損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次の（１）～（４）について、各問の指示に従い解答しなさい。
（１），（３）：各５点　（２），（４）：各６点　（計 22 点）

（１）ある保険会社で、割引率 0%（0 等級）、10%（1 等級）、20%（2 等級）、30%（3 等級）の無事故割引制度を導入する。それぞれの契約者について、1 年間に 1 件保険金請求をした場合には翌年度の等級を 1 つ、2 件以上保険金請求をした場合には 2 つ下げる（0 等級が下限）。逆に、1 年間に 1 件も保険金請求をしなかった場合には等級を 1 つ上げる（3 等級が上限）。
また、すべての契約者について、1 年間に 1 件保険金請求する確率が 15%、2 件以上請求する確率が 5%、1 件も保険金請求しない確率が 80%であるとする。

このとき、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。
なお、この保険商品へ新規で加入する契約者、継続しない契約者はいないものとする。

（ア）制度発足して 1 年度目はすべての契約者は割引率 0%（0 等級）であり、2 年度目以降はそれぞれの契約者の前年度の保険金請求歴に応じて各割引率が適用される。制度発足後、4 年度目におけるすべての契約者の平均割引率に最も近いものは $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

【①の選択肢】

（A）18.0%	（B）18.5%	（C）19.0%	（D）19.5%	（E）20.0%
（F）20.5%	（G）21.0%	（H）21.5%	（I）22.0%	（J）22.5%

（イ）制度発足から十分な期間が経過し、定常状態となった。このときすべての契約者の平均割引率に最も近いものは $\boxed{\quad ② \quad}$ である。

【②の選択肢】

（A）23.0%	（B）23.5%	（C）24.0%	（D）24.5%	（E）25.0%
（F）25.5%	（G）26.0%	（H）26.5%	（I）27.0%	（J）27.5%

（２）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

以下のような単年度支払保険金実績データのある保険種目に関して、2023 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2023 年度末の累計支払保険金の合計」）を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もる。このとき、2023 年度末の支払備金は ③ となる。

＜事故年度別　単年度支払保険金推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2021	900	700	1,000
2022	1,000	600	
2023	500		

＜条件＞

・この保険種目は第 3 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとする。

・インフレ率は、過去実績、将来予測ともに一律で、年率 5%を用いることとする。

・累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いるものとする。なお、ロスディベロップメントファクターの計算にあたっては、インフレの要素を分離した修正ロスディベロップメントを用いることとする。

・計算の途中において、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。

【③の選択肢】

（Ａ）1,700　（Ｂ）1,735　（Ｃ）1,770　（Ｄ）1,805　（Ｅ）1,840
（Ｆ）1,875　（Ｇ）1,910　（Ｈ）1,945　（Ｉ）1,980　（Ｊ）2,015

（３）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

ある積特型積立保険の積立部分に関する条件が下表のとおりであるとする。この積特型積立保険の積立部分の年払営業保険料に最も近いものは $\boxed{④}$ 円である。なお、計算の途中において、現価率および期始払年金現価率は、小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの数値を用いることとする。

項目	条件	備考
保険期間	5 年	
払込方法	年払（期始払）	
各回の分割金	20 万円	満期返れい金を分割払原資として、5 回に分割して毎年支払う。分割払基準日と第 1 回分割金支払日は保険期間満了時とし、2 回目以降の分割金支払日は前回の支払日から 1 年後とする。なお、分割金支払期間中に死亡や解約等が生じた場合も、分割金は同じ条件で必ず 5 回支払われるものとする。
予定利率	1%	
予定契約消滅率	1%	
維持費率	2%	年払積立保険料に対する割合
代理店手数料率	3%	年払積立保険料に対する割合

【④の選択肢】

（Ａ）190,000　（Ｂ）191,000　（Ｃ）192,000　（Ｄ）193,000　（Ｅ）194,000
（Ｆ）195,000　（Ｇ）196,000　（Ｈ）197,000　（Ｉ）198,000　（Ｊ）199,000

（４）ある保険会社の火災保険の料率は、地域（都市か郊外か）および構造（耐火か非耐火か）の二つの危険標識で複合的に区分されている。この火災保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。この複合リスクについて、次の（ア），（イ）の各問に答えなさい。

＜エクスポージャ＞

	耐火	非耐火
都市	560	440
郊外	200	300

＜クレーム総額＞

	耐火	非耐火
都市	560	1,540
郊外	300	1,350

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

地域・構造別の相対クレームコスト指数 $Y_i\,(i=1,2,3,4)$ について、Y_i の従う指数型分布族を正規分布

$$f\left(y_i;\mu_i,\omega_i,\phi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\exp\left(-\frac{\left(y_i-\mu_i\right)^2}{2\phi/\omega_i}\right)$$
（ここで、$\mu_i=E\left(Y_i\right)$、ω_i はエクスポージャ）、

リンク関数を $g(x)=x$ とする一般化線形モデルを用いて計算したとき、地域「都市」、構造「非耐火」に対応する相対クレームコスト指数の推定値（料率係数の値）に最も近いものは $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ である。なお、一般化線形モデルのパラメータは最尤法で推定するものとする。

【⑤の選択肢】

（A）1.28　（B）1.30　（C）1.32　（D）1.34　（E）1.36
（F）1.38　（G）1.40　（H）1.42　（I）1.44　（J）1.46

（イ）クラス料率に関する次の（Ａ）～（Ｃ）の記述のうち、内容が<u>正しくないもの</u>をすべて選び『⑥』に解答しなさい。なお、いずれも正しい場合、（Ｄ）を選択しなさい。

【⑥の選択肢】

（Ａ）複合分類リスクの構造が乗法型で、複合等級リスクが互いに独立でポアソン分布に従う場合、料率係数の決定方法として最尤法を用いることができるが、この場合、結果は Minimum Bias 法を用いた結果に一致する。

（Ｂ）一般化線形モデルにおいては、目的変数は指数型分布族に従うものと仮定することが一般的だが、指数型分布族は、平均と分散を用いてその分布を表現でき、かつ、分散は平均の関数として表現できる。

（Ｃ）R.Bailey と L.Simon が発表した論文の中では、料率の満たすべき基準として 4 つの条件を挙げているが、Minimum Bias 法は、そのうち「実際のデータとの誤差の総計が最小になること」のみに着目した手法である。

問題２．次の（１）～（５）について、各問の指示に従い解答しなさい。
（１），（３）：各７点　（２），（４），（５）：各８点　（計 38 点）

（１）ある保険契約のクレーム 1 件あたりの損害額分布は、パレート分布 $f(x)=qx^{-(q+1)}\ (x>1)$ に従うことが分かっている。この保険契約にはエクセス方式の免責が適用されており、免責金額が 4 のときに支払のあった 15 件のクレーム額（損害額－免責金額）が以下のとおり記録されているとき、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

クレーム No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	合計
クレーム額	12	2	1	2	1	3	2	2	12	7	2	2	92	10	1	151

なお、必要があれば $4^{0.1}=1.149$、$10^{0.1}=1.259$、$30^{0.1}=1.405$、$40^{0.1}=1.446$ を使用すること。

（ア）上記 15 件のサンプルデータを用いてモーメント法によりパラメータ q を推定した場合、推定値に最も近いものは ① である。

【①の選択肢】

（Ａ）1.10　（Ｂ）1.20　（Ｃ）1.30　（Ｄ）1.40　（Ｅ）1.50
（Ｆ）1.60　（Ｇ）1.70　（Ｈ）1.80　（Ｉ）1.90　（Ｊ）2.00

（イ）免責金額を 4 から 10 に変更するとともに、支払限度額として 30 を新設した場合、保険金支払とならない事故も含んだすべての契約に対する支払保険金の期待値の減少率に最も近いものは ② である。ただし、パラメータ q は（ア）で選択した数値を用いることとする。

【②の選択肢】

（Ａ）30%　（Ｂ）35%　（Ｃ）40%　（Ｄ）45%　（Ｅ）50%
（Ｆ）55%　（Ｇ）60%　（Ｈ）65%　（Ｉ）70%　（Ｊ）75%

（２）ある保険会社では保険期間が 1 年の保険種目を取り扱っており、保険料データおよびクレームデータを以下のとおり記録しているとき、（ア）～（ウ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

＜保険料データ＞

2022 年度末　未経過保険料	60
2023 年度　　計上保険料	240
2023 年度末　未経過保険料	50

＜クレームデータ＞

クレーム No.	事故発生日	状況
1	2022/6/29	2022 年度末に支払備金 60 を計上。 2023/7/24 に保険金 80 を支払い、支払完了。
2	2022/11/4	2022 年度末に支払備金 40 を計上。 2023 年度末に支払備金を 15 に修正。 2024/6/8 に保険金 10 を支払い、支払完了。
3	2023/1/20	2022 年度末に支払備金 50 を計上。 2023/5/10 に保険金 20 を支払い、 2023 年度末に支払備金を 40 に修正。（※）
4	2023/3/15	2023 年度に入ってから事故報告を受け、 2023/4/22 に保険金 10 を支払い、支払完了。
5	2023/4/30	2023 年度末に支払備金 90 を計上。　（※）
6	2023/7/3	2023/10/2 に保険金 25 を支払い、支払完了。

（※）以降直近まで支払備金の修正なし。

＜条件＞

・年度は 4 月～3 月とする。

・計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第 2 位を四捨五入して小数点以下第 1 位まで求めることとし、計算結果が 10%未満となった場合、パーセント表示における 10 の位の欄は 0（選択肢 A）を選択すること。

（ア）2023 年度のリトンベーシス損害率は $\boxed{③}\boxed{④}.\boxed{⑤}$%である。

（イ）2023 年度のアーンドベーシス損害率（会計年度統計ベース）は $\boxed{⑥}\boxed{⑦}.\boxed{⑧}$%である。

（ウ）2023 年度のアーンドベーシス損害率（会計年度 - 事故年度統計ベース）は $\boxed{⑨}\boxed{⑩}.\boxed{⑪}$%である。

【③～⑪の選択肢】

（A）0	（B）1	（C）2	（D）3	（E）4
（F）5	（G）6	（H）7	（I）8	（J）9

（３）それぞれ独立したリスクの集団がある。リスクは A と B の二つのクラスに分類され、無作為に一つのリスクを抽出したときクラス A から抽出する確率を 0.6、クラス B から抽出する確率を 0.4 とする。ここで、次の条件が与えられたとする。

・それぞれのリスクは、観察期間 1 年において 1 回だけ事故が発生する確率が 30%で、1 回も事故が発生しない確率が 70%である。
・クラス A のクレーム額は、すべて 1 である。
・クラス B のクレーム額は、すべてc（定数、$c>1$）である。

無作為に一つのリスクを抽出して 1 年間のクレームを観察し、翌年のクレームコストの期待値を算出するとき、次の（ア）,（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（ア）$c=6$のとき、Bühlmann モデルの信頼度Zに最も近い値は $\boxed{⑫}$ である。
（イ）$c>1$のとき、Bühlmann モデルの信頼度Zの上限に最も近い値は $\boxed{⑬}$ である。

【⑫、⑬の選択肢】

（A）$\frac{1}{10}$	（B）$\frac{1}{9}$	（C）$\frac{1}{8}$	（D）$\frac{1}{7}$	（E）$\frac{1}{6}$
（F）$\frac{1}{5}$	（G）$\frac{1}{4}$	（H）$\frac{1}{3}$	（I）$\frac{1}{2}$	（J）1

（４）ある保険会社で販売している保険種目の契約ポートフォリオから生じる年間の支払保険金総額Sは下表の分布に従っているものとする。

s	$P(S=s)$	$s \times P(S=s)$
50	0.55	27.5
100	0.31	31
150	0.05	7.5
200	0.04	8
300	0.02	6
500	0.02	10
1,000	0.01	10
合計	1	100

また、この契約ポートフォリオから得られる保険料総額をPとし、再保険を手配する場合の再保険料をP'、正味支払保険金総額（支払保険金総額－再保険金総額）をS'とする。さらに、リスク量に対してリターンがどの程度確保されているかを表す指標として、正味支払保険金総額S'の$98\%VaR$、$95\%TVaR$をリスク量と捉え、RoR_{VaR}及びRoR_{TVaR}を以下のとおり定義する。

$$RoR_{VaR} = \frac{P - P' - E(S')}{98\%VaR}$$

$$RoR_{TVaR} = \frac{P - P' - E(S')}{95\%TVaR}$$

保険料総額$P = 130$のとき、次の（ア）,（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（ア）再保険を手配しない場合、年間の正味支払保険金総額S'（支払保険金総額Sと等しい。）の$98\%VaR$の値に最も近いものは［⑭］であり、$95\%TVaR$の値に最も近いものは［⑮］である。また、RoR_{VaR}の値に最も近いものは［⑯］であり、RoR_{TVaR}の値に最も近いものは［⑰］である。

【⑭、⑮の選択肢】

（Ａ）200	（Ｂ）300	（Ｃ）500	（Ｄ）520	（Ｅ）540
（Ｆ）560	（Ｇ）580	（Ｈ）600	（Ｉ）900	（Ｊ）1,000

【⑯、⑰の選択肢】

（Ａ）3.0%	（Ｂ）3.3%	（Ｃ）5.0%	（Ｄ）5.2%	（Ｅ）5.4%
（Ｆ）5.6%	（Ｇ）5.8%	（Ｈ）6.0%	（Ｉ）10.0%	（Ｊ）15.0%

（イ）この契約ポートフォリオに、支払保険金総額Sがエクセスポイント300を超える部分を200までカバー(*)する再保険の手配を考える。

(*) 例えば、$S = 600$の場合は、$\min(200, 600 - 300) = 200$を再保険金として回収する。

（a）再保険料$P' = 15$のとき、RoR_{VaR}の値に最も近いものは $\boxed{⑱}$ であり、RoR_{TVaR}の値に最も近いものは $\boxed{⑲}$ である。

【⑱、⑲の選択肢】

（Ａ）3.0%	（Ｂ）4.0%	（Ｃ）4.4%	（Ｄ）4.8%	（Ｅ）5.2%
（Ｆ）5.6%	（Ｇ）6.0%	（Ｈ）7.0%	（Ｉ）10.0%	（Ｊ）15.0%

（b）次の（Ａ）～（Ｃ）のうち、内容が正しいものをすべて選び『⑳』に解答しなさい。なお、いずれも誤っている場合、（Ｄ）を選択しなさい。

【⑳の選択肢】

（Ａ）再保険を手配しない場合と比較し、RoR_{VaR}が大きくなる場合に再保険を採用するという基準を用いて判断する場合、この再保険案は採用される。

（Ｂ）再保険を手配しない場合と比較し、RoR_{TVaR}が大きくなる場合に再保険を採用するという基準を用いて判断する場合、この再保険案は採用される。

（Ｃ）この再保険案ではなく、エクセスポイント500のストップロス再保険を手配することを考えた場合、再保険を手配しない場合と比較し、98%VaRは変わらないが、95%$TVaR$は小さくなる。

（５）ある火災保険と賠償責任保険の一体型保険商品において、以下の諸条件が成り立っている。

・火災保険の年間損害発生件数 N_1 と賠償責任保険の年間損害発生件数 N_2 は、どちらも以下の確率分布に従う。

損害発生件数（N_1 または N_2）	0	1
発生確率	0.4	0.6

・火災保険の損害額 X_1 と賠償責任保険の損害額 X_2 は、どちらも対数正規分布 $LN(2,1)$ に従う（$\log X_i \sim N(2,1)$,$(i=1,2)$ ）。

・損害発生件数と損害額は独立だが、損害発生件数どうし、損害額どうしは独立ではなく、

それらの従属関係は以下で表される。

・確率変数 N_1 と N_2 の（ピアソンの積率）相関係数の値は、-0.25

・確率変数 (X_1, X_2) のコピュラ $C(u,v)$ の式は、$C(u,v)=\dfrac{uv}{u+v-uv}$

このとき、次の（ア）,（イ）の空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（ア） $P(N_1+N_2=0)$ の値に最も近いものは $\boxed{\quad ㉑ \quad}$ である。

【㉑の選択肢】

（A）0.06　（B）0.08　（C）0.10　（D）0.12　（E）0.14
（F）0.16　（G）0.18　（H）0.20　（I）0.22　（J）0.24

（イ）損害ごとに免責金額 d （エクセス方式、火災保険と賠償責任保険で同額）を設定し、免責金額設定後の支払保険金総額を S_d とする（個々の損害額から免責金額を控除した金額が個々の支払保険金となる）。
$d=e^2$ としたとき、$P(S_d>0)$ の値に最も近いものは $\boxed{\quad ㉒ \quad}$ である。

【㉒の選択肢】

（A）0.50　（B）0.51　（C）0.52　（D）0.53　（E）0.54
（F）0.55　（G）0.56　（H）0.57　（I）0.58　（J）0.59

問題３．次の（１）～（４)について、各問の指示に従い解答しなさい。

（１）～（４）：各 10 点　（計 40 点）

（１）ベイズの定理を用い、いくつかの前提条件の下で、最終累計支払保険金の確率分布を導く。

事故発生から N 年で支払が完了すると仮定し、事故年度 $i\left(i=1,\cdots,N\right)$ の、経過年数 $k\left(k=1,\cdots,N\right)$ における累計支払保険金 $C_{i,k}$ を確率変数と考え、$C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}$ が得られているときに、最終累計支払保険金 $C_{i,N}$ を推定することを考える。

確率変数 $C_{i,k}$ に対して次の前提を置く。

前提条件 1　$C_{i,N}\left(i=1,\cdots,N\right)$ は対数正規分布 $LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従う。

前提条件 2　$C_{i,k}\,|_{C_{i,N}=x}\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$ は対数正規分布 $LN\left(\mu_k\left(x\right),\sigma_k^2\left(x\right)\right)$ に従う。

前提条件 3　$E\left(C_{i,k}\,|\,C_{i,N}=x\right)=p_k x\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$

前提条件 4　$V\left(C_{i,k}\,|\,C_{i,N}=x\right)=\beta_k^2 x^2\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$

このとき、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。
なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（再掲）

前提条件 1　$C_{i,N}\left(i=1,\cdots,N\right)$ は対数正規分布 $LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従う。
前提条件 2　$C_{i,k}\mid_{C_{i,N}=x}\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$ は対数正規分布 $LN\left(\mu_k\left(x\right),\sigma_k^2\left(x\right)\right)$ に従う。
前提条件 3　$E\left(C_{i,k}\mid C_{i,N}=x\right)=p_k x\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$
前提条件 4　$V\left(C_{i,k}\mid C_{i,N}=x\right)=\beta_k^2 x^2\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$

（ア）前提条件 1 より、

$$\begin{cases}\mu=\log\boxed{①}-\dfrac{\boxed{②}}{2}\\ \sigma^2=\log\left(1+\dfrac{\boxed{③}}{\boxed{④}}\right)\end{cases}$$

であり、また、前提条件 2,3,4 より、

$$\begin{cases}\mu_k\left(x\right)=\log\boxed{⑤}-\dfrac{\boxed{⑥}}{2}\\ \sigma_k^2\left(x\right)=\log\left(1+\dfrac{\boxed{⑦}}{\boxed{⑧}}\right)\end{cases}$$

となる。これより、$\sigma_k^2\left(x\right)$ は x に依存しない定数であることがわかるので、以降の問題では、

$\sigma_k^2\left(x\right)=\sigma_k^2$ とする。

【①～⑧の選択肢】

（A）1	（B）2	（C）3	（D）4	（E）σ
（F）σ^2	（G）$E\left(C_{i,N}\right)$	（H）$E\left(C_{i,N}\right)^2$	（I）$V\left(C_{i,N}\right)$	（J）$V\left(C_{i,N}\right)^2$
（K）$\sigma_k\left(x\right)$	（L）$\sigma_k^2\left(x\right)$	（M）p_k	（N）p_k^2	（O）β_k
（P）β_k^2	（Q）x	（R）x^2	（S）$p_k x$	（T）$p_k^2 x$
（U）$p_k x^2$	（V）$p_k^2 x^2$	（W）e	（X）e^2	（Y）e^3

（再掲）

前提条件 1　$C_{i,N}\left(i=1,\cdots,N\right)$ は対数正規分布 $LN\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従う。 前提条件 2　$C_{i,k}\mid_{C_{i,N}=x}\left(i=1,\cdots,N,\ \ k=1,\cdots,N\right)$ は対数正規分布 $LN\left(\mu_k\left(x\right),\sigma_k^2\left(x\right)\right)$ に従う。

（イ）次に、前提条件 1,2 の下で、経過年数 k までの情報に基づく最終累計支払保険金 $C_{i,N}\mid_{C_{i,k}=y}$ の確率分布を求める。

$C_{i,N}$ 、$C_{i,k}\mid_{C_{i,N}=x}$ の確率密度関数をそれぞれ、 $f\left(x\right)$、$g\left(y\mid x\right)$ とする。

ベイズの定理より、$C_{i,N}\mid_{C_{i,k}=y}$ の確率密度関数 $h\left(x\mid y\right)$ は、

$$
\begin{aligned}
h\left(x\mid y\right)&=\frac{f\left(x\right)g\left(y\mid x\right)}{\int f\left(x\right)g\left(y\mid x\right)dx}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_k^2}\,x}\cdot\exp\left[-\frac{\left\{\log x-\nu_k\left(y\right)\right\}^2}{2\tau_k^2}\right]
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{cases}
\nu_k\left(y\right)=\dfrac{\boxed{⑨}}{\sigma^2+\sigma_k^2}\mu+\dfrac{\boxed{⑩}}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\log\dfrac{y}{\boxed{⑪}}+\dfrac{\boxed{⑫}}{2}\right)\\
\tau_k^2=\dfrac{\boxed{⑬}}{\sigma^2+\sigma_k^2}
\end{cases}
$$

である。つまり、$C_{i,N}\mid_{C_{i,k}=y}$ は、対数正規分布 $LN\left(\nu_k\left(y\right),\tau_k^2\right)$ に従うことがわかる。

したがって、$C_{i,N}\mid_{C_{i,k}=y}$ の期待値は、

$$
E\left(C_{i,N}\mid C_{i,k}=y\right)=\exp\left\{\frac{\boxed{⑭}}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\boxed{⑮}+\frac{\boxed{⑯}}{2}\right)+\frac{\boxed{⑰}}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\log\frac{y}{\boxed{⑱}}+\frac{\boxed{⑲}}{2}\right)\right\}
$$

となる。

【⑨～⑲の選択肢】

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4	（E） μ
（F） μ^2	（G） σ	（H） σ^2	（I） σ_k	（J） σ_k^2
（K） $\sigma\sigma_k$	（L） $\sigma^2\sigma_k$	（M） $\sigma\sigma_k^2$	（N） $\sigma^2\sigma_k^2$	（O） p_k
（P） p_k^2	（Q） β_k	（R） β_k^2	（S） y	（T） y^2

（２）ある保険商品 A,B に対して、再保険を付した場合の保有分に係る調整係数を求めたい。このとき、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（ア）保険商品 A は、保険金支払件数が平均 1 のポアソン分布に従い、支払保険金 1 件の金額 X の分布が区間 (0,1) 上の一様分布に従う（個々の支払保険金の額および保険金支払件数は独立であるものとする。つまり、支払保険金総額は複合ポアソン分布に従うものとする）。また、毎年の収入保険料 $c=1$ である。

（a）保険商品 A に対して、再保険付加率 100%の 40%比例再保険を付した場合の正味保有分に係る調整係数 R が満たすべき方程式は、

$$1+\boxed{⑳}R=\frac{\exp\left(\boxed{㉑}R\right)-\boxed{㉒}}{\boxed{㉓}R}$$

となる。

【⑳～㉓の選択肢】

（A）0.1	（B）0.2	（C）0.3	（D）0.4	（E）0.5
（F）0.6	（G）0.7	（H）0.8	（I）0.9	（J）1.0

（b）保険商品 A に対して、（a）の代わりに、再保険付加率 100%、エクセスポイント 0.3 である ELC 再保険を付した場合の正味保有分に係る調整係数 R が満たすべき方程式は、

$$1+\boxed{㉔}R=\frac{\exp\left(\boxed{㉕}R\right)-1}{R}+\boxed{㉖}\cdot\exp\left(\boxed{㉗}R\right)$$

となる。

【㉔～㉗の選択肢】

（A）0.1	（B）0.2	（C）0.3	（D）0.4	（E）0.5
（F）0.6	（G）0.7	（H）0.8	（I）0.9	（J）1.0

（イ）保険商品 B は、保険金支払件数が平均 1.6 のポアソン分布に従い、支払保険金 1 件の金額 X の分布が、

$$P(X=1)=0.3,\quad P(X=2)=0.7$$

に従う（個々の支払保険金の額および保険金支払件数は独立であるものとする。つまり、支払保険金総額は複合ポアソン分布に従うものとする）。また、毎年の収入保険料 $c=3.6$ である。

保険商品 B に対して、再保険付加率 100%、エクセスポイント 3 であるストップロス再保険を付した場合の正味保有分に係る調整係数 R が満たすべき方程式は、

$$\exp\left(-\boxed{㉘}R\right)\cdot\left(\boxed{㉙}+\boxed{㉚}e^{R}+\boxed{㉛}e^{2R}+\boxed{㉜}e^{3R}\right)=1$$

となる。

なお、必要があれば、$e^{-1.6}=0.202$ として計算すること。

【㉘の選択肢】

（Ａ）2.10　（Ｂ）2.20　（Ｃ）2.30　（Ｄ）2.40　（Ｅ）2.50
（Ｆ）2.60　（Ｇ）2.70　（Ｈ）2.80　（Ｉ）2.90　（Ｊ）3.00

【㉙～㉜の選択肢】

（Ａ）0.10　（Ｂ）0.15　（Ｃ）0.20　（Ｄ）0.25　（Ｅ）0.30
（Ｆ）0.35　（Ｇ）0.40　（Ｈ）0.45　（Ｉ）0.50　（Ｊ）0.55

（３）Ｎ年度末にサープラスを 1,500 万円保有している保険会社が、契約Ａと契約Ｂの 2 つの契約の引受を開始する。前提を以下のとおりとしたとき、次の（ア），（イ）の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、この問題においては 1 度でもサープラスが 0 万円未満となった場合に保険会社は破産したものとみなす。

＜前提＞

・1 年間の収入保険料は、契約 A と契約 B それぞれ 1,000 万円であり、年度期初に払い込まれる。

・1 年間の保険金支払額の発生確率は下表のとおりであり、保険金は年央に支払う。なお、保険金支払額は契約ごと年度ごとに独立に決まるものとする。

	発生確率	
	契約 A	契約 B
0 万円	50%	60%
1,000 万円	40%	20%
2,000 万円	10%	20%

・代理店手数料は保険料の 20%で、保険料収入時に支払う。

・社費は契約 A と契約 B それぞれ年額 150 万円であり、年央に支払う。

・無事故戻しの制度や運用益はないものとする。

（ア）この保険会社が N＋2 年度末までに破産する確率に最も近いものは、 ㉝ である。

【㉝の選択肢】

（Ａ）12.0%	（Ｂ）12.4%	（Ｃ）12.8%	（Ｄ）13.2%	（Ｅ）13.6%
（Ｆ）14.0%	（Ｇ）14.4%	（Ｈ）14.8%	（Ｉ）15.2%	（Ｊ）15.6%

（イ）契約ごとの 1 年間の保険金支払額に限度額（1,000 万円は下回らないものとする）を設定して破産確率を小さくすることを検討する。

「N＋1 年度末までに破産する確率が 0%」となる最大の限度額に最も近いものは、 ㉞ 万円である。「N＋1 年度末までに破産する確率が 0%」かつ「N＋2 年度末までに破産する確率が 4%以下」となる最大の限度額に最も近いものは、 ㉟ 万円である。

なお、限度額設定後の保険料については、純保険料＝保険金期待値としたうえで、社費額、代理店手数料率、予定利潤率（5%）は限度額設定前と同一として計算する。

【㉞の選択肢】

（Ａ）1,200	（Ｂ）1,220	（Ｃ）1,240	（Ｄ）1,260	（Ｅ）1,280
（Ｆ）1,300	（Ｇ）1,320	（Ｈ）1,340	（Ｉ）1,360	（Ｊ）1,380

【㉟の選択肢】

（Ａ）1,010	（Ｂ）1,030	（Ｃ）1,050	（Ｄ）1,070	（Ｅ）1,090
（Ｆ）1,110	（Ｇ）1,130	（Ｈ）1,150	（Ｉ）1,170	（Ｊ）1,190

（４）保険料算出原理に関する次の（ア）～（ウ）の各問に答えなさい。ただし、以下でθは正定数とし、必要であれば自然対数の値として$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$を用いること。

（ア）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

Nは平均 2.5 のポアソン分布に従う。このとき、$P\left(N=k\right)=E\left[1_{N=k}\right]$に対し、

$$P^Q\left(N=k\right)=\frac{E\left[\exp\left(\theta N\right)\cdot 1_{N=k}\right]}{E\left[\exp\left(\theta N\right)\right]}$$

をポアソン分布に対するエッシャー変換後の確率関数と定義し、$P\left(N=k\right)$と区別する。

Nの<u>エッシャー変換後</u>の確率分布が平均 4 のポアソン分布であるとき、θの値に最も近いものは$\boxed{\quad ㊱ \quad}$である。

ただし、$1_{N=k} = \begin{cases} 1 \cdots N=k\text{の場合} \\ 0 \cdots \text{上記以外} \end{cases}$と定義する。

【㊱の選択肢】

（Ａ）0.40　（Ｂ）0.41　（Ｃ）0.42　（Ｄ）0.43　（Ｅ）0.44
（Ｆ）0.45　（Ｇ）0.46　（Ｈ）0.47　（Ｉ）0.48　（Ｊ）0.49

（イ）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

連続な確率変数Xに対し、ワン変換後の確率分布$F^Q\left(x\right)=P^Q\left(X\le x\right)=\Phi\left[\Phi^{-1}\left(F\left(x\right)\right)-\theta\right]$を定義し、通常の$F\left(x\right)=P\left(X\le x\right)$と区別する。ただし、標準正規分布に従う確率変数$Z$に対し、$\Phi(z)=P(Z\le z)$である。また、<u>ワン変換後</u>の確率分布の期待値を$E^Q\left[X\right]$と表記し、<u>ワン変換前</u>の確率分布の期待値$E\left[X\right]$と区別する。

このとき、確率変数$Y=\max\left\{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K,0\right\}$に対し、

$E\left[Y\right]=AE\left[\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)\cdot 1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]-KE\left[1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]$を計算したい。

ただし、A, Kは正定数であり、$\zeta=\Phi^{-1}\left(F\left(X\right)\right)$である。

ワン変換後の確率分布の下で、$\zeta^Q=\Phi^{-1}\left(F^Q\left(X\right)\right)$を定義し、標準正規分布の密度関数$\phi(x)$を

用いて、 $f^{Q}(x)=\dfrac{\phi(\zeta-\theta)}{\phi(\zeta)}f(x)$ であることを利用すると、

上式 $E[Y]$ の第一項＝ $\boxed{㊲}$ と変形できるから、これを用いて以下を得る。

$$E[Y]=AP^{Q}\left(F^{Q}(X)>\Phi\left(\boxed{㊳}\right)\right)-KP\left(F(X)>\Phi\left(\boxed{㊴}\right)\right)$$

【㊲の選択肢】

（A） $AE^{Q}\left[1_{A\exp\left(\zeta^{Q}\theta+\frac{1}{2}\theta^{2}\right)-K>0}\right]$ （B） $AE^{Q}\left[1_{A\exp\left(\zeta^{Q}\theta\right)-K>0}\right]$ （C） $AE^{Q}\left[1_{A\exp\left(\zeta^{Q}\theta-\frac{1}{2}\theta^{2}\right)-K>0}\right]$

（D）いずれにも該当しない

【㊳、㊴の選択肢】

（A） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{K}{A}\right)+\dfrac{1}{2}\theta$ （B） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{K}{A}\right)-\dfrac{1}{2}\theta$ （C） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{K}{A}\right)+\dfrac{1}{2}\theta^{2}$ （D） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{K}{A}\right)-\dfrac{1}{2}\theta^{2}$

（E） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{A}{K}\right)+\dfrac{1}{2}\theta$ （F） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{A}{K}\right)-\dfrac{1}{2}\theta$ （G） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{A}{K}\right)+\dfrac{1}{2}\theta^{2}$ （H） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{A}{K}\right)-\dfrac{1}{2}\theta^{2}$

（I） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{K}{A}\right)$ （J） $\dfrac{1}{\theta}\log\left(\dfrac{A}{K}\right)$ （K）いずれにも該当しない

（ウ）次の記述のうち、空欄に当てはまる最も適切なものを選びなさい。

（イ）において、X が標準正規分布に従うと仮定する。$A=15$、$K=5$、θ は（ア）の正答の値（選択肢の値を使うこと）のとき、$E[Y]$ の値に最も近いものは $\boxed{㊵}$ である。また、計算過程での端数処理は行わないことする。ただし、$\Phi(z)$ の値が必要な場合のみ、z を小数点以下第 3 位で四捨五入した値を用いて、次頁の表から取得すること。

【㊵の選択肢】

（A）8.0　（B）8.5　（C）9.0　（D）9.5　（E）10.0
（F）10.5　（G）11.0　（H）11.5　（I）12.0　（J）12.5

標準正規分布表（実数 z に対し、確率 $\Phi(z)$ を返す表）

z	*=0	*=1	*=2	*=3	*=4	*=5	*=6	*=7	*=8	*=9
0.0*	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1*	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2*	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3*	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4*	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5*	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6*	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7*	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8*	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9*	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0*	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1*	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2*	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3*	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4*	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5*	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6*	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7*	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8*	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9*	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0*	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1*	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2*	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3*	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4*	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5*	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6*	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7*	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8*	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9*	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

以上

損保数理（解答例）

問題１

（１）

（ア）①（Ｆ）　（イ）②（Ｆ）

［（ア）2 点　（イ）3 点］

（ア）　全体の契約者数を 100 とすると、4 年度目までの等級別の契約者数推移は下表のとおり。

したがって平均割引率は、(0%×10.4＋10%×25.6＋20%×12.8＋30%×51.2)÷100＝20.48%。

	1 年度目	2 年度目	3 年度目	4 年度目
0%（0 等級）	100	20	20	10.4
10%（1 等級）	0	80	16	25.6
20%（2 等級）	0	0	64	12.8
30%（3 等級）	0	0	0	51.2

（イ）　定常状態における等級別の契約者数を 0 等級:A、1 等級:B、2 等級:C、3 等級:D とすると以下の等式が成り立つ。

・A＝A×20%＋B×20%＋C×5%

・B＝A×80%＋C×15%＋D×5%

・C＝B×80%＋D×15%

・D＝C×80%＋D×80%

等式から導かれる等級別の契約者数の比は、A:B:C:D＝3:8:16:64

したがって平均割引率は、(0%×3＋10%×8＋20%×16＋30%×64)÷91≒25.5%。

（２）

③（F）（6 点）

・単年度支払保険金（インフレ補正後）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2021	992	735	1,000
2022	1,050	600	
2023	500		

・累計支払保険金（インフレ補正後）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2021	992	1,727	2,727
2022	1,050	1,650	
2023	500		

・ディベロップ係数と LDF 算出（インフレ補正後）

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2021	1.741	1.579
2022	1.571	
2023		
LDF	1.656	1.579

・累計支払保険金（インフレ補正後）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2021	992	1,727	2,727
2022	1,050	1,650	2,605
2023	500	828	1,307

・単年支払保険金（インフレ補正後）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2021	992	735	1,000
2022	1,050	600	<u>955</u>
2023	500	<u>328</u>	<u>479</u>

・単年支払保険金（インフレ補正前）

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2021	900	700	1,000
2022	1,000	600	**<u>1,003</u>**
2023	500	**<u>344</u>**	**<u>528</u>**

1,003+344+528 = 1,875

（３）

④（E）（5 点）

現価率v、予定契約消滅率qを考慮した現価率ϕ、期始払年金現価率$\ddot{a}_{\overline{5}|}$、および予定契約消滅率qを考慮した期始払年金現価率$\ddot{a}_{(q)\overline{5}|}$は、以下のとおりとなる。

$$v=\frac{1}{1+i}=0.9901$$

$$\phi=\frac{1-q}{1+i}=0.9802$$

$$\ddot{a}_{\overline{5}|}=\frac{1-v^5}{1-v}=4.9020$$

$$\ddot{a}_{(q)\overline{5}|}=\frac{1-\phi^5}{1-\phi}=4.8059$$

よって、年払営業保険料は以下のとおりとなる。

年払営業保険料　＝　年払積立保険料 ×（1+ 維持費率 ＋ 代理店手数料率)

　＝(満期返れい金 × ϕ^5）÷ $\ddot{a}_{(q)\overline{5}|}$ ×(1+ 維持費率 ＋ 代理店手数料率)

　＝(各回の分割金 × $\ddot{a}_{\overline{5}|}$ × ϕ^5）÷ $\ddot{a}_{(q)\overline{5}|}$ ×(1+ 維持費率 ＋ 代理店手数料率)

　$=\left(20\text{万}\times4.9020\times0.9802^5\right)\div4.8059\times\left(1+2\%+3\%\right)$

　$=193,817$

（４）
（ア）⑤（Ｉ）［4 点］
（イ）⑥（Ｃ）［2 点］

（ア）

エクスポージャとクレーム総額は、問題文に与えられている通り、

＜エクスポージャ＞

	耐火	非耐火	計
都市	560	440	
郊外	200	300	
計			1500

＜クレーム総額＞

	耐火	非耐火	計
都市	560	1540	
郊外	300	1350	
計			3750

であるから、クレームコストは、リスク区分ごとにクレーム総額をエクスポージャで除して、下記の通り求められる。

＜クレームコスト＞

	耐火	非耐火	計
都市	1.00	3.50	
郊外	1.50	4.50	
計			2.50

相対クレームコスト指数は、合計のクレームコストが 1 になるように、リスク区分ごとにクレームコストを合計のクレームコストで除して、下記の通り求められる。

＜相対クレームコスト指数＞

	耐火	非耐火	計
都市	0.40	1.40	
郊外	0.60	1.80	
計			1.00

ここで、尤度関数は、$L=\prod_{i=1}^{4} f\left(y_i;\mu_i,\omega_i,\phi\right)=\prod_{i=1}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\exp\left(-\frac{\left(y_i-\mu_i\right)^2}{2\phi/\omega_i}\right)$であるため、

対数尤度関数は、$\log L=\sum_{i=1}^{4}\left\{\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\right)-\frac{\left(y_i-\mu_i\right)^2}{2\phi/\omega_i}\right\}$となる。

ここで、α_1：都市の料率係数、α_2：郊外の料率係数、β_1：耐火の料率係数、β_2：非耐火の料率係

数、と置くと、

$$\mu_i=\begin{cases}\alpha_1+\beta_1 & (i=1)\\ \alpha_1+\beta_2 & (i=2)\\ \alpha_2+\beta_1 & (i=3)\\ \alpha_2+\beta_2 & (i=4)\end{cases}$$

と書けるので、対数尤度関数は、

$$\log L=\sum_{i=1}^{4}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi/\omega_i}}\right)-\left[\frac{\{y_1-(\alpha_1+\beta_1)\}^2}{2\phi/\omega_1}+\frac{\{y_2-(\alpha_1+\beta_2)\}^2}{2\phi/\omega_2}+\frac{\{y_3-(\alpha_2+\beta_1)\}^2}{2\phi/\omega_3}+\frac{\{y_4-(\alpha_2+\beta_2)\}^2}{2\phi/\omega_4}\right]$$

となり、これを最大にするパラメータ α_1、α_2、β_1、β_2 は、以下の連立方程式を満たす。（本問では、加法型のミニマムバイアス法が満たす連立方程式と同じ連立方程式が導かれる。）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\log L}{\partial\alpha_1}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_1\{y_1-(\alpha_1+\beta_1)\}+\omega_2\{y_2-(\alpha_1+\beta_2)\}=0\\ \dfrac{\partial\log L}{\partial\alpha_2}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_3\{y_3-(\alpha_2+\beta_1)\}+\omega_4\{y_4-(\alpha_2+\beta_2)\}=0\\ \dfrac{\partial\log L}{\partial\beta_1}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_1\{y_1-(\alpha_1+\beta_1)\}+\omega_3\{y_3-(\alpha_2+\beta_1)\}=0\\ \dfrac{\partial\log L}{\partial\beta_2}=0 \quad\Rightarrow\quad \omega_2\{y_2-(\alpha_1+\beta_2)\}+\omega_4\{y_4-(\alpha_2+\beta_2)\}=0\end{cases}\quad\cdots①$$

この連立方程式①において、C を定数とすると、

$\omega_1\{y_1-(\alpha_1+\beta_1)\}=\omega_4\{y_4-(\alpha_2+\beta_2)\}=C$ 、$\omega_2\{y_2-(\alpha_1+\beta_2)\}=\omega_3\{y_3-(\alpha_2+\beta_1)\}=-C$

と表すことができる。これを整理すると、

$$\alpha_1+\beta_1=y_1-C/\omega_1\ \cdots(a),\quad \alpha_1+\beta_2=y_2+C/\omega_2\ \cdots(b)$$
$$\alpha_2+\beta_1=y_3+C/\omega_3\ \cdots(c),\quad \alpha_2+\beta_2=y_4-C/\omega_4\ \cdots(d)$$

となる。$(a)+(d)=(b)+(c)$ より、

$$\left(y_1-\frac{C}{\omega_1}\right)+\left(y_4-\frac{C}{\omega_4}\right)=\left(y_2+\frac{C}{\omega_2}\right)+\left(y_3+\frac{C}{\omega_3}\right)$$

であり、各 y_i、ω_i を代入して C について解くと、$C=16.1397\cdots$

したがって、都市・非耐火に対応する相対クレームコスト指数の推定値（料率係数）は、これを代入して、$\alpha_1+\beta_2=1.44$ を得る。したがって、（ア）（Ｉ）が正しい。

（イ）

（A） 正しい（テキスト 4-13 を参照）

（B） 正しい（テキスト 4-19 を参照）

（C） 正しくない（テキスト 4-12 を参照）

問題２

（１）

（ア）①（D）　（イ）②（I）

［（ア）３点　（イ）４点 ］

（ア）

損害額を X 、その確率密度関数を $f\left(x\right)$、そして免責金額が a の場合のクレーム額を Y であらわすと、

Y の期待値 $E\left[Y\right]$ は、

$$E\left[Y\right]=\frac{\int_0^\infty yf\left(y+a\right)dy}{\int_0^\infty f\left(y+a\right)dy}=\frac{a}{q-1}$$　　（テキスト 2-39）

となる。題意より $a=4$ を代入し、$E\left[Y\right]=\frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15}=10.0666...$ を解くと、$q=1.40$

（イ）

免責金額 4 の場合、保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する保険会社の支払額 Y_1 の期待値は、

$$E\left[Y_1\right]=\int_4^\infty\left(x-4\right)f\left(x\right)dx=\int_4^\infty xf\left(x\right)dx-4\int_4^\infty f\left(x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{q}{q-1}x^{-(q-1)}\right]_4^\infty-4\left[-x^{-q}\right]_4^\infty$$

$$=\frac{q}{q-1}4^{-(q-1)}-4\cdot4^{-q}=1.4344$$

一方、免責金額 10 、支払限度額 30 の場合の支払額 Y_2 の期待値は、

$$E\left[Y_2\right]=\int_{10}^{40}\left(x-10\right)f\left(x\right)dx+\int_{40}^\infty\left(40-10\right)f\left(x\right)dx$$

$$=\left[-\frac{q}{q-1}x^{-(q-1)}\right]_{10}^{40}-10\left[-x^{-q}\right]_{10}^{40}+30\left[-x^{-q}\right]_{40}^\infty$$

$$=-\frac{q}{q-1}\left[40^{-(q-1)}-10^{-(q-1)}\right]-10\left[-40^{-q}+10^{-q}\right]+30\cdot40^{-q}=0.4232$$

したがって、減少率は、

$$\frac{E\left[Y_1\right]-E\left[Y_2\right]}{E\left[Y_1\right]}=\frac{1.4344-0.4232}{1.4344}=70\%$$

（２）

（ア）③（F）5 ④（G）6 ⑤（D）3（③～⑤は完答）

（イ）⑥（F）5 ⑦（C）2 ⑧（A）0（⑥～⑧は完答）

（ウ）⑨（E）4 ⑩（G）6 ⑪（A）0（⑨～⑪は完答）

［（ア）2 点　（イ）3 点　（ウ）3 点］

（ア）2023 年度ペイドロス＝80＋20＋10＋25＝135
2023 年度のリトンベーシス損害率は、135÷240≒56.3%

（イ）2022 年度末備金＝60＋40＋50＝150
2023 年度末備金＝15＋40＋90＝145
2023 年度インカードロス（会計年度）＝135＋145－150＝130
2023 年度アーンドプレミアム＝240＋60－50＝250
2023 年度のアーンドベーシス損害率(会計年度統計ベース)は 130÷250＝52.0%

（ウ）2023 年度発生事故のインカードロス＝90＋25＝115
2023 年度のアーンドベーシス損害率(会計年度 - 事故年度統計ベース)は
115÷250=46.0%

（３）

（ア）⑫（D）（４点）、（イ）⑬（F）（３点）

（ア）

クラス A およびクラス B のリスクについて１年間のクレーム総額を、それぞれ X_A 、X_B とすると、

$$E\left(X_A\right)=0.3\times 1=0.3 、V\left(X_A\right)=\left(0.3\times 1^2\right)-0.3^2=0.21$$

$$E\left(X_B\right)=0.3\times \mathrm{c}=0.3c 、V\left(X_B\right)=\left(0.3\times \mathrm{c}^2\right)-\left(0.3c\right)^2=0.21c^2$$

無作為に一つのリスクを抽出したときのクラス$\left(A,B\right)$の

確率変数をΘ　$\left(P\left(\Theta=A\right)=0.6,P\left(\Theta=B\right)=0.4\right)$とすると、

$$\begin{aligned}\mu=E\left[E\left(X_i|\Theta\right)\right]&=0.6\times E\left(X_A\right)+0.4\times E\left(X_B\right)\\&=0.6\times 0.3+0.4\times 0.3c=0.12c+0.18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V\left[E\left(X_i|\Theta\right)\right]&=0.6\times\left\{E\left(X_A\right)-\mu\right\}^2+0.4\times\left\{E\left(X_B\right)-\mu\right\}^2\\&=0.6\times\left(0.3-0.12c-0.18\right)^2+0.4\times\left(0.3c-0.12c-0.18\right)^2\\&=0.6\times 0.12^2\left(c-1\right)^2+0.4\times 0.18^2\left(c-1\right)^2=0.0216\left(c-1\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E\left[V\left(X_i|\Theta\right)\right]&=0.6\times V\left(X_A\right)+0.4\times V\left(X_B\right)\\&=0.6\times 0.21+0.4\times 0.21\mathrm{c}^2=0.084\left(c^2+1.5\right)\end{aligned}$$

よって、

$$Z=\frac{1}{1+\dfrac{E\left[V\left(X_i|\Theta\right)\right]}{V\left[E\left(X_i|\Theta\right)\right]}}=\frac{1}{1+\dfrac{0.084\left(c^2+1.5\right)}{0.0216\left(c-1\right)^2}}$$

$c=6$ のとき、

$$Z=\frac{1}{1+\dfrac{0.084\left(6^2+1.5\right)}{0.0216\left(6-1\right)^2}}=0.146\cdots\simeq\frac{1}{7}$$

（イ）

$f\left(c\right)=\dfrac{c^2+1.5}{\left(c-1\right)^2}\ \left(c>1\right)$ とおくと、$Z=\dfrac{1}{1+\dfrac{0.084}{0.0216}f\left(c\right)}$ と表すことができる。

$f'\left(c\right)=\dfrac{2c\left(c-1\right)^2-\left(c^2+1.5\right)\cdot 2\left(c-1\right)}{\left(c-1\right)^4}=\dfrac{-2c-3}{\left(c-1\right)^3}<0\ \left(c>1\right)$ であるから、$f\left(c\right)$ は $c>1$ のとき単調減少関数となる。

したがって、Z は $c>1$ のとき単調増加であるから、Z の上限は $c\to\infty$ のときである。

$\lim\limits_{c\to\infty}f\left(c\right)=1$ より、$\lim\limits_{c\to\infty}Z=\dfrac{1}{1+\dfrac{0.084}{0.0216}}=0.204\cdots\simeq\dfrac{1}{5}$

（４）

（ア）⑭（C）⑮（D）⑯（H）⑰（G）（各 1 点）

（イ）(a) ⑱（H）⑲（E）（各 1 点） (b) ⑳（A）（C）　（2 点）

（ア）

$$VaR_{98\%}(S)=\min\{s\mid F_S(s)\geq 98\%\}=500$$

$$TVaR_{95\%}(S)=\frac{1}{1-0.95}\int_{0.95}^{1}VaR_t(S)dt$$

$$=\frac{1}{0.05}(300\times 0.02+500\times 0.02+1,000\times 0.01)=520$$

また、再保険が付保されていないとき、$P'=0$ 、$E(S')=E(S)=100$
であるから、

$$RoR_{VaR}=\frac{P-P'-E(S')}{98\%VaR}=\frac{130-0-100}{500}=6.0\%$$

$$RoR_{TVaR}=\frac{P-P'-E(S')}{95\%TVaR}=\frac{130-0-100}{520}=5.77\%$$

となる。

（イ）

(a) 支払保険金総額 S がエクセスポイント 300 を超える部分を 200 までカバーする再保険を付保したとき、この契約ポートフォリオから生じる年間の正味支払保険金総額S'は、下表の分布に従う。

s'	$P(S'=s')$	$s'\times P(S'=s')$
50	0.55	27.5
100	0.31	31
150	0.05	7.5
200	0.04	8
300	0.02	6
300	0.02	6
800	0.01	8
合計	1	94

したがって、

$E(S')=94$

$$VaR_{98\%}(S')=\min\{s'\mid F_{S'}(s')\geq 98\%\}=300$$

$$TVaR_{95\%}(S')=\frac{1}{1-0.95}\int_{0.95}^{1}VaR_t(S')dt$$

$$= \frac{1}{0.05}(300 \times 0.02 + 300 \times 0.02 + 800 \times 0.01) = 400$$

となる。また、$P' = 15$ であるから、

$$RoR_{VaR} = \frac{P - P' - E(S')}{98\%VaR} = \frac{130 - 15 - 94}{300} = 7.0\%$$

$$RoR_{TVaR} = \frac{P - P' - E(S')}{95\%TVaR} = \frac{130 - 15 - 94}{400} = 5.25\%$$

となる。

（b）RoR_{VaR} は再保険を付保する場合 7.0%、再保険を付保しない場合 6.0%であるから（A）は正しい。

RoR_{TVaR} は再保険を付保する場合 5.25%、再保険を付保しない場合 5.77%であるから（B）は誤り。

また、エクセスポイント 500 のストップロス再保険を手配したとき、この契約ポートフォリオから生じる年間の正味支払保険金総額 S' は、下表の分布に従う。

s'	$P(S' = s')$	$s' \times P(S' = s')$
50	0.55	27.5
100	0.31	31
150	0.05	7.5
200	0.04	8
300	0.02	6
500	0.02	10
500	0.01	5
合計	1	95

したがって、

$$VaR_{98\%}(S') = \min\{s' \mid F_{S'}(s') \geq 98\%\} = 500$$

$$TVaR_{95\%}(S') = \frac{1}{1 - 0.95}\int_{0.95}^{1} VaR_t(S')dt$$

$$= \frac{1}{0.05}(300 \times 0.02 + 500 \times 0.02 + 500 \times 0.01) = 420$$

となる。よって（C）は正しい。

（５）

（ア）㉑（Ｃ）　（イ）㉒（Ａ）

［（ア）４点　（イ）４点］

（ア）

確率変数 N_1 と N_2 の相関係数の値が－0.25 である条件から、$\dfrac{E(N_1N_2)-E(N_1)E(N_2)}{\sqrt{V(N_1)V(N_2)}} = -0.25$

$E(N_1)=E(N_2)=0.6$、$V(N_1)=V(N_2)=0.6\times 0.4=0.24$ を上式に代入して整理することで、

$E(N_1N_2)=0.3$

定義より、$E(N_1N_2)=\sum_{i,j=0,1} P(N_1=i,N_2=j)\times i\times j = P(N_1=1,N_2=1)$ だから、上式と合わせて、

$P(N_1=1,N_2=1)=0.3$

(N_1,N_2) の確率分布

確率	$N_2=0$	$N_2=1$	計
$N_1=0$			0.4
$N_1=1$		0.3	0.6
計	0.4	0.6	1

左の表より、

$P(N_1=1,N_2=0)=0.6-0.3=0.3$

などと順次求めることによって、

確率	$N_2=0$	$N_2=1$	計
$N_1=0$	0.1	0.3	0.4
$N_1=1$	0.3	0.3	0.6
計	0.4	0.6	1

(N_1,N_2) の確率分布は次のように求まる。

従って、

$P(N_1+N_2=0)=P(N_1=0,N_2=0)=0.1$

（イ）$P(S_d>0)=1-P(S_d=0)$ に着目し、$P(S_d=0)$ をまず求める。

$$P(S_d=0)=\sum_{i,j=0,1} P(N_1=i,N_2=j)\times P(S_d=0 \mid N_1=i,N_2=j)$$

$$=0.1+0.3\times P(X_1\le d)+0.3\times P(X_2\le d)+0.3\times P(X_1\le d, X_2\le d)$$

（支払保険金が 0 となるのは、損害事案が発生しないか、発生した損害事案の損害額がすべて免責金額以下の場合）

ここで、上式の各要素の値を求めると、

・$P(X_i \le d) = P((\log X_i - 2)/1 \le (\log d - 2)/1)$
$= P(Z_i \le 0)$
$= 0.5$
（$\log X_i \sim N(2,1)$より、$Z_i = (\log X_i - 2)/1 \sim N(0,1)$。$d = e^2$を代入）

・$P(X_1 \le d, X_2 \le d) = C(P(X_1 \le d), P(X_2 \le d))$　　Sklarの定理より
$= C(0.5, 0.5)$　　$P(X_1 \le d) = P(X_2 \le d) = 0.5$　を代入
$= \dfrac{0.5 \times 0.5}{0.5 + 0.5 - 0.5 \times 0.5}$
$= 1/3$

以上より、
$P(S_d = 0) = 0.1 + 0.3 \times 0.5 + 0.3 \times 0.5 + 0.3 \times 1/3 = 0.5$
$P(S_d > 0) = 1 - P(S_d = 0) = 1 - 0.5 = 0.5$

問題３

（１）

（ア）①（G）②（F）③（I）④（H）⑤（S）⑥（L）⑦（P）⑧（N）（①～⑧は完答）

（イ）⑨（J）⑩（H）⑪（O）⑫（J）⑬（N）（⑨～⑬は完答）

⑭（J）⑮（E）⑯（H）⑰（H）⑱（O）⑲（J）（⑭～⑲は完答）

［（ア）４点　（イ）⑨～⑬３点　⑭～⑲３点 ］

（ア），（イ）

テキスト 5-32～5-35 のとおり。

【（イ）⑨～⑬の補足】

$$h(x\mid y)=\frac{f(x)g(y\mid x)}{\int f(x)g(y\mid x)dx}$$

$$\propto \frac{1}{x}\exp\left[-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}-\frac{\left\{\log y-\left(\log p_k x-\frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\}^2}{2\sigma_k^2}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\exp\left[-\frac{\sigma_k^2(\log x-\mu)^2+\sigma^2\left(\log x+\log\frac{p_k}{y}-\frac{\sigma_k^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2\sigma_k^2}\right]$$

$$\propto \frac{1}{x}\exp\left[-\frac{(\sigma_k^2+\sigma^2)(\log x)^2-2\left\{\sigma_k^2\mu+\sigma^2\left(\log\frac{y}{p_k}+\frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\}\log x}{2\sigma^2\sigma_k^2}\right]$$

$$\propto \frac{1}{x}\exp\left[-\frac{\left[\log x-\left\{\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\mu+\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\log\frac{y}{p_k}+\frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\}\right]^2}{2\cdot\frac{\sigma^2\sigma_k^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}}\right]$$

ここで、$h(x\mid y)$は確率密度関数であるため、式（5.6）が得られる。

（２）

（ア）（a）⑳（F）㉑（F）㉒（J）㉓（F）（⑳～㉓は完答）

（b）㉔（E）㉕（C）㉖（G）㉗（C）（㉔～㉗は完答）

（イ）㉘（A）㉙（C）㉚（A）㉛（D）㉜（H）（㉘～㉜は完答）

[（ア）（a）４点　（b）３点　（イ）３点]

（ア）

（a）

テキスト 9-23～9-25 より、

$$1+0.6R=\frac{\exp(0.6R)-1}{0.6R}$$

が得られる。

（b）

テキスト 9-26 より、

$$1+0.51R=\frac{\exp(0.3R)-1}{R}+0.7\cdot\exp(0.3R)$$

が得られる。

（イ）

保有分についての調整係数 R は、c' を正味の（出再保険料を控除した）収入保険料、S' を 1 年間の正味の支払保険金総額として、

$$e^{-c'r}M_{S'}(r)=1$$

を満たす r である。

c' は c からグロス再保険料を控除したものであり、グロス再保険料はネット再保険料 $E(I_3)$ に付加率 100% を乗せた $2E(I_3)$ である。

ネット再保険料 $E(I_3)$ は、テキスト（9.10）式を用いて帰納的に求めることができ、

$$\begin{cases} f(0)=0.202 \\ F(0)=0.202 \\ E(I_0)=2.720 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(1)=0.097 \\ F(1)=0.299 \\ E(I_1)=1.922 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(2)=0.250 \\ F(2)=0.549 \\ E(I_2)=1.221 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(3)=0.112 \\ F(3)=0.661 \\ E(I_3)=0.770 \end{cases}$$

となる。よって、

$$c' = c - 2E\left(I_3\right) = 3.6 - 2 \times 0.770 = 2.060$$

が得られる。

次に、S'の確率分布を考えると、

$$S' = \begin{cases} k & \left(1\text{年間の支払保険金総額が}k(<3)\text{の場合}\right) \\ 3 & \left(1\text{年間の支払保険金総額が}3\text{以上の場合}\right) \end{cases}$$

であるので、

$$M_{S'}\left(r\right) = \sum_{k=0}^{2} f\left(k\right)e^{rk} + \left\{1 - F\left(2\right)\right\}e^{3r} = 0.202 + 0.097e^{r} + 0.250e^{2r} + 0.451e^{3r}$$

となる。

よって、

$$e^{-c'R}M_{S'}\left(R\right) = 1 \iff e^{-2.060R}\left(0.202 + 0.097e^{R} + 0.250e^{2R} + 0.451e^{3R}\right) = 1$$

が得られる。

（３）

（ア）㉝（Ｊ）　（イ）㉞（Ｅ）　㉟（Ｊ）

［（ア）㉝　４点　（イ）㉞　３点　㉟　３点］

（ア）1 年間の保険金支払総額の発生確率は下表のとおりとなる。

保険金支払総額（万円）	発生確率
0	30%
1,000	34%
2,000	24%
3,000	10%
4,000	2%

また、N＋1 年度末のサープラスは、以下の通りとなる。

1,500＋2,000 - 300（社費）- 400（代理店手数料）-（保険金支払総額）＝2,800 -（保険金支払総額）

N＋1 年度末のサープラス（万円）	発生確率
2,800	30%
1,800	34%
800	24%
- 200	10%
- 1,200	2%

したがって N＋1 年度末の破産確率は 10%＋2%＝12%となる。

次に N＋1 年度末でサープラスがプラスだった場合の N＋2 年度末のサープラスは下表となる。

N＋1 年度末のサープラス（万円）	発生確率	N＋2 年度末のサープラス（万円）
2,800	30%	4,100 -（保険金支払総額）
1,800	34%	3,100 -（保険金支払総額）
800	24%	2,100 -（保険金支払総額）

N＋1 年度末でサープラスがプラスだった場合に、N＋2 年度末に破産する確率は以下の通りとなる。

30%×0%＋34%×2%＋24%×（10%＋2%）＝3.56%

したがって N＋2 年度末までに破産する確率は、12%＋3.56%＝15.56%となる。

(イ) 限度額を X 万円(X≧1,000) とすると、1 年間の保険金支払総額の発生確率は下表のとおりとなる。

保険金支払総額（万円）	発生確率
0	30%
1,000	34%
X	16%
2,000	8%
1,000＋X	10%
2X	2%

また、限度額設定後の保険料は以下の通り。

(1,000×0.4＋0.1X＋150)÷(1−20%−5%)＋(1,000×0.2＋0.2X＋150)÷(1−20%−5%)＝1,200＋0.4X

したがって、N＋1 年度末のサープラスは、以下の通りとなる。

1,500＋1,200＋0.4X－300－(1,200＋0.4X)×20%－(保険金支払総額)

＝2,160＋0.32X－(保険金支払総額)

N＋1 年度末までの破産確率を 0%とする条件は、2,160＋0.32X−2X≧0 なので、X≦1,285.7。

次に「N＋2 年度末までに破産する確率が 4%以下」となる条件を求める。

N＋1 年度末では破産しない前提のため、N＋2 年度末のサープラスを考えると以下の通りとなる。

1,500＋(1,200＋0.4X)×2−300×2－(1,200＋0.4X)×20%×2－(2 年間通算の保険金支払額)

＝2,820＋0.64X−(2 年間通算の保険金支払額)

また、2 年間通算の保険金支払額を降順に並べて発生確率を算出した結果は下表。

	2 年間通算の保険金支払額（万円）	発生確率	
①	4X	0.04%	2%×2%
②	1,000＋3X	0.40%	10%×2%×2
③	2,000＋2X	1.32%	8%×2%×2＋10%×10%
④	3,000＋X	1.60%	8%×10%×2
⑤	4,000	0.64%	8%×8%
⑥	3X	0.64%	16%×2%×2

①～⑤の発生確率合計が 4.00%のため、⑥が発生しても破産しなければ条件を満たす。

したがって、2,820＋0.64X－3X≧0、X≦1,194.9

（４）

（ア）㊱（Ｈ）［４点］

（イ）㊲（Ａ）㊳（Ｂ）㊴（Ａ）［３点］

（ウ）㊵（Ｅ）［３点］

（ア）定義に従って計算すると、

$P^Q(N=k)$

$$=\frac{E\left[\exp(\theta N)\cdot 1_{N=k}\right]}{E\left[\exp(\theta N)\right]}=P(N=k)\cdot\exp\left(\theta k+\lambda\left(1-\exp(\theta)\right)\right)$$

$$=\frac{\left(\lambda\exp(\theta)\right)^k}{k!}\exp\left(-\lambda\exp(\theta)\right)$$

したがって、N のエッシャー変換後の確率分布はポアソン分布であり、その平均は $\lambda\exp(\theta)$ とわかる。

これが 4 に等しいことから、λ =2.5 および与えられた自然対数の値を用いて $\theta=0.47$ とわかる。

よって（Ｈ）が正しい。

（イ）

$E[Y]=AE\left[\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)\cdot 1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]-KE\left[1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]$ の第一項を考える。

ワン変換後の確率分布関数を微分すると、標準正規分布の密度関数 $\phi(x)$ を用いて、

$f^Q(x)=\dfrac{\phi(\zeta-\theta)}{\phi(\zeta)}f(x)$ であるから、X にかかるある事象 Λ に対し、

$E^Q[1_\Lambda]=E\left[\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)\cdot 1_\Lambda\right]$ とわかる。よって $E[Y]$ の第一項は、$AE^Q\left[1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]$ となる。

ここで、$\zeta^Q=\Phi^{-1}\left(F^Q(X)\right)$ と $F^Q(X)=\Phi\left[\Phi^{-1}\left(F(X)\right)-\theta\right]$ から、$\zeta^Q=\zeta-\theta$ とわかるので、

$E[Y]$ の第一項

$$=AE^Q\left[1_{A\exp\left(\zeta^Q\theta+\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]$$

$$= AP^Q\left(A\exp\left(\zeta^Q\theta+\frac{1}{2}\theta^2\right)>K\right)$$

$$= AP^Q\left(\zeta^Q>\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= AP^Q\left(\Phi^{-1}\left(F^Q\left(X\right)\right)>\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= AP^Q\left(F^Q\left(X\right)>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)\right)$$

となる。

第二項も第一項と同様に計算し、

$$E\left[Y\right]= AP^Q\left(F^Q\left(X\right)>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)\right)-KP\left(F\left(X\right)>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)\right)$$ を得る。

よって㊲（Ａ）㊳（Ｂ）㊴（Ａ）が正しい。

（ウ）

$\zeta=\Phi^{-1}\left(F\left(X\right)\right)$は標準正規分布に従うことから、$\zeta$のワン変換後の確率分布は、

平均θ、分散 1 の正規分布である。

一方、$\Phi\left(\zeta^Q\right)=F^Q\left(X\right)$、$\zeta^Q=\zeta-\theta$より、$\zeta^Q$のワン変換後の確率分布は

標準正規分布とわかる。したがって、$\zeta^Q=\Phi^{-1}\left(F^Q\left(X\right)\right)\Leftrightarrow\Phi\left(\zeta^Q\right)=F^Q\left(X\right)$に注意すると、

$$E\left[Y\right]= AP^Q\left(F^Q\left(X\right)>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)\right)-KP\left(F\left(X\right)>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)\right)$$

$$= AP^Q\left(\zeta^Q>\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)-KP\left(X>\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)$$

$$= AP^Q\left(\zeta^Q<\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{A}{K}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)-KP\left(X<\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{A}{K}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)\quad・・・（★）$$

$$= A\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{A}{K}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)-K\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{A}{K}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)$$

となる。

ここで、$A=15$、$K=5$、$\theta=0.47$ より、

$$E\left[Y\right]=15\cdot\Phi\left(\frac{1.099}{0.47}+0.235\right)-5\cdot\Phi\left(\frac{1.099}{0.47}-0.235\right)$$

$$=15\cdot\Phi\left(2.573\right)-5\cdot\Phi\left(2.103\right)$$

$P(X<2.573)=0.9949$ 、 $P(X<2.103)=0.9821$ より、$E\left[Y\right]=10.013$ を得る。

したがって、㊵（E）が正しい。

【備考】

上記（★）式について、第一項はワン変換後の標準正規分布に関する確率を
考えている一方、第二項はワン変換前の標準正規分布に関する確率を考えている点に注意する。

また ζ は標準正規分布に従うことから、$E\left[Y\right]$ の第一項は

$$E\left[\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)\cdot 1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]$$

$$=E\left[\frac{\exp\left(\zeta\theta\right)}{E\left[\exp\left(\zeta\theta\right)\right]}\cdot 1_{A\exp\left(\zeta\theta-\frac{1}{2}\theta^2\right)-K>0}\right]$$ となり、エッシャー変換と一致する。

【別解】

$F^Q\left(X\right)$ はワン変換後の確率分布において一様分布 $U\left(0,1\right)$ に従い、$F\left(X\right)$ は

ワン変換前の確率分布において一様分布 $U\left(0,1\right)$ に従うことから、それぞれ U^Q,U と表すと

（イ）で得られた式を次のとおり変形しても、（ウ）の結論を得ることができる。

$$E\left[Y\right]=AP^Q\left(U^Q>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)\right)-KP\left(U>\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{K}{A}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)\right)$$

$$=A\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{A}{K}\right)+\frac{1}{2}\theta\right)-K\Phi\left(\frac{1}{\theta}\log\left(\frac{A}{K}\right)-\frac{1}{2}\theta\right)$$