確率は p_2 、パーを出す確率は p_3 であるという。ただし、$p_1+p_2+p_3=1$ である。

このとき、(X_1,X_2,X_3) の積率母関数 $\phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ は $\boxed{⑤}$ である。また、X_1 の積率母関数 $\phi(\theta_1)$ は $\boxed{⑥}$ である。X_1 と X_2 の共分散 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$ は $\boxed{⑦}$ である。

[⑤の選択肢]

（A） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^n$

（B） $\left(1+p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^n$

（C） $\left(1-p_1e^{\theta_1}-p_2e^{\theta_2}-p_3e^{\theta_3}\right)^n$

（D） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}+2\right)^n$

（E） $\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n\cdot\left(p_2e^{\theta_2}+1-p_2\right)^n\cdot\left(p_3e^{\theta_3}+1-p_3\right)^n$

（F） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}\right)^n$

（G） $\left(1-p_1e^{\theta_1}-p_2e^{\theta_2}\right)^n$

（H） $\left(1+p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}\right)^n$

（Ｉ） $\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n\cdot\left(p_2e^{\theta_2}+1-p_2\right)^n$

（Ｊ） $\left(1+p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3\right)^n$

[⑥の選択肢]

（A） $\left(p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（B） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2\right)^n$

（C） $\left(p_1-p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（D） $\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n$

（E） $\left(p_1e^{\theta_1}+2-p_1\right)^n$

（F） $\left(p_1e^{\theta_1}+3-p_1\right)^n$

（G） $\left(1-p_2-p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（H） $\left(1+p_2+p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｉ） $\left(p_1+(1-p_1)e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｊ） $\left(p_2+(1-p_1)e^{\theta_1}\right)^n$

[⑦の選択肢]

（A） 0

（B） $n(n-1)p_1p_2$

（C） $-n(n-1)p_1p_2$

（D） $n^2p_1p_2$

（E） $-n^2p_1p_2$

（F） np_1p_2

（G） $-np_1p_2$

（H） p_1p_2

（Ｉ） $-p_1p_2$

（４）確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ は互いに独立で、すべて平均 2 の指数分布に従うとする。
このとき、確率変数 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の標準偏差は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。
また、$n = 100$ のとき、S_{100} が 190 以上 240 以下となる確率 $P(190 \leq S_{100} \leq 240)$ を、中心極限定理を利用した近似により求めると、最も近い数値は $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ である。

[⑧の選択肢]

（Ａ） $\dfrac{n}{4}$　（Ｂ） $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$　（Ｃ） $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$　（Ｄ） $\dfrac{n}{2}$　（Ｅ） n

（Ｆ） $\sqrt{n}$　（Ｇ） $\sqrt{2n}$　（Ｈ） $2\sqrt{n}$　（Ｉ） $2n$　（Ｊ） $4n$

[⑨の選択肢]

（Ａ） 0.0498　（Ｂ） 0.2857　（Ｃ） 0.3313　（Ｄ） 0.4672　（Ｅ） 0.4971

（Ｆ） 0.5029　（Ｇ） 0.5328　（Ｈ） 0.6687　（Ｉ） 0.7143　（Ｊ） 0.9502

問題２． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各５点（計２０点）

（１）パラメータ $0 < p < 1$ の幾何分布

$$P(X = k) = p(1-p)^k \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

に従う母集団から次の標本値を得た。

13, 25, 37, 0, 41, 18, 31, 27, 11, 7

モーメント法によりパラメータ p を推定すると、p は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

[①の選択肢]

（A） $\frac{1}{24}$	（B） $\frac{1}{23}$	（C） $\frac{1}{22}$	（D） $\frac{1}{21}$	（E） $\frac{1}{20}$
（F） $\frac{1}{7}$	（G） $\frac{1}{3}$	（H） $\frac{1}{2}$	（I） $\frac{2}{3}$	（J） $\frac{6}{7}$
（K） $\frac{19}{20}$	（L） $\frac{20}{21}$	（M） $\frac{21}{22}$	（N） $\frac{22}{23}$	（O） $\frac{23}{24}$

（2）ある会社では、果汁濃度が低い製品を出荷しないように各製品に n 回の定量分析を行っている。同一製品における定量分析各回の果汁濃度の分析値は、互いに独立で同一の正規分布に従い、分散は $\sigma^2 = (2.0\%)^2$ とする。
果汁濃度 97%の製品を誤って不合格とする確率が 2.5%、果汁濃度が 95%以下の製品を誤って合格とする確率が 5.0%以下となるように分析するとき、実施すればよい最小の定量分析回数 n は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。このとき、果汁濃度の分析値の平均が $\boxed{\quad ③ \quad}$ %以下ならば、製品を不合格とすればよい（③は最も近い数値とする）。

[②の選択肢]

（A） 7	（B） 8	（C） 9	（D） 10	（E） 11
（F） 12	（G） 13	（H） 14	（I） 15	（J） 16

[③の選択肢]

（A） 95.63	（B） 95.67	（C） 95.71	（D） 95.75	（E） 95.79
（F） 95.83	（G） 95.87	（H） 95.91	（I） 95.95	（J） 95.99

（3）4 面サイコロ（正 4 面体の各面に 1～4 までの数字が割り当てられているサイコロ）を、28 回投げ、底面の数字を確認したところ、下表の結果を得た。

数字	1	2	3	4
出現回数	6	$9-x$	12	$x+1$

この 4 面サイコロについて、帰無仮説を「それぞれの数字の出る確率が等しい」として、有意水準 5％で検定を行った結果、帰無仮説が採択された。このとき、x のとりうる値のうち、最小値は ［ ④ ］ であり、最大値は ［ ⑤ ］ である。

［④、⑤の選択肢］

（**A**） -1　（**B**） 0　（**C**） 1　（**D**） 2　（**E**） 3

（**F**） 4　（**G**） 5　（**H**） 6　（**I**） 7　（**J**） 8

（**K**） 9

（4）世帯数 N の都市の総人口を推計するために n 世帯の世帯人数をランダムに抽出して調べるとき、これは大きさ N の有限母集団から非復元抽出にて無作為に取り出した大きさ n の標本を考えていることになる（任意抽出法）。このとき、標本変量を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とすると、推定量

$$Z_R = \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

によって、世帯数 N の都市の総人口を推定することができる。この都市の世帯人数の母平均を μ 、母分散を σ^2 とすると、推定量 Z_R の変動係数 $\dfrac{\sqrt{V[Z_R]}}{E[Z_R]}$ は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ である。

いま、世帯数 160,000 の都市で、n 世帯の世帯人数を調べて総人口を推定する。推定量 Z_R の変動係数が 3%以下となるようにするために必要な最小の標本数 n は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。
ただし、母集団の変動係数は 1 とする。

[⑥の選択肢]

（A）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$　（B）$\displaystyle\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（C）$\displaystyle\frac{N}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（D）$\displaystyle\frac{N-n}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

（E）$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（F）$\displaystyle\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（G）$\displaystyle\frac{N-n}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（H）$\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

（I）$\displaystyle\frac{N}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（J）$\displaystyle\frac{N-n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

[⑦の選択肢]

（A）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\dfrac{n}{N}$　（B）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\dfrac{n}{N-n}$　（C）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}}$　（D）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-n}{n-1}\cdot\dfrac{1}{N}}$

（E）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{N}}$　（F）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{n}{N-n}}$　（G）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{1}{n}}$　（H）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-n}{N}\cdot\dfrac{1}{n}}$

（I）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-1}{N-n}\cdot\dfrac{1}{n}}$　（J）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N}{N-n}\cdot\dfrac{1}{n}}$

[⑧の選択肢]

（A） 1,096　（B） 1,104　（C） 1,112　（D） 1,120　（E） 1,128

（F） 4,660　（G） 4,695　（H） 4,730　（I） 4,765　（J） 4,800

問題３． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各５点（計１０点）

（１）(x, y) のデータが下表の通り与えられている。このデータからプロビット・モデル $y = F(\alpha + \beta x)$ を用いた回帰式を求める。ここで、F は標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数である。
α の推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、β の推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

x	1.1	1.3	2.6	4.8
y	0.1	0.15	0.3	0.78

[①の選択肢]

（Ａ） -1.83　（Ｂ） -1.53　（Ｃ） -1.41　（Ｄ） -1.17　（Ｅ） -1.01

（Ｆ） -0.93　（Ｇ） -0.84　（Ｈ） -0.54　（Ｉ） -0.11　（Ｊ） -0.06

[②の選択肢]

（Ａ） 0.06　（Ｂ） 0.11　（Ｃ） 0.54　（Ｄ） 0.84　（Ｅ） 0.93

（Ｆ） 1.01　（Ｇ） 1.17　（Ｈ） 1.41　（Ｉ） 1.53　（Ｊ） 1.83

（２）袋Ａには赤球が１個、白球が３個入っており、袋Ｂには赤球が３個、白球が１個入っている。それぞれの袋から球を無作為に１個取り出し、球を交換して袋に戻す試行を繰り返す。n 回の試行の直後の袋Ａの赤球の個数を X_n（ただし、$X_0 = 1$ ）とすると、X_n はマルコフ連鎖であり、極限分布が存在する。このとき、

$$P(X_2 = 1) = \boxed{\quad ③ \quad}, \quad \lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = \boxed{\quad ④ \quad}$$

である。

[③、④の選択肢]

（Ａ） 0	（Ｂ） $\frac{1}{70}$	（Ｃ） $\frac{3}{128}$	（Ｄ） $\frac{9}{64}$
（Ｅ） $\frac{13}{64}$	（Ｆ） $\frac{7}{32}$	（Ｇ） $\frac{8}{35}$	（Ｈ） $\frac{1}{4}$
（Ｉ） $\frac{9}{32}$	（Ｊ） $\frac{11}{32}$	（Ｋ） $\frac{3}{8}$	（Ｌ） $\frac{63}{128}$
（Ｍ） $\frac{1}{2}$	（Ｎ） $\frac{18}{35}$	（Ｏ） $\frac{3}{4}$	（Ｐ） 1

問題４． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）

（１）金融商品の価格計算では、次の通り、ある確率分布 F に従い、確率密度 f を持つ確率変数 X を前提にして、ある関数 $g(X)$ の期待値

$$\theta = E[g(X)] = \int g(x)f(x)\,dx$$

を求めようとすることが多い。この積分を求める場合に、解析的に解く代わりに、または解析的に求めることができないとき、以下のようにモンテカルロ法を使用することができる。

確率変数 X と同一の確率分布に従う、互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を生成して関数 $g(X_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ をシミュレートし、その標本平均

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

を母平均 θ の推定量とする。
このとき、$\hat{\theta}_n$ の期待値は、

$$E[\hat{\theta}_n] = \boxed{\quad ① \quad}$$

である。
また、母分散を $\sigma^2 = V[g(X)]$ とするとき、$\hat{\theta}_n$ の分散は

$$V[\hat{\theta}_n] = \boxed{\quad ② \quad}$$

であり、$\hat{\theta}_n$ と θ の平均２乗誤差は、

$$E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = \boxed{\quad ③ \quad}$$

である。
よって、$\hat{\theta}_n$ と θ の標準誤差（平均 2 乗誤差の平方根）は、n と無関係な定数 c を用いて、$\boxed{\quad ④ \quad}$ と表わすことができる。

[①～④の選択肢]

（A） θ	（B） $\frac{\theta}{n}$	（C） $\frac{\theta}{n^2}$	（D） σ^2	（E） $\frac{\sigma^2}{n}$
（F） $\frac{\sigma^2}{n^2}$	（G） c	（H） $\frac{c}{\sqrt{n}}$	（I） $\frac{c}{n}$	（J） $\frac{c}{n^2}$

以下では、シミュレーション効率化の観点から、この定数部分 c を減少させる手法（分散減少法）のうち、負の相関法について考える。

まず、互いに独立ではない、同一のある確率分布 F に従い、確率密度 f を持つ、確率変数 X, Y を考える。$\theta = E[g(X)] = E[g(Y)]$、$\sigma^2 = V[g(X)] = V[g(Y)]$、$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}\big(g(X), g(Y)\big)$ とする。

次に、X_i と Y_i $(i = 1,2,\cdots,M)$ 以外、互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_M, Y_1, Y_2, \cdots, Y_M$ を生成する。なお、X_i と Y_i の同時確率分布は、X と Y の同時確率分布と同一であるとする。
このとき、θ の推定量として、標本平均

$$\hat{\theta}_{2M}^{(1)} = \frac{1}{2M} \cdot \sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(Y_i)\}$$

をとると、$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の期待値は、 $E\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] = \boxed{\quad ① \quad}$ である。また、$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の分散は、

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

である。
ここで、確率分布 F の逆関数 F^{-1} が存在し、$U_1, U_2, \cdots, U_M$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数とし、

$$X_i = F^{-1}(U_i)\ 、\ \ Y_i = F^{-1}(1 - U_i)$$

とおくと、確率分布 F に従う確率変数 X_i および Y_i を生成できる。このとき、関数 $g(x)$ が単調関数ならば、$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] \leq V\left[\hat{\theta}_{2M}\right]$ となることが知られている。さらに、確率分布 F が標準正規分布に従うとき、分布の左右対称性から、標準正規分布に従う確率変数 X_i を用いて、

$$\hat{\theta}_{2M}^{(1)} = \frac{1}{2M} \cdot \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

と表すことができる。

[⑤の選択肢]

（A） $\dfrac{\sigma^2}{2M}$　（B） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2}$　（C） $\dfrac{\sigma^2}{2M} + \dfrac{\sigma_{XY}}{M}$　（D） $\dfrac{\sigma^2}{2M} + \dfrac{\sigma_{XY}}{2M}$

（E） $\dfrac{\sigma^2}{2M} + \dfrac{2\sigma_{XY}}{M}$　（F） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2} + \dfrac{\sigma_{XY}}{M^2}$　（G） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2} + \dfrac{\sigma_{XY}}{4M^2}$　（H） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2} + \dfrac{4\sigma_{XY}}{M^2}$

[⑥の選択肢]

（A） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(1/X_i)\}$　（B） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(-1/X_i)\}$　（C） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(-X_i)\}$

（D） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} g(2X_i)$　（E） $\displaystyle\sum_{i=1}^{2M} g(1/X_i)$　（F） $\displaystyle\sum_{i=1}^{2M} g(X_i)$

（２）確率変数 X が標準正規分布に従うとし、

$$g(X) = e^{-0.5} \cdot \max(e^X - 1, 0)$$

である場合の金融商品の価格 $E[g(X)]$ を求めたい。なお、以下の解答にあたっては、計算途中にて端数処理せずに算出した結果と最も近い数値の選択肢を選択しなさい。

（ａ）まず、付表を用いて解析的に分散減少の効果の理論値を計算する。$g(X)$ の期待値は、

$$E[g(X)] = \boxed{⑦}$$

である。

$M = 3$ のとき、$\hat{\theta}_{2M}$ と $\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の分散はそれぞれ、

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}\right] = \boxed{⑧}$$

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] = \boxed{⑨}$$

である。

よって、負の相関法によって分散は

$$1 - \frac{V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]}{V\left[\hat{\theta}_{2M}\right]} = \boxed{⑩}$$

減少することが期待できる。

[⑦の選択肢]

（Ａ） 0.46　（Ｂ） 0.48　（Ｃ） 0.50　（Ｄ） 0.52　（Ｅ） 0.54

（Ｆ） 0.56　（Ｇ） 0.58　（Ｈ） 0.60　（Ｉ） 0.62　（Ｊ） 0.64

[⑧、⑨の選択肢]

（Ａ） 0.185　（Ｂ） 0.190　（Ｃ） 0.195　（Ｄ） 0.200　（Ｅ） 0.205

（Ｆ） 0.210　（Ｇ） 0.215　（Ｈ） 0.220　（Ｉ） 0.225　（Ｊ） 0.230

（Ｋ） 0.235　（Ｌ） 0.240　（Ｍ） 0245　（Ｎ） 0.250　（Ｏ） 0.255

[⑩の選択肢]

（Ａ） 13%　（Ｂ） 15%　（Ｃ） 17%　（Ｄ） 19%　（Ｅ） 21%

（Ｆ） 23%　（Ｇ） 25%　（Ｈ） 27%　（Ｉ） 29%　（Ｊ） 31%

（ｂ）次に、実際に標準正規分布に従う乱数 $x_i\ (i=1,2,\cdots,6)$ を生成してシミュレーションする。

i	1	2	3	4	5	6
$\exp(x_i)$	0.6	5.3	1.1	1.9	0.3	0.5

標本平均、標本平均の分散の推定値は、次の通りである。

標本平均 $\hat{\theta}_6 =$ ⑪、標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散 $=$ ⑫

なお、標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散の計算において、$x_1, x_2, \cdots, x_6$ より算出した不偏分散の推定値を用いることとする。

x_1, x_2, x_3 を使用し、負の相関法による分散減少の効果を見る。
負の相関法による平均の分散の推定値は、次の通りである。

負の相関法の平均 $\hat{\theta}_6^{(1)}$ の分散 $=$ ⑬

なお、負の相関法の平均 $\hat{\theta}_6^{(1)}$ の分散の計算において、標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散、および x_1, x_2, x_3 より算出した不偏共分散の推定値を用いることとする。

よって、負の相関法によると、分散は ⑭ 減少する。

[⑪の選択肢]

（Ａ） 0.46	（Ｂ） 0.48	（Ｃ） 0.50	（Ｄ） 0.52	（Ｅ） 0.54
（Ｆ） 0.56	（Ｇ） 0.58	（Ｈ） 0.60	（Ｉ） 0.62	（Ｊ） 0.64

[⑫、⑬の選択肢]

（Ａ） 0.125	（Ｂ） 0.130	（Ｃ） 0.135	（Ｄ） 0.140	（Ｅ） 0.145
（Ｆ） 0.150	（Ｇ） 0.155	（Ｈ） 0.160	（Ｉ） 0.165	（Ｊ） 0.170
（Ｋ） 0.175	（Ｌ） 0.180	（Ｍ） 0.185	（Ｎ） 0.190	（Ｏ） 0.195

[⑭の選択肢]

（Ａ） 13%	（Ｂ） 15%	（Ｃ） 17%	（Ｄ） 19%	（Ｅ） 21%
（Ｆ） 23%	（Ｇ） 25%	（Ｈ） 27%	（Ｉ） 29%	（Ｊ） 31%

問題５． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１７点）

「当たりくじ 2 枚とはずれくじ 8 枚が入った袋Ａ」と「当たりくじとはずれくじが 5 枚ずつ入った袋Ｂ」がある。以下、【ルール 1】～【ルール 3】の下で、それぞれくじ引きを繰り返す。

（１）【ルール 1】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 1】

- １回目のくじ引きは袋Ａから行う。
- $i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Ａから行い、当たりくじの場合は袋Ｂから行う。
- 引いたくじは元の袋に戻す。
- 当たりくじを３回引いた時点でくじ引きを終了する。

確率変数 $X_j\ (j=1,2,3)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から j 枚目の当たりくじを引くまで行ったくじ引き回数とし、確率変数 X をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。なお、0 枚目の当たりくじを引いた状態とは、くじ引きを 1 度も行っていない状態を意味する（以下、（２）、（３）も同じ）。

まず、X_1 の期待値 $E[X_1]$ を求める。１回目に引くくじが当たりかはずれかで場合分けをする。

（ａ）１回目に当たりくじを引くとき

１回目に当たりくじを引くという条件の下での X_1 の条件付き期待値は、

$$E\big[X_1 \big|\, 1\text{ 回目に当たりくじを引く}\big] = 1$$

（ｂ）１回目にはずれくじを引くとき

１回目にはずれくじを引くという条件の下での X_1 の条件付き期待値は、

$$E\big[X_1 \big|\, 1\text{ 回目にはずれくじを引く}\big] = \boxed{\quad ① \quad}$$

ここで、１回目に当たりくじを引く確率は、$\boxed{\quad ② \quad}$ であるから、

$$E[X_1] = \boxed{\quad ② \quad} \times 1 + \left(1 - \boxed{\quad ② \quad}\right) \times \boxed{\quad ① \quad}$$

が成り立つ。よって、X_1 の期待値は、

$$E[X_1] = \boxed{\quad ③ \quad}$$

次に、$E[X_2]$ を求める。

当たりくじを引いた直後のくじ引きは袋Ｂから引くことに注意すると、2 枚目の当たりくじを袋Ｂから引くという条件の下での X_2 の条件付き期待値は、$\boxed{\quad ④ \quad}$ である。

袋Ｂではずれくじを引いた場合は袋Ａからくじを引くことに注意すると、2 枚目の当たりくじを袋Ａから引くという条件の下での X_2 の条件付き期待値は、$\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。

よって、

$$E[X_2] = \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

$E[X_3]$ も $E[X_2]$ と同様に考えれば求めることができる。

したがって、X の期待値は、

$$E[X] = \boxed{\text{⑦}}$$

[①、⑤の選択肢]

（A） $E[X_1]$	（B） $1 + E[X_1]$	（C） $E[X_2]$	（D） $1 + E[X_2]$
（E） $\frac{1}{2}E[X_1]$	（F） $\frac{1}{5}E[X_1]$	（G） $\frac{1}{2}(1 + E[X_1])$	（H） $\frac{1}{5}(1 + E[X_1])$
（I） $\frac{1}{2}E[X_2]$	（J） $\frac{1}{5}E[X_2]$	（K） $\frac{1}{2}(1 + E[X_2])$	（L） $\frac{1}{5}(1 + E[X_2])$

[②～④、⑥、⑦の選択肢]

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4
（E） 5	（F） 9	（G） 12	（H） 15
（I） $\frac{1}{5}$	（J） $\frac{2}{5}$	（K） $\frac{1}{2}$	（L） $\frac{4}{5}$
（M） $\frac{5}{2}$	（N） $\frac{13}{5}$	（O） $\frac{7}{2}$	（P） $\frac{36}{5}$

（2）【ルール 2】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 2】

- 1 回目のくじ引きは袋Ａから行う。
- $i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Ａから行い、当たりくじの場合は袋Ｂから行う。
- 袋から当たりくじを引いた場合は元に戻さず、代わりに当たりくじを引いた袋にはずれくじを 1 枚入れる。
- 袋からはずれくじを引いた場合はくじを元に戻す。
- 「当たりくじを 3 回引いた時点」もしくは「当たりくじを引く確率が 0 になった時点」でくじ引きを終了する。

確率変数 $Y_j\ (j=1,2,3)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から「j 枚目の当たりくじを引く」もしくは「袋から当たりくじを引く確率が 0 になる」まで行ったくじ引き回数とし、確率変数 Y をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。

まず、$E[Y_1]$ を求める。（1）と同様に考えると、

$$E[Y_1] = \boxed{\quad ③ \quad}$$

次に、$\mathrm{E}[Y_2]$ を求める。袋Ａには当たりくじが 1 枚、はずれくじが 9 枚入っていることに注意すると、（1）と同様に考えて、

$$E[Y_2] = \boxed{\quad ⑧ \quad}$$

［⑧の選択肢］

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4	（E） 5
（F） 6	（G） 7	（H） 9	（I） 11	（J） 15
（K） $\frac{1}{10}$	（L） $\frac{1}{5}$	（M） $\frac{2}{5}$	（N） $\frac{1}{2}$	（O） $\frac{3}{5}$
（P） $\frac{8}{5}$	（Q） $\frac{11}{5}$	（R） $\frac{5}{2}$	（S） $\frac{17}{5}$	（T） $\frac{7}{2}$
（U） $\frac{23}{5}$	（V） $\frac{32}{5}$	（W） $\frac{36}{5}$	（X） $\frac{29}{2}$	（Y） $\frac{87}{5}$

最後に、$E[Y_3]$ を求める。

（ａ）２枚目の当たりくじを袋Ａから引いたとき

２枚目の当たりくじを袋Ａから引いた直後、袋Ａに当たりくじが０枚、袋Ｂに当たりくじが５枚入っている。よって、２枚目の当たりくじを袋Ａから引いたという条件の下での Y_3 の条件付き期待値は $\boxed{⑨}$ である。

（ｂ）２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いたとき

２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いた直後、袋Ａに当たりくじが１枚、袋Ｂに当たりくじが４枚入っている。よって、２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いたという条件の下での Y_3 の条件付き期待値は $\boxed{⑩}$ である。

ここで、２枚目の当たりくじを袋Ａから引く確率は、$\boxed{⑪}$ であるから、Y_3 の期待値は、

$$E[Y_3] = \boxed{⑫}$$

となる。

したがって、Y の期待値は、

$$E[Y] = \boxed{⑬}$$

［⑨～⑬の選択肢］

（Ａ） 1	（Ｂ） 2	（Ｃ） 3	（Ｄ） 4	（Ｅ） 5
（Ｆ） 6	（Ｇ） 7	（Ｈ） 9	（Ｉ） 11	（Ｊ） 15
（Ｋ） $\frac{1}{10}$	（Ｌ） $\frac{1}{5}$	（Ｍ） $\frac{2}{5}$	（Ｎ） $\frac{1}{2}$	（Ｏ） $\frac{3}{5}$
（Ｐ） $\frac{8}{5}$	（Ｑ） $\frac{11}{5}$	（Ｒ） $\frac{5}{2}$	（Ｓ） $\frac{17}{5}$	（Ｔ） $\frac{7}{2}$
（Ｕ） $\frac{23}{5}$	（Ｖ） $\frac{32}{5}$	（Ｗ） $\frac{36}{5}$	（Ｘ） $\frac{29}{2}$	（Ｙ） $\frac{87}{5}$

（３）【ルール 3】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 3】

> ・１回目のくじ引きは袋Ａから行う。
> ・ $i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Ａから行い、当たりくじの場合は袋Ｂから行う。
> ・引いたくじは元の袋に戻す。
> ・「当たりくじを k 回引いた時点」もしくは「n 回連続ではずれくじを引いた時点」でくじ引きを終了する。

確率変数 $Z_{n,j}\,(j \geq 1)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から「j 枚目の当たりくじを引く」もしくは「n 回連続ではずれくじを引いてくじ引きを終了する」まで行ったくじ引き回数とし、確率変数 Z_n をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。なお、$Z_{n,j}$ は $j-1$ 枚目の当たりくじを引いたという条件の下での確率変数である。

（ａ）$n=1$ のとき

$j=1$ のとき、くじを引いた時点で引いたくじが、当たりかはずれにかかわらずくじ引きを終了することから、$Z_{1,1}$ の期待値は、

$$E[Z_{1,1}] = \boxed{⑭}$$

$j \geq 2$ のとき、同様に考えると、$Z_{1,j}$ の期待値は、

$$E[Z_{1,j}] = \boxed{⑮}$$

ここで、$j-1\ (j \geq 2)$ 枚目の当たりくじを引く確率は、$\boxed{⑯}$ であるから、Z_1 の期待値は、

$$E[Z_1] = \boxed{⑰}$$

[⑭、⑮の選択肢]

（Ａ） 1	（Ｂ） 2	（Ｃ） $j-1$	（Ｄ） $j+1$
（Ｅ） $2k$	（Ｆ） $\frac{13}{5}k-\frac{3}{5}$	（Ｇ） $\frac{7}{2}k-\frac{3}{2}$	（Ｈ） $5k-3$
（Ｉ） $2k-5$	（Ｊ） $\frac{13}{5}k+\frac{12}{5}$	（Ｋ） $\frac{7}{2}k+\frac{3}{2}$	（Ｌ） $5k$

[⑯、⑰の選択肢]

（Ａ） $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$	（Ｂ） $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$	（Ｃ） $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-2}$
（Ｄ） $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$	（Ｅ） $\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$	（Ｆ） $\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$
（Ｇ） $\frac{13}{8}-\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$	（Ｈ） $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$	

（b）$n \geq 2$ のとき

n 回連続ではずれくじを取り出した場合にくじ引きを終了することに注意すると、$Z_{n,1}$ の期待値は、

$$E[Z_{n,1}] = \boxed{⑱}$$

$j \geq 2$ のとき、$Z_{n,j}$ の期待値は、

$$E[Z_{n,j}] = \boxed{⑲}$$

ここで、$j-1$ $(j \geq 2)$ 枚目の当たりくじを引く確率は、$\boxed{⑳}$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_n] = \boxed{㉑}$$

[⑱、⑲の選択肢]

（A） $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（B） $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$　（C） $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-2}$

（D） $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$　（E） $\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（F） $\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$

（G） $\frac{13}{8}-\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$　（H） $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（I） $5-4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

（J） $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　（K） $\frac{7}{2}-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$　（L） $\frac{13}{5}-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

[⑳の選択肢]

（A） $\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$　（B） $\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$

（C） $\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-2}$　（D） $\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right\}^{j-1}$

（E） $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{j-2}$　（F） $\left\{1-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$

（G） $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$　（H） $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}^{j-1}$

[㉑の選択肢]

（A） 1　（B） 2　（C） $k-1$　（D） $k+1$

（E） $2k$　（F） $\frac{13}{5}k-\frac{3}{5}$　（G） $\frac{7}{2}k-\frac{3}{2}$　（H） $5k-3$

（I） $2k-5$　（J） $\frac{13}{5}k+\frac{12}{5}$　（K） $\frac{7}{2}k+\frac{3}{2}$　（L） $5k$

問題６． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１８点）

母集団分布がポアソン分布であるとき、母平均 λ の区間推定法のうち、精密法について考える。
以下、母平均 λ のポアソン母集団からの n 個の標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

（１）まず、母平均 λ の最尤推定量 T を求め、T が望ましい性質を持つか調べる。母平均 λ のポアソン分布の確率分布は、

$$f(x_i; \lambda) = P(X = x_i) = \boxed{\quad ① \quad}$$

であるから、母平均 λ の最尤推定量を求めると、

$$T = \boxed{\quad ② \quad}$$

である。

[①の選択肢]

（Ａ）$\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i} e^{-\lambda}$　（Ｂ）$\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda}$　（Ｃ）$\dfrac{x_i!}{\lambda} e^{-\lambda}$　（Ｄ）$\dfrac{x_i}{\lambda^{x_i}} e^{-x_i}$

（Ｅ）$\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i} e^{-x_i}$　（Ｆ）$\dfrac{\lambda}{x_i!} e^{-\lambda}$　（Ｇ）$\dfrac{\lambda}{x_i} e^{-\lambda}$　（Ｈ）$\dfrac{\lambda}{x_i} e^{-x_i}$

[②の選択肢]

（Ａ）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$　（Ｂ）$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（Ｃ）$\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$　（Ｄ）$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$

以下、最尤推定量 T が持つ性質を調べる。

（不偏性）不偏性を判定するため、T の期待値を計算すると、$E[T]=$ ③ である。

（有効性）クラーメル・ラオの不等式を用いて有効性を判定する。クラーメル・ラオの不等式は、$V[T] \geq \dfrac{1}{\boxed{④}}$ で与えられ、左辺と右辺をそれぞれ計算すると次の通りである。

不等式の左辺 $= V[T] =$ ⑤

不等式の右辺 $=$ ⑥

（充足性）充足性を判定するには、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の確率分布を、T の確率分布と λ に依存しない関数を用いて、次のように分解できればよい。

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = g(T;\lambda) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

（一致性）チェビシェフの不等式を用いて一致性を判定する。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、T に関するチェビシェフの不等式を次のように表すことができる。

$$P(|T - E[T]| > \varepsilon) \leq \boxed{⑦}$$

これを解くと、次の通りとなる。

$$\lim_{n\to\infty} P(|T - E[T]| > \varepsilon) = \boxed{⑧}$$

[③、⑤～⑧の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） λ　（D） λ^2　（E） $\sqrt{\lambda}$

（F） 2λ　（G） $n\lambda$　（H） $2n\lambda$　（I） $2\lambda^2$　（J） $\dfrac{\lambda}{n}$

（K） $\dfrac{2\lambda}{n}$　（L） $\sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$　（M） $\sqrt{\dfrac{2\lambda}{n}}$　（N） $\dfrac{\lambda}{n^2}$　（O） $\dfrac{2\lambda}{n^2}$

（P） $\dfrac{\lambda}{n\varepsilon}$　（Q） $\dfrac{\lambda^2}{n^2\varepsilon^2}$　（R） $\dfrac{\lambda}{n^2\varepsilon^2}$　（S） $\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$　（T） $\dfrac{\lambda}{\varepsilon^2}$

[④の選択肢]

（A） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$　（B） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$　（C） $E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$

（D） $E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$　（E） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$　（F） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$

（G） $E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$　（H） $E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$

以上より、最尤推定量 T が持つ性質は $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ である。なお、⑨の解答にあたっては、**（A）**から**（D）**のうち、正しいものをすべて選択しなさい。ただし、すべて誤っている場合は、**（E）**を選択しなさい。

［⑨の選択肢］

（A） 不偏性　**（B）** 有効性　**（C）** 充足性　**（D）** 一致性　**（E）** 該当なし

（２）次に、ポアソン分布と χ^2 分布の関係を示す。非負整数 k 、正の実数 λ に対し、積分 $F(k,\lambda)$ を、

$$F(k,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty} t^k e^{-t}\,dt$$

とおく。$k\geq 1$ の範囲で $F(k,\lambda)$ を１回部分積分すると、

$$F(k,\lambda)=\boxed{⑩}+k\cdot F(k-1,\lambda)$$

となる。部分積分をくり返すと、平均 λ のポアソン分布に従う確率変数 X を用いて、

$$F(k,\lambda)=\boxed{⑪}\cdot P\left(X\leq \boxed{⑫}\right)\quad\cdots\ \text{(a)}$$

と表すことができる。一方、$F(k,\lambda)$ において、$t=y/2$ とおくと、

$$F(k,\lambda)=\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}\,dy=\Gamma(k+1)\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}\,dy$$

と表される。よって、自由度 $\boxed{⑬}$ の χ^2 分布に従う確率変数 Y を用いることで、

$$F(k,\lambda)=\Gamma(k+1)\cdot P\left(Y\geq \boxed{⑭}\right)\quad\cdots\ \text{(b)}$$

と表すことができる。(a), (b) から、次の関係式が成り立つ。

$$P\left(X\leq \boxed{⑫}\right)=\boxed{⑮}\cdot P\left(Y\geq \boxed{⑭}\right)$$

なお、$k=0$ の場合についても上記の関係式は成り立つ。

[⑩の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） λ^k　（D） λ^{k+1}

（E） $\dfrac{\lambda^{k+1}}{k+1}$　（F） $\lambda^k e^{-\lambda}$　（G） $\lambda^{k+1}e^{-\lambda}$　（H） $\dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda}}{k+1}$

（I） $-\dfrac{\lambda^{k+1}}{k+1}$　（J） $-\lambda^k e^{-\lambda}$　（K） $-\lambda^{k+1}e^{-\lambda}$　（L） $-\dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda}}{k+1}$

[⑪～⑬、⑮の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{2}$　（B） 1　（C） $k-1$　（D） k　（E） $k+1$

（F） $k+2$　（G） $2k-1$　（H） $2k$　（I） $2k+1$　（J） $2(k+1)$

（K） $(k-1)!$　（L） $k!$　（M） $(k+1)!$　（N） $(k+2)!$

[⑭の選択肢]

（A） $\sqrt{\lambda}$　（B） $\sqrt{2\lambda}$　（C） $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$　（D） $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

（E） λ　（F） 2λ　（G） $\dfrac{1}{\lambda}$　（H） $\dfrac{2}{\lambda}$

（３）母平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間 (λ_L, λ_U) を求める。最尤推定量 T を n 倍した nT は、平均 $\boxed{\quad ⑯ \quad}$ のポアソン分布に従うことから、nT の実現値を $k\ (k \geq 1)$ とするとき、$P(nT \leq k) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす λ_U と、$P(nT \geq k) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす λ_L からなる信頼区間を求めればよい。

（２）で求めたポアソン分布と χ^2 分布の関係から、

$$P(nT \leq k) = P\left(Y_U \geq \boxed{\quad ⑰ \quad}\right) = \frac{\varepsilon}{2}、\quad P(nT \geq k) = P\left(Y_L \leq \boxed{\quad ⑰ \quad}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。ここで、Y_U は自由度 $\boxed{\quad ⑱ \quad}$ の χ^2 分布に従う確率変数、Y_L は自由度 $\boxed{\quad ⑲ \quad}$ の χ^2 分布に従う確率変数である。

よって、母平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間 (λ_L, λ_U) は、nT の実現値を $k\ (k \geq 1)$ とするとき、自由度 ϕ の χ^2 分布の上側 ε 点 $\chi^2_\phi(\varepsilon)$ を用いて表すことができる。

[⑯、⑰の選択肢]

（A） λ	（B） $n\lambda$	（C） $\dfrac{\lambda}{n}$	（D） $\sqrt{\lambda}$	（E） $\sqrt{2\lambda}$
（F） $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$	（G） $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$	（H） 2λ	（I） $\dfrac{1}{\lambda}$	（J） $\dfrac{2}{\lambda}$
（K） $\sqrt{n\lambda}$	（L） $\sqrt{2n\lambda}$	（M） $\sqrt{\dfrac{1}{n\lambda}}$	（N） $\sqrt{\dfrac{1}{2n\lambda}}$	（O） $2n\lambda$
（P） $\dfrac{1}{n\lambda}$	（Q） $\dfrac{2}{n\lambda}$	（R） $\sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$	（S） $\sqrt{\dfrac{2\lambda}{n}}$	（T） $\sqrt{\dfrac{n}{\lambda}}$
（U） $\sqrt{\dfrac{n}{2\lambda}}$	（V） $\dfrac{2\lambda}{n}$	（W） $\dfrac{n}{\lambda}$	（X） $\dfrac{2n}{\lambda}$	

[⑱、⑲の選択肢]

（A） $k-1$	（B） k	（C） $k+1$	（D） $k+2$
（E） $2k-1$	（F） $2k$	（G） $2k+1$	（H） $2(k+1)$

（4）ある都市における 10 日間の交通事故の発生件数は、次の通りであった。

1，1，3，2，2，0，3，1，2，1

1 日あたりの交通事故件数は、ポアソン分布に従うものとして、その件数の母平均を精密法により、信頼係数 95%で区間推定する。信頼区間の上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑳ \quad}$ であり、信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ㉑ \quad}$ である。

［⑳、㉑の選択肢］

（A） 0.313	（B） 0.345	（C） 0.378	（D） 0.412	（E） 0.877
（F） 0.915	（G） 0.952	（H） 0.990	（I） 1.374	（J） 1.442
（K） 1.510	（L） 1.576	（M） 2.412	（N） 2.474	（O） 2.536
（P） 2.598				

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x>0.25)=0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\rightarrow\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φ のχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

III．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon=$ 0.100

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon=$ 0.050

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon=$ 0.025

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon=$ 0.010

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon=$ 0.005

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$\exp(x)$
-2.00	0.1353
-1.50	0.2231
-1.00	0.3679
-0.50	0.6065
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052
0.50	1.6487
1.00	2.7183
1.50	4.4817
2.00	7.3891

以上

数学（解答例）

問題１.

（１）箱から玉を一つ無作為に選び、その玉に書かれた数字を N とする。

$N=1$ のとき

$$P(X=0|N=1)=\frac{1}{2}、P(X=1|N=1)=\frac{1}{2}$$

である。同様に、

$N=2$ のとき

$$P(X=0|N=2)=\frac{1}{4}、P(X=1|N=2)=\frac{1}{2}、P(X=2|N=2)=\frac{1}{4}$$

$N=3$ のとき

$$P(X=0|N=3)=\frac{1}{8}、P(X=1|N=3)=\frac{3}{8}、P(X=2|N=3)=\frac{3}{8}、P(X=3|N=3)=\frac{1}{8}$$

である。

$$P(N=i)=\frac{1}{3} \quad (i=1,2,3)$$

であるから、

$$P(X=1)=\sum_{i=1}^{3}P(X=1|N=i)\cdot P(N=i)=\frac{11}{24}$$

となる。同様にして、

$$P(X=0)=\frac{7}{24}、P(X=2)=\frac{5}{24}、P(X=3)=\frac{1}{24}$$

を得る。

よって、求める期待値は、

$$E[X]=\sum_{k=0}^{3}kP(X=k)=1$$

となる。

よって、<u>解答は　①（**G**）　②（**E**）</u>

（２）A さんの就寝時刻を表す確率変数を X（時)、起床時刻を表す確率変数を Y（時）とすると、X は一様分布 $U(0,1)$ に、Y は一様分布 $U(6,8)$ に従い、 X と Y は互いに独立である。
睡眠時間を $Z=Y-X$ とし、$W=X$ とおくと、$X=W,\ Y=Z+W$ となる。

ヤコビアン J を求めると、

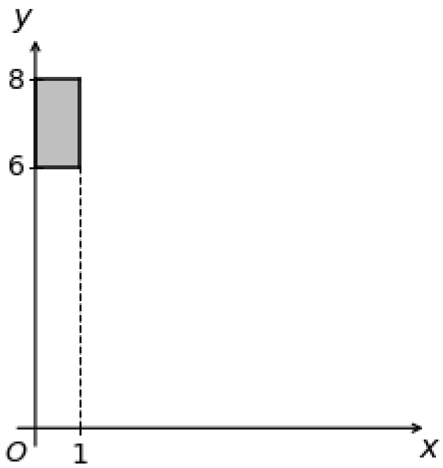
$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

である。よって、$Z,\ W$ の同時確率密度関数を $f_{Z,W}(z,w)$ とすると、

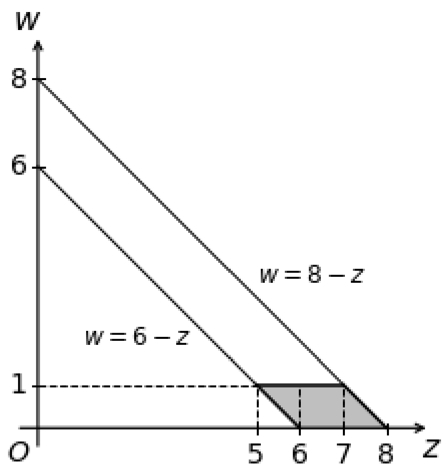
$$f_{Z,W}(z,w)=1\times\frac{1}{2}\times|J|=\frac{1}{2}$$

となる。

ここで、$0\leq x\leq 1,\ 6\leq y\leq 8$ であるから、$5\leq z\leq 8,\ 0\leq w\leq 1$ となる。



⟶



Z の確率密度関数 $f(z)$ を求めると、

$5\leq z\leq 6$ のとき、

$$f(z)=\int_0^1 f_{Z,W}(z,w)dw=\int_{6-z}^1\frac{1}{2}dw=\frac{z-5}{2}$$

$6<z\leq 7$ のとき、

$$f(z)=\int_0^1 f_{Z,W}(z,w)dw=\int_0^1\frac{1}{2}dw=\frac{1}{2}$$

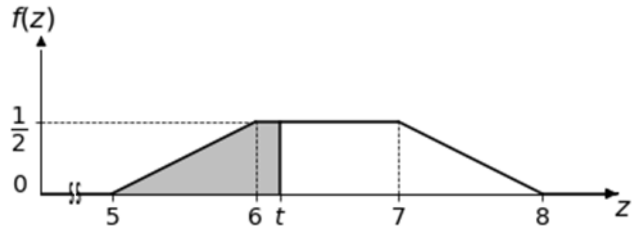
$7<z\leq 8$ のとき、

$$f(z)=\int_0^1 f_{Z,W}(z,w)dw=\int_0^{8-z}\frac{1}{2}dw=\frac{8-z}{2}$$

その他のとき、

$$f(z)=0$$

これを図示すると、



となる。

ここで、A さんのある日の睡眠時間が t 時間以下である確率は、図の色付き部分の面積である。

$5 \leq z \leq 6$ の色付き部分の面積が $\frac{1}{4}$ であることを踏まえ、

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (t-6) = \frac{1}{3}$$

$$t - 6 = \frac{1}{6}$$

$$t = \frac{37}{6} = 6.166 \cdots \fallingdotseq 6.17 \text{（時間）}$$

よって、解答は　③（F）　④（F）

（３）(X_1,X_2,X_3) の積率母関数 $\phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ は、多項定理より、

$$\phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=E\left[e^{\theta_1X_1+\theta_2X_2+\theta_3X_3}\right]$$
$$=\sum_{k.l,m,k+l+m=n}\frac{n!}{k!\,l!\,m!}(p_1)^k(p_2)^l(p_3)^m e^{\theta_1k}e^{\theta_2l}e^{\theta_3m}$$
$$=\sum_{k.l,m,k+l+m=n}\frac{n!}{k!\,l!\,m!}\left(p_1e^{\theta_1}\right)^k\left(p_2e^{\theta_2}\right)^l\left(p_3e^{\theta_3}\right)^m$$
$$=\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^n$$

を得る。また、X_1 の積率母関数は、$\phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ に対して $\theta_2=0,\theta_3=0$ として、

$$\phi(\theta_1)=\phi(\theta_1,0,0)=E\left[e^{\theta_1X_1}\right]=\left(p_1e^{\theta_1}+p_2+p_3\right)^n=\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n$$

となる。

ここで、

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^n=n(n-1)\cdot p_1e^{\theta_1}\cdot p_2e^{\theta_2}\cdot\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^{n-2}$$

であるから、$(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=(0,0,0)$ を代入すると、

$$E[X_1X_2]=n(n-1)p_1p_2$$

となる。また、$i=1,2,3$ に対し、

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\phi(\theta_i)=n\cdot p_ie^{\theta_i}\cdot\left(p_ie^{\theta_i}+1-p_i\right)^{n-1}$$

$\theta_i=0$ を代入すると、

$$E[X_i]=np_i$$

である。

したがって、X_1 と X_2 の共分散は、

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=E[X_1X_2]-E[X_1]E[X_2]=n(n-1)p_1p_2-np_1\cdot np_2=-np_1p_2$$

となる。

よって、解答は　⑤（Ａ）　⑥（Ｄ）　⑦（Ｇ）

（４）確率変数 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ はすべて平均 2 の指数分布に従うので、確率変数 X_i の分散 $V[X_i]$ は、

$$V[X_i]=E[{X_i}^2]-(E[X_i])^2=\int_0^\infty x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx-2^2=8-4=4$$

となる。

確率変数 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ の期待値 $E[S_n]$ は、

$$E[S_n]=E[X_1+X_2+\cdots+X_n]=E[X_1]+E[X_2]+\cdots+E[X_n]=2n$$

となる。

また、$X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ は互いに独立であるから、確率変数 S_n の標準偏差 $\sqrt{V[S_n]}$ は、

$$\sqrt{V[S_n]}=\sqrt{V[X_1+X_2+\cdots+X_n]}=\sqrt{V[X_1]+V[X_2]+\cdots+V[X_n]}=\sqrt{4n}=2\sqrt{n}$$

となる。

中心極限定理より、$\dfrac{S_n-E[S_n]}{\sqrt{V[S_n]}}$ は、標準正規分布 $N(0,1)$ で近似できるので、付表より、

$$\begin{aligned}P(190\le S_{100}\le 240)&=P\left(\frac{190-200}{20}\le\frac{S_{100}-200}{20}\le\frac{240-200}{20}\right)\\&=P\left(-0.5\le\frac{S_{100}-200}{20}\le 2\right)\\&=1-P\left(\frac{S_{100}-200}{20}>2\right)-P\left(\frac{S_{100}-200}{20}<-0.5\right)\\&=1-P\left(\frac{S_{100}-200}{20}>2\right)-P\left(\frac{S_{100}-200}{20}>0.5\right)\\&=1-0.0228-0.3085\\&=0.6687\end{aligned}$$

となる。

よって、解答は　⑧（H）　⑨（H）

問題２.

（１）パラメータ $0 < p < 1$ の幾何分布に従う確率変数 X の確率分布は、

$$P(X=k) = p(1-p)^k \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

であり、X の期待値 $E[X]$ は $\dfrac{1-p}{p}$ となる。

パラメータ p の推定値 $\hat{p}$ は、母平均 μ の推定値 $\hat{\mu}$ を用いて、

$$\hat{\mu} = \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} \text{ より、} \hat{p} = \frac{1}{\hat{\mu}+1}$$

と表すことができる。ここで、推定値 $\hat{\mu}$ は、モーメント法より、

$$\hat{\mu} = \frac{(13+25+37+0+41+18+31+27+11+7)}{10} = 21$$

であるから、

$$\hat{p} = \frac{1}{21+1} = \frac{1}{22}$$

となる。

よって、解答は　①　**（C）**

（２）果汁濃度について、n 回の定量分析を行って得た値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対し、平均値 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ を計算し、$\bar{x} < \mu_0 - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき不合格、$\bar{x} \geq \mu_0 - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ のとき合格とすると、果汁濃度 $\mu_0 = 97\%$ を誤って不合格とする確率が 2.5%であることから、$\varepsilon = 0.025$

また、果汁濃度 $\mu = 95\%$ 以下を誤って合格とする確率が 5.0%以下となるため、以下の算式が成り立つ。

$$P\left(\bar{X} \geq \mu_0 - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leq 0.05$$

ここで $\bar{X}$ は平均 $\mu = 95\%$ および標準偏差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の正規分布に従っているので、標準化すると、

$$P\left(\frac{\bar{X} - 0.95}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq \frac{\mu_0 - 0.95 - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(U \geq \frac{\mu_0 - 0.95 - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \leq 0.05$$

$u(0.05) = 1.6449,\ u(0.025) = 1.96,\ \sigma = 0.02$ であることから、

$$\frac{0.02}{\frac{0.02}{\sqrt{n}}} - 1.96 \geq 1.6449, \qquad n \geq (1.96 + 1.6449)^2 = 12.9953\cdots$$

となり、実施すればよい最小の定量分析回数 n は 13 回。

このとき、果汁濃度の分析値の平均が

$$\mu_0 - u(\varepsilon)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.97 - 1.96 \times \frac{0.02}{\sqrt{13}} = 0.95912\cdots$$

以下ならば、製品を不合格とすればよい。

よって、解答は　②（G）　③（H）

（３）この 4 面サイコロについて、帰無仮説「それぞれの数字の出る確率が等しい」は、次のように表すことができる。

帰無仮説：$p_1=\dfrac{1}{4}$、$p_2=\dfrac{1}{4}$、$p_3=\dfrac{1}{4}$、$p_4=\dfrac{1}{4}$　（p_i は i の数字が出る確率 $(1 \leq i \leq 4)$）

よって、28 回中それぞれの数字の出る期待回数は、

$$28\times\frac{1}{4}=7$$

回となる。

i の数字の出現回数を f_i として、適合度の検定を行い、

$$\begin{aligned}\chi^2&=\sum_{i=1}^{4}\frac{(f_i-7)^2}{7}\\&=\frac{1}{7}\{(6-7)^2+(9-x-7)^2+(12-7)^2+(x+1-7)^2\}\\&=\frac{2}{7}\{x^2-8x+33\}\end{aligned}$$

自由度 $\phi=4-1=3$ の χ^2 分布の上側 5%点の値 7.8147 と比べて、

$$\chi^2<7.8147$$

であれば、帰無仮説は採択される。

したがって、

$$x^2-8x+33=(x-4)^2+17<27.35145$$

を解くと、

$$-3.2173\cdots<x-4<3.2173\cdots$$

x について整理すると、

$$0.7826\cdots<x<7.2173\cdots$$

すなわち、帰無仮説が採択されるのは、x が 1 以上、7 以下のときとなるため、x のとりうる最小値は 1 であり、最大値は 7 である。

よって、解答は　④（**C**）　⑤（**I**）

（４）この都市の世帯数を N 、母平均を μ 、母分散を σ^2 とする。この都市の総人口の推定量は、

$$Z_R = \frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とすればよい。Z_R の期待値と分散は、

$$E[Z_R] = N\mu,\ \ V[Z_R] = N^2 \cdot \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

であるから、Z_R の変動係数は、

$$\frac{\sqrt{V[Z_R]}}{E[Z_R]} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n}}$$

となる。Z_R の変動係数が 3%以下であること、母集団の変動係数が 1 であることから、

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n}} \leq 0.03$$

となればよい。$N = 160{,}000$ を代入して、n について解くと、

$$n \geq \frac{160{,}000}{0.03^2 \times (160{,}000 - 1) + 1} = 1{,}103.455\cdots$$

すなわち、n を 1,104 以上にすればよい。

よって、<u>解答は　⑥（**F**）　⑦（**G**）　⑧（**B**）</u>

問題３.

（１）プロビット・モデルにおいて α および β を推定するためには、$z = F^{-1}(y)$ として y を変換したデータ z に対して線形回帰を行えばよい。プロビット・モデルにおいて F は標準正規分布の分布関数であるから、標準正規分布表を用いて y を z に変換すると下表のとおりとなる。

x	1.1	1.3	2.6	4.8
y	0.1	0.15	0.3	0.78
z	-1.2816	-1.0364	-0.5244	0.7722

これをもとに α と β の推定値 $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ を、上記の変換したデータから線形回帰により計算すると、$\bar{x} = 2.45$，$\bar{z} = -0.51755$ であるため、

$$\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 = 8.69\,, \qquad \sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}) = 4.65803\cdots$$

となり、

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{4.65803}{8.69} = 0.53602\cdots, \qquad \hat{\alpha} = \bar{z} - \hat{\beta}\bar{x} = -1.8308\cdots$$

となる。

よって、解答は　①（Ａ）　②（Ｃ）

（２）$q_{ij}=P(X_n=j|X_{n-1}=i)$ $(n\geq 1,\ i,j=0,1,2,3,4)$ とし、$i+1$ 行 $j+1$ 列を q_{ij} とする推移確率行列を Q とすると、Q は次の通りとなる。

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{6}{16} & \frac{9}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{16} & \frac{8}{16} & \frac{4}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{16} & \frac{6}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 回目の試行直後の赤球の個数が 1 個である確率は、

$$\begin{aligned} P(X_2=1) &= P(X_2=1|X_1=0)P(X_1=0|X_0=1)P(X_0=1) \\ &\quad + P(X_2=1|X_1=1)P(X_1=1|X_0=1)P(X_0=1) \\ &\quad + P(X_2=1|X_1=2)P(X_1=2|X_0=1)P(X_0=1) \\ &= 1\times\frac{1}{16}\times 1+\frac{6}{16}\times\frac{6}{16}\times 1+\frac{4}{16}\times\frac{9}{16}\times 1 \\ &= \frac{11}{32} \end{aligned}$$

である。また、極限分布

$$\vec{\pi}=\lim_{n\to\infty}\bigl(P(X_n=0),P(X_n=1),P(X_n=2),P(X_n=3),P(X_n=4)\bigr)$$

が存在するので、

$$\vec{\pi}=\vec{\pi}Q$$

が成り立つ。$\vec{\pi}=(a,b,c,d,e)$ とおくと、

$$\begin{cases} a=\frac{1}{16}b \\ b=a+\frac{6}{16}b+\frac{4}{16}c \\ c=\frac{9}{16}b+\frac{8}{16}c+\frac{9}{16}d \\ d=\frac{4}{16}c+\frac{6}{16}d+e \\ e=\frac{1}{16}d \\ 1=a+b+c+d+e \end{cases}$$

これを解くと、

$$a=\frac{1}{70},\ b=\frac{8}{35},\ c=\frac{18}{35},\ d=\frac{8}{35},\ e=\frac{1}{70}$$

したがって、

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=1)=\frac{8}{35}$$

よって、解答は　③（Ｊ）　④（Ｇ）

問題４.

（１）金融商品の価格計算では、次の通り、ある確率分布 F に従い、確率密度 f を持つ確率変数 X を前提にして、ある関数 $g(X)$ の期待値

$$\theta = E[g(X)] = \int g(x)f(x)\,dx$$

を求めようとすることが多い。この積分を求める場合に、解析的に解く代わりに、または解析的に求めることができないとき、以下のようにモンテカルロ法を使用することができる。

確率変数 X と同一の確率分布に従う、互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を生成して関数 $g(X_i)\ (i = 1,2,\cdots,n)$ をシミュレートし、その標本平均

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

を母平均 θ の推定量とする。
このとき、$\hat{\theta}_n$ の期待値は、

$$E[\hat{\theta}_n] = \theta$$

である。
また、母分散を $\sigma^2 = V[g(X)]$ とするとき、$\hat{\theta}_n$ の分散は

$$V[\hat{\theta}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

であり、$\hat{\theta}_n$ と θ の平均 2 乗誤差は、

$$E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = E\left[\left(\hat{\theta}_n - E[\hat{\theta}_n]\right)^2\right] = V[\hat{\theta}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$$

である。
よって、$\hat{\theta}_n$ と θ の標準誤差（平均 2 乗誤差の平方根）は、n と無関係な定数 c を用いて、$c/\sqrt{n}$ と表わすことができる。

よって、解答は　①（Ａ）　②（Ｅ）　③（Ｅ）　④（Ｈ）

以下では、シミュレーション効率化の観点から、この定数部分 c を減少させる手法（分散減少法）のうち、負の相関法について考える。

まず、互いに独立ではない、同一のある確率分布 F に従い、確率密度 f を持つ確率変数 X, Y を考える。$\theta = E[g(X)] = E[g(Y)]$、$\sigma^2 = V[g(X)] = V[g(Y)]$、$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}\big(g(X), g(Y)\big)$ とする。

次に、X_i と Y_i $(i = 1,2,\cdots,M)$ 以外、互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_M,\ Y_1, Y_2, \cdots, Y_M$ を生成する。
なお、X_i と Y_i の同時確率分布は、X と Y の同時確率分布と同一であるとする。
このとき、θ の推定量として、標本平均

$$\hat{\theta}_{2M}^{(1)} = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{M}\{g(X_i) + g(Y_i)\}$$

をとると、$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の期待値は、$E\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]=\theta$ である。また、$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の分散は、

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]=\frac{\sigma^2}{2M}+\frac{\sigma_{XY}}{2M}$$

である。
ここで、確率分布 F の逆関数 F^{-1} が存在し、$U_1,U_2,\cdots,U_M$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数とし、

$$X_i=F^{-1}(U_i)\,,\ Y_i=F^{-1}(1-U_i)$$

とおくと、確率分布 F に従う確率変数 X_i および Y_i を生成できる。このとき、関数 $g(x)$ が単調関数ならば、$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]\le V\left[\,\hat{\theta}_{2M}\right]$ となることが知られている。さらに、確率分布 F が標準正規分布に従うとき、分布の左右対称性から、標準正規分布に従う確率変数 X_i を用いて、

$$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}=\frac{1}{2M}\cdot\sum_{i=1}^{M}\{g(X_i)+g(-X_i)\}$$

と表すことができる。

よって、<u>解答は　⑤ （**D**）　⑥ （**C**）</u>

（２）確率変数 X が標準正規分布に従うとし、

$$g(X)=e^{-0.5}\cdot\max(e^X-1,0)$$

である場合の金融商品の価格 $E[g(X)]$ を求めたい。

（ａ）まず、付表を用いて解析的に分散減少の効果の理論値を計算する。$g(X)$ の期待値は、

$$\begin{aligned}
E[g(X)]&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}}\cdot\max(e^x-1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\
&=e^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}(e^x-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\
&=e^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\\
&=e^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx\\
&=\int_{-1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-e^{-\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\\
&=1-N(1)-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\\
&=0.538\ldots
\end{aligned}$$

である。
また、

$$E[g(X)^2]=e^{-1}\int_0^{\infty}(e^x-1)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=e\big(1-N(2)\big)-2e^{-\frac{1}{2}}\big(1-N(1)\big)+\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$=1.819\ldots$$

$$\mathrm{Cov}\big(g(X),g(-X)\big)=-E[g(X)]^2=-0.289\ldots$$

であるから、$M=3$ のとき、$\hat{\theta}_{2M}$ と $\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の分散はそれぞれ、

$$V\big[\hat{\theta}_{2M}\big]=\frac{V[g(X)]}{2M}=\frac{E[g(X)^2]-E[g(X)]^2}{6}=0.2550\ldots$$

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]=\frac{V[g(X)]}{2M}+\frac{\mathrm{Cov}\big(g(X),g(-X)\big)}{6}=0.2067\ldots$$

よって、負の相関法によって分散は

$$1-\frac{V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]}{V\big[\hat{\theta}_{2M}\big]}=18.9\ldots\%$$

減少することが期待できる。

よって、<u>解答は ⑦（E） ⑧（O） ⑨（E） ⑩（D）</u>

（ｂ）次に、実際に標準正規分布に従う乱数 $x_i\ (i=1,2,\cdots,6)$ を生成してシミュレーションする。

i	1	2	3	4	5	6
$\exp(x_i)$	0.6	5.3	1.1	1.9	0.3	0.5

標本平均、不偏分散および標本平均の分散の推定値は、次の通りである。

標本平均 $\hat{\theta}_6=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}e^{-0.5}\cdot\max(e^{x_i}-1,0)=0.535\ldots$

不偏分散 $\hat{\sigma}_6^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}\left[e^{-0.5}\cdot\max(e^{x_i}-1,0)-\hat{\theta}_6\right]^2=1.076\ldots$

標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散 $=\frac{\hat{\sigma}_6^2}{6}=0.1793\ldots$

x_1,x_2,x_3 を使用し、負の相関法による分散減少の効果を見る。

i	1	2	3	平均
$e^{-0.5}\cdot\max(e^{x_i}-1,0)$	0	2.607 …	0.060 …	0.889 …
$e^{-0.5}\cdot\max(e^{-x_i}-1,0)$	0.404 …	0	0	0.134 …

負の相関法による不偏共分散、および平均の分散の推定値は、次の通りである。

不偏共分散

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(e^{-0.5}\cdot\max(e^{x_i}-1,0)-0.889\ldots)\cdot(e^{-0.5}\cdot\max(e^{-x_i}-1,0)-0.134\ldots)=-0.179\ldots$$

負の相関法の平均 $\hat{\theta}_6^{(1)}$ の分散 = 標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散 $+\frac{1}{6}\cdot$ 不偏共分散 $=0.1493\ldots$

よって、負の相関法によると、分散は16.7 ... % 減少する。

よって、解答は　⑪（**E**）　⑫（**L**）⑬（**F**）　⑭（**C**）

問題５.

「当たりくじ 2 枚とはずれくじ 8 枚が入った袋A」と「当たりくじとはずれくじが 5 枚ずつ入った袋B」がある。以下、【ルール 1】～【ルール 3】の下で、それぞれくじ引きを繰り返す。

（1）【ルール 1】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 1】

- 1 回目のくじ引きは袋Aから行う。
- $i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Aから行い、当たりくじの場合は袋Bから行う。
- 引いたくじは元の袋に戻す。
- 当たりくじを 3 回引いた時点でくじ引きを終了する。

確率変数 $X_j\ (j=1,2,3)$ を $j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から j 枚目の当たりくじを引くまで行ったくじ引き回数とし、確率変数 X をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。なお、0 枚目の当たりくじを引いた状態とは、くじ引きを 1 度も行っていない状態を意味する（以下、（2）、（3）も同じ)。

まず、X_1 の期待値 $E[X_1]$ を求める。1 回目に引くくじが当たりかはずれかで場合分けをする。

（a）1 回目に当たりくじを引くとき

1 回目に当たりくじを引くという条件の下での X_1 の条件付き期待値は、

$$E\big[X_1 \big|\, 1\text{ 回目に当たりくじを引く}\big] = 1$$

（b）1 回目にはずれくじを引くとき

1 回目にはずれくじを引くという条件の下での X_1 の条件付き期待値は、

$$E\big[X_1 \big|\, 1\text{ 回目にはずれくじを引く}\big] = 1 + E[X_1]$$

ここで、1 回目に当たりくじを引く確率は、$1/5$ であるから、

$$E[X_1] = \frac{1}{5} \times 1 + \frac{4}{5} \times (1 + E[X_1])$$

が成り立つ。よって、X_1 の期待値は、

$$E[X_1] = 1 + \frac{4}{5} \times E[X_1]$$

$$E[X_1] = 5$$

次に、$E[X_2]$ を求める。

当たりくじを引いた直後のくじ引きは袋Bから引くことに注意すると、2 枚目の当たりくじを袋Bから引くという条件の下での X_2 の条件付き期待値は、1 である。

袋Bではずれくじを引いた場合は袋Aからくじを引くことに注意すると、2 枚目の当たりくじを袋Aから引くという条件の下での X_2 の条件付き期待値は、$1 + E[X_1]$ である。

ここで、2 枚目の当たりくじを袋Aから引く確率は、$1/2$ であるから、

$$E[X_2]=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times(1+E[X_1])=\frac{7}{2}$$

最後に、$E[X_3]$ を求める。当たりくじを引いた直後のくじ引きは袋Ｂから引くことに注意すると、$E[X_2]$ の場合と同様に考えて、

$$E[X_3]=\frac{7}{2}$$

したがって、X の期待値は、

$$E[X]=E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]=12$$

よって、解答は　①（**Ｂ**）　②（**Ｉ**）　③（**Ｅ**）　④（**Ａ**）　⑤（**Ｂ**）　⑥（**Ｏ**）　⑦（**Ｇ**）

（２）【ルール 2】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 2】

- 1 回目のくじ引きは袋Ａから行う。
- $i+1$ 回目 $(i\geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Ａから行い、当たりくじの場合は袋Ｂから行う。
- 袋から当たりくじを引いた場合は元に戻さず、代わりに当たりくじを引いた袋にはずれくじを 1 枚入れる。
- 袋からはずれくじを引いた場合はくじを元に戻す。
- 「当たりくじを 3 回引いた時点」もしくは「当たりくじを引く確率が 0 になった時点」でくじ引きを終了する。

確率変数 $Y_j\ (j=1,2,3)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から「j 枚目の当たりくじを引く」もしくは「袋から当たりくじを引く確率が 0 になる」まで行ったくじ引き回数とし、確率変数 Y をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。

まず、$E[Y_1]$ を求める。（１）と同様に考えると、

$$E[Y_1]=E[X_1]=5$$

次に、$E[Y_2]$ を求める。袋Ａには当たりくじが 1 枚、はずれくじが 9 枚入っていることに注意して（１）と同様に考える。

仮に、袋Ａに当たりくじが 1 枚、はずれくじが 9 枚入っていた場合の X_1（これを $X_1{}'$ とする）の期待値は、

$$E[X_1{}']=\frac{1}{10}\times 1+\left(1-\frac{1}{10}\right)\times(1+E[X_1{}'])$$

$$E[X_1{}']=10$$

であるから、

$$E[Y_2] = \frac{1}{2} \times 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times (1 + 10) = 6$$

最後に、$E[Y_3]$ を求める。

（ａ）２枚目の当たりくじを袋Ａから引いたとき

２枚目の当たりくじを袋Ａから引いた直後、袋Ａに当たりくじが０枚、袋Ｂに当たりくじが５枚入っている。

よって、２枚目の当たりくじを袋Ａから引いたという条件の下での Y_3 の条件付き期待値は１である。

（ｂ）２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いたとき

２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いた直後、袋Ａに当たりくじが１枚、袋Ｂに当たりくじが４枚入っている。

よって、２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いたという条件の下での Y_3 の条件付き期待値は、

$$\frac{2}{5} \times 1 + \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times (1 + 10) = 7$$

ここで、２枚目の当たりくじを袋Ａから引く確率は、$1/2$であるから、Y_3 の期待値は、

$$E[Y_3] = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 7 = 4$$

となる。

したがって、Y の期待値は、

$$E[Y] = E[Y_1] + E[Y_2] + E[Y_3] = 15$$

よって、解答は　⑧（**Ｆ**）　⑨（**Ａ**）　⑩（**Ｇ**）　⑪（**Ｎ**）　⑫（**Ｄ**）　⑬（**Ｊ**）

（３）【ルール３】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール３】

・１回目のくじ引きは袋Ａから行う。
・$i + 1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Ａから行い、当たりくじの場合は袋Ｂから行う。
・引いたくじは元の袋に戻す。
・「当たりくじを k 回引いた時点」もしくは「n 回連続ではずれくじを引いた時点」でくじ引きを終了する。

確率変数 $Z_{n,j}\ (j \geq 1)$ を $j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から「j 枚目の当たりくじを引く」もしくは「n 回連続ではずれくじを引いてくじ引きを終了する」まで行ったくじ引き回数とし、確率変数 Z_n をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。なお、$Z_{n,j}$ は $j-1$ 枚目の当たりくじを引いたという条件の下での確率変数である。

（a）$n=1$ のとき

$j=1$ のとき、くじを引いた時点で引いたくじが、当たりかはずれにかかわらずくじ引きを終了することから、$Z_{1,1}$ の期待値は、

$$E[Z_{1,1}]=1$$

$j\geq 2$ のとき、同様に、くじを引いた時点で取り出したくじの種類にかかわらず試行を終了することから、$Z_{1,j}$ の期待値は、

$$E[Z_{1,j}]=1$$

ここで、$j-1$ $(j\geq 2)$ 枚目の当たりくじを引く確率は、

$$\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{j-2}=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$$

であるから、Z_1 の期待値は、

$$E[Z_1]=E[Z_{1,1}]+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}\times E[Z_{1,j}]$$

$$=1+\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$$

$$=1+\frac{1}{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{7}{5}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

（b）$n\geq 2$ のとき

n 回連続ではずれくじを取り出した場合にくじ引きを終了することに注意すると、$Z_{n,1}$ の期待値は、

$$E[Z_{n,1}]=\frac{1}{5}\times 1+\frac{4}{5}\times\left(1+E[Z_{n-1,1}]\right)$$

$$E[Z_{n,1}]-5=\frac{4}{5}\times\left(E[Z_{n-1,1}]-5\right)$$

よって、

$$E[Z_{n,1}]=5+\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\times\left(E[Z_{1,1}]-5\right)=5-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$j\geq 2$ のとき、$Z_{n,j}$ の期待値は、

$$E[Z_{n,j}]=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\left(1+E[Z_{n-1,1}]\right)=\frac{7}{2}-2\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$$

ここで、$j-1$ $(j \geq 2)$ 枚目の当たりくじを引く確率は、

$$\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}\times\left\{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-2}$$

であり、

$$\lim_{n\to\infty} E\left[Z_{n,j}\right]=\frac{7}{2}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_n]=\lim_{n\to\infty} E\left[Z_{n,1}\right]+\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{k} E\left[Z_{n,j}\right]\times\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}\times\left\{1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-2}$$

$$=5+\frac{7}{2}\times(k-1)$$

$$=\frac{7}{2}k+\frac{3}{2}$$

よって、<u>解答は　⑭　**（A）**　⑮　**（A）**　⑯　**（D）**　⑰　**（H）**　⑱　**（I）**　⑲　**（K）**
⑳　**（C）**　㉑　**（K）**</u>

問題６.

母集団分布がポアソン分布であるとき、母平均 λ の区間推定法のうち、精密法について考える。以下、母平均 λ のポアソン母集団からの n 個の標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

（１）まず、母平均 λ の最尤推定量 T を求め、T が望ましい性質を持つか調べる。

母平均 λ のポアソン分布の確率分布は

$$f(x_i;\lambda) = P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$$

である。λ の最尤推定量を求めるために、尤度関数 $l(\lambda)$ は、

$$l(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$$

なので、この両辺の対数をとると、

$$\log l(\lambda) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log\lambda - \log\prod_{i=1}^{n} x_i! - n\lambda$$

両辺を λ で微分して、

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\log l(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0$$

を λ について解くと、母平均 λ の最尤推定量 T は

$$T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

となる。

よって、解答は　①（**B**）　②（**B**）

以下、最尤推定量 T が持つ性質を調べる。

（不偏性）

$$E[T] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \lambda$$

であるから、不偏性を満たす。

（有効性）

クラーメル・ラオの不等式は、

$$V[T] \geq \frac{1}{n \cdot E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right]}$$

で与えられる。左辺は、

$$V[T] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \frac{\lambda}{n}$$

右辺は、

$$\frac{1}{n\cdot E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right]}=\frac{1}{n\cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\left(\frac{\lambda^X}{X!}e^{-\lambda}\right)\right)^2\right]}=\frac{1}{n\cdot E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}(X\log\lambda-\log X!-\lambda)\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{n\cdot E\left[\left(\frac{X}{\lambda}-1\right)^2\right]}=\frac{\lambda^2}{nE[(X-\lambda)^2]}=\frac{\lambda^2}{nV[X]}$$

$$=\frac{\lambda}{n}$$

したがって、有効性を満たす。

（充足性）

T が充足性を満たすためには、$X_1,X_2,\cdots,X_n$ の確率分布を、T の確率分布と λ に依存しない関数を用いて、

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda)=g(T;\lambda)\cdot h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

として分解できればよい。したがって、充足性を満たす。

（一致性）

チェビシェフの不等式より、任意の $\varepsilon>0$ に対し、

$$P(|T-E[T]|>\varepsilon)\le\frac{V[T]}{\varepsilon^2}=\frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

が成り立つ。したがって、

$$\lim_{n\to\infty}P(|T-E[T]|>\varepsilon)=0$$

となるから、一致性を満たす。

よって、解答は　③（C）　④（B）　⑤（J）⑥（J）　⑦（S）　⑧（A）
⑨（A）（B）（C）（D）

（2）次に、ポアソン分布と χ^2 分布の関係を示す。非負整数 k、正の実数 λ に対し、積分 $F(k,\lambda)$ を、

$$F(k,\lambda)=\int_\lambda^\infty t^k e^{-t}\,dt$$

とおく。$k\ge 1$ の範囲で $F(k,\lambda)$ を 1 回部分積分すると、

$$F(k,\lambda)=[-t^k e^{-t}]_\lambda^\infty+k\int_\lambda^\infty t^{k-1}e^{-t}\,dt=\lambda^k e^{-\lambda}+k\cdot F(k-1,\lambda)$$

部分積分をくり返すと、

$$F(k,\lambda)=k!\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=k!\cdot P(X\le k)$$

となる。よって、平均 λ のポアソン分布に従う確率変数 X を用いて、

$$F(k,\lambda) = k! \cdot P(X \le k)$$

と表すことができる。一方、$F(k,\lambda)$ において、$t = y/2$ とおくと、

$$F(k,\lambda) = \int_{2\lambda}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}} dy = \Gamma(k+1)\int_{2\lambda}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)} \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}} dy$$

よって、自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布に従う確率変数 Y を用いて、

$$F(k,\lambda) = \Gamma(k+1) \cdot P(Y \ge 2\lambda)$$

以上から、

$$P(X \le k) = P(Y \ge 2\lambda)$$

の関係式が成り立つ。

なお、$k = 0$ の場合についても上記の関係式は成り立つ。

よって、解答は ⑩（F） ⑪（L） ⑫（D） ⑬（J） ⑭（F） ⑮（B）

（３）母平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間 (λ_L, λ_U) を求める。最尤推定量 T を n 倍した nT は、ポアソン分布の再生性から、平均$n\lambda$のポアソン分布に従う。nT の実現値を $k\ (k \ge 1)$ とすると、信頼区間として、次を満たす母平均 λ の区間を求めることになる。

$$P(nT \le k) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad P(nT \ge k) = \frac{\varepsilon}{2}$$

（２）で求めたポアソン分布と χ^2 分布の関係から、

$$P(nT \le k) = P(Y_U \ge 2n\lambda) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P(nT \ge k) = 1 - P(nT \le k-1) = 1 - P(Y_L \ge 2n\lambda) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P(Y_L \ge 2n\lambda) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

より、$P(Y_L \le 2n\lambda) = \dfrac{\varepsilon}{2}$

が成り立つ。ここで、Y_U は自由度 $2(k+1)$ の χ^2 分布に従う確率変数、Y_L は自由度 $2k$ の χ^2 分布に従う確率変数である。

よって、母平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間 (λ_L, λ_U) の下限 λ_L と上限 λ_U は、nT の実現値を $k\ (k \ge 1)$ とするとき、自由度 ϕ の χ^2 分布の上側 ε 点 $\chi^2_\phi(\varepsilon)$ を用いて、

$$\lambda_L = \frac{\chi^2_{2k}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2n}, \qquad \lambda_U = \frac{\chi^2_{2(k+1)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2n}$$

となる。

よって、解答は ⑯（B） ⑰（O） ⑱（H） ⑲（F）

（４）ある都市における 10 日間の交通事故の発生件数は、次の通りであった。

1，1，3，2，2，0，3，1，2，1

1 日あたりの交通事故件数は、ポアソン分布に従うものとして、その件数の母平均を精密法により、信頼係数 95%で区間推定する。$n = 10,\ k = 16,\ \varepsilon = 0.05$ として付表を用いて計算すると、

$$\lambda_U = \frac{\chi^2_{2(k+1)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2n} = \frac{\chi^2_{34}(0.025)}{20} = \frac{51.9660}{20} = 2.598$$

$$\lambda_L = \frac{\chi^2_{2k}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2n} = \frac{\chi^2_{32}(0.975)}{20} = \frac{18.2908}{20} = 0.915$$

となる。

よって、解答は　⑳（Ｐ）　㉑（Ｆ）

問題１.

（1）	①	（G）	1 点	（3）	⑤	（A）	2 点
	②	（E）	4 点		⑥	（D）	1 点
（2）	③	（F）	2 点		⑦	（G）	2 点
	④	（F）	3 点	（4）	⑧	（H）	1 点
					⑨	（H）	4 点

問題２.

（1）	①	（C）	5 点	（4）	⑥	（F）	1 点
（2）	②	（G）	2 点		⑦	（G）	2 点
	③	（H）	3 点		⑧	（B）	2 点
（3）	④	（C）	完答で 5 点				
	⑤	（I）					

問題３.

（1）	①	（A）	完答で 5 点	（2）	③	（J）	2 点
	②	（C）			④	（G）	3 点

問題４.

（1）	①	（A）	1 点	（2）	⑦	（E）	1 点
	②	（E）	1 点		⑧	（O）	1 点
	③	（E）	完答で 1 点		⑨	（E）	完答で 2 点
	④	（H）			⑩	（D）	
	⑤	（D）	2 点		⑪	（E）	1 点
	⑥	（C）	2 点		⑫	（L）	1 点
					⑬	（F）	完答で 2 点
					⑭	（C）	

問題５.

（1）	①	（B）	1 点	（3）	⑭	（A）	1 点
	②	（Ｉ）	完答で 1 点		⑮	（A）	完答で 1 点
	③	（E）			⑯	（D）	
	④	（A）	完答で 1 点		⑰	（H）	1 点
	⑤	（B）			⑱	（Ｉ）	1 点
	⑥	（O）	1 点		⑲	（K）	2 点
	⑦	（G）	1 点		⑳	（C）	完答で 2 点
（2）	⑧	（F）	1 点		㉑	（K）	
	⑨	（A）	完答で 1 点				
	⑩	（G）					
	⑪	（N）	完答で 1 点				
	⑫	（D）					
	⑬	（J）	1 点				

問題６.

（1）	①	（B）	1 点	（2）	⑩	（F）	1 点
	②	（B）	1 点		⑪	（L）	完答で 1 点
	③	（C）	1 点		⑫	（D）	
	④	（B）	1 点		⑬	（J）	完答で 1 点
	⑤	（J）	1 点		⑭	（F）	
	⑥	（J）	1 点		⑮	（B）	1 点
	⑦	（S）	1 点	（3）	⑯	（B）	完答で 1 点
	⑧	（A）	1 点		⑰	（O）	
	⑨	（A）（B）（C）（D）	完答で 1 点		⑱	（H）	完答で 1 点
					⑲	（F）	
				（4）	⑳	（P）	完答で 3 点
					㉑	（F）	

以上