数学（問題）

問題１から問題６を通じ、必要であれば「付表」に記載された数値を用いなさい。

「付表」には、以下の付表が掲載されている。

・付表Ⅰ.「標準正規分布表（上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ から確率 ε を求める表）」
「標準正規分布表（確率 ε から上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ を求める表）」
・付表Ⅱ.「自由度 φ の χ^2 分布の上側 ε 点：$\chi^2_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅲ.「分母の自由度 n 、分子の自由度 m の F 分布の上側 ε 点：$F^m_n(\varepsilon)$」
・付表Ⅳ.「自由度 φ の t 分布の上側 ε 点：$t_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅴ.「自然対数表」
・付表Ⅵ.「指数関数表」

問題１． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。 各５点（計２０点）

（１）袋の中に 2 個の赤玉と 3 個の白玉が入っている。その袋の中から玉を 2 個取り出し、取り出した 2 個の玉と赤玉 2 個を入れ替えて袋に戻す。その後、袋の中から玉を 1 個取り出したとき、この取り出した玉が赤玉である確率は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。なお、袋に入っている各玉を取り出す確率は等しいものとする。

[①の選択肢]

（A） $\frac{6}{25}$　（B） $\frac{3}{10}$　（C） $\frac{9}{25}$　（D） $\frac{23}{50}$

（E） $\frac{1}{2}$　（F） $\frac{27}{50}$　（G） $\frac{16}{25}$　（H） $\frac{7}{10}$

（I） $\frac{19}{25}$　（J） $\frac{41}{50}$

（２）確率変数 X 、Y は互いに独立で、確率変数 X が平均 2 のポアソン分布、確率変数 Y が平均 2 の指数分布に従うとする。このとき、$\{X=1\}$ かつ $\{X>Y\}$ となる確率 $P(\{X=1\}\cap\{X>Y\})$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ であり、$\{X>Y\}$ となる確率 $P(X>Y)$ は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。

[②の選択肢]

（A） $2e^{-2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)$　（B） $2e^{-\frac{1}{2}}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)$　（C） $2e^{-2}(1-e^{-2})$

（D） $2e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-2})$　（E） $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-2})$　（F） $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)$

（G） $\frac{1}{2}e^{-2}(1-e^{-2})$　（H） $\frac{1}{2}e^{-2}\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)$　（I） $\frac{1}{2}e^{-1}$

（J） $2e^{-4}$　（K） $2e^{-\frac{5}{2}}$　（L） $\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{2}}$

[③の選択肢]

（A） $\exp[2e^{-2}-2]$　（B） $1-\exp[2e^{-2}-2]$　（C） $\exp\left[\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}\right]$

（D） $1-\exp\left[\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2}\right]$　（E） $\exp\left[2e^{-\frac{1}{2}}-2\right]$　（F） $1-\exp\left[2e^{-\frac{1}{2}}-2\right]$

（G） $\exp\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]$　（H） $1-\exp\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]$　（I） $1-\exp\left[\frac{1}{2}e^{-2}-2\right]$

（J） $1-\exp\left[2e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right]$　（K） $1-\exp\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-2\right]$　（L） $1-\exp\left[2e^{-2}-\frac{1}{2}\right]$

（３）一辺の長さが１の正三角形ＡＢＣの辺ＡＢ上に点Ｄ、辺ＡＣ上に点Ｅをそれぞれ独立に無作為に選ぶ。直線ＤＥによって切り取られる三角形ＡＤＥの面積を表す確率変数 S、辺ＡＤ、ＡＥの長さを表す互いに独立な確率変数をそれぞれ X,Y とするとき、

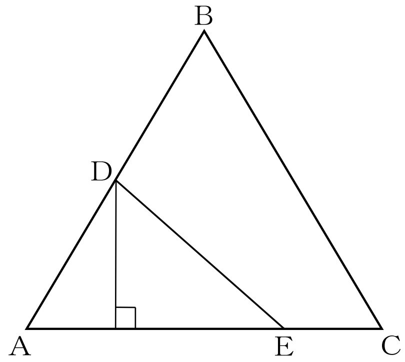
$$S = \boxed{\quad ④ \quad}$$

と表せる。

このとき S の確率密度関数は、

$$f(s) = \begin{cases} \boxed{\quad ⑤ \quad} & \left(0 < s \leq \boxed{\quad ⑥ \quad}\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。



[④の選択肢]

（A）$\frac{1}{4}XY$　（B）$\frac{1}{2}XY$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{4}XY$

（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}XY$　（E）XY

[⑤の選択肢]

（A）$-\frac{4}{\sqrt{3}}\log\frac{4s}{\sqrt{3}}$　（B）$-2\log 2s$　（C）$-\frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{2s}{\sqrt{3}}$

（D）$-4\log 4s$　（E）$1-\frac{4}{\sqrt{3}}s$　（F）$1-4s$

（G）$1-2s$　（H）$1-\frac{2}{\sqrt{3}}s$　（I）$\frac{2}{s^2}-32$

（J）$\frac{2}{\sqrt{3}s^2}-\frac{32}{3\sqrt{3}}$　（K）$\frac{1}{\sqrt{3}s^2}-\frac{4}{3\sqrt{3}}$　（L）$\frac{1}{s^2}-4$

[⑥の選択肢]

（A）$\frac{1}{4}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{4}$

（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（E）1

（4）確率変数 X は、次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ確率分布に従う。

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

このとき、X の積率母関数 $M(t)$ は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ である。

[⑦の選択肢]

（A） $\dfrac{e^t + e^{-t}}{t}$　（B） $\dfrac{2 - e^t - e^{-t}}{t}$　（C） $\dfrac{e^t + e^{-t} - 2}{t}$

（D） $\dfrac{2e^t}{t} + \dfrac{e^t - e^{-t}}{t^2}$　（E） $\dfrac{2e^t}{t} - \dfrac{e^t + e^{-t}}{t^2}$　（F） $\dfrac{2e^t}{t} - \dfrac{e^t - e^{-t}}{t^2}$

（G） $\dfrac{e^{-t} + 1}{t^2}$　（H） $\dfrac{e^t - 1}{t^2}$　（I） $\dfrac{e^t + e^{-t}}{t^2}$

（J） $\dfrac{e^t + e^{-t} + 2}{t^2}$　（K） $\dfrac{2 - e^t - e^{-t}}{t^2}$　（L） $\dfrac{e^t + e^{-t} - 2}{t^2}$

問題２． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　　　　　　　各５点（計２０点）

（１）異なる 2 つの電子機器Ａ・Ｂの寿命が指数分布に従うとして、電子機器Ａ・Ｂそれぞれの平均寿命を最尤法により推定する。

観測データ：　96, 54, 49, 74, 25, 10, 71, 28, 33, 26（単位：時間）

（ア）電子機器Ａを 10 個抽出して、寿命を観測したところ観測データの通りであった。このとき平均寿命の最尤推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ① \quad}$ 時間である。

（イ）電子機器Ｂを 15 個抽出して、寿命を観測して 100 時間で観測を打ち切ったところ、5 個の電子機器Ｂは壊れず、残りの 10 個の電子機器Ｂの寿命は観測データの通りであった。このとき平均寿命の最尤推定値に最も近い数値は $\boxed{\quad ② \quad}$ 時間である。

[①、②の選択肢]

（A） 41.0	**（B）** 46.6	**（C）** 51.5	**（D）** 53.0	**（E）** 56.6
（F） 64.4	**（G）** 71.0	**（H）** 96.6	**（I）** 100.0	**（J）** 119.9

（２）開発中のある薬剤はラットの体内物質Ａを減らす効果があるといわれており、下表の通りの結果を得た。比較にあたり、薬剤の投与有無以外の条件はまったく同じとし、それぞれが従う分布において分散は未知とする。

（ア）ランダムに 10 匹のラットを抽出して 2 群に分け、一方には偽薬を投与し、他方には体内物質Ａを減らす効果があるとされる治験薬を投与して観察した。対照群（偽薬投与後）の体内物質Ａの量、投薬群（治験薬投与後）の体内物質Ａの量はそれぞれ正規分布に従い、分散は等しいものとする。対照群と投薬群それぞれの体内物質Ａの平均の差（「対照群の体内物質Ａの平均」－「投薬群の体内物質Ａの平均」）によって投薬による体内物質Ａの削減効果を信頼係数 95%で区間推定する。信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ mg であり、信頼区間の上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ④ \quad}$ mg である。

（単位：mg）

対照群の体内物質Ａ	12.7	13.4	12.1	14.3	15.0
投薬群の体内物質Ａ	12.3	12.6	10.7	14.9	14.0

（イ）ランダムに 5 匹のラットを抽出し、体内物質Ａを減らす効果があるとされる治験薬を投与して観察した。5 匹の治験薬投与前後のデータには対応がある（対標本である）ものとする。被験体ごとの体内物質Ａの削減効果（「治験薬投与前の体内物質Ａ」－「治験薬投与後の体内物質Ａ」）は正規分布に従うとし、投薬による体内物質Ａの削減効果の平均を信頼係数 95%で区間推定する。信頼区間の下限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ mg であり、信頼区間の上限に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑥ \quad}$ mg である。

（単位：mg）

	被験体１	被験体２	被験体３	被験体４	被験体５
治験薬投与前の体内物質Ａ	12.7	13.4	12.1	14.3	15.0
治験薬投与後の体内物質Ａ	12.3	12.6	10.7	14.9	14.0

[③～⑥の選択肢]

（A）−1.71　（B）−1.46　（C）−1.18　（D）−0.35　（E）−0.18

（F）−0.07　（G）0.00　（H）1.20　（I）1.27　（J）1.38

（K）1.55　（L）2.38　（M）2.66　（N）2.91

（3）あるコインについて、次のことが分かっている。

・コインが偽造でなければ、表の出る確率と裏の出る確率はともに 50%である。

・コインが偽造であれば、表の出る確率は 70%であり、裏の出る確率は 30%である。

いま、帰無仮説 H_0「コインが偽造でない」をこのコインを数回投げることによって検定する。コインを 10 回投げ、表の出た回数が 8 回以上であれば偽造であると判断することとすると、第一種の誤りの起こる確率に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑦ \quad}$ であり、第二種の誤りの起こる確率に最も近い数値は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。

［⑦、⑧の選択肢］

（A）0.0016	（B）0.0281	（C）0.0547	（D）0.2187	（E）0.3828
（F）0.6172	（G）0.7813	（H）0.9453	（I）0.9719	（J）0.9984

（４）ある資格試験では出題方針を今年度から変更したため、昨年度と比べて試験の得点のバラツキが大きくなったか調べたい。今年度と昨年度の答案を任意枚数抽出して得点について調査したところ、下表の通りであった。試験の得点が正規分布に従い、今年度と昨年度の試験の得点の母分散をそれぞれ $\sigma_A{}^2, \sigma_B{}^2$ としたとき、昨年度より今年度の方が試験の得点のバラツキが大きいといえるか、帰無仮説 $H_0: \sigma_A{}^2 = \sigma_B{}^2$ を対立仮説 $H_1: \sigma_A^2 > \sigma_B^2$ に対して有意水準 5% で検定する。
このとき検定統計量 X に最も近い数値は ⑨ であり、棄却域は $X >$ ⑩ である。
よって、昨年度より今年度の方が試験の得点のバラツキが大きいと ⑪ 。

	答案数	得点の標本平均	得点の標本分散
今年度	8	50	$(14.8)^2$
昨年度	9	43	$(10.2)^2$

なお、n 個の標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の標本分散 s^2 は、標本平均 $\bar{x}$ を用いて、

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

とする。

［⑨、⑩の選択肢］

（**A**）1.1628　（**B**）1.4510　（**C**）2.1053　（**D**）2.1388　（**E**）3.2927

（**F**）3.3881　（**G**）3.5005　（**H**）3.7257　（**I**）4.1970　（**J**）4.5286

［⑪の選択肢］

（**A**）いえる　（**B**）いえない

問題３． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　　　　　各５点（計１５点）

（１）Ａ社はオンラインでの商品販売を手掛けており、毎月のホームページ（ＨＰ）の閲覧数 x と商品の売上 y のデータは以下の通りであった。

計測月 i	4 月	5 月	6 月	7 月
ＨＰ閲覧数 x_i（万回）	2	1	2	3
売上　y_i（万円）	60	80	91	123

（ア）y を x で説明する回帰式 $y=\alpha_1+\beta_1 x$ で回帰係数 α_1, β_1 を最小二乗法によって推定する。α_1 の推定値に最も近い数値は $\boxed{①}$ であり、β_1 の推定値に最も近い数値は $\boxed{②}$ である。

（イ）4 月は決済システムのトラブルがあったため売上が落ち込んでいることから、定数項ダミーを用いて回帰式を推定する。ダミー変数 d_i を次のように定義し、$y=\alpha_2'+\beta_2 x+\alpha_2'' d$ の回帰係数を最小二乗法によって推定することで、4 月と 4 月以外で定数項 $\alpha_2(=\alpha_2'+\alpha_2'' d)$ を変えた回帰式 $y=\alpha_2+\beta_2 x$ を考える。

$$d_i=\begin{cases}1 & (i=4\text{ 月})\\ 0 & (i\neq 4\text{ 月})\end{cases}$$

4 月の α_2 の推定値に最も近い数値は $\boxed{③}$ であり、4 月以外の α_2 の推定値に最も近い数値は $\boxed{④}$ であり、β_2 の推定値に最も近い数値は $\boxed{⑤}$ である。
なお、必要であれば、

$$\begin{pmatrix}4 & 8 & 1\\ 8 & 18 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & -6 & -2\\ -6 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

となることを用いて良い。

[①～⑤の選択肢]

（**Ａ**）-38.0　（**Ｂ**）-14.5　（**Ｃ**）0.0　（**Ｄ**）17.0　（**Ｅ**）21.5

（**Ｆ**）28.5　（**Ｇ**）30.0　（**Ｈ**）32.0　（**Ｉ**）38.0　（**Ｊ**）39.5

（**Ｋ**）41.0　（**Ｌ**）44.3　（**Ｍ**）45.5　（**Ｎ**）55.0　（**Ｏ**）60.0

（２）標準ブラウン運動に関する以下の問いに答えよ。

（ア）次の記述のうち正しいものは $\boxed{⑥}$ 個ある。

・標準ブラウン運動は、連続性を持つ。

・標準ブラウン運動は、独立増分性を持つ。

・標準ブラウン運動は、定常増分性を持つ。

・標準ブラウン運動は、マルチンゲール性を持つ。

・$\{W_t\}\ (t \geq 0)$ を標準ブラウン運動とするとき、W_t は期待値 $E[W_t] = 0$、分散 $V[W_t] = t^2$ の正規分布に従う。

（イ）確率過程 $\{W_t\}\ (t \geq 0)$ は標準ブラウン運動であるとする。このとき、確率 $P(W_2 > 0)$ は $\boxed{⑦}$ であり、条件付き確率 $P(W_1 > 0 \mid W_2 > 0)$ は $\boxed{⑧}$ である。

[⑥の選択肢]

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4　（E）5

[⑦、⑧の選択肢]

（A） $\frac{1}{8}$　（B） $\frac{1}{6}$　（C） $\frac{1}{5}$　（D） $\frac{1}{4}$

（E） $\frac{1}{3}$　（F） $\frac{3}{8}$　（G） $\frac{2}{5}$　（H） $\frac{1}{2}$

（I） $\frac{3}{5}$　（J） $\frac{5}{8}$　（K） $\frac{2}{3}$　（L） $\frac{3}{4}$

（M） $\frac{4}{5}$　（N） $\frac{5}{6}$　（O） $\frac{7}{8}$

（３）X を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数とする。$|X|$ の値を棄却法で生成する。

１．棄却法では、生成したい分布の確率密度関数 f に比較的近くて乱数を高速に生成できる確率密度関数 g を持つ分布を選び、分布の範囲内のすべての y に対し、

$$f(y)/g(y) \leq c$$

となるようななるべく小さい定数 c を選んで分布を生成する。最小の c を選択する際にシミュレーションの繰り返し回数は最小となる。
いま、$|X|$ の確率密度関数を f、生成可能な確率変数 Y は平均 1 の指数分布でその確率密度関数を g とするとき、繰り返し回数を最小とする c は $\boxed{⑨}$ である。

２．１．で求めた定数 c と区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を用いて、$|X|$ を生成する。Y, U のシミュレーション結果がそれぞれ下表の通りとすると、生成される $|X|$ の標本平均に最も近い数値は $\boxed{⑩}$ である。

U	0.8	0.3	0.7	0.4	0.9
Y	0.17	1.22	0.96	0.66	0.02

[⑨の選択肢]

（Ａ）$\frac{2e}{\pi}$　（Ｂ）1　（Ｃ）$\sqrt{2\pi}$　（Ｄ）$\sqrt{\frac{2e}{\pi}}$　（Ｅ）$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$

（Ｆ）$\frac{2}{\pi}$　（Ｇ）$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　（Ｈ）e　（Ｉ）$\sqrt{\frac{e}{\pi}}$　（Ｊ）$\sqrt{2}$

[⑩の選択肢]

（Ａ）0.10　（Ｂ）0.17　（Ｃ）0.28　（Ｄ）0.34　（Ｅ）0.38
（Ｆ）0.42　（Ｇ）0.45　（Ｈ）0.47　（Ｉ）0.49　（Ｊ）0.52
（Ｋ）0.55　（Ｌ）0.57　（Ｍ）0.59　（Ｎ）0.60　（Ｏ）0.61
（Ｐ）0.62　（Ｑ）0.63　（Ｒ）0.66　（Ｓ）0.68　（Ｔ）0.70
（Ｕ）0.72　（Ｖ）0.73　（Ｗ）0.75　（Ｘ）0.78　（Ｙ）0.81
（Ｚ）0.94　（ＡＡ）0.95　（ＡＢ）0.96　（ＡＣ）1.09　（ＡＤ）1.22

問題４． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１２点）

（１）ある時系列データについて、時系列モデルに当てはめ、将来予測を実施したい。

確率過程 $\{Y_t\}$ $(t=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ の実現値である時系列データを $\{y_t\}$ と定める。

確率過程 $\{Y_t\}$ は 1 次の自己回帰モデル $AR(1)$ に従うとすると、Y_t は次の算式を満たす。

$$Y_t=\phi_0+\phi_1 Y_{t-1}+\varepsilon_t$$

ここで、パラメータ $\phi_0,\ \phi_1$ は定数であり、誤差項 ε_t は $\varepsilon_{t-1},\varepsilon_{t-2},\cdots,Y_{t-1},Y_{t-2},\cdots$ と独立に平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数である。なお、確率過程 $\{Y_t\}$ は定常であるとする。

まず、確率過程 $\{Y_t\}$ の定常性の条件、平均、自己共分散、自己相関を求めたい。

このモデルが定常性を持つための必要十分条件は、次の通りである。

$$\boxed{①}$$

ここで、Y_t の平均を μ 、時差 h の自己共分散を γ_h、時差 h の自己相関を ρ_h とすると、

$$\mu=\frac{\boxed{②}}{\boxed{③}}$$

$$\gamma_h=\frac{\boxed{④}}{\boxed{⑤}}\sigma^2 \quad (h=0,1,2,\cdots)$$

$$\rho_h=\boxed{⑥} \quad (h=0,1,2,\cdots)$$

である。

[①の選択肢]

（Ａ）$-1<\phi_0<1$　（Ｂ）$-1<\phi_1<1$　（Ｃ）$-1<\phi_0<1,\ -1<\phi_1<1$

（Ｄ）$0<\phi_0<1$　（Ｅ）$0<\phi_1<1$　（Ｆ）$0<\phi_0<1,\ 0<\phi_1<1$

[②～⑥の選択肢]

（Ａ）ϕ_0　（Ｂ）ϕ_1　（Ｃ）$1-\phi_0$　（Ｄ）$1-\phi_1$

（Ｅ）$\phi_0(1-\phi_1)$　（Ｆ）$\phi_1(1-\phi_0)$　（Ｇ）$\phi_0\left(1-\phi_1^{h-1}\right)$　（Ｈ）$\phi_1\left(1-\phi_0^{h-1}\right)$

（Ｉ）$\phi_0\left(1-\phi_1^{h}\right)$　（Ｊ）$\phi_1\left(1-\phi_0^{h}\right)$　（Ｋ）ϕ_0^{h-1}　（Ｌ）ϕ_1^{h-1}

（Ｍ）ϕ_0^{h}　（Ｎ）ϕ_1^{h}　（Ｏ）$1-\phi_0^2$　（Ｐ）$1-\phi_1^2$

（Ｑ）$1+\phi_0^2$　（Ｒ）$1+\phi_1^2$　（Ｓ）$1-\phi_0^{2h}$　（Ｔ）$1-\phi_1^{2h}$

（２）時系列データが下表の通り与えられているとき、標本自己相関からパラメータ ϕ_0, ϕ_1 を推定する。また、パラメータ ϕ_0, ϕ_1 の推定値を、$\hat{\phi}_0, \hat{\phi}_1$ とする。

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	3.00	4.09	2.65	2.25	3.20	4.17	4.87	4.97	3.48	3.00

このとき、$\hat{\phi}_0$ に最も近い数値は［ ⑦ ］、$\hat{\phi}_1$ に最も近い数値は［ ⑧ ］である。

[⑦の選択肢]

（Ａ） 2.00　（Ｂ） 2.02　（Ｃ） 2.04　（Ｄ） 2.06　（Ｅ） 2.08

（Ｆ） 2.10　（Ｇ） 2.12　（Ｈ） 2.14　（Ｉ） 2.16　（Ｊ） 2.18

[⑧の選択肢]

（Ａ） 0.24　（Ｂ） 0.27　（Ｃ） 0.30　（Ｄ） 0.33　（Ｅ） 0.36

（Ｆ） 0.39　（Ｇ） 0.42　（Ｈ） 0.45　（Ｉ） 0.48　（Ｊ） 0.51

（３）次に、$t=1$ 時点から、$t=n$ 時点までの時系列データ $\{y_t\}$ が与えられたとき、$t=n+h$ 時点での Y_{n+h} を予測し、その区間予測を求めたい。予測量としては、

$$\hat{y}_{n+h} = E[Y_{n+h} \,|\, Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1]$$

を用いる。

ここで、Y_{n+h} を、Y_n, ϕ_0, ϕ_1 および、誤差項で表現し、条件付き期待値をとると、

$$\hat{y}_{n+h} = \frac{\boxed{⑨}}{\boxed{⑩}} + \boxed{⑪}\, y_n$$

となる。

また、Y_{n+h} は $\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1\}$ の条件の下で、平均 $\hat{y}_{n+h}$、分散 $\dfrac{\boxed{⑫}}{\boxed{⑬}}\sigma^2$ の正規分布に従うことから、区間予測を求めることができる。

ここで、Y_{n+h} の $1-\varepsilon$ 区間予測とは、$\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1\}$ の条件の下で

$$\left[E[Y_{n+h}] - u\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{V[Y_{n+h}]}\ ,\ E[Y_{n+h}] + u\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{V[Y_{n+h}]}\right]$$

とする。なお、$u(\varepsilon)$ は標準正規分布の上側 ε 点である。

（２）のデータにおいて、y_1 から y_{10} までのデータがすでに判明しているが、（２）で求めた標本自己相関から推定したパラメータ（小数点以下第 3 位を四捨五入して小数点以下第 2 位までの小数を用いる。）を用いて、Y_{12}, Y_{15} について、95% 区間予測を求める。なお、$\sigma = 1$ は既知である。

このとき、Y_{12} の 95% 区間予測は、

$$\left[\boxed{⑭}, \boxed{⑮}\right]$$

であり、 Y_{15} の 95% 区間予測は、

$$\left[\boxed{⑯}, \boxed{⑰}\right]$$

である。なお、空欄⑭～⑰については、最も近い数値を選択肢から選択せよ。

[⑨～⑬の選択肢]

（A）ϕ_0	（B）ϕ_1	（C）$1-\phi_0$	（D）$1-\phi_1$
（E）$\phi_0(1-\phi_1)$	（F）$\phi_1(1-\phi_0)$	（G）$\phi_0\left(1-\phi_1^{h-1}\right)$	（H）$\phi_1\left(1-\phi_0^{h-1}\right)$
（I）$\phi_0\left(1-\phi_1^{h}\right)$	（J）$\phi_1\left(1-\phi_0^{h}\right)$	（K）ϕ_0^{h-1}	（L）ϕ_1^{h-1}
（M）ϕ_0^{h}	（N）ϕ_1^{h}	（O）$1-\phi_0^2$	（P）$1-\phi_1^2$
（Q）$1+\phi_0^2$	（R）$1+\phi_1^2$	（S）$1-\phi_0^{2h}$	（T）$1-\phi_1^{2h}$

[⑭、⑯の選択肢]

（A）1.27	（B）1.29	（C）1.31	（D）1.33	（E）1.35
（F）1.37	（G）1.39	（H）1.41	（I）1.43	（J）1.45

[⑮、⑰の選択肢]

（A）5.56	（B）5.58	（C）5.60	（D）5.62	（E）5.64
（F）5.66	（G）5.68	（H）5.70	（I）5.72	（J）5.74

問題５． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１６点）

ある店では、その店独自の決済アプリを使用して決済を行った顧客に対してキャッシュバックキャンペーンを実施している。キャッシュバックされる確率およびキャッシュバックされる額は、決済金額 X に応じて〈表〉の通りであるものとする。

〈表〉

区分	決済金額 X（万円）	キャッシュバックされる確率	キャッシュバック額
A	5 万円未満	0	―
B	5 万円以上 10 万円未満	0.2	決済金額 $\times 0.2$
C	10 万円以上	0.4	決済金額 $\times\ m$

ここで、$0.2 < m \leq 1$ とする。また、本問において、各区分における決済金額 X およびキャッシュバック額は連続値をとるものとする。

（１）それぞれの顧客の決済金額 X が区間 $\left(0\text{ 円}, 20\text{ 万円}\right]$ の一様分布（連続型）に従い、顧客同士で決済金額とキャッシュバック額は互いに独立であるとする。また、各区分において、キャッシュバックされる確率は決済金額 X（万円）に依存しないものとする。

1 人の顧客の決済金額 X は、区間 $\left(0\text{ 円}, 20\text{ 万円}\right]$ の一様分布（連続型）に従うので、その累積分布関数を $U_X(x)$ とおくと、

$$U_X(x) = \boxed{\quad ① \quad} \times x \qquad (0 < x \leq 20)$$

である。

キャッシュバック額を Y（万円）とおく。

（a）キャッシュバック額が 0 のとき

$$P(Y = 0) = \boxed{\quad ② \quad}$$

（b）キャッシュバック額が $0.2X$ のとき

キャッシュバック額 Y の累積分布関数は、$y \in [1,2)$ に対し、

$$P(Y \leq y) = P(Y = 0) + P(1 \leq Y \leq y) = \boxed{\quad ③ \quad} \times y + \boxed{\quad ④ \quad}$$

（c）キャッシュバック額が mX のとき

キャッシュバック額 Y の累積分布関数は、$y \in [10m, 20m]$ に対し、

$$P(Y \leq y) = P(Y = 0) + P(1 \leq Y < 2) + P(10m \leq Y \leq y) = \boxed{\quad ⑤ \quad} \times \frac{y}{m} + \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

以上をまとめると、キャッシュバック額 Y の累積分布関数 $F_Y(y)$ を求めることができる。

キャッシュバック額 Y について、期待値と分散を求めると、次の通りとなる。

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \int_0^{20m} y\,dF_Y(y) \\
&= 0 \times P(Y=0) + \int_0^1 y\,dF_Y(y) + \int_1^2 y\,dF_Y(y) + \int_2^{10m} y\,dF_Y(y) + \int_{10m}^{20m} y\,dF_Y(y) \\
&= \int_1^2 yF_Y{}'(y)\,dy + \int_{10m}^{20m} yF_Y{}'(y)\,dy \\
&= \boxed{\quad ⑦ \quad} \times m + \boxed{\quad ⑧ \quad} \\
V[Y] &= \boxed{\quad ⑨ \quad} \times m^2 - \boxed{\quad ⑩ \quad} \times m + \boxed{\quad ⑪ \quad}
\end{aligned}
$$

ここで、$F_Y{}'(y)$ は累積分布関数 $F_Y(y)$ の y についての微分である。

［①～⑪の選択肢］

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4	（E） 5
（F） $\frac{1}{2}$	（G） $\frac{1}{3}$	（H） $\frac{1}{4}$	（I） $\frac{1}{5}$	（J） $\frac{1}{10}$
（K） $\frac{1}{20}$	（L） $\frac{1}{50}$	（M） $\frac{2}{3}$	（N） $\frac{3}{4}$	（O） $\frac{2}{5}$
（P） $\frac{3}{5}$	（Q） $\frac{4}{5}$	（R） $\frac{113}{3}$	（S） $\frac{140}{3}$	（T） $\frac{140}{9}$
（U） $\frac{3}{10}$	（V） $\frac{7}{10}$	（W） $\frac{9}{10}$	（X） $\frac{3}{20}$	（Y） $\frac{9}{20}$
（Z） $\frac{2}{25}$	（AA） $\frac{3}{40}$	（AB） $\frac{7}{60}$	（AC） $\frac{7}{180}$	（AD） $\frac{533}{4,800}$

（次ページに続く）

（２）ここでは、（３）で計算するにあたり、前提となる定理を特定の条件の下で証明する。

確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ が互いに独立ですべて同じ分布に従い、$\mu = E[Y_k]$、$\sigma^2 = V[Y_k]\ (\sigma > 0)$ が存在すれば、$n \to \infty$ のとき $(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ の確率分布は、ある特定の分布に収束する。

以下、簡単のため $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ がすべて同じ積率母関数を持つものとしてこれを示す。

$Z_k = Y_k - \mu \quad (k = 1,2,\cdots,n)$ とおくと、$E[Z_k] = \boxed{⑫}$, $V[Z_k] = \boxed{⑬}$ であるから、Z_k の積率母関数 $\phi(\theta)$ に対し、

$$\phi(\theta) = 1 + \boxed{⑭} + O(\theta^3) \qquad (\theta \to 0)$$

が成り立つ。ゆえに、$(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ の積率母関数 $\phi_n(\theta)$ は、

$$\phi_n(\theta) = \left\{\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\}^n = \left\{1 + \boxed{⑮} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}^n$$

ここで、$O\left(n^{-3/2}\right)$ は θ を固定して $n \to \infty$ としたとき $n^{-3/2}$ と同位の無限小である。

$$\boxed{⑮} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) = y$$

とおくと、$n \to \infty$ のとき、$y \to 0$ であるから、

$$\phi_n(\theta) = \left\{(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right\}^{\boxed{⑯} + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)} \to e^{\boxed{⑯}}$$

より、$n \to \infty$ のとき $(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ の分布は $\boxed{⑰}$ に収束することが分かる。

[⑫～⑯の選択肢]

（Ａ） 0　（Ｂ） 1　（Ｃ） 2　（Ｄ） $\frac{1}{2}$　（Ｅ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

（Ｆ） θ^2　（Ｇ） $2\theta^2$　（Ｈ） $\frac{1}{2}\theta^2$　（Ｉ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\theta^2$　（Ｊ） $n\theta^2$

（Ｋ） $2n\theta^2$　（Ｌ） $\frac{1}{2}n\theta^2$　（Ｍ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n\theta^2$　（Ｎ） $\frac{1}{n}\theta^2$　（Ｏ） $\frac{2}{n}\theta^2$

（Ｐ） $\frac{1}{2n}\theta^2$　（Ｑ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\theta^2$　（Ｒ） σ^2　（Ｓ） $2\sigma^2$　（Ｔ） $\frac{1}{2}\sigma^2$

（Ｕ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2$　（Ｖ） $n\sigma^2$　（Ｗ） $2n\sigma^2$　（Ｘ） $\frac{1}{2}n\sigma^2$　（Ｙ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}n\sigma^2$

（Ｚ） $\sigma^2\theta^2$　（ＡＡ） $2\sigma^2\theta^2$　（ＡＢ） $\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2$　（ＡＣ） $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\theta^2$

[⑰の選択肢]

（Ａ） 平均 0、分散 1 の正規分布　（Ｂ） 平均 1、分散 1 の正規分布

（Ｃ） 平均 0、分散 σ^2 の正規分布　（Ｄ） 平均 μ、分散 σ^2 の正規分布

（Ｅ） 平均 1 の指数分布　（Ｆ） 平均 μ の指数分布

（Ｇ） 自由度 1 の χ^2 分布　（Ｈ） 自由度 1 の t 分布

（３）（１）の条件の下で、100 人の顧客に対する合計キャッシュバック額が 200 万円を超える確率が 0.01 未満となるための最大の m（小数点以下第 3 位以下を切り捨てるものとする）を、（２）で示した定理が適用できるものとして求める。

100 人の顧客に対する合計キャッシュバック額を Z (万円)、一人当たりの平均キャッシュバック額を $\bar{Z}$ (万円)とおく。

$$P(Z > 200) = P\left(\frac{Z - 100E[Y]}{\sqrt{100 \cdot V[Y]}} > \frac{200 - 100E[Y]}{\sqrt{100 \cdot V[Y]}}\right) = P\left(\frac{\bar{Z} - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}} > \frac{2 - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}\right)$$

であるから、（２）より $\dfrac{\bar{Z} - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}$ の分布関数は $\boxed{⑰}$ の分布関数で近似できる。よって、

$$P\left(\frac{\bar{Z} - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}} > \frac{2 - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}\right) < 0.01$$

を満たすような最大の m を求めればよい。付表より、上側 ε 点を小数点以下第 3 位で四捨五入して小数点以下第 2 位まで求めると、$\boxed{⑱}$ となるため、上記不等式を満たす最大の m（小数点以下第 3 位以下を切り捨てるものとする）は $\boxed{⑲}$ である。

[⑱の選択肢]

（A） 0.00　（B） 0.01　（C） 0.02　（D） 0.10　（E） 0.21

（F） 0.25　（G） 0.40　（H） 0.84　（I） 1.00　（J） 1.28

（K） 1.64　（L） 2.00　（M） 2.33　（N） 3.09　（O） ＋∞

[⑲の選択肢]

（A） 0.23　（B） 0.27　（C） 0.31　（D） 0.35　（E） 0.39

（F） 0.43　（G） 0.47　（H） 0.51　（I） 0.55　（J） 0.59

問題６． 次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１７点）

（１）ある学力テストの数学の点数と英語の点数が無相関であるか調べたい。点数に関する確率変量 (X,Y) が２次元正規分布 $N(X,Y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ に従うとして、母相関係数 ρ に関する無相関の検定を行う。10 人の生徒の数学の点数と英語の点数を調べたところ次の通りであった。

生徒番号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学の点数 x_i	100	40	80	65	50	90	95	65	80	35
英語の点数 y_i	90	50	95	70	60	75	60	85	75	60

ここで、

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 700 \text{、} \sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = 53{,}700 \text{、} \sum_{i=1}^{10} y_i = 720 \text{、} \sum_{i=1}^{10} {y_i}^2 = 53{,}800 \text{、} \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 52{,}225$$

である。

帰無仮説 H_0：$\rho = 0$ を対立仮説 H_1：$\rho \neq 0$ に対して有意水準 5% で検定する。標本相関係数 r をもとに統計量 T を計算すると $\boxed{\quad ① \quad}$ になるので、H_0 は $\boxed{\quad ② \quad}$ される。

[①の選択肢]

（**A**）1.868　（**B**）1.993　（**C**）2.127　（**D**）2.271

（**E**）2.426　（**F**）2.595　（**G**）2.780　（**H**）2.986

[②の選択肢]

（**A**）採択　（**B**）棄却

以下、（２）と（３）でこの無相関検定が正しく実施できていることを確認する。

（２） ２次元正規分布 $N(X,Y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ に従う２次元正規母集団から大きさ n の標本変量 $(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)$ を抽出したとき、この正規母集団の母平均、母分散および母相関係数を最尤法により推定する。なお、x_i の標本平均を $\bar{x}$、y_i の標本平均を $\bar{y}$ と表わすこととする。

μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 の最尤推定値 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ は、１次元正規分布

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\},\ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

の μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 の最尤推定値と一致することから、μ_1, μ_2 の最尤推定値 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ は

$$\hat{\mu}_1=\boxed{\quad ③\quad},\quad \hat{\mu}_2=\boxed{\quad ④\quad}$$

であり、σ_1^2, σ_2^2 の最尤推定値 $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ は

$$\hat{\sigma}_1^2=\boxed{\quad ⑤\quad},\quad \hat{\sigma}_2^2=\boxed{\quad ⑥\quad}$$

である。

ρ の最尤推定値 $\hat{\rho}$ は、標本相関係数 r とよばれ、

$$z_{11}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\text{、}z_{22}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\text{、}z_{12}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

を用いると、$\hat{\rho}$ は

$$\hat{\rho}=\boxed{\quad ⑦\quad}$$

と表せる。

ここで、２次元正規分布の確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ は、

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

で与えられる。

[③～⑦の選択肢]

（A） $\dfrac{n}{n-1}\bar{x}$ （B） $\bar{x}$ （C） $n\bar{x}$ （D） $\dfrac{n}{n-1}\bar{y}$

（E） $\bar{y}$ （F） $n\bar{y}$ （G） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ （H） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$

（I） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n}-\dfrac{n\bar{x}^2}{n-1}$ （J） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$ （K） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}$ （L） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2}{n}-\dfrac{n\bar{y}^2}{n-1}$

（M） z_{12} （N） $\sqrt{z_{11}z_{22}}$ （O） $\sqrt{\dfrac{z_{12}}{z_{11}z_{22}}}$ （P） $\sqrt{\dfrac{z_{11}z_{22}}{z_{12}}}$

（Q） $\dfrac{z_{12}}{z_{11}z_{22}}$ （R） $\dfrac{z_{11}z_{22}}{z_{12}}$ （S） $\dfrac{z_{12}}{\sqrt{z_{11}z_{22}}}$ （T） $\dfrac{\sqrt{z_{11}z_{22}}}{z_{12}}$

（３）（２）で求めた標本相関係数 r の確率変量 R に対し、統計量 T を

$$T = \frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2}$$

と定義し、$\rho = 0$ のときに T が従う分布と T の確率密度関数を求める。

まず $\rho = 0$ のときの R の確率密度関数 $h_R(r)$ を導く。2 次元正規分布 $N(X, Y; \mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho = 0)$ に従う母集団から大きさ n の標本変量 $(x_1, y_1; x_2, y_2; \cdots; x_n, y_n)$ を抽出したとき、（２）と同様に (z_{11}, z_{22}, z_{12}) を定義すると、確率変量 (Z_{11}, Z_{22}, Z_{12}) は、次の確率密度関数 $h_{Z_{11},Z_{22},Z_{12}}(z_{11}, z_{22}, z_{12})$ を持つ。

$$h_{Z_{11},Z_{22},Z_{12}}(z_{11}, z_{22}, z_{12}) = A(z_{11}z_{22} - {z_{12}}^2)^{\frac{n-4}{2}} \exp\left(-\frac{\sigma_1 z_{11} + \sigma_2 z_{22}}{2\sigma_1\sigma_2}\right)$$

ここで、

$$A = \frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{1}{2}}(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

である。

$(z_{11}, z_{22}, z_{12}) \longrightarrow (z_{11}, z_{22}, r)$ の変数変換を考えると、ヤコビアン J は

$$J = \frac{\partial(z_{11}, z_{22}, z_{12})}{\partial(z_{11}, z_{22}, r)} = \boxed{\quad ⑧ \quad}$$

となるので、確率変量 (Z_{11}, Z_{22}, R) の確率密度関数 $h_{Z_{11},Z_{22},R}(z_{11}, z_{22}, r)$ は

$$h_{Z_{11},Z_{22},R}(z_{11}, z_{22}, r) = A(z_{11}z_{22})^{\boxed{\quad ⑨ \quad}}(1-r^2)^{\boxed{\quad ⑩ \quad}} \exp\left(-\frac{z_{11}}{2\sigma_2}\right)\exp\left(-\frac{z_{22}}{2\sigma_1}\right)$$

と書ける。

また、この両辺を z_{11} と z_{22} で積分し、ガンマ関数を用いて整理すると、

$$h_R(r) = A(1-r^2)^{\boxed{\quad ⑩ \quad}}(2\sigma_1)^{\boxed{\quad ⑪ \quad}}(2\sigma_2)^{\boxed{\quad ⑪ \quad}} \times \boxed{\quad ⑫ \quad}$$

と書けるので、A を代入して整理すると、

$$h_R(r) = \boxed{\quad ⑬ \quad} \times (1-r^2)^{\boxed{\quad ⑩ \quad}}$$

$\rho = 0$ のときの統計量 T の確率密度関数 $h_T(t)$ は、r から t に変数変換すると、

$$h_T(t) = h_R(r) \times \boxed{\quad ⑭ \quad} \times (1-r^2)^{\boxed{\quad ⑮ \quad}}$$

と書けるから、

$$1 - r^2 = \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{r^2}{1-r^2}\right)^{-1}$$

を用いて整理すると、

$$h_T(t) = \boxed{\quad ⑬ \quad} \times \boxed{\quad ⑭ \quad} \times \left(1 + t^2 \times \boxed{\quad ⑯ \quad}\right)^{\boxed{\quad ⑰ \quad}}$$

となる。

したがって、統計量 T は自由度 $\boxed{\quad ⑱ \quad}$ の t 分布に従うことが分かる。

以上（２）と（３）より、（１）の無相関検定が正しく実施できていることが確認できた。

[⑧の選択肢]

（A） $-\dfrac{{z_{12}}^2}{\sqrt{z_{11}z_{22}}}$　（B） $\sqrt{z_{11}z_{22}}$　（C） $-\dfrac{{z_{12}}^2}{z_{11}z_{22}}$　（D） $z_{11}z_{22}$

（E） $\dfrac{{z_{12}}^2}{\sqrt{z_{11}z_{22}}}$　（F） $\dfrac{1}{\sqrt{z_{11}z_{22}}}$　（G） $\dfrac{{z_{12}}^2}{z_{11}z_{22}}$　（H） $\dfrac{1}{z_{11}z_{22}}$

[⑨～⑪、⑭～⑱の選択肢]

（A） $\dfrac{n-5}{2}$　（B） $\dfrac{n-4}{2}$　（C） $\dfrac{n-3}{2}$　（D） $\dfrac{n-2}{2}$　（E） $\dfrac{n-1}{2}$

（F） $-\dfrac{n-5}{2}$　（G） $-\dfrac{n-4}{2}$　（H） $-\dfrac{n-3}{2}$　（I） $-\dfrac{n-2}{2}$　（J） $-\dfrac{n-1}{2}$

（K） $n-2$　（L） $\dfrac{1}{n-2}$　（M） $n-1$　（N） $\dfrac{1}{n-1}$　（O） n

（P） $\sqrt{n-2}$　（Q） $\dfrac{1}{\sqrt{n-2}}$　（R） $\sqrt{n-1}$　（S） $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$　（T） $\sqrt{n}$

（U） $-\dfrac{3}{2}$　（V） $-\dfrac{1}{2}$　（W） $\dfrac{1}{2}$　（X） $\dfrac{3}{2}$　（Y） 2

[⑫、⑬の選択肢]

（A） $\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(n-\dfrac{3}{2}\right)$　（B） $\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$　（C） $\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)^2$

（D） $\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2$　（E） $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)$　（F） $\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n-3}{2}\right)$

（G） $\dfrac{\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$　（H） $\dfrac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$　（I） $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$

（J） $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$　（K） $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$　（L） $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$

以　上

(付表)

Ⅰ.標準正規分布表

$P(x > 0.25) = 0.4013$

上側ε点 $u(\varepsilon)$ から確率εを求める表

$u(\varepsilon)\to\varepsilon$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.0*	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1*	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2*	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3*	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4*	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5*	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6*	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7*	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8*	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9*	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0*	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1*	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2*	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3*	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4*	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5*	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6*	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7*	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8*	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9*	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0*	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1*	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2*	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3*	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4*	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5*	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6*	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7*	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8*	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9*	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014

$P(x > 1.9600) = 0.025$

確率εから上側ε点 $u(\varepsilon)$ を求める表

$\varepsilon \to u(\varepsilon)$	* = 0	* = 1	* = 2	* = 3	* = 4	* = 5	* = 6	* = 7	* = 8	* = 9
0.00*	∞	3.0902	2.8782	2.7478	2.6521	2.5758	2.5121	2.4573	2.4089	2.3656
0.01*	2.3263	2.2904	2.2571	2.2262	2.1973	2.1701	2.1444	2.1201	2.0969	2.0749
0.02*	2.0537	2.0335	2.0141	1.9954	1.9774	1.9600	1.9431	1.9268	1.9110	1.8957
0.03*	1.8808	1.8663	1.8522	1.8384	1.8250	1.8119	1.7991	1.7866	1.7744	1.7624
0.04*	1.7507	1.7392	1.7279	1.7169	1.7060	1.6954	1.6849	1.6747	1.6646	1.6546
0.05*	1.6449	1.6352	1.6258	1.6164	1.6072	1.5982	1.5893	1.5805	1.5718	1.5632
0.06*	1.5548	1.5464	1.5382	1.5301	1.5220	1.5141	1.5063	1.4985	1.4909	1.4833
0.07*	1.4758	1.4684	1.4611	1.4538	1.4466	1.4395	1.4325	1.4255	1.4187	1.4118
0.08*	1.4051	1.3984	1.3917	1.3852	1.3787	1.3722	1.3658	1.3595	1.3532	1.3469
0.09*	1.3408	1.3346	1.3285	1.3225	1.3165	1.3106	1.3047	1.2988	1.2930	1.2873
0.10*	1.2816	1.2759	1.2702	1.2646	1.2591	1.2536	1.2481	1.2426	1.2372	1.2319
0.11*	1.2265	1.2212	1.2160	1.2107	1.2055	1.2004	1.1952	1.1901	1.1850	1.1800
0.12*	1.1750	1.1700	1.1650	1.1601	1.1552	1.1503	1.1455	1.1407	1.1359	1.1311
0.13*	1.1264	1.1217	1.1170	1.1123	1.1077	1.1031	1.0985	1.0939	1.0893	1.0848
0.14*	1.0803	1.0758	1.0714	1.0669	1.0625	1.0581	1.0537	1.0494	1.0450	1.0407
0.15*	1.0364	1.0322	1.0279	1.0237	1.0194	1.0152	1.0110	1.0069	1.0027	0.9986
0.16*	0.9945	0.9904	0.9863	0.9822	0.9782	0.9741	0.9701	0.9661	0.9621	0.9581
0.17*	0.9542	0.9502	0.9463	0.9424	0.9385	0.9346	0.9307	0.9269	0.9230	0.9192
0.18*	0.9154	0.9116	0.9078	0.9040	0.9002	0.8965	0.8927	0.8890	0.8853	0.8816
0.19*	0.8779	0.8742	0.8705	0.8669	0.8633	0.8596	0.8560	0.8524	0.8488	0.8452
0.20*	0.8416	0.8381	0.8345	0.8310	0.8274	0.8239	0.8204	0.8169	0.8134	0.8099
0.21*	0.8064	0.8030	0.7995	0.7961	0.7926	0.7892	0.7858	0.7824	0.7790	0.7756
0.22*	0.7722	0.7688	0.7655	0.7621	0.7588	0.7554	0.7521	0.7488	0.7454	0.7421
0.23*	0.7388	0.7356	0.7323	0.7290	0.7257	0.7225	0.7192	0.7160	0.7128	0.7095
0.24*	0.7063	0.7031	0.6999	0.6967	0.6935	0.6903	0.6871	0.6840	0.6808	0.6776
0.25*	0.6745	0.6713	0.6682	0.6651	0.6620	0.6588	0.6557	0.6526	0.6495	0.6464
0.26*	0.6433	0.6403	0.6372	0.6341	0.6311	0.6280	0.6250	0.6219	0.6189	0.6158
0.27*	0.6128	0.6098	0.6068	0.6038	0.6008	0.5978	0.5948	0.5918	0.5888	0.5858
0.28*	0.5828	0.5799	0.5769	0.5740	0.5710	0.5681	0.5651	0.5622	0.5592	0.5563
0.29*	0.5534	0.5505	0.5476	0.5446	0.5417	0.5388	0.5359	0.5330	0.5302	0.5273
0.30*	0.5244	0.5215	0.5187	0.5158	0.5129	0.5101	0.5072	0.5044	0.5015	0.4987
0.31*	0.4959	0.4930	0.4902	0.4874	0.4845	0.4817	0.4789	0.4761	0.4733	0.4705
0.32*	0.4677	0.4649	0.4621	0.4593	0.4565	0.4538	0.4510	0.4482	0.4454	0.4427
0.33*	0.4399	0.4372	0.4344	0.4316	0.4289	0.4261	0.4234	0.4207	0.4179	0.4152
0.34*	0.4125	0.4097	0.4070	0.4043	0.4016	0.3989	0.3961	0.3934	0.3907	0.3880
0.35*	0.3853	0.3826	0.3799	0.3772	0.3745	0.3719	0.3692	0.3665	0.3638	0.3611
0.36*	0.3585	0.3558	0.3531	0.3505	0.3478	0.3451	0.3425	0.3398	0.3372	0.3345
0.37*	0.3319	0.3292	0.3266	0.3239	0.3213	0.3186	0.3160	0.3134	0.3107	0.3081
0.38*	0.3055	0.3029	0.3002	0.2976	0.2950	0.2924	0.2898	0.2871	0.2845	0.2819
0.39*	0.2793	0.2767	0.2741	0.2715	0.2689	0.2663	0.2637	0.2611	0.2585	0.2559
0.40*	0.2533	0.2508	0.2482	0.2456	0.2430	0.2404	0.2378	0.2353	0.2327	0.2301
0.41*	0.2275	0.2250	0.2224	0.2198	0.2173	0.2147	0.2121	0.2096	0.2070	0.2045
0.42*	0.2019	0.1993	0.1968	0.1942	0.1917	0.1891	0.1866	0.1840	0.1815	0.1789
0.43*	0.1764	0.1738	0.1713	0.1687	0.1662	0.1637	0.1611	0.1586	0.1560	0.1535
0.44*	0.1510	0.1484	0.1459	0.1434	0.1408	0.1383	0.1358	0.1332	0.1307	0.1282
0.45*	0.1257	0.1231	0.1206	0.1181	0.1156	0.1130	0.1105	0.1080	0.1055	0.1030
0.46*	0.1004	0.0979	0.0954	0.0929	0.0904	0.0878	0.0853	0.0828	0.0803	0.0778
0.47*	0.0753	0.0728	0.0702	0.0677	0.0652	0.0627	0.0602	0.0577	0.0552	0.0527
0.48*	0.0502	0.0476	0.0451	0.0426	0.0401	0.0376	0.0351	0.0326	0.0301	0.0276
0.49*	0.0251	0.0226	0.0201	0.0175	0.0150	0.0125	0.0100	0.0075	0.0050	0.0025

Ⅱ.自由度φのχ^2分布の上側ε点： $\chi^2_\varphi(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010
1	0.0002	0.0010	0.0039	0.0158	0.4549	2.7055	3.8415	5.0239	6.6349
2	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	1.3863	4.6052	5.9915	7.3778	9.2103
3	0.1148	0.2158	0.3518	0.5844	2.3660	6.2514	7.8147	9.3484	11.3449
4	0.2971	0.4844	0.7107	1.0636	3.3567	7.7794	9.4877	11.1433	13.2767
5	0.5543	0.8312	1.1455	1.6103	4.3515	9.2364	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.8721	1.2373	1.6354	2.2041	5.3481	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	1.2390	1.6899	2.1673	2.8331	6.3458	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.6465	2.1797	2.7326	3.4895	7.3441	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	2.0879	2.7004	3.3251	4.1682	8.3428	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.5582	3.2470	3.9403	4.8652	9.3418	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	3.0535	3.8157	4.5748	5.5778	10.3410	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250
12	3.5706	4.4038	5.2260	6.3038	11.3403	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	4.1069	5.0088	5.8919	7.0415	12.3398	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.6604	5.6287	6.5706	7.7895	13.3393	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	5.2293	6.2621	7.2609	8.5468	14.3389	22.3071	24.9958	27.4884	30.5779
16	5.8122	6.9077	7.9616	9.3122	15.3385	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999
17	6.4078	7.5642	8.6718	10.0852	16.3382	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	7.0149	8.2307	9.3905	10.8649	17.3379	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053
19	7.6327	8.9065	10.1170	11.6509	18.3377	27.2036	30.1435	32.8523	36.1909
20	8.2604	9.5908	10.8508	12.4426	19.3374	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662
21	8.8972	10.2829	11.5913	13.2396	20.3372	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	9.5425	10.9823	12.3380	14.0415	21.3370	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894
23	10.1957	11.6886	13.0905	14.8480	22.3369	32.0069	35.1725	38.0756	41.6384
24	10.8564	12.4012	13.8484	15.6587	23.3367	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	24.3366	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141
26	12.1981	13.8439	15.3792	17.2919	25.3365	35.5632	38.8851	41.9232	45.6417
27	12.8785	14.5734	16.1514	18.1139	26.3363	36.7412	40.1133	43.1945	46.9629
28	13.5647	15.3079	16.9279	18.9392	27.3362	37.9159	41.3371	44.4608	48.2782
29	14.2565	16.0471	17.7084	19.7677	28.3361	39.0875	42.5570	45.7223	49.5879
30	14.9535	16.7908	18.4927	20.5992	29.3360	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
31	15.6555	17.5387	19.2806	21.4336	30.3359	41.4217	44.9853	48.2319	52.1914
32	16.3622	18.2908	20.0719	22.2706	31.3359	42.5847	46.1943	49.4804	53.4858
33	17.0735	19.0467	20.8665	23.1102	32.3358	43.7452	47.3999	50.7251	54.7755
34	17.7891	19.8063	21.6643	23.9523	33.3357	44.9032	48.6024	51.9660	56.0609
35	18.5089	20.5694	22.4650	24.7967	34.3356	46.0588	49.8018	53.2033	57.3421
36	19.2327	21.3359	23.2686	25.6433	35.3356	47.2122	50.9985	54.4373	58.6192
37	19.9602	22.1056	24.0749	26.4921	36.3355	48.3634	52.1923	55.6680	59.8925
38	20.6914	22.8785	24.8839	27.3430	37.3355	49.5126	53.3835	56.8955	61.1621
39	21.4262	23.6543	25.6954	28.1958	38.3354	50.6598	54.5722	58.1201	62.4281
40	22.1643	24.4330	26.5093	29.0505	39.3353	51.8051	55.7585	59.3417	63.6907
41	22.9056	25.2145	27.3256	29.9071	40.3353	52.9485	56.9424	60.5606	64.9501
42	23.6501	25.9987	28.1440	30.7654	41.3352	54.0902	58.1240	61.7768	66.2062
43	24.3976	26.7854	28.9647	31.6255	42.3352	55.2302	59.3035	62.9904	67.4593
44	25.1480	27.5746	29.7875	32.4871	43.3352	56.3685	60.4809	64.2015	68.7095
45	25.9013	28.3662	30.6123	33.3504	44.3351	57.5053	61.6562	65.4102	69.9568
46	26.6572	29.1601	31.4390	34.2152	45.3351	58.6405	62.8296	66.6165	71.2014
47	27.4158	29.9562	32.2676	35.0814	46.3350	59.7743	64.0011	67.8206	72.4433
48	28.1770	30.7545	33.0981	35.9491	47.3350	60.9066	65.1708	69.0226	73.6826
49	28.9406	31.5549	33.9303	36.8182	48.3350	62.0375	66.3386	70.2224	74.9195
50	29.7067	32.3574	34.7643	37.6886	49.3349	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539

Ⅲ．分母の自由度n、分子の自由度mのF分布の上側 ε 点：$F_n^m(\varepsilon)$

$\varepsilon=$ 0.100

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	8.5263	9.0000	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916
3	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.2400	5.2304
4	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.9790	3.9549	3.9357	3.9199
5	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.4530	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974
6	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.9830	2.9577	2.9369
7	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025
8	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.5380
9	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163
10	3.2850	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.4140	2.3772	2.3473	2.3226

$\varepsilon=$ 0.050

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782

$\varepsilon=$ 0.025

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	38.5063	39.0000	39.1655	39.2484	39.2982	39.3315	39.3552	39.3730	39.3869	39.3980
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168

$\varepsilon=$ 0.010

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881	99.3992
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491

$\varepsilon=$ 0.005

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	198.5013	199.0000	199.1664	199.2497	199.2996	199.3330	199.3568	199.3746	199.3885	199.3996
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467

Ⅳ．自由度φのt分布の上側ε点：$t_{\varphi}(\varepsilon)$

φ ＼ ε	0.100	0.050	0.025
1	3.0777	6.3138	12.7062
2	1.8856	2.9200	4.3027
3	1.6377	2.3534	3.1824
4	1.5332	2.1318	2.7764
5	1.4759	2.0150	2.5706
6	1.4398	1.9432	2.4469
7	1.4149	1.8946	2.3646
8	1.3968	1.8595	2.3060
9	1.3830	1.8331	2.2622
10	1.3722	1.8125	2.2281
11	1.3634	1.7959	2.2010
12	1.3562	1.7823	2.1788
13	1.3502	1.7709	2.1604
14	1.3450	1.7613	2.1448
15	1.3406	1.7531	2.1314
16	1.3368	1.7459	2.1199
17	1.3334	1.7396	2.1098
18	1.3304	1.7341	2.1009
19	1.3277	1.7291	2.0930
20	1.3253	1.7247	2.0860
21	1.3232	1.7207	2.0796
22	1.3212	1.7171	2.0739
23	1.3195	1.7139	2.0687
24	1.3178	1.7109	2.0639
25	1.3163	1.7081	2.0595

Ⅴ．自然対数表

x	$\log x$
1.1	0.0953
1.2	0.1823
1.3	0.2624
1.4	0.3365
1.5	0.4055
1.6	0.4700
1.7	0.5306
1.8	0.5878
1.9	0.6419
2.0	0.6931
2.5	0.9163
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863
4.5	1.5041
5.0	1.6094
5.5	1.7047
6.0	1.7918
6.5	1.8718
7.0	1.9459
7.5	2.0149
8.0	2.0794
8.5	2.1401
9.0	2.1972
9.5	2.2513
10.0	2.3026

Ⅵ．指数関数表

x	$\exp(x)$
-2.00	0.1353
-1.50	0.2231
-1.00	0.3679
-0.50	0.6065
-0.10	0.9048
-0.09	0.9139
-0.08	0.9231
-0.07	0.9324
-0.06	0.9418
-0.05	0.9512
-0.04	0.9608
-0.03	0.9704
-0.02	0.9802
-0.01	0.9900
0.00	1.0000
0.01	1.0101
0.02	1.0202
0.03	1.0305
0.04	1.0408
0.05	1.0513
0.06	1.0618
0.07	1.0725
0.08	1.0833
0.09	1.0942
0.10	1.1052
0.50	1.6487
1.00	2.7183
1.50	4.4817
2.00	7.3891

以上

数学（解答例）

問題１.

（１）最初の玉入れ替え（赤玉の数を変更）の試行＜Ⅰ＞と、最終的に赤玉を引く試行＜Ⅱ＞と、２段階に分けて考える。

＜Ⅰ＞で赤玉の数が変更にならない場合

玉入れ替えで赤玉 2 個を引くということであり、

この場合

$$\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

なる確率で赤玉の数は変更にならない（袋の中は赤玉 2 個、白玉 3 個のまま)。

その場合＜Ⅱ＞で赤玉を引く確率は 2/5 である。

＜Ⅰ＞で赤玉の数が 1 個増える場合

玉入れ替えで赤玉 1 個および白玉 1 個を引くということであり、

この場合

$$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

なる確率で赤玉の数は 1 個増える（袋の中は赤玉 3 個、白玉 2 個となる)。

その場合＜Ⅱ＞で赤玉を引く確率は 3/5 である。

＜Ⅰ＞で赤玉の数が 2 個増える場合

玉入れ替えで白玉 2 個を引くということであり、

この場合

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

なる確率で赤玉の数は 2 個増える（袋の中は赤玉 4 個、白玉 1 個となる)。

その場合＜Ⅱ＞で赤玉を引く確率は 4/5 である。

以上の 3 パターンを考えると、最終的に赤玉を引く確率は

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$$

よって、解答は　① （G）

（２）X,Y は互いに独立であるから、

$$P(\{X=1\}\cap\{X>Y\})=P(X=1)\cdot P(Y<1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-2}\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

したがって、求める確率は

$$\begin{aligned}P(X>Y)&=\sum_{k=0}^{\infty}\{P(X=k)\cdot P(Y<k)\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{2^k}{k!}e^{-2}\cdot\left(1-e^{-\frac{k}{2}}\right)\right\}\\&=e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}-e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(2e^{-\frac{1}{2}}\right)^k}{k!}\\&=e^{-2}\cdot e^{2}-e^{-2}\cdot\exp\left[2e^{-\frac{1}{2}}\right]\\&=1-\exp\left[2e^{-\frac{1}{2}}-2\right]\end{aligned}$$

よって、解答は　②（Ａ）　③（Ｆ）

（３）辺ＡＤ、ＡＥの長さを表す確率変数をそれぞれ X,Y とすると、X,Y は互いに独立で区間 $(0,1)$ 上の一様分布 $U(0,1)$ に従うので、

$$S=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AE\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}XY$$

次に、S の確率密度関数 $f(s)$ を求める。

$$\begin{cases} s=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy \\ t=y \end{cases} \quad \text{とおくと、} \quad \begin{cases} x=\dfrac{4s}{\sqrt{3}t} \\ y=t \end{cases}$$

ヤコビアン J は、

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{4}{\sqrt{3}t} & -\dfrac{4s}{\sqrt{3}t^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{4}{\sqrt{3}t}$$

$0<x<1,\ 0<y<1$ であるから、$0<s<\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{4s}{\sqrt{3}}<t<1$

したがって、求める確率密度関数は

$$f(s)=\int_{\frac{4s}{\sqrt{3}}}^{1}1\cdot 1\cdot|J|\,dt=\int_{\frac{4s}{\sqrt{3}}}^{1}1\cdot 1\cdot\frac{4}{\sqrt{3}t}dt=-\frac{4}{\sqrt{3}}\log\frac{4s}{\sqrt{3}} \qquad \left(0<s<\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

よって、解答は　④（**Ｃ**）　⑤（**Ａ**）　⑥（**Ｃ**）

（４）積率母関数の計算式を書き下すと、

$$M(t) = \int_{-1}^{1} e^{tx}(1-|x|)dx$$
$$= \int_{-1}^{0} e^{tx}(1+x)dx + \int_{0}^{1} e^{tx}(1-x)dx$$

となる。

ここで、

$$\int_{-1}^{0} e^{tx}(1+x)dx = \left[\frac{1}{t}e^{tx}(1+x)\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{t}\int_{-1}^{0} e^{tx}dx$$
$$= \frac{1}{t} - \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}e^{tx}\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{1}{t} - \frac{1-e^{-t}}{t^2}$$

同様に、

$$\int_{0}^{1} e^{tx}(1-x)dx = -\frac{1}{t} - \frac{1-e^{t}}{t^2}$$

よって、求める積率母関数は

$$M(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1-e^{-t}}{t^2}\right) + \left(-\frac{1}{t} - \frac{1-e^{t}}{t^2}\right)$$
$$= \frac{e^{t} + e^{-t} - 2}{t^2}$$

となる。

よって、解答は　⑦　（Ｌ）

問題２.

（１）

（ア）n 個のサンプルから、平均 μ の指数分布の最尤推定量は以下のように導かれる。

平均 μ 時間の指数分布の確率密度関数は次の通りに表せる。

$$f_X(x) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} \qquad (x > 0)$$

尤度関数 $L(\mu)$ は、次の通りとなる。

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x_i}{\mu}}\right) = \frac{1}{\mu^n}e^{-\frac{\{x_1+\cdots+x_n\}}{\mu}}$$

対数をとり偏微分を行う。

$$\frac{\partial \log(L(\mu))}{\partial \mu} = \frac{\partial\left(-n\log\mu - \frac{\{x_1+\cdots+x_n\}}{\mu}\right)}{\partial\mu}$$

$$= -\frac{n}{\mu} + \frac{\{x_1+\cdots+x_n\}}{\mu^2}$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(-n + \frac{\{x_1+\cdots+x_n\}}{\mu}\right)$$

これが 0 となるような μ が最尤推定量となる。

$$\mu = \frac{\{x_1+\cdots+x_n\}}{n}$$

$n = 10$ であるので、

$$\frac{(96+54+49+74+25+10+71+28+33+26)}{10} = 46.6$$

（イ）平均 μ 時間の指数分布に従う n 個のサンプルを T 時間観測し、観測時間内に寿命となったものが m 個あり、それぞれ故障するまでの時間を $x_1, x_2, \cdots, x_m$ とし、残りの $n-m$ 個は観測時間内に故障しなかった場合の、μ の最尤推定量を以下のように導く。

平均 μ の指数分布の確率密度関数は（ア）の通りで、打ち切りのある指数分布の確率密度関数 $f(x)$ は、次で表せる。

$$f(x_i) = \begin{cases} f_X(x_i) = \dfrac{1}{\mu}e^{-\frac{x_i}{\mu}} & (i \le m) \\ P(X > T) = 1 - F_X(T) = e^{-\frac{T}{\mu}} & (m < i \le n) \end{cases}$$

尤度関数 $L(\mu)$ は、次の通りとなる。

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x_i}{\mu}}\right)\left(e^{-\frac{T}{\mu}(n-m)}\right) = \frac{1}{\mu^m}e^{-\frac{\{x_1+\cdots+x_m+(n-m)T\}}{\mu}}$$

対数をとり偏微分を行う。

$$\frac{\partial \log\left(L(\mu)\right)}{\partial \mu} = \frac{\partial\left(-m\log\mu - \dfrac{\{x_1 + \cdots + x_m + (n-m)T\}}{\mu}\right)}{\partial \mu}$$

$$= -\frac{m}{\mu} + \frac{\{x_1 + \cdots + x_m + (n-m)T\}}{\mu^2}$$

$$= \frac{1}{\mu}\left(-m + \frac{\{x_1 + \cdots + x_m + (n-m)T\}}{\mu}\right)$$

これが 0 となるような μ が最尤推定量となる。

$$\mu = \frac{\{x_1 + \cdots + x_m + (n-m)T\}}{m}$$

$T = 100,\ n = 15,\ m = 10$ であるので、

$$\frac{(96 + 54 + 49 + 74 + 25 + 10 + 71 + 28 + 33 + 26 + (15-10)\cdot 100)}{10} = 96.6$$

よって、解答は　①（B）　②（H）

（２）

（ア）２ つの正規母集団の母平均の差の区間推定を行う。２ つの正規母集団 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ で、$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ が認められるとき、母集団の平均値の差 $(\delta = \mu_x - \mu_y)$ の信頼区間 (δ_d, δ_u) は

$$\delta_d = \bar{x} - \bar{y} - t_{n_x+n_y-2}(0.025)\sqrt{\frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y - 2}\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}$$

$$\delta_u = \bar{x} - \bar{y} + t_{n_x+n_y-2}(0.025)\sqrt{\frac{n_x s_x^2 + n_y s_y^2}{n_x + n_y - 2}\left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}$$

ここで、正規母集団 $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, $N(\mu_y, \sigma_y^2)$ の標本はそれぞれ n_x, n_y 個、標本平均および標本分散はそれぞれ $\bar{x}$, $\bar{y}$、s_x^2, s_y^2 である。なお、分散は未知である。

与えられたデータより、$n_x = 5$, $n_y = 5$, $\bar{x} = 13.50$, $\bar{y} = 12.90$, $s_x^2 = 1.100$, $s_y^2 = 2.100$ であるので、

$$\delta_d = 13.50 - 12.90 - 2.306\sqrt{\frac{16.00}{8}\cdot\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = -1.46$$

$$\delta_u = 13.50 - 12.90 + 2.306\sqrt{\frac{16.00}{8}\cdot\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.66$$

（イ）測定値に対応のある場合の平均の差の区間推定である。被験体ごとの削減効果が分散未知の正規分布に従うので、各データの投与前後の差をとり、この差を区間推定する。

	被験体１	被験体２	被験体３	被験体４	被験体５
治験薬投与前の体内物質Ａ	12.7	13.4	12.1	14.3	15.0
治験薬投与後の体内物質Ａ	12.3	12.6	10.7	14.9	14.0
差 d_i	0.4	0.8	1.4	-0.6	1.0

ここから、

差の平均 $\bar{d}$ として、$\bar{d} = \dfrac{0.4 + 0.8 + 1.4 + (-0.6) + 1.0}{5} = 0.60$

差の分散として、$s_d^2 = \dfrac{1}{5}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 0.4640$

をそれぞれ得る。分散未知の場合の平均の区間推定より、信頼区間 (d_d, d_u) は

$$d_d = \bar{d} - t_4(0.025)\frac{s_d}{\sqrt{5-1}} = 0.60 - 2.776\cdot\frac{\sqrt{0.4640}}{2} = -0.35$$

$$d_u = \bar{d} + t_4(0.025)\frac{s_d}{\sqrt{5-1}} = 0.60 + 2.776\cdot\frac{\sqrt{0.4640}}{2} = 1.55$$

よって、解答は　③（B）　④（M）　⑤（D）　⑥（K）

（補足）

（ア）では、互いに独立な 2 標本について、母平均の差を取ることで投薬による体内物質Ａの削減効果を測っている。その一方、（イ）では同じラットの治験薬投薬前後の体内物質Ａの量を測定し、各標本の対 $(\text{投薬前}, \text{投薬後}) = (X_i, Y_i)$ （$i = 1,2,\cdots,5$）としてデータを与えている点が（ア）と異なっている。ここで、X_i と Y_i は必ずしも独立ではない。同一個体の観測値 $(\text{投薬前}, \text{投薬後})$ の間に正の相関があるとすると、投薬による体内物質Ａの削減効果 $d_i = X_i - Y_i$ の分散は、

$$V[d_i] = V[X_i] + V[Y_i] - 2\mathrm{cov}(X_i, Y_i)$$

であり、（ア）の独立な 2 標本の場合の分散 $V[X_i] + V[Y_i]$ よりも小さくなる。この場合、対を作ることが有効であり、信頼区間の幅は（イ）の方が（ア）より狭くなることが分かる。

2 つのデータに対応がある場合、対を作ることで個体間の差から分離して処置効果などを判断することが可能となる。

（３）第一種の誤りの起こる確率は、帰無仮説 H_0 が正しいにも関わらず H_0 を棄却する、つまり、偽造でないコインであるにも関わらず偽造コインであると判断する確率（偽造でないコインを 10 回投げて 8 回以上表の出る確率）であるから、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\binom{10}{2}=0.0546875\cdots$$

第二種の誤りの起こる確率は、帰無仮説 H_0 が誤りであるにも関わらず H_0 を採択してしまう、つまり、偽造コインであるにも関わらず偽造コインでないと判断する確率（偽造コインを 10 回投げて 8 回以上表の出ない確率）であるから、

$$1-\left\{\left(\frac{7}{10}\right)^{10}+\left(\frac{7}{10}\right)^{9}\left(\frac{3}{10}\right)^{1}\binom{10}{1}+\left(\frac{7}{10}\right)^{8}\left(\frac{3}{10}\right)^{2}\binom{10}{2}\right\}=0.6172172\cdots$$

よって、解答は　⑦ （**C**）　⑧ （**F**）

（４）今年の結果の従う正規母集団を $N(\mu_A,\sigma_A^2)$ 、去年の結果の従う正規母集団 $N(\mu_B,\sigma_B^2)$ とする。今年のほうが得点のバラツキが大きいといえるかを検定したいため、帰無仮説 H_0：$\sigma_A^2=\sigma_B^2$ を対立仮説 $H_1:\sigma_A^2>\sigma_B^2$ に対して有意水準 5%で検定する。

今年度の標本不偏分散を u_A^2、昨年度の標本不偏分散を u_B^2 とすると、統計量 X は

$$X=\frac{u_A^2}{u_B^2}=\frac{\frac{8}{7}\cdot 14.8^2}{\frac{9}{8}\cdot 10.2^2}=2.1388$$

である。帰無仮説の下で、この分布は自由度 (7,8) の F 分布に従う。

棄却域は $X>F_8^7(0.05)=3.5005$ である。$2.1388>3.5005$ が偽であり、帰無仮説は棄却されず、今年度のほうが得点のバラツキが大きいとはいえない。

よって、解答は　⑨（**D**）　⑩（**G**）　⑪（**B**）

問題３.

（１）〈 α_1, β_1 の推定〉

単回帰の場合、$Q = \sum_{i=1}^{4}\{y_i - (\alpha_1 + \beta_1 x_i)\}^2$ を最小とする α_1, β_1 は以下のようになる。

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{43}{2} = 21.5$$

$$\alpha_1 = \bar{y} - \beta_1 \cdot \bar{x} = 88.5 - 21.5 \cdot 2 = 45.5$$

〈 α_2, β_2 の推定〉

ダミー変数 d_i をつぎのように定義する。

$$d_i = \begin{cases} 1 & (i = 4\text{ 月}) \\ 0 & (i \neq 4\text{ 月}) \end{cases}$$

このダミー変数を用いて、回帰式、$y = \alpha_2' + \beta_2 x + \alpha_2'' d$ としてパラメータ、$\alpha_2', \beta_2, \alpha_2''$ を推定する。

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 91 \\ 123 \end{pmatrix}$ とすると、α_2', β_2, α_2'' は、

$$\begin{pmatrix} \alpha_2' \\ \beta_2 \\ \alpha_2'' \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 91 \\ 123 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 8 & 18 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 91 \\ 123 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -6 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 91 \\ 123 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55.0 \\ 21.5 \\ -38.0 \end{pmatrix}$$

すなわち、$\alpha_2 = \begin{cases} \alpha_2' + \alpha_2'' = 17.0 & (i = 4\text{ 月}) \\ \alpha_2' = 55.0 & (i \neq 4\text{ 月}) \end{cases}$, $\beta_2 = 21.5$

よって、解答は　①（Ｍ）　②（Ｅ）　③（Ｄ）　④（Ｎ）　⑤（Ｅ）

（２）①ブラウン運動とは、次を満たす確率過程 $\{W_t\}$ をいう。

・連続性：W_t の見本関数は、t に関する連続関数

・独立増分性：$0 \le s < t \le u < v$ のとき、$W_t - W_s$ と $W_v - W_u$ は独立

・定常増分性：$W_{s+t} - W_t$ と W_s は、同じ分布に従う

さらに、ブラウン運動 $\{W_t\}$ が次の条件を満たすとき、標準ブラウン運動（ウィーナー過程）という。

・$W_0 = 0$

・$E[W_t] = 0$

・$\underline{V[W_t] = t}$

また、標準ブラウン運動では、$E[W_{t+1}|W_1, \cdots, W_t] = W_t$ が成り立つ。この等式が成立する確率過程をマルチンゲールという。

よって、正答は４つ。

②互いに独立な標準正規分布に従う確率変数 Z_1, Z_2 を用いて、$W_1 = Z_1, W_2 = Z_1 + Z_2$ と表される。

$$P(W_2 > 0) = P(Z_1 + Z_2 > 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(W_1 > 0|W_2 > 0) = P(Z_1 > 0|Z_1 + Z_2 > 0) = \frac{\left(P(Z_1 > 0) \cap P(Z_1 + Z_2 > 0)\right)}{P(Z_1 + Z_2 > 0)}$$

$$= \frac{\left(P(Z_1 > 0) \cap P(Z_2 > 0)\right)}{P(Z_1 + Z_2 > 0)} + \frac{\left(P(Z_1 > 0) \cap P(Z_2 < 0) \cap P(|Z_2| < |Z_1|)\right)}{P(Z_1 + Z_2 > 0)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

よって、<u>解答は　⑥（**D**）　⑦（**H**）　⑧（**L**）</u>

（３）

１．$|X|$ の確率密度関数 f および、平均 1 の指数分布に従う確率変数 Y の確率密度関数 g はそれぞれ以下の通りである。

$$f(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \qquad (0<y<\infty)$$

$$g(y)=\exp(-y) \qquad (0<y<\infty)$$

$f(y)/g(y)\le c$をみたす、最小の c は、次の通り。

$$\frac{f(y)}{g(y)}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}+y\right)=\sqrt{\frac{2e}{\pi}}\exp\left(-\frac{(y-1)^2}{2}\right)\le\sqrt{\frac{2e}{\pi}} \qquad (0<y<\infty)$$

$$c=\sqrt{\frac{2e}{\pi}}$$

２．棄却法では、$U\le f(Y)/c\cdot g(Y)$ のとき、Y を $|X|$ として採用する。すなわち、

$$U\le\frac{f(Y)}{c\cdot g(Y)}=\exp\left(-\frac{(Y-1)^2}{2}\right)$$

$$-\log U\ge\frac{(Y-1)^2}{2}$$

のときに採用する。シミュレーション結果に対してそれぞれ判定すると下表の通りとなる。

U	0.8	0.3	0.7	0.4	0.9
Y	0.17	1.22	0.96	0.66	0.02
$-\log U$	0.2232	1.2040	0.3567	0.9163	0.1054
$\frac{(Y-1)^2}{2}$	0.3445	0.0242	0.0008	0.0578	0.4802
$-\log U\ge\frac{(Y-1)^2}{2}$	偽	真	真	真	偽
$\|X\|$	(棄却)	1.22	0.96	0.66	(棄却)

より、3 個の $|X|$ が生成される。生成された $|X|$ の標本平均は、

$$\frac{1.22+0.96+0.66}{3}=0.9466\cdots$$

よって、解答は　⑨　（Ｄ）　⑩　（ＡＡ）

問題４.

（１）ある時系列データについて、時系列モデルに当てはめ、将来予測を実施したい。

確率過程 $\{Y_t\}$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ の実現値である時系列データを $\{y_t\}$ と定める。

確率過程 $\{Y_t\}$ は 1 次の自己回帰モデル $AR(1)$ に従うとすると、Y_t は次の算式を満たす。

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

ここで、パラメータ $\phi_0,\ \phi_1$ は定数であり、誤差項 ε_t は $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \cdots, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots$ と独立に平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数である。なお、確率過程 $\{Y_t\}$ は定常であるとする。

まず、確率過程 $\{Y_t\}$ の定常性の条件、平均、自己共分散、自己相関を求めたい。

このモデルが定常性を持つための必要十分条件は、特性方程式の解 $1/\phi_1$ の絶対値が 1 より大きいことであるため、次の通りである。

$$-1 < \phi_1 < 1$$

ここで、Y_t の平均を μ 、時差 h の自己共分散を γ_h、時差 h の自己相関を ρ_h とすると、

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ の両辺の期待値をとることにより、$\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu$ が得られ、これを μ について解くと、

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}$$

が得られる。

$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ の両辺から $\mu = \phi_0 + \phi_1 \mu$ を引くと、$Y_t - \mu = \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ となり、両辺に $Y_t - \mu, Y_{t-1} - \mu, \cdots, Y_{t-h} - \mu$ を掛け算して、期待値をとると、

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma^2$$
$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$$
$$\vdots$$
$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1}$$

となり、これを解くと、

$$\gamma_h = \frac{\phi_1^h}{1 - \phi_1^2} \sigma^2 \quad (h = 0,1,2,\cdots)$$

となる。

また、$\rho_h = \gamma_h / \gamma_0$ であるため、

$$\rho_h = \phi_1^h \quad (h = 0,1,2,\cdots)$$

となる。

よって、解答は　①（B）　②（A）　③（D）　④（N）　⑤（P）　⑥（N）

（２）時系列データが下表の通り与えられているとき、標本自己相関からパラメータ $\phi_0,\ \phi_1$ を推定する。また、パラメータ $\phi_0,\ \phi_1$ の推定値を、$\hat{\phi}_0,\ \hat{\phi}_1$ とする。

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	3.00	4.09	2.65	2.25	3.20	4.17	4.87	4.97	3.48	3.00

標本自己相関

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{10}(y_t - \bar{y})(y_{t-1} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{10}(y_t - \bar{y})^2} = 0.422$$

となるため、$\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1 = 0.422$ となる。
また、$\mu = \phi_0/(1-\phi_1)$ であり、$\hat{\mu} = \bar{y} = 3.568$ を用いて、$\hat{\phi}_0 = \hat{\mu}\left(1-\hat{\phi}_1\right) = 2.063$ となる。

よって、解答は　⑦（D）　⑧（G）

（３）次に、$t=1$ 時点から、$t=n$ 時点までの時系列データ $\{y_t\}$ が与えられたときの $t=n+h$ 時点での Y_{n+h} を予測し、その区間予測を求めたい。予測量としては、

$$\hat{y}_{n+h} = E[Y_{n+h} \mid Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1]$$

を用いる。
ここで、Y_{n+h} を Y_n, ϕ_0, ϕ_1 および、誤差項で表現すると、

$$Y_{n+h} = \phi_0 + \phi_1 Y_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h} = \phi_0(1+\phi_1) + \phi_1^2 Y_{n+h-2} + \phi_1 \varepsilon_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h}$$

を繰り返すと、

$$\begin{aligned} Y_{n+h} &= \phi_0\left(1+\phi_1+\cdots+\phi_1^{h-1}\right) + \phi_1^h Y_n + \phi_1^{h-1}\varepsilon_{n+1} + \phi_1^{h-2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + \phi_1\varepsilon_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h} \\ &= \frac{\phi_0\left(1-\phi_1^h\right)}{1-\phi_1} + \phi_1^h Y_n + \phi_1^{h-1}\varepsilon_{n+1} + \phi_1^{h-2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + \phi_1\varepsilon_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h} \end{aligned}$$

となり、$\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1\}$ の条件の下で、条件付き期待値をとると、

$$\hat{y}_{n+h} = E[Y_{n+h} \mid Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1] = \frac{\phi_0\left(1-\phi_1^h\right)}{1-\phi_1} + \phi_1^h y_n$$

となる。
また、Y_{n+h} について、$\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1\}$ の条件の下で、条件付き分散をとると、

$$\begin{aligned} & V[Y_{n+h} \mid Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1] \\ &= E[(Y_{n+h} - E[Y_{n+h} \mid Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1])^2 \mid Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1] \\ &= E\left[\left(\phi_1^{h-1}\varepsilon_{n+1} + \phi_1^{h-2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + \phi_1\varepsilon_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h}\right)^2 \,\middle|\, Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1\right] \\ &= E\left[\left(\phi_1^{h-1}\varepsilon_{n+1} + \phi_1^{h-2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + \phi_1\varepsilon_{n+h-1} + \varepsilon_{n+h}\right)^2\right] \\ &= \left(1+\phi_1^2+\phi_1^4+\cdots++\phi_1^{2(h-1)}\right)\sigma^2 \\ &= \frac{\left(1-{\phi_1}^{2h}\right)}{1-{\phi_1}^2}\sigma^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、Y_{n+h} は $\{Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1}, \cdots, Y_1 = y_1\}$ の条件の下で、平均 $\hat{y}_{n+h}$、分散 $\dfrac{\left(1-{\phi_1}^{2h}\right)}{1-{\phi_1}^2}\sigma^2$ の正規分布に従うことから、区間予測を求めることができる。

（２）のデータにおいて、y_1 から y_{10} までのデータがすでに判明しているが、（２）で求めた標本自己相関から推定したパラメータ（小数点以下第 3 位を四捨五入して小数点以下第 2 位までの小

数を用いる。）を用いて、Y_{12}, Y_{15} について、95% 区間予測を求める。なお、$\sigma = 1$ は既知である。

$$\hat{y}_{12} = \frac{\hat{\phi}_0\left(1-\hat{\phi}_1^2\right)}{1-\hat{\phi}_1} + \hat{\phi}_1^2 y_{10} = 3.454\,,\ \hat{y}_{15} = \frac{\hat{\phi}_0\left(1-\hat{\phi}_1^5\right)}{1-\hat{\phi}_1} + \hat{\phi}_1^5 y_{10} = 3.545$$

である。

このとき、Y_{12} の 95% 区間予測は、

$$\left[\hat{y}_{12} - u(0.025)\sqrt{\frac{1-\hat{\phi}_1^4}{1-\hat{\phi}_1^2}\sigma^2}\ \ ,\hat{y}_{12} + u(0.025)\sqrt{\frac{1-\hat{\phi}_1^4}{1-\hat{\phi}_1^2}\sigma^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow [1.329\,, 5.580]$$

であり、Y_{15} の 95% 区間予測は、

$$\left[\hat{y}_{15} - u(0.025)\sqrt{\frac{1-\hat{\phi}_1^{10}}{1-\hat{\phi}_1^2}\sigma^2}\ \ ,\hat{y}_{15} + u(0.025)\sqrt{\frac{1-\hat{\phi}_1^{10}}{1-\hat{\phi}_1^2}\sigma^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow [1.385\,, 5.704]$$

である。

よって、解答は　⑨（**I**）　⑩（**D**）　⑪（**N**）　⑫（**T**）　⑬（**P**）　⑭（**D**）
⑮（**B**）　⑯（**G**）　⑰（**H**）

問題５.

（１）それぞれの顧客の決済金額 X が区間 $\left(0\,円, 20\,万円\right]$ の一様分布（連続型）に従い、顧客同士で決済金額とキャッシュバック額は互いに独立であるとする。また、各区分において、キャッシュバックされる確率は決済金額 X（万円）に依存しないものとする。

1 人の顧客の決済金額 X は、区間 $\left(0\,円, 20\,万円\right]$ の一様分布（連続型）に従うので、その累積分布関数を $U_X(x)$ とおくと、

$$U_X(x) = \frac{1}{20}x \qquad (0 < x \leq 20)$$

である。

キャッシュバック額を Y（万円）とおく。

（a）キャッシュバック額が 0 のとき

$$P(Y = 0) = P(0 < X < 5) + 0.8 \times P(5 \leq X < 10) + 0.6 \times P(10 \leq X \leq 20)$$
$$= \frac{5}{20} + 0.8 \times \frac{5}{20} + 0.6 \times \frac{10}{20}$$
$$= \frac{3}{4}$$

（b）キャッシュバック額が $0.2X$ のとき

キャッシュバック額 Y の累積分布関数は、$y \in [1,2)$ に対し、

$$P(Y \leq y) = P(Y = 0) + P(1 \leq Y \leq y)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{5}P(5 \leq X \leq 5y)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{5}\int_5^{5y} \frac{1}{20}dx$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{20}(y - 1)$$
$$= \frac{y}{20} + \frac{7}{10}$$

（c）キャッシュバック額が mX のとき

キャッシュバック額 Y の累積分布関数は、$y \in [10m, 20m]$ に対し、

$$P(Y \leq y) = P(Y = 0) + P(1 \leq Y < 2) + P(10m \leq Y \leq y)$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{20} + \frac{2}{5}P\left(10 \leq X \leq \frac{y}{m}\right)$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\int_{10}^{\frac{y}{m}} \frac{1}{20}dx$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{50}\left(\frac{y}{m} - 10\right)$$
$$= \frac{y}{50m} + \frac{3}{5}$$

よって、キャッシュバック額 Y の累積分布関数 F_Y は、

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} & (y = 0) \\ \dfrac{3}{4} & (0 < y < 1) \\ \dfrac{y}{20} + \dfrac{7}{10} & (1 \leq y < 2) \\ \dfrac{4}{5} & (2 \leq y < 10m) \\ \dfrac{y}{50m} + \dfrac{3}{5} & (10m \leq y < 20m) \\ 1 & (20m \leq y) \end{cases}$$

となる。

したがって、Y の期待値 $E[Y]$ は、

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^{20m} y\, dF_Y(y) \\ &= 0 \times P(Y = 0) + \int_0^1 y\, dF_Y(y) + \int_1^2 y\, dF_Y(y) + \int_2^{10m} y\, dF_Y(y) + \int_{10m}^{20m} y\, dF_Y(y) \\ &= \int_1^2 yF_Y{}'(y)\, dy + \int_{10m}^{20m} yF_Y{}'(y)\, dy \\ &= \int_1^2 \frac{y}{20} dy + \int_{10m}^{20m} \frac{y}{50m} dy \\ &= \frac{1}{20}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_1^2 + \frac{1}{50m}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{10m}^{20m} \\ &= \frac{3}{40} + 3m \end{aligned}$$

同様に、Y^2 の期待値 $E[Y^2]$ は、

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_0^{20m} y^2\, dF_Y(y) \\ &= 0 \times P(Y = 0) + \int_0^1 y^2\, dF_Y(y) + \int_1^2 y^2\, dF_Y(y) + \int_2^{10m} y^2\, dF_Y(y) + \int_{10m}^{20m} y^2\, dF_Y(y) \\ &= \int_1^2 y^2F_Y{}'(y)\, dy + \int_{10m}^{20m} y^2F_Y{}'(y)\, dy \\ &= \int_1^2 \frac{y^2}{20} dy + \int_{10m}^{20m} \frac{y^2}{50m} dy \\ &= \frac{1}{20}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^2 + \frac{1}{50m}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{10m}^{20m} \\ &= \frac{7}{60} + \frac{140}{3}m^2 \end{aligned}$$

Y の分散 $V[Y]$ は、

$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \left(\frac{7}{60} + \frac{140}{3}m^2\right) - \left(\frac{3}{40} + 3m\right)^2 = \frac{113}{3}m^2 - \frac{9}{20}m + \frac{533}{4{,}800}$$

よって、解答は ①（K） ②（N） ③（K） ④（V） ⑤（L） ⑥（P）
⑦（C） ⑧（AA） ⑨（R） ⑩（Y） ⑪（AD）

（２）ここでは、（３）で計算するにあたり、前提となる定理を特定の条件の下で証明する。
確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ が互いに独立ですべて同じ分布に従い、 $\mu = E[Y_k]$、$\sigma^2 = V[Y_k]\,(\sigma > 0)$ が存在すれば、$n \to \infty$ のとき $(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ の確率分布は、ある特定の分布に収束する。

以下、簡単のため $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ がすべて同じ積率母関数を持つものとしてこれを示す。
$Z_k = Y_k - \mu \quad (k = 1,2,\cdots,n)$ とおくと、$E[Z_k] = 0,\ V[Z_k] = \sigma^2$ であるから、Z_k の積率母関数 $\phi(\theta)$ に対し、

$$\phi(\theta) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}\theta^2 + O(\theta^3) \qquad (\theta \to 0)$$

が成り立つ。ゆえに、$(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ の積率母関数 $\phi_n(\theta)$ は、

$$\phi_n(\theta) = \left\{\phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\}^n = \left\{1 + \frac{\theta^2}{2n} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}^n$$

ここで、$O\left(n^{-3/2}\right)$ は θ を固定して $n \to \infty$ としたとき $n^{-3/2}$ と同位の無限小である。

$$\frac{\theta^2}{2n} + O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) = y$$

とおくと、$n \to \infty$ のとき、$y \to 0$ であるから、

$$\phi_n(\theta) = \left\{(1+y)^{\frac{1}{y}}\right\}^{\frac{\theta^2}{2} + O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)} \to e^{\frac{\theta^2}{2}}$$

より、$n \to \infty$ のとき $(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ の分布は平均 0、分散 1 の正規分布に収束することが分かる（これを中心極限定理という）。

よって、解答は ⑫（A） ⑬（R） ⑭（AB） ⑮（P） ⑯（H） ⑰（A）

（３）（１）の条件の下で、100 人の顧客に対する合計キャッシュバック額が 200 万円を超える確率が 0.01 未満となるための最大の m（小数点以下第 3 位以下を切り捨てるものとする）を、（２）で示した定理（中心極限定理）が適用できるものとして求める。
100 人の顧客に対する合計キャッシュバック額を Z（万円），一人当たりの平均キャッシュバック額を $\bar{Z}$（万円）とおけば、$Z = 100\bar{Z}$ である。

$$P(Z > 200) = P\left(\frac{Z - 100E[Y]}{\sqrt{100 \cdot V[Y]}} > \frac{200 - 100E[Y]}{\sqrt{100 \cdot V[Y]}}\right) = P\left(\frac{\bar{Z} - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}} > \frac{2 - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}\right)$$

であるから、

$$P\left(\frac{\bar{Z} - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}} > \frac{2 - E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}\right) < 0.01$$

を満たすような最大の m を求めればよい。（２）より $\dfrac{\bar{Z}-E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}$ の分布関数は 平均 0、分散 1 の正規分布の分布関数で近似できることをふまえると、

$$\frac{2-E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}>u(0.01)$$

を満たす最大の m を求めればよいことになる。付表より、$u(0.01)=2.3263\cong 2.33$ であることから、上記不等式を満たす m の条件は、

$$\frac{2-E[Y]}{\sqrt{V[Y]/100}}>2.33$$

$$\frac{\left\{2-\left(\frac{3}{40}+3m\right)\right\}\times\sqrt{100}}{\sqrt{\frac{113}{3}m^2-\frac{9}{20}m+\frac{533}{4{,}800}}}>2.33$$

$$\left(\frac{77}{40}-3m\right)\times\sqrt{100}>2.33\sqrt{\frac{113}{3}m^2-\frac{9}{20}m+\frac{533}{4{,}800}} \qquad \text{(a)}$$

（左辺）＞（右辺） ≥ 0 より、

$$m<\frac{77}{120}=0.6416\cdots \qquad \text{(b)}$$

（b）式が満たされているとして、（a）式の両辺を 2 乗して整理すると、

$$\frac{2{,}086.5343}{3}m^2-\frac{23{,}051.1399}{20}m+\frac{1{,}775{,}806.3963}{4{,}800}>0$$

となる。これを解くと、

$$m<0.435\cdots,\ 1.221\cdots<m$$

以上より、条件を満たす最大の m（小数点以下第 3 位以下を切り捨て）は

$$m=0.43$$

である。

よって、解答は ⑱ **（M）** ⑲ **（F）**

問題６.

（１）ある学力テストの数学の点数と英語の点数が無相関であるか調べたい。点数に関する確率変量 (X,Y) が２次元正規分布 $N(X,Y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ に従うとして、母相関係数 ρ に関する無相関の検定を行う。10 人の生徒の数学の点数と英語の点数を調べたところ次の通りであった。

生徒番号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
数学の点数 x_i	100	40	80	65	50	90	95	65	80	35
英語の点数 y_i	90	50	95	70	60	75	60	85	75	60

ここで、

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 700\text{、}\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = 53{,}700\text{、}\sum_{i=1}^{10} y_i = 720\text{、}\sum_{i=1}^{10} {y_i}^2 = 53{,}800\text{、}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 52{,}225$$

である。

数学の点数と英語の点数が無相関であるかどうかを調べるために、帰無仮説 H_0 : $\rho = 0$ に対し、対立仮説 H_1 : $\rho \neq 0$ を有意水準 5% で検定する。
標本相関係数 r は、x_i の標本平均 $\bar{x}$、y_i の標本平均 $\bar{y}$ を用いると、

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

と表せるから、これを計算すると

$$r = \frac{52{,}225 - 10 \times 70 \times 72}{\sqrt{(53{,}700\ - 10 \times 70^2)(53{,}800 - 10 \times 72^2)}} = 0.601$$

となる。これより、統計量 T の実現値 t は、

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2} = \frac{0.601}{\sqrt{1-0.601^2}}\sqrt{10-2} = 2.127$$

となる。
自由度 8 の t 分布の上側 2.5% 点 $t_8(2.5\%)$ は 2.306 であるから、$t_8(2.5\%) = 2.306 > t = 2.127$ となり、H_0 は採択される。よって、生徒の数学と英語の成績には相関はないと言える。

よって、解答は　①（**C**）　②（**A**）

以下、（２）と（３）でこの無相関検定が正しく実施できていることを確認する。

（２）２次元正規分布 $N(X,Y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ に従う２次元正規母集団から大きさ n の標本変量 $(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)$ を抽出したとき、この正規母集団の母平均、母分散および母相関係数を最尤法により推定する。なお、x_i の標本平均を $\bar{x}$、y_i の標本平均を $\bar{y}$ と表わすこととする。
２次元正規分布の確率密度関数 $f_{X,Y}(x,y)$ は

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\right]$$

と書ける。尤度関数 $l(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ を

$$l(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)=\prod_{i=1}^{n}f_{X,Y}(x_i,y_i)$$

とし、log をとった対数尤度関数

$$\begin{aligned}&\log l(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)\\&\quad=\log\prod_{i=1}^{n}f_{X,Y}(x_i,y_i)\\&\quad=-n\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)\}-\frac{n}{2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\end{aligned}$$

を最大にするような μ_1、μ_2、σ_1^2、σ_2^2、ρ の最尤推定値 $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$、$\hat{\sigma}_1^2$、$\hat{\sigma}_2^2$、$\hat{\rho}$ を求める。

$$\frac{\partial}{\partial\mu_1}\log l=0\cdots(A),\ \frac{\partial}{\partial\mu_2}\log l=0\cdots(B),\ \frac{\partial}{\partial(\sigma_1^2)}\log l=0\cdots(C),\ \frac{\partial}{\partial(\sigma_2^2)}\log l=0\cdots(D),\ \frac{\partial}{\partial\rho}\log l=0\cdots(E)$$

とおく。

$(A)\sim(E)$ はそれぞれ次のように計算できる。

$$\frac{\partial}{\partial\mu_1}\log l=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)-\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)\right\}=0\cdots(A)$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu_2}\log l=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_2)-\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)\right\}=0\cdots(B)$$

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma_1^2)}\log l=-\frac{n}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2\sigma_1^2}\frac{1}{(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\frac{1}{2\sigma_1^2}\frac{\rho}{(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)=0\cdots(C)$$

$$\frac{\partial}{\partial(\sigma_2^2)}\log l=-\frac{n}{2\sigma_2^2}+\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}\frac{\rho}{(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)=0\cdots(D)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\rho}\log l=\frac{n\rho}{1-\rho^2}-\frac{\rho}{(1-\rho^2)^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}\\+\frac{1}{1-\rho^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)=0\cdots(E)\end{aligned}$$

まず、(A) と (B) より、

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\bar{y}$$

となる。

つぎに、

$$(C)\times\frac{2\sigma_1^2}{n}+(D)\times\frac{2\sigma_2^2}{n}+(E)\times\frac{1-\rho^2}{n\rho}=0$$

とおいて計算すれば、

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\hat{\mu}_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_i-\hat{\mu}_2}{\sigma_2}\right)=n\rho\cdots(F)$$

と整理できる。

(F) を (C) に代入して σ_1^2 について解くと、

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_1)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

となる。同様に、(F) を (D) に代入して σ_2^2 について解くと、

$$\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu}_2)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$$

となる。

よって、$\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ の最尤推定値 $\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2,\ \hat{\sigma}_1^2,\ \hat{\sigma}_2^2$ は、１次元正規分布

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\},\ \ f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

の $\mu_1,\ \mu_2,\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2$ の最尤推定値と一致することが分かる。

最後に、$\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2,\ \hat{\sigma}_1^2,\ \hat{\sigma}_2^2$ を (F) に代入して ρ について解くと、

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_1)(y_i-\hat{\mu}_2)/n}{\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

となる。この $\hat{\rho}$ は標本相関係数 r とよばれ、

$$z_{11}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2、z_{22}=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2、z_{12}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

を用いると、$\hat{\rho}$ は

$$\hat{\rho}=\frac{z_{12}}{\sqrt{z_{11}z_{22}}}$$

と表せる。

よって、解答は　③（B）　④（E）　⑤（H）　⑥（K）　⑦（S）

（３）（２）で求めた標本相関係数 r の確率変量 R に対し、統計量 T を

$$T=\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}\sqrt{n-2}$$

と定義し、$\rho=0$ のときに T が従う分布と T の確率密度関数を求める。

まず $\rho=0$ のときの R の確率密度関数 $h_R(r)$ を導く。２次元正規分布 $N(X,Y;\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho=0)$ に従う母集団から大きさ n の標本変量 $(x_1,y_1;x_2,y_2;\cdots;x_n,y_n)$ を抽出したとき、（２）と同様に (z_{11},z_{22},z_{12}) を定義すると、確率変量 (Z_{11},Z_{22},Z_{12}) は、次の確率密度関数 $h_{Z_{11},Z_{22},Z_{12}}(z_{11},z_{22},z_{12})$ を持つ。

$$h_{Z_{11},Z_{22},Z_{12}}(z_{11},z_{22},z_{12})=A(z_{11}z_{22}-{z_{12}}^2)^{\frac{n-4}{2}}\exp\left(-\frac{\sigma_1z_{11}+\sigma_2z_{22}}{2\sigma_1\sigma_2}\right)$$

ここで、

$$A=\frac{1}{2^{n-1}\pi^{\frac{1}{2}}(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

である。確率密度関数 $h_{Z_{11},Z_{22},Z_{12}}(z_{11},z_{22},z_{12})$ は、自由度 $n-1$ の２次元ウィシャート分布とよばれる。

$(z_{11},z_{22},z_{12})\longrightarrow(z_{11},z_{22},r)$ の変数変換を考えると、ヤコビアン J は

$$J=\frac{\partial(z_{11},z_{22},z_{12})}{\partial(z_{11},z_{22},r)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z_{11}}{\partial z_{11}} & \frac{\partial z_{11}}{\partial z_{22}} & \frac{\partial z_{11}}{\partial r}\\ \frac{\partial z_{22}}{\partial z_{11}} & \frac{\partial z_{22}}{\partial z_{22}} & \frac{\partial z_{22}}{\partial r}\\ \frac{\partial z_{12}}{\partial z_{11}} & \frac{\partial z_{12}}{\partial z_{22}} & \frac{\partial z_{12}}{\partial r}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{r\sqrt{z_{22}}}{2\sqrt{z_{11}}} & -\frac{r\sqrt{z_{11}}}{2\sqrt{z_{22}}} & \sqrt{z_{11}z_{22}}\end{vmatrix}=\sqrt{z_{11}z_{22}}$$

となるので、

$$h_{Z_{11},Z_{22},R}(z_{11},z_{22},r)=h_{Z_{11},Z_{22},Z_{12}}(z_{11},z_{22},z_{12})|J|$$

より、

$$h_{Z_{11},Z_{22},R}(z_{11},z_{22},r)=A(z_{11}z_{22}-r^2z_{11}z_{22})^{\frac{n-4}{2}}\exp\left(-\frac{\sigma_1z_{11}+\sigma_2z_{22}}{2\sigma_1\sigma_2}\right)\sqrt{z_{11}z_{22}}$$

$$=A(z_{11}z_{22})^{\frac{n-3}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\exp\left(-\frac{z_{11}}{2\sigma_2}\right)\exp\left(-\frac{z_{22}}{2\sigma_1}\right)$$

この両辺を z_{11} と z_{22} で積分すると、

$$h_R(r)=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty h_{Z_{11},Z_{22},R}(z_{11},z_{22},r)dz_{11}\right\}dz_{22}$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty A(z_{11}z_{22})^{\frac{n-3}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\exp\left(-\frac{z_{11}}{2\sigma_2}\right)\exp\left(-\frac{z_{22}}{2\sigma_1}\right)dz_{11}\right\}dz_{22}$$

$$=A(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}\left\{\int_0^\infty(z_{11})^{\frac{n-3}{2}}\exp\left(-\frac{z_{11}}{2\sigma_2}\right)dz_{11}\right\}\left\{\int_0^\infty(z_{22})^{\frac{n-3}{2}}\exp\left(-\frac{z_{22}}{2\sigma_1}\right)dz_{22}\right\}$$

ここで、

$$B=\int_0^\infty(z_{11})^{\frac{n-3}{2}}\exp\left(-\frac{z_{11}}{2\sigma_2}\right)dz_{11}$$

$$C=\int_0^\infty(z_{22})^{\frac{n-3}{2}}\exp\left(-\frac{z_{22}}{2\sigma_1}\right)dz_{22}$$

とおいて、それぞれ計算する。

B について、$z'_{11}=z_{11}/2\sigma_2$ とおくと、$dz_{11}=2\sigma_2\mathrm{d}z'_{11}$より、

$$B=(2\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}}\int_0^\infty(z'_{11})^{\frac{n-3}{2}}\exp(-z'_{11})\,dz'_{11}$$

ここで、ガンマ関数 $\Gamma(s)$ の定義より、

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-u)\,du$$

であるから、

$$B=(2\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

C についても同様に考えると、

$$C = (2\sigma_1)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

よって、

$$h_R(r) = A(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} BC = A(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} \left\{(2\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}\left\{(2\sigma_1)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}$$

$$= A(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} (2\sigma_1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

ここに A を代入して整理すると、

$$h_R(r) = \frac{(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} (2\sigma_1)^{\frac{n-1}{2}} (2\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{2^{n-1} \pi^{\frac{1}{2}} (\sigma_1\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} = \frac{(1-r^2)^{\frac{n-4}{2}} 2^{n-1} (\sigma_1\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{2^{n-1} \pi^{\frac{1}{2}} (\sigma_1\sigma_2)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{n-4}{2}}$$

次に $\rho = 0$ のときの統計量 T の確率密度関数 $h_T(t)$ を求める。r から t に変数変換すると、

$$h_T(t) = h_R(r) \cdot \left|\frac{1}{\frac{dt}{dr}}\right| = h_R(r) \cdot \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n-2}}$$

となることから、

$$1 - r^2 = \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{r^2}{1-r^2}\right)^{-1}$$

を用いて整理すると、$h_T(t)$ は r を用いて、

$$h_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(1 + \frac{r^2}{1-r^2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

と書ける。ここに、$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{n-2}$ を代入して整理すると、

$$h_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

となる。
また、ベータ関数

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

を用いると、

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}\right)}$$

であるから、

$$h_T(r)=\frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-2}}\cdot\left(1+\frac{t^2}{n-2}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

となる。

したがって、統計量 T は自由度 $n-2$ の t 分布に従うことが分かる。

以上より、帰無仮説を H_0：$\rho=0$ 、対立仮説を H_1：$\rho\neq 0$ として、有意水準 ε による無相関の検定を行うとき、自由度 $n-2$ の t 分布の下側 $\varepsilon/2$ 点を $-t_{n-2}(\varepsilon/2)$、上側 $\varepsilon/2$ 点を $t_{n-2}(\varepsilon/2)$ とすると、統計量 T が $T<-t_{n-2}(\varepsilon/2)$ または $t_{n-2}(\varepsilon/2)<T$ であれば H_0 を棄却し、そうでなければ H_0 を採択すればよい。

以上（２）と（３）より、（１）の無相関検定が正しく実施できていることが確認できた。

よって、解答は　⑧ **（B）**　⑨ **（C）**　⑩ **（B）**　⑪ **（E）**　⑫ **（D）**　⑬ **（J）**　⑭ **（Q）**　⑮ **（X）**　⑯ **（L）**　⑰ **（J）**　⑱ **（K）**

以上

問題１.

（１）	①	（G）	5点	（３）	④	（C）	1点
（２）	②	（A）	2点		⑤	（A）	完答で4点
	③	（F）	3点		⑥	（C）	
				（４）	⑦	（L）	5点

問題２.

（１）	①	（B）	2点	（３）	⑦	（C）	2点
	②	（H）	3点		⑧	（F）	3点
（２）	③	（B）	完答で2点	（４）	⑨	（D）	完答で5点
	④	（M）			⑩	（G）	
	⑤	（D）	完答で3点		⑪	（B）	
	⑥	（K）					

問題３.

（１）	①	（M）	完答で2点	（２）	⑥	（D）	2点
	②	（E）			⑦	（H）	1点
	③	（D）	完答で3点		⑧	（L）	2点
	④	（N）		（３）	⑨	（D）	2点
	⑤	（E）			⑩	（AA）	3点

問題４.

（１）	①	（B）	1点	（３）	⑨	（I）	完答で1点
	②	（A）	完答で1点		⑩	（D）	
	③	（D）			⑪	（N）	
	④	（N）	完答で1点		⑫	（T）	完答で2点
	⑤	（P）			⑬	（P）	
	⑥	（N）	1点		⑭	（D）	完答で1点
（２）	⑦	（D）	2点		⑮	（B）	
	⑧	（G）	1点		⑯	（G）	完答で1点
					⑰	（H）	

問題５.

（１）	①	**（Ｋ）**	１点	（２）	⑫	**（Ａ）**	完答で１点
	②	**（Ｎ）**	１点		⑬	**（Ｒ）**	
	③	**（Ｋ）**	完答で１点		⑭	**（ＡＢ）**	完答で１点
	④	**（Ｖ）**			⑮	**（Ｐ）**	
	⑤	**（Ｌ）**	完答で１点		⑯	**（Ｈ）**	完答で２点
	⑥	**（Ｐ）**			⑰	**（Ａ）**	
	⑦	**（Ｃ）**	完答で２点	（３）	⑱	**（Ｍ）**	１点
	⑧	**（ＡＡ）**			⑲	**（Ｆ）**	３点
	⑨	**（Ｒ）**	完答で２点				
	⑩	**（Ｙ）**					
	⑪	**（ＡＤ）**					

問題６.

（１）	①	**（Ｃ）**	完答で５点	（３）	⑪	**（Ｅ）**	完答で２点
	②	**（Ａ）**			⑫	**（Ｄ）**	
（２）	③	**（Ｂ）**	完答で１点		⑬	**（Ｊ）**	
	④	**（Ｅ）**			⑭	**（Ｑ）**	完答で１点
	⑤	**（Ｈ）**	完答で１点		⑮	**（Ｘ）**	
	⑥	**（Ｋ）**			⑯	**（Ｌ）**	完答で３点
	⑦	**（Ｓ）**	２点		⑰	**（Ｊ）**	
（３）	⑧	**（Ｂ）**	１点		⑱	**（Ｋ）**	
	⑨	**（Ｃ）**	完答で１点				
	⑩	**（Ｂ）**					

以上