損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、クレーム件数および個々のクレーム額は互いに独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅴの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　各４点　（計２０点）

Ⅰ．ある年度において、ある保険商品の予定料率構成割合（保険期間１年）は下表のとおりであった。この商品の保険期間５年の長期一時払契約について、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

予定損害率	50%
予定新契約費率	20%
予定維持費率	10%
予定代理店手数料率	15%
利潤率	5%

＜前提＞

- 純保険料および維持費は毎年同一とする。
- 新契約費は初保険年度のみ支出され、維持費はすべての保険年度において支出される。
- 代理店手数料および利潤は営業保険料に比例し、予定代理店手数料率および利潤率は、保険期間１年における予定代理店手数料率および利潤率を用いる。
- 予定利率は 1%であり、各保険年度の支出は各保険年度初にすべて支払われる。

（１）この契約の長期係数に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.20　（B）0.25　（C）0.26　（D）0.27　（E）0.28
（F）3.70　（G）3.85　（H）3.93　（I）4.00　（J）4.90

（２）この契約が第 3 保険年度末に解約となった。そのときの未経過料率係数に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.36　（B）0.37　（C）0.38　（D）0.39　（E）0.40
（F）0.41　（G）0.42　（H）0.43　（I）0.44　（J）0.45

Ⅱ．ある契約集団について、1 年間に発生するクレーム件数NがパラメータΘのポアソン分布に従い、Θはガンマ分布$\Gamma(20,1)$に従うことがわかっている。また、この契約集団の個々のクレーム額Xが一様分布$U(0,12)$に従うこともわかっている。この契約集団に対して次の前提に基づき純保険料を算出した場合、契約集団の純保険料総額に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側ε点）の数値を使用すること。

＜前提＞

- ガンマ分布$\Gamma(\alpha,\beta)$の確率密度関数は$f(x)=\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\ (x>0)$である。
- 一様分布$U(a,b)$の確率密度関数は$f(x)=\dfrac{1}{b-a}\ (a<x<b)$である。
- 純保険料総額Pはパーセンタイル原理により$P=\min\left\{p \middle| F_S(p)\geq 99\%\right\}$とする。

  （Sは 1 年間のクレーム総額$S=X_1+X_2+\cdots+X_N$であり、$F_S(y)$はSの分布関数である。）
- $\dfrac{S-E(S)}{\sqrt{V(S)}}$は近似的に標準正規分布に従う。

＜表＞標準正規分布の上側ε点：$u(\varepsilon)$

ε	0.005	0.010	0.015	0.020
$u(\varepsilon)$	2.5758	2.3263	2.1701	2.0537

（A）200　（B）205　（C）210　（D）215　（E）220
（F）225　（G）230　（H）235　（I）240　（J）245

Ⅲ．4 月 1 日から翌年 3 月 31 日までを事業年度としている保険会社がある。この保険会社が販売した 2019 年 4 月 1 日始期契約で満期返戻金 120、保険期間 8 年の年払積立保険について、積立保険料として平準式積立保険料を採用した場合の第 5 保険年度末の払戻積立金V_1と、全期チルメル式積立保険料を採用した場合の第 5 保険年度末の払戻積立金V_2を比較したところ、$V_2/V_1 = 0.975$となった。このとき、積立保険料として全期チルメル式積立保険料を採用した場合における初保険年度の積立保険料と第 2 保険年度以降の積立保険料の差額に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、予定契約消滅率を考慮した現価率を$\phi = 0.98$とする。

（Ａ）3.0	（Ｂ）3.2	（Ｃ）3.4	（Ｄ）3.6	（Ｅ）3.8
（Ｆ）4.0	（Ｇ）4.2	（Ｈ）4.4	（Ｉ）4.6	（Ｊ）4.8

Ⅳ．ある保険事故が発生した場合に、保険金 X と保険金 Y をそれぞれ支払う保険商品がある。この保険商品において、直近に観測された保険金 X と保険金 Y は下表のとおりであった。

事故番号	1	2	3	4	5	6
保険金 X の観測値	23	21	12	15	13	18
保険金 Y の観測値	49	32	20	40	8	11

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）保険金 X と保険金 Y の観測値から算出されるケンドールの τ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.32　（B）0.39　（C）0.46　（D）0.53　（E）0.60
（F）0.67　（G）0.74　（H）0.81　（I）0.88　（J）0.95

（2）保険金 X と保険金 Y の観測値から算出されるスピアマンの ρ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.32　（B）0.39　（C）0.46　（D）0.53　（E）0.60
（F）0.67　（G）0.74　（H）0.81　（I）0.88　（J）0.95

Ⅴ．ある保険商品の契約者 100 人の 1 年間の実績クレーム件数が下表のとおりであったとする。

クレーム件数	0 件	1 件	2 件	3 件	4 件	5 件	6 件以上
契約者数	48 人	24 人	16 人	6 人	4 人	2 人	0 人

1 年間のクレーム件数が平均 λ_0 のポアソン分布に従うと仮定し、上記実績データから最尤法によってパラメータ λ_0 を推定した際の推定値を λ とする。
この保険商品のクレーム件数データを下表のとおり置きなおした上で、帰無仮説「H_0：1 年間のクレーム件数が平均 λ のポアソン分布に従う」を χ^2 適合度検定により検定するとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

クレーム件数	0 件	1 件	2 件	3 件以上
契約者数	48 人	24 人	16 人	12 人

（1）検定統計量 T の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$e^{-1}=0.368$ を使用すること。

（A）4.2　（B）5.2　（C）6.2　（D）7.2　（E）8.2
（F）9.2　（G）10.2　（H）11.2　（I）12.2　（J）13.2

（2）有意水準 5%とした場合、帰無仮説 H_0 は $\boxed{\quad ① \quad}$ 。また、有意水準 1%とした場合、帰無仮説 H_0 は $\boxed{\quad ② \quad}$ 。①、②に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよく、検定統計量 T は（1）で選択した数値を用いることとする。また、必要があれば、下表（自由度 k の χ^2 分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞自由度 k の χ^2 分布の上側 ε 点：$\chi_k^{\ 2}(\varepsilon)$

自由度 k	ε	
	0.05	0.01
2	5.99	9.21
3	7.81	11.34
4	9.49	13.28

（A）棄却される　（B）棄却されない

問題２． 次のⅠ～Ⅳの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　各７点　（計２８点）

Ⅰ．危険指標を地域（地域Ａか地域Ｂか）および構造（耐火か非耐火か）の２区分で設定している火災保険があり、その実績クレーム単価のデータが下表のとおりであったとする。

＜クレーム単価＞

	耐火	非耐火
地域Ａ	400	600
地域Ｂ	600	800

地域・構造別のクレーム単価 $Y_i\ (i=1,2,3,4)$ を一般化線形モデル、すなわち、Y_i の従う指数型分布族をガンマ分布 $f(y_i;\mu_i,\phi)=\dfrac{y_i^{-1}}{\Gamma(1/\phi)}\left(\dfrac{y_i}{\mu_i\phi}\right)^{\frac{1}{\phi}}\exp\left(-\dfrac{y_i}{\mu_i\phi}\right)$　（$\mu_i=E(Y_i)$, $0<\phi<\infty$）、リンク関数を $g(x)=\log x$ とし、次のとおり定義される説明変数 $x_{ij}\ (i=1,2,3,4\ \ j=1,2,3)$ を用いて、$\mu_i=g^{-1}(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})$ と表されるモデルを用いて分析する。

$$x_{i1}=\begin{cases}1 & \text{（地域Ａの場合）}\\ 0 & \text{（地域Ｂの場合）}\end{cases},\quad x_{i2}=\begin{cases}1 & \text{（地域Ｂの場合）}\\ 0 & \text{（地域Ａの場合）}\end{cases},\quad x_{i3}=\begin{cases}1 & \text{（耐火の場合）}\\ 0 & \text{（非耐火の場合）}\end{cases}$$

ここで、β_1,β_2,β_3 はパラメータであり、最尤法で推定する。このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）パラメータ β_1,β_2,β_3 が満たす連立方程式として、以下の式の①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。ここで、以下の式の l は対数尤度関数である。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_1}=\frac{400}{\boxed{\quad①\quad}}+\frac{600}{\boxed{\quad②\quad}}-2=0$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_2}=\frac{600}{\boxed{\quad③\quad}}+\frac{800}{\boxed{\quad④\quad}}-2=0$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_3}=\frac{400}{\boxed{\quad①\quad}}+\frac{600}{\boxed{\quad③\quad}}-2=0$$

（A）e^{β_1}　（B）e^{β_2}　（C）e^{β_3}　（D）$e^{\beta_1+\beta_2}$　（E）$e^{\beta_1+\beta_3}$
（F）$e^{\beta_2+\beta_3}$　（G）$e^{\beta_1\beta_2}$　（H）$e^{\beta_1\beta_3}$　（I）$e^{\beta_2\beta_3}$
（J）いずれにも該当しない

（2）一般化線形モデルで計算した場合の、「地域Ａかつ耐火」のクレーム単価の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）391　（B）394　（C）397　（D）400　（E）403
（F）406　（G）409　（H）412　（I）415　（J）418

（3）以下のイからハのうち、正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．Jung 法は、複合分類リスクの構造が乗法型の場合のみ用いることができ、Minimum Bias 法を用いた場合と結果が一致することが示されている。

ロ．Bailey - Simon 法では、部分リスク集団のウェイト n_{ij} が小さすぎると、相対クレームコスト指数 r_{ij} が大きく変動することがある。これは、Bailey - Simon 法の料率係数の決定方程式において、r_{ij} と $\hat{r}_{ij}$ との差の部分が 1 次項となっているためである。

ハ．古典的な線形モデルでは、目的変数の期待値は説明変数の線形結合で表され、誤差項の分布は正規分布に従い、その分散は一定といった仮定があるが、一般化線形モデルでは、目的変数の期待値は説明変数の線形結合を要素としたリンク関数で表され、目的変数は指数型分布族に従い、その分散は平均の関数で表せる。

（A）全て正しい　（B）イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　（D）ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　（F）ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　（H）全て誤り

Ⅱ．以下のような累計発生保険金実績データおよび累計支払保険金実績データのある保険種目に関して、2018 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2018 年度末の累計支払保険金の合計」）の評価を行うことを考える。なお、この保険種目は第 4 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとし、累計発生保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いるものとする。
また、計算の途中において、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計発生保険金の推移＞

経過年度＼事故年度	2015 年度	2016 年度	2017 年度	2018 年度
1	733	997	1,104	1,124
2	802	1,035	1,259	
3	859	1,183		
4	864			

＜2018 年度末における事故年度別　累計支払保険金＞

事故年度	2015 年度	2016 年度	2017 年度	2018 年度
累計支払保険金	864	1,108	1,049	604

このとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）チェインラダー法による 2018 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）500　（B）600　（C）700　（D）800　（E）900
（F）1,000　（G）1,100　（H）1,200　（I）1,300　（J）1,400

（２）2015年度から2018年度（2015年4月から2019年3月）に収入した保険料は、以下のとおりである。なお、会計年度は4月から3月までの期間であり、保険期間は1年間、払込方法は一時払のみとする。

保険料収入年月日	収入保険料
2015年10月1日	550
2016年2月1日	420
2016年5月1日	650
2016年9月1日	700

保険料収入年月日	収入保険料
2017年6月1日	540
2017年11月1日	660
2018年3月1日	590
2018年8月1日	840

このとき、2018年度のアーンドベーシス損害率（会計年度－事故年度統計ベース）に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、経過保険料は保険始期が月初にあることを前提とした12分の1法で計算し、発生保険金はチェインラダー法による最終発生値を用いること。

（Ａ）81%　（Ｂ）83%　（Ｃ）85%　（Ｄ）87%　（Ｅ）89%
（Ｆ）91%　（Ｇ）93%　（Ｈ）95%　（Ｉ）97%　（Ｊ）99%

（３）以下のイからハのうち、正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

イ．支払備金とは、期中において発生主義として認識されている保険金を現金主義に変換するために必要となる概念であり、見積手法によって区分すると、個別見積法、算式見積法、統計的見積法等に区分することができる。

ロ．支払備金の推定においては実績データの分析をすることが重要であり、その際には通貨価値の変動や引受契約集団の規模の変化、損害に係る社会の動向等が、ランオフパターンに影響を与えることに留意する必要がある。

ハ．保険負債の評価にあたっては、決定論的アプローチと確率論的アプローチがあるが、決定論的アプローチでは、リスクと不確実性に関する調整として、リスクフリーレートで将来キャッシュフローの割引を行う。

（Ａ）全て正しい　（Ｂ）イ、ロのみ正しい
（Ｃ）イ、ハのみ正しい　（Ｄ）ロ、ハのみ正しい
（Ｅ）イのみ正しい　（Ｆ）ロのみ正しい
（Ｇ）ハのみ正しい　（Ｈ）全て誤り

Ⅲ．保険金 X が平均 $\mu_X = 12$、分散 $\sigma_X{}^2 = 12$ の正規分布に従うとき、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）次の（A）～（D）のうち、エッシャー原理（$P(X) = E(Xe^{hX})/E(e^{hX})$）で $h = \alpha\ (\alpha > 0)$ として算出した保険料と同額になるものをすべて選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、いずれも同額とならない場合は（E）をマークしなさい。

（A）期待値原理（$P(X) = (1+h)\mu_X$）で $h = \alpha\ (\alpha > 0)$ として算出した保険料
（B）分散原理（$P(X) = \mu_X + h\sigma_X{}^2$）で $h = \alpha\ (\alpha > 0)$ として算出した保険料
（C）標準偏差原理（$P(X) = \mu_X + h\sigma_X$）で $h = \alpha\ (\alpha > 0)$ として算出した保険料
（D）指数原理（$P(X) = \log M_X(h)/h$）で $h = \alpha\ (\alpha > 0)$ として算出した保険料

（2）エッシャー原理（$P(X) = E(Xe^{hX})/E(e^{hX})$）で $h = 0.2$ として算出した保険料と同額になるように、ワンの保険料算出原理（$P(X) = E^{\Omega}(X)$（$F_X{}^{\Omega}(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h)$））の h の値を定める。このとき、ワンの保険料算出原理の h の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）0.1	（B）0.2	（C）0.3	（D）0.4	（E）0.5
（F）0.6	（G）0.7	（H）0.8	（I）0.9	（J）1.0

（3）エッシャー原理（$P(X) = E(Xe^{hX})/E(e^{hX})$）で $h = 0.2$ として算出した保険料と同額になるように、パーセンタイル原理（$P(X) = \min\{p \mid F_X(p) \geq 1-h\}$）の h の値を定める。このとき、パーセンタイル原理の h の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値（表に記載のない数値は直線補間により算出された数値）を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.500	0.421	0.345	0.274	0.212	0.159	0.115
$u(\varepsilon)$	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2

（A）0.12	（B）0.16	（C）0.20	（D）0.24	（E）0.28
（F）0.32	（G）0.36	（H）0.40	（I）0.44	（J）0.48

Ⅳ．ある保険会社の契約ポートフォリオは、年間クレーム件数が平均 20 のポアソン分布に従い、個々の損害額分布がパレート分布 $f(x)=3x^{-4}\,(x>1)$ に従っている。この契約ポートフォリオに対して、エクセスポイント $\alpha(>1)$、カバーリミット α の超過損害額再保険を手配するとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）$\alpha=2$ の超過損害額再保険を手配することにより、再保険を手配しない場合に比べて、保険会社のクレーム 1 件あたり保険金支払額（損害額－再保険金回収額）の期待値は $\boxed{\quad ① \quad}$ %減少する。①に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）5　（B）6　（C）7　（D）8　（E）9
（F）10　（G）11　（H）12　（I）13　（J）14

（2）再保険を手配しない場合の年間支払保険金総額の分散は $\boxed{\quad ② \quad}$ であるが、$\alpha=\boxed{\quad ③ \quad}$ の超過損害額再保険を手配することにより、年間支払保険金総額の分散は 20%減少する。②、③に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【②の選択肢】
（A）10　（B）20　（C）30　（D）40　（E）50
（F）60　（G）70　（H）80　（I）90　（J）100

【③の選択肢】
（A）1.58　（B）1.68　（C）1.78　（D）1.88　（E）1.98
（F）2.08　（G）2.18　（H）2.28　（I）2.38　（J）2.48

問題３． 次のⅠ～Ⅳの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　各８点　（計３２点）

Ⅰ．クレーム額分布 $f_X(x)$ が、$0,1,2,\cdots,r$ で定義され（$r=\infty$ でも可）、クレーム頻度分布 $\Pr\left(N=k\right)=p_k$ が、$p_k=\left(a+\dfrac{b}{k}\right)p_{k-1}$ $\left(k=1,2,3,\cdots\right)$ を満たしている。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）クレーム総額 $S=X_1+\cdots+X_N$ の確率関数 $f_S(x)$ の満たす再帰式を導出する。なお、本問において、離散型確率変数 Y に対する確率母関数 $P_Y\left(z\right)$ を、$P_Y\left(z\right)=E\left(z^Y\right)$ と定義する。

$p_k=\left(a+\dfrac{b}{k}\right)p_{k-1}$ より得られる関係式 $rp_r=a(r-1)\,p_{r-1}+(a+b)\,p_{r-1}$ の両辺に

$\left[P_X\left(z\right)\right]^{r-1}P_X{}'\left(z\right)$ を乗じ、r について総和をとると、

$P_S\left(z\right)=\sum_{r=0}^{\infty}p_r\left[P_X\left(z\right)\right]^r$　より　$P_S{}'\left(z\right)=\sum_{r=1}^{\infty}rp_r\left[P_X\left(z\right)\right]^{r-1}P_X{}'\left(z\right)$　が成り立つことを用いて以下のように整理できる。

$$P_S{}'\left(z\right)=\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)\times P_X\left(z\right)P_S{}'\left(z\right)+\left(\boxed{\quad ② \quad}\right)\times P_X{}'\left(z\right)P_S\left(z\right)$$

この式の両辺を z のべき級数に展開した際の z^{x-1} $\left(x=1,2,\cdots\right)$ の係数を比較し、以下の式を得る。

$$xf_S\left(x\right)=\left(\boxed{\quad ① \quad}\right)\times\sum_{y=0}^{\min(x,r)}\left(x-y\right)f_X\left(y\right)f_S\left(x-y\right)+\left(\boxed{\quad ② \quad}\right)\times\sum_{y=0}^{\min(x,r)}yf_X\left(y\right)f_S\left(x-y\right)$$

これを整理して、$f_S(x)$ の満たす再帰式

$$f_S\left(x\right)=\frac{\sum_{y=1}^{\min(x,r)}\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right)f_X\left(y\right)f_S\left(x-y\right)}{\boxed{\quad ④ \quad}}$$

を得る。なお、初期値 $f_S(0)$ は

$f_S(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(X_1+X_2+\cdots X_n=0)\Pr(N=k)$ より、$f_S(0)=P_N[f_X(0)]$ となる。

①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

【①、②の選択肢】

（Ａ）1　（Ｂ）a　（Ｃ）$a+1$　（Ｄ）$a-1$　（Ｅ）b
（Ｆ）$b+1$　（Ｇ）$b-1$　（Ｈ）$a+b$　（Ｉ）$a-b$　（Ｊ）$b-a$
（Ｋ）いずれにも該当しない

【③、④の選択肢】

（Ａ）$ax+by$　（Ｂ）$bx+ay$　（Ｃ）$\dfrac{a}{x}+by$　（Ｄ）$\dfrac{a}{y}+bx$　（Ｅ）$\dfrac{ax}{y}+b$
（Ｆ）$\dfrac{ay}{x}+b$　（Ｇ）$a+\dfrac{bx}{y}$　（Ｈ）$a+\dfrac{by}{x}$　（Ｉ）$f_S(0)$　（Ｊ）$1-f_X(0)$
（Ｋ）$a-f_X(0)$　（Ｌ）$1-af_X(0)$　（Ｍ）$b-f_X(0)$　（Ｎ）$1-bf_X(0)$　（Ｏ）$1+af_X(0)$
（Ｐ）$f_X(0)-b$　（Ｑ）$1+bf_X(0)$　（Ｒ）いずれにも該当しない

（2）クレーム頻度分布が満たす関係式 $p_k=\left(a+\dfrac{b}{k}\right)p_{k-1}$ において、$a=0, b=4$ が成り立つものとする。また、クレーム額分布は下表のとおりであるとする。

x	0	1	3
$f_X(x)$	0.50	0.15	0.35

このとき、クレーム総額 S が 4 以上となる確率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$e^{-1}=0.368$ を使用すること。

（Ａ）0.44　（Ｂ）0.46　（Ｃ）0.48　（Ｄ）0.50　（Ｅ）0.52
（Ｆ）0.54　（Ｇ）0.56　（Ｈ）0.58　（Ｉ）0.60　（Ｊ）0.62

Ⅱ．ポアソン過程を用いて IBNR クレーム（既発生未報告クレーム）件数を推定する。次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）クレーム件数過程 $\{N_t\}_{t\geq 0}$ がパラメータ λ のポアソン過程に従うものとし、i 番目のクレームが発生する時刻を T_i とする。また、i 番目のクレームが発生後、保険会社に報告されるまでの時間を V_i とする。各 V_i は独立であり、V_i の分布関数は i によらず $F(v)$ であるものとする。また、$\{T_i\}$ と $\{V_i\}$ は独立であるものとする。

ここで、時刻 t までに発生し、かつ発生から報告までの時間が v 以下であるクレーム件数を L とする。すなわち、$T_i \leq t$ 、$V_i \leq v$ を満たす i の個数を L とする。L のモーメント母関数 $M_L(h)$ は以下のようになる。

$$M_L(h) = \exp\{(\boxed{\quad ① \quad}) \times (\boxed{\quad ② \quad})\}$$

このことから、L は期待値が $\boxed{\quad ① \quad}$ のポアソン分布に従うことがわかる。①、②に入る適切なものは、選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

（A）$\lambda F(v)$　（B）$\lambda tF(v)$　（C）$\lambda tF(v)^{\lambda t}$
（D）$\lambda htF(v)$　（E）$\lambda htF(v)^{\lambda t}$　（F）$\lambda(1-F(v))$
（G）$\lambda t(1-F(v))$　（H）$\lambda t(1-F(v))^{\lambda t}$　（I）$\lambda ht(1-F(v))$
（J）$\lambda ht(1-F(v))^{\lambda t}$　（K）いずれにも該当しない

【②の選択肢】

（A）e^h　（B）e^h+1　（C）e^h-1　（D）$e^{th}+1$　（E）$e^{th}-1$
（F）e^{-h}　（G）$e^{-h}+1$　（H）$e^{-h}-1$　（I）$e^{-th}+1$　（J）$e^{-th}-1$
（K）いずれにも該当しない

（2）V_i が確率密度関数 $f(v) = 2/v^3 \ (v \geq 1)$ のパレート分布に従うとする。（1）の前提の下、時刻 $t=5$ における IBNR クレーム件数の期待値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、i 番目のクレームが保険会社に報告される時刻は T_i+V_i であり、時刻 $t=5$ における IBNR クレーム件数は、$T_i \leq 5$ 、$T_i+V_i > 5$ を満たす i の個数と表せる。

（A）1.1λ　（B）1.2λ　（C）1.3λ　（D）1.4λ　（E）1.5λ
（F）1.6λ　（G）1.7λ　（H）1.8λ　（I）1.9λ　（J）2.0λ

Ⅲ．ある保険商品のポートフォリオは、保険金支払件数が$\lambda = 2$のポアソン過程に従い、支払１件あたりの支払保険金Xが平均１の指数分布に従うことがわかっている。
この保険商品を安全割増率 50%で引き受けている元受保険会社が、破産確率を減少させるため、この保険商品に対して出再割合$\alpha(0 < \alpha < 1)$の比例再保険を付すことを検討している。このとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）出再割合$\alpha = 0.4$、再保険付加率 50%の比例再保険を付したとき、保有保険金に係る調整係数Rの値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A） 0.40	**（B）** 0.42	**（C）** 0.44	**（D）** 0.46	**（E）** 0.48
（F） 0.50	**（G）** 0.52	**（H）** 0.54	**（I）** 0.56	**（J）** 0.58

（２）（１）の代わりに、再保険付加率 80%の比例再保険を付したとき、保有保険金に係る調整係数Rが存在するための必要十分条件は$0 < \alpha <$ $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、その範囲内において調整係数Rを最大にする出再割合αの値は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。①、②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

（A） 0.50	**（B）** 0.54	**（C）** 0.58	**（D）** 0.62	**（E）** 0.66
（F） 0.70	**（G）** 0.74	**（H）** 0.78	**（I）** 0.82	**（J）** 0.86

【②の選択肢】

（A） 0.21	**（B）** 0.23	**（C）** 0.25	**（D）** 0.27	**（E）** 0.29
（F） 0.31	**（G）** 0.33	**（H）** 0.35	**（I）** 0.37	**（J）** 0.39

Ⅳ. ある保険会社が以下の３つの保険商品（保険期間１年）を販売することを検討している。

商品Ａ：自動車保険

商品Ｂ：火災保険

商品Ｃ：自動車保険と火災保険の一体型商品

営業保険料算出にあたっての基礎情報が以下のとおり与えられたとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

＜保険契約１件あたりの年間インカ―ドロス＞

【自動車保険】

○自然災害以外

インカードロス	350	380
発生確率	0.5	0.5

○自然災害

インカードロス	50	100	150
発生確率	0.5	0.3	0.2

【火災保険】

○自然災害以外

インカードロス	265	295
発生確率	0.5	0.5

○自然災害

インカードロス	100	200	300
発生確率	0.5	0.3	0.2

※自然災害以外のインカードロスと自然災害のインカードロスは互いに独立であるとする。

＜保険契約１件あたりの予定年間社費＞

・商品Ａ、商品Ｂ：150

・商品Ｃ：270

（自動車保険と火災保険の共通社費があり、商品Ａと商品Ｂの合計 300 よりも小さくなる。）

＜予定代理店手数料率＞　保険商品にかかわらず営業保険料の 20%

＜予定利潤率＞　保険商品にかかわらず営業保険料の 5%

（１）火災保険と自動車保険のインカードロスが互いに独立であるとして、純保険料法により各保険商品の営業保険料を算出したとき、商品Ｃの営業保険料は、商品Ａの営業保険料と商品Ｂの営業保険料の合計と比較して $\boxed{\quad ① \quad}$ %小さくなる。また、商品Ｃを販売した場合、ある保険契約について年間収支が赤字となる確率を P_1 とすると、P_1 の値は $\boxed{\quad ② \quad}$ となる。①、②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、社費および代理店手数料は予定通り支出されるものとする。

【①の選択肢】

（Ａ）0.5　（Ｂ）1.0　（Ｃ）1.5　（Ｄ）2.0　（Ｅ）2.5
（Ｆ）3.0　（Ｇ）3.5　（Ｈ）4.0　（Ｉ）4.5　（Ｊ）5.0

【②の選択肢】

（Ａ）0.21　（Ｂ）0.22　（Ｃ）0.23　（Ｄ）0.24　（Ｅ）0.25
（Ｆ）0.26　（Ｇ）0.27　（Ｈ）0.28　（Ｉ）0.29　（Ｊ）0.30

（２）（１）の営業保険料で販売を開始後しばらく経過し、自動車保険の自然災害のインカードロス X と火災保険の自然災害のインカードロス Y に関係性があることが判明した。そこで、自動車保険の自然災害のインカードロス X と火災保険の自然災害のインカードロス Y の同時分布のコピュラがクレイトン・コピュラ $C(u_1,u_2)=(u_1^{-2}+u_2^{-2}-1)^{-1/2}$ であるとして、商品Ｃの営業保険料を再検討する。

（１）で求めた営業保険料のまま商品Ｃを販売した場合、ある保険契約について年間収支が赤字となる確率を P_2 とすると、P_2-P_1 の値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ となり、赤字確率は（１）より大きくなる。ある保険契約について年間収支が赤字となる確率が P_1 を下回るようにするためには、予定利潤率を $\boxed{\quad ④ \quad}$ %よりも高く設定して営業保険料を算出する必要がある。③、④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、社費および代理店手数料は予定通り支出されるものとする。また、必要があれば、$C\left(0.5,0.5\right)=0.3780$ 、$C\left(0.8,0.5\right)=C\left(0.5,0.8\right)=0.4682$ 、$C\left(0.8,0.8\right)=0.6860$ を用いること。

【③の選択肢】

（Ａ）0.004　（Ｂ）0.014　（Ｃ）0.024　（Ｄ）0.034　（Ｅ）0.044
（Ｆ）0.054　（Ｇ）0.064　（Ｈ）0.074　（Ｉ）0.084　（Ｊ）0.094

【④の選択肢】

（Ａ）5.5　（Ｂ）6.0　（Ｃ）6.5　（Ｄ）7.0　（Ｅ）7.5
（Ｆ）8.0　（Ｇ）8.5　（Ｈ）9.0　（Ｉ）9.5　（Ｊ）10.0

問題４． 次のⅠ、Ⅱの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 各１０点 （計２０点）

Ⅰ． Y が確率密度関数 $f(y)=\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\beta y}$ $(y>0)$ のガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ に従うとき、$X=\dfrac{1}{Y}$ の従う確率分布を逆ガンマ分布 $IG(\alpha,\beta)$ と呼ぶこととする。この分布の期待値、分散はそれぞれ

$$E(X)=\frac{\beta}{\alpha-1}\ (\alpha>1)\ 、V(X)=\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\ (\alpha>2)$$ である。

ある保険契約について無作為に抽出した契約者の年間損害額 X は逆ガンマ分布 $IG(3,\Theta)$ に従い、さらに Θ は契約者ごとにばらつきがあり、ガンマ分布 $\Gamma(2,1/100)$ に従う。また、契約者単位の時系列で観察した場合、同一の契約者の Θ は同一であり、$\Theta=\theta$ の条件下で各年の損害額は独立であるとする。ある契約者の過去 12 年分の損害額 $X_1,X_2,\cdots,X_{12}$ から、この契約者の次年度の損害額を推定する。次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）Bühlmann モデルに基づく推定量 $\hat{\mu}_1$ は以下のとおりとなる。

$$\hat{\mu}_1=\boxed{\quad ① \quad}\times\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}X_i+\boxed{\quad ② \quad}$$

①、②に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【①の選択肢】

（Ａ）0.1	（Ｂ）0.2	（Ｃ）0.3	（Ｄ）0.4	（Ｅ）0.5
（Ｆ）0.6	（Ｇ）0.7	（Ｈ）0.8	（Ｉ）0.9	（Ｊ）1.0

【②の選択肢】

（Ａ）10	（Ｂ）20	（Ｃ）30	（Ｄ）40	（Ｅ）50
（Ｆ）60	（Ｇ）70	（Ｈ）80	（Ｉ）90	（Ｊ）100

（２）ベイズ方法論に基づく推定量 $\hat{\mu}_2$ は以下のとおりとなる。

$$\hat{\mu}_2=\frac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\boxed{\quad ④ \quad}+\displaystyle\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}}$$

③、④に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【③の選択肢】

（A）16	（B）17	（C）18	（D）19	（E）20
（F）32	（G）34	（H）36	（I）38	（J）40

【④の選択肢】

（A）0.01	（B）0.02	（C）0.03	（D）0.04	（E）0.05
（F）0.06	（G）0.07	（H）0.08	（I）0.09	（J）0.10

（3） θを定数として、$\Theta=\theta$の値が与えられているとする。このとき、損害額Xは逆ガンマ分布$IG(3,\theta)$に従うことから、Xの期待値は$\theta/2$である。$\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$のそれぞれについて、$\theta/2$からの平均 2 乗誤差を求めると、以下のとおりとなる。

$$E\left[\left(\hat{\mu}_1-\frac{\theta}{2}\right)^2\right]=\frac{7}{300}\theta^2-4\theta+400$$

$$E\left[\left(\hat{\mu}_2-\frac{\theta}{2}\right)^2\right]=\boxed{\quad ⑤ \quad}\times\theta^2-\boxed{\quad ⑥ \quad}\times\theta+\boxed{\quad ⑦ \quad}$$

⑤～⑦に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

ただし、$\hat{\mu}_2$については、$\boxed{\quad ④ \quad}$は$\displaystyle\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}$に比べて小さく無視できるものとし、

$$\hat{\mu}_2\approx\frac{\boxed{\quad ③ \quad}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}}$$ と近似すること。

【⑤の選択肢】

（A）0.0105	（B）0.0115	（C）0.0125	（D）0.0135	（E）0.0145
（F）0.0155	（G）0.0165	（H）0.0175	（I）0.0185	（J）0.0195

【⑥の選択肢】

（A）0	（B）1	（C）2	（D）3	（E）4
（F）5	（G）6	（H）7	（I）8	（J）9

【⑦の選択肢】

（A）0	（B）10	（C）20	（D）30	（E）40
（F）50	（G）60	（H）70	（I）80	（J）90

Ⅱ．ある保険会社のサープラスの推移U_tは、期首サープラスu、単位時間あたりの収入保険料c、クレーム額X_kを用いて、

$$U_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} X_k$$

により表されるものとし、クレーム件数過程$\{N_t\}_{t\geq 0}$はパラメータλのポアソン過程に従うものとする。

ここで、確率変数$\Theta(>0)$に対し、各nについてX_kは以下の式を満たすものと仮定する。

$$P\left(X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n \middle| \Theta = \theta\right) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\theta x_k} \qquad \cdots（ｉ）$$

このモデルにおける破産確率を考える。なお、このモデルでは「$U_t < 0$となる状態」を破産と呼び、破産時刻Tを$T = \min\{t \mid U_t < 0\}$、破産確率$\varepsilon(u)$を$\varepsilon(u) = P(T < \infty)$、存続確率$\rho(u)$を$\rho(u) = 1 - \varepsilon(u)$と定義する。次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）θを定数として、$\Theta = \theta$の値が与えられている場合を考える。このとき、（ｉ）式より、クレーム額X_kは互いに独立に平均$\dfrac{1}{\theta}$の指数分布に従う。

単位時間あたりの収入保険料が単位時間あたりのクレーム額の期待値以下である場合、破産確率は1となる。したがって、$\theta \leq \boxed{\quad ① \quad}$のとき$\varepsilon(u) = 1$となる。

次に、$\theta > \boxed{\quad ① \quad}$の場合を考える。存続確率$\rho(u)$は

$$\rho'(u) = \frac{\lambda}{c}\left\{\rho(u) - \int_0^u \rho(u - x)\, dF_X(x)\right\} \qquad （F_X(x)\text{は個々のクレーム額}X\text{の分布関数}）$$

を満たすことから、$\rho''(u) = -\left(\boxed{\quad ② \quad} - \boxed{\quad ③ \quad}\right)\rho'(u)$が成り立つ。

この微分方程式を、$\varepsilon(0) = \dfrac{\lambda}{\theta c}$が成り立つことを踏まえ、適切な境界条件の下で解くことによって

$$\varepsilon(u) = 1 - \rho(u) = \frac{\lambda}{\theta c} \exp\left\{-\left(\boxed{\quad ② \quad} - \boxed{\quad ③ \quad}\right) u\right\}$$

が得られる。①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（Ａ）λ　（Ｂ）θ　（Ｃ）c　（Ｄ）$\theta\lambda$　（Ｅ）$c\lambda$

（Ｆ）$\dfrac{\lambda}{\theta}$　（Ｇ）$\dfrac{\lambda}{c}$　（Ｈ）$\dfrac{\lambda}{\theta c}$　（Ｉ）$\dfrac{\theta\lambda}{c}$　（Ｊ）$\dfrac{c\lambda}{\theta}$

（Ｋ）いずれにも該当しない

（2）Θ がガンマ分布 $f_{\Theta}(\theta)=\theta e^{-\theta}\ (\theta>0)$ に従う場合を考える。このとき、$X_1,\cdots,X_n$ の同時分布の生存コピュラ $\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)$ はアルキメデス型となり、$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)=\varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_n))$ の形で表すことができる。ここで、生成作用素 $\varphi(u)$ は $\varphi(u)=$ $\boxed{\quad ④ \quad}$ となる。

また、このとき、X_i と $X_j\ (i\neq j)$ の右裾従属係数 $\lambda_u=\lim_{u\to 1-0}P\left(F_{X_i}(X_i)>u \middle| F_{X_j}(X_j)>u\right)$ の値は $\lambda_u=$ $\boxed{\quad ⑤ \quad}$ となる。④に当てはまる最も適切なもの、および⑤に入る数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

【④の選択肢】

（A）$(-\log u)^{\frac{1}{4}}$　（B）$(-\log u)^{\frac{1}{2}}$　（C）$-\log u$　（D）$(-\log u)^2$　（E）$(-\log u)^4$

（F）$u^{-\frac{1}{4}}-1$　（G）$u^{-\frac{1}{2}}-1$　（H）$u^{-1}-1$　（I）$u^{-2}-1$　（J）$u^{-4}-1$

（K）いずれにも該当しない

【⑤の選択肢】

（A）0　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）$\frac{3}{4}$　（E）1

（F）$\frac{5}{4}$　（G）$\frac{3}{2}$　（H）$\frac{7}{4}$　（I）2　（J）$\frac{9}{4}$

（3）Θ がガンマ分布 $f_{\Theta}(\theta)=\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\ (\theta>0)$ に従う場合を考える。（1）の結果を用いると、このモデルにおける破産確率 $\varepsilon(u)$ を求めることができ、期首サープラス u について $u\to\infty$ の極限をとった場合の破産確率 $\lim_{u\to\infty}\varepsilon(u)$ は以下のように表せる。

$$\lim_{u\to\infty}\varepsilon(u)=\frac{\gamma\left(\boxed{\quad ⑥ \quad},\boxed{\quad ⑦ \quad}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$　（$\gamma(a,b)=\int_0^b t^{a-1}e^{-t}dt$ とする。）

⑥、⑦に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）α　（B）$\beta\lambda c$　（C）$\frac{\lambda c}{\beta}$　（D）$\frac{\beta c}{\lambda}$　（E）$\frac{\beta\lambda}{c}$

（F）β　（G）$\frac{1}{\beta\lambda c}$　（H）$\frac{\beta}{\lambda c}$　（I）$\frac{\lambda}{\beta c}$　（J）$\frac{c}{\beta\lambda}$

（K）いずれにも該当しない

以上

損保数理（解答例）

問題１

Ⅰ．

<u>（１）**（H）**　（２）**（C）**</u>　　［（１）２点　（２）２点］

（１）

1 年契約の予定損害率，予定新契約費率，予定維持費率をそれぞれ p 、α 、β とし、代理店手数料率と利潤率をそれぞれ θ 、δ とすると、長期係数 K は以下のとおりとなる。

$$K = \frac{\alpha + (\beta + p) \times \dfrac{1 - v^5}{1 - v}}{1 - (\theta + \delta)}$$

ここで，予定利率は 1%であるから $v = \dfrac{1}{1 + 0.01}$ である。$p = 0.5,\ \alpha = 0.2,\ \beta = 0.1,\ \theta = 0.15,\ \delta = 0.05$ を代入すると $K = 3.93$ となる。

（２）

保険期間 5 年の長期契約の第 3 保険年度末における未経過料率係数を U_3 とすると

$$U_3 = \frac{(\beta + p)\dfrac{1 - v^2}{1 - v}}{\alpha + (\beta + p)\dfrac{1 - v^5}{1 - v}}$$

であり、 $p = 0.5,\ \alpha = 0.2,\ \beta = 0.1$ を代入すると $U_3 = 0.38$ となる。

Ⅱ.

(D)　　［4 点］

クレーム総額を表す確率変数をSとすると、純保険料総額は、

$$E(S)+u(0.99)\sqrt{V(S)}$$

と表すことができる。ここで、クレーム件数NはパラメータΘのポアソン分布に従い、Θはガンマ分布$\Gamma(20,1)$に従うことから、Nは負の二項分布$NB\left(k=20, p=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\right)$に従うことがわかる。(テキスト 2-9)

よって、

$$E(N)=\frac{k(1-p)}{p}=\frac{20(1-0.5)}{0.5}=20 \quad 、V(N)=\frac{k(1-p)}{p^2}=\frac{20(1-0.5)}{0.5^2}=40$$

となる。次に、クレーム金額Xが一様分布$U(0,12)$に従うことから、

$$E(X)=\frac{12}{2}=6 \quad 、V(X)=\frac{12^2}{12}=12$$

となる。よって、

$$E(S)=E(X)E(N)=6\times 20=120$$

$$V(S)=V(X)E(N)+E(X)^2V(N)=12\times 20+6^2\times 40=1,680$$

となる。以上から、純保険料総額は

$$E(S)+u(0.99)\sqrt{V(S)}=120+2.3263\sqrt{1,680}=215$$

となる。

Ⅲ.

（Ｉ）　　［４点］

予定契約消滅率を考慮した現価率を$\phi = 0.98$、満期返戻金を$W = 120$とする。
積立保険料として平準式積立保険料を採用した場合の積立保険料Pは

$$P = W\phi^8 \frac{1-\phi}{1-\phi^8}$$

であるから、将来法によって第 5 保険年度末の払戻積立金V_1は、

$$V_1 = W\phi^3 - P\frac{1-\phi^3}{1-\phi} = W\frac{\phi^3-\phi^8}{1-\phi^8}$$

と求められる。一方、積立保険料として全期チルメル式積立保険料を採用した場合、初保険年度の積立保険料と第 2 保険年度以降の積立保険料の差額をαとすると、第 2 保険年度以降の積立保険料P_Sは

$$P_S = \left(\alpha + W\phi^8\right) \times \frac{1-\phi}{1-\phi^8} \qquad \text{（テキスト 6-7）}$$

となるため、将来法によって第 5 保険年度末の払戻積立金V_2は、

$$V_2 = W\phi^3 - P_S\frac{1-\phi^3}{1-\phi} = W\phi^3 - \left(\alpha + W\phi^8\right)\frac{1-\phi}{1-\phi^8}\frac{1-\phi^3}{1-\phi} = V_1 - \alpha\frac{1-\phi^3}{1-\phi^8}$$

と求められる。ここで、$V_2 / V_1 = 0.975$が成り立つことから、

$$\alpha\frac{1-\phi^3}{1-\phi^8} = 0.025V_1$$

が得られる。したがって、αの値は、

$$\alpha = 0.025V_1\frac{1-\phi^8}{1-\phi^3} = 0.025W\frac{\phi^3-\phi^8}{1-\phi^8}\frac{1-\phi^8}{1-\phi^3} = 0.025W\frac{\phi^3-\phi^8}{1-\phi^3}$$

$$= 0.025 \times 120 \times \frac{0.98^3 - 0.98^8}{1-0.98^3} = 4.6$$

となる。

Ⅳ.

（1）**（C）**　（2）**（E）**　　　［（1）２点　（2）２点］

（1）

保険金 X と保険金 Y の観測値をそれぞれ x と y とする。事故番号が $i > j$ であるようなすべての $\left(x_i, y_i\right)$，

$\left(x_j, y_j\right)$ の組に対して、$\left(x_i - x_j, y_i - y_j\right)$ の符号を調べると以下のとおりとなる。

(x,y)	$(23,49)$	$(21,32)$	$(12,20)$	$(15,40)$	$(13,8)$	$(18,11)$
$(23,49)$		$(-,-)$	$(-,-)$	$(-,-)$	$(-,-)$	$(-,-)$
$(21,32)$			$(-,-)$	$(-,+)$	$(-,-)$	$(-,-)$
$(12,20)$				$(+,+)$	$(+,-)$	$(+,-)$
$(15,40)$					$(-,-)$	$(+,-)$
$(13,8)$						$(+,+)$
$(18,11)$						

となる。よって、$sign\left(\left(x_i - x_j, y_i - y_j\right)\right)$ を計算すると。

(x,y)	$(23,49)$	$(21,32)$	$(12,20)$	$(15,40)$	$(13,8)$	$(18,11)$
$(23,49)$		1	1	1	1	1
$(21,32)$			1	-1	1	1
$(12,20)$				1	-1	-1
$(15,40)$					1	-1
$(13,8)$						1
$(18,11)$						

であることから、ケンドールの τ は、

$$\frac{2}{6\times 5}\sum_{i>j} sign\left(\left(x_i - x_j, y_i - y_j\right)\right) = \frac{7}{15} = 0.467$$

となる。

（２）

スピアマンの ρ は，$\left\{\left(\hat{F}_X(x_i), \hat{F}_Y(y_i)\right)\right\}_{i=1,\cdots,6}$ （$\hat{F}_X(x_i), \hat{F}_Y(y_i)$ は，経験分布の分布関数）に対して計算したピアソンの積率相関係数であり、

$$\hat{F}_X(x_i) = 1 - \frac{rank(x_i) - 1}{\text{データの数}}$$

であり、$\hat{F}_Y(y_i)$ についても同様であることから $\left\{\left(rank(x_i), rank(y_i)\right)\right\}_{i=1,\cdots,6}$ に対して計算したピアソンの積率相関係数に等しい。

事故番号	1	2	3	4	5	6
$rank(x_i)$	1	2	6	4	5	3
$rank(y_i)$	1	3	4	2	6	5

であることからスピアマンの ρ は 0.60 となる。

V．

（１）（G）　（２）①（A）②（A）（①、②は完答）　　［（１）２点　（２）２点］

（１）

$p_k = \dfrac{\lambda_0{}^k}{k!} e^{-\lambda_0}$、クレーム件数$k$が観測された回数を$n_k$として、尤度$L$は$L = \prod_{k=0}^{\infty} p_k{}^{n_k}$であるから、対数尤度$l$は、

$$l = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \log p_k = \sum_{k=0}^{\infty} n_k \left(-\lambda_0 + k\log\lambda_0 - \log k!\right)$$

となる。したがって、最尤推定値λは

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_0} = -\sum_{k=0}^{\infty} n_k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k n_k}{\lambda_0} = -100 + \frac{100}{\lambda_0} = 0$$ を解いて、$\lambda = 1$となる。

1 年間のクレーム件数が平均 1 のポアソン分布に従う場合の理論契約者数は下表のとおりとなる、

クレーム件数	理論契約者数
0 件	$100 \times e^{-1} = 36.8$（人）
1 件	$100 \times e^{-1} = 36.8$（人）
2 件	$100 \times 0.5e^{-1} = 18.4$（人）
3 件以上	$100 - (36.8 + 36.8 + 18.4) = 8$（人）

したがって、検定統計量Tは次のとおりとなる。

$$T = \frac{(48-36.8)^2}{36.8} + \frac{(24-36.8)^2}{36.8} + \frac{(16-18.4)^2}{18.4} + \frac{(12-8)^2}{8} = 10.2$$

（２）

事象数をn、推定した確率分布の母数の数をrとしたとき、χ^2適合度検定の自由度は$k = n - r - 1$となるため、本問題における自由度は$4 - 1 - 1 = 2$となる。したがって、

$10.2 > 5.99$（自由度 2 のχ^2分布の上側 0.05 点）

$10.2 > 9.21$（自由度 2 のχ^2分布の上側 0.01 点）

より、有意水準 5%とした場合も、有意水準 1%とした場合も、帰無仮説H_0は棄却される。

問題２

Ⅰ．

（１）①（**Ｅ**）②（**Ａ**）③（**Ｆ**）④（**Ｂ**）（①～④は完答）　（２）（**Ｈ**）　（３）（**Ｇ**）

［（１）３点　（２）２点　（３）２点］

（１）

尤度関数は、

$$L=\prod_{i=1}^{4}\frac{y_i^{-1}}{\Gamma(1/\phi)}\left(\frac{y_i}{\mu_i\phi}\right)^{\frac{1}{\phi}}\exp\left(-\frac{y_i}{\mu_i\phi}\right)$$

であることから、対数尤度関数は、

$$l=\log L=\sum_{i=1}^{4}\left[-\log y_i-\log\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)+\frac{1}{\phi}\left(\log\frac{y_i}{\phi}+\log\frac{1}{\mu_i}-\frac{y_i}{\mu_i}\right)\right]$$

である。

ここで、$y_1=400$（地域Ａかつ耐火）、$y_2=600$（地域Ａかつ非耐火）、$y_3=600$（地域Ｂかつ耐火）、

$y_4=800$（地域Ｂかつ非耐火）とすると、

$$\mu_i=g^{-1}\left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}\right)=\exp\left(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}\right)=\begin{cases}e^{\beta_1+\beta_3} & (i=1)\\ e^{\beta_1} & (i=2)\\ e^{\beta_2+\beta_3} & (i=3)\\ e^{\beta_2} & (i=4)\end{cases}$$

より、

$$l=-\log 400-\log\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)+\frac{1}{\phi}\left[\log\frac{400}{\phi}-\left(\beta_1+\beta_3\right)-\frac{400}{e^{\beta_1+\beta_3}}\right]$$

$$-\log 600-\log\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)+\frac{1}{\phi}\left[\log\frac{600}{\phi}-\beta_1-\frac{600}{e^{\beta_1}}\right]$$

$$-\log 600-\log\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)+\frac{1}{\phi}\left[\log\frac{600}{\phi}-\left(\beta_2+\beta_3\right)-\frac{600}{e^{\beta_2+\beta_3}}\right]$$

$$-\log 800-\log\Gamma\left(\frac{1}{\phi}\right)+\frac{1}{\phi}\left[\log\frac{800}{\phi}-\beta_2-\frac{800}{e^{\beta_2}}\right]$$

であるから、パラメータ β_1,β_2,β_3 が満たす連立方程式は、

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_1}=\frac{400}{e^{\beta_1+\beta_3}}+\frac{600}{e^{\beta_1}}-2=0 \quad \cdots（ｉ）$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_2}=\frac{600}{e^{\beta_2+\beta_3}}+\frac{800}{e^{\beta_2}}-2=0 \quad \cdots（ⅱ）$$

$$\phi\frac{\partial l}{\partial\beta_3}=\frac{400}{e^{\beta_1+\beta_3}}+\frac{600}{e^{\beta_2+\beta_3}}-2=0 \quad \cdots（ⅲ）$$

となる。

（２）

（１）で導出した連立方程式を解く。

（ｉ）、（ⅲ）より、$e^{\beta_2}=\dfrac{e^{\beta_1}}{e^{\beta_3}}$

上記結果ならびに（ⅱ）、（ⅲ）より、$e^{\beta_3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これらの結果を（ｉ）、（ⅱ）に代入し、$e^{\beta_1+\beta_3}=200+\dfrac{300}{\sqrt{2}}=412$ となる。

（３）

イ　誤り　Jung 法は、乗法型に限られるのではなく、料率係数を結びつける算式が一般的な場合にも拡張できることが示されている。（テキスト 4-13）

ロ　誤り

（誤）料率係数の決定方程式において、r_{ij} と $\hat{r}_{ij}$ との差の部分が 1 次項となっているため

（正）料率係数の決定方程式において、r_{ij} と $\hat{r}_{ij}$ との差の部分が 2 次項となっているため（テキスト 4-14）

ハ　正しい（テキスト 4-18）

Ⅱ.

（1）**（H）**　（2）**（D）**　（3）**（F）**　　［（1）３点　（2）２点　（3）２点］

（1）

実績の累計発生保険金のロスディベロップメントファクター（LDF）は、以下のとおり。

		事故年度			
		2015 年度	2016 年度	2017 年度	2018 年度
経過年度	1→2	1.094	1.038	1.140	
	2→3	1.071	1.143		
	3→4	1.006			

以上より、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値は以下のようになる。

経過年度	1→2	2→3	3→4
LDF	1.091	1.107	1.006

したがって、2016 年度から 2018 年度について各々、累積発生保険金のロスディベロップメントファクターは 1.006、1.114、1.215 となる。また、2015 年度は第 4 経過年度まで達しているため、ロスディベロップメントファクターは 1.000 となる。これらを各事故年度の直近累計発生保険金に乗じると、予想最終発生保険金は 864、1,190、1,403、1,366 となる。したがって、支払備金は

（864＋1,190＋1,403＋1,366）－（864＋1,108＋1,049＋604）＝1,198

となる。

（2）

2018 年度の経過保険料は、

$540\times\frac{2}{12}+660\times\frac{7}{12}+590\times\frac{11}{12}+840\times\frac{8}{12}$ ＝1,576 であり、2018 事故年度の発生保険金は（1）より 1,366 であることから、2018 年度のアーンドベーシス損害率（会計年度－事故年度統計ベース）は、

1,366÷1,576＝87%となる。

（3）

イ　誤り　支払備金とは、期中において現金主義として認識されている保険金を発生主義に変換するために必要となる概念である。(テキスト 5-1)

ロ　正しい（テキスト 5-10)

ハ　誤り　決定論的アプローチでは、リスクと不確実性に関する調整として、リスクフリーレートではなく、低めに調整した割引率（リスクフリーレート－α）で割り引くことで調整を行う。(テキスト 5-25)

Ⅲ．

（１）**（Ａ）（Ｂ）**　（２）**（Ｇ）**　（３）**（Ｄ）**　　［（１）３点　（２）２点　（３）２点］

（１）

各保険料算出原理を用いて保険料を算出した結果は次のとおりとなり、エッシャー原理と一致するのは期待値原理と分散原理である。

エッシャー原理：

$$P(X)=\frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}=\frac{M_X'(h)}{M_X(h)}=(\log M_X(h))'=(\mu_X h+\frac{{\sigma_X}^2h^2}{2})'=\mu_X+h{\sigma_X}^2=12(1+\alpha)$$

期待値原理：$P(X)=(1+h)\mu_X=12(1+\alpha)$

分散原理：$P(X)=\mu_X+h{\sigma_X}^2=12(1+\alpha)$

標準偏差原理：$P(X)=\mu_X+h\sigma_X=12+\sqrt{12}\alpha$

指数原理：$P(X)=\dfrac{\log M_X(h)}{h}=\dfrac{\mu_X h+{\sigma_X}^2h^2/2}{h}=\mu_X+\dfrac{h}{2}{\sigma_X}^2=12+6\alpha$

（２）

エッシャー原理で$h=0.2$として算出した保険料は$P(X)=\mu_X+h{\sigma_X}^2=12+0.2\times12=14.4$となる。

また、テキスト 7-13 のとおり、保険金Xが平均μ_X、分散${\sigma_X}^2$の正規分布に従うとき、ワンの保険料

算出原理を用いて保険料を算出した結果は$P(X)=\mu_X+h\sigma_X$となり、標準偏差原理と一致する。

以上より、ワンの保険料算出原理のhの値は、次のとおりとなる。

$14.4=12+\sqrt{12}h$

$\Leftrightarrow h=0.693$

（３）

（２）より、$P(X)=\mu_X+0.693\sigma_X$であるため、パーセンタイル原理（$P(X)=\min\{p\,|\,F_X(p)\geq1-h\}$）

のhの値は、標準正規分布の上側ε点が$u(\varepsilon)=0.693$となるεの値と一致する。

したがって、パーセンタイル原理のhの値は、次のとおりとなる。

$h=0.274+(0.212-0.274)\times(0.693-0.6)/(0.8-0.6)=0.245$

Ⅳ.

（１）**（B）**　（２）②**（F）**③**（F）**　　［（１）３点　（２）②２点 ③２点］

（１）

超過損害額再保険手配後のクレーム１件あたりの保険金支払額 X' の期待値は、

$$E(X')=\int_1^{\alpha} x\cdot 3x^{-4}dx+\int_{\alpha}^{2\alpha}\alpha\cdot 3x^{-4}dx+\int_{2\alpha}^{\infty}(x-\alpha)\cdot 3x^{-4}dx$$

$$=\left[-\frac{3}{2}x^{-2}\right]_1^{\alpha}+\left[-\alpha x^{-3}\right]_{\alpha}^{2\alpha}+\left[-\frac{3}{2}x^{-2}+\alpha x^{-3}\right]_{2\alpha}^{\infty}$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\alpha^{-2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{8}\alpha^{-2}+\alpha^{-2}\right)+\left(\frac{3}{8}\alpha^{-2}-\frac{1}{8}\alpha^{-2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}\alpha^{-2}$$

パレート分布 $f(x)=3x^{-4}(x>1)$ の期待値は $\frac{3}{2}$ なので、保険金支払額の期待値の減少率は、

$$\frac{3}{8}\alpha^{-2}\div\frac{3}{2}=\frac{1}{4}\alpha^{-2}$$

となり、$\alpha=2$ を代入すると、減少率は 6.25%となる。

（２）

パレート分布 $f(x)=3x^{-4}(x>1)$ の期待値は 1.5、分散は 0.75 なので、超過損害額再保険手配前の年間支払保険金総額 S の分散 $V(S)$ は、超過損害額再保険手配前のクレーム１件あたりの保険金支払額を X 、年間クレーム件数を N とおくと、$V(S)=V(X)E(N)+E(X)^2V(N)=0.75\times 20+1.5^2\times 20=60$ となる。

つぎに、超過損害額再保険手配後の支払保険金総額 S' の分散 $V(S')$ は、ポアソン分布の性質により、$V(S')=20E(X'^2)$ となる。$E(X'^2)$ を計算すると、

$$E(X'^2)=\int_1^{\alpha} x^2\cdot 3x^{-4}dx+\int_{\alpha}^{2\alpha}\alpha^2\cdot 3x^{-4}dx+\int_{2\alpha}^{\infty}(x-\alpha)^2\cdot 3x^{-4}dx$$

$$=\left[-3x^{-1}\right]_1^{\alpha}+\left[-\alpha^2x^{-3}\right]_{\alpha}^{2\alpha}+\left[-3x^{-1}+3\alpha x^{-2}-\alpha^2x^{-3}\right]_{2\alpha}^{\infty}$$

$$=\left(-3\alpha^{-1}+3\right)+\left(-\frac{1}{8}\alpha^{-1}+\alpha^{-1}\right)+\left(\frac{3}{2}\alpha^{-1}-\frac{3}{4}\alpha^{-1}+\frac{1}{8}\alpha^{-1}\right)$$

$$=3-\frac{5}{4}\alpha^{-1}$$

となるので、年間支払保険金総額の分散の減少率は

$$\left(60-20\times\left(3-\frac{5}{4}\alpha^{-1}\right)\right)\div 60=\frac{5\alpha^{-1}}{12}$$

となる。

したがって、年間支払保険金総額の分散が 20%減少するαは、

$$\frac{5\alpha^{-1}}{12} = 0.2$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 2.08$$
となる。

問題３

Ⅰ.

（１）①（Ｂ）②（Ｈ）（①、②は完答）③（Ｈ）④（Ｌ）（③、④は完答）　（２）（Ｇ）

［（１）①②２点 ③④３点　（２） ３点］

（１）

テキスト 2-24、2-25 のとおり。

（２）

$P[S \geq 4] = 1 - P[S < 4]$ であり、クレーム頻度分布は、$a = 0, b = 4$ よりパラメータ 4 のポアソン分布である。

$$P[S=0] = f_S(0) = P_N\left[f_X(0)\right] = P_N(0.5) = E\left(0.5^N\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n \frac{4^n}{n!} e^{-4} = e^{-4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^{-4} e^2 = e^{-2}$$

$$P[S=1] = f_S(1) = 4 f_X(1) f_S(0) = 4 \times 0.15 \times e^{-2} = 0.6e^{-2}$$

$$P[S=2] = f_S(2) = \frac{4}{2} \sum_{y=1}^{\min(2,3)} y f_X(y) f_S(x-y)$$

$$= \frac{4}{2}\left(f_X(1) f_S(1) + 2 f_X(2) f_S(0)\right)$$

$$= \frac{4}{2}\left(0.15 \times 0.6e^{-2} + 0\right) = 0.18e^{-2}$$

$$P[S=3] = f_S(3) = \frac{4}{3} \sum_{y=1}^{3} y f_X(y) f_S(x-y)$$

$$= \frac{4}{3}\left(1 f_X(1) f_S(2) + 2 f_X(2) f_S(1) + 3 f_X(3) f_S(0)\right)$$

$$= \frac{4}{3}\left(0.15 \times 0.18e^{-2} + 0 + 3 \times 0.35e^{-2}\right) = 1.436e^{-2}$$

よって、

$$P[S \geq 4] = 1 - \left(1 + 0.6 + 0.18 + 1.436\right)e^{-2} = 1 - 3.216 \times 0.368^2 = 0.564$$

となる。

Ⅱ.

（1）①（B）②（C）　（2）（H）　　［（1）①３点 ②２点　（2）３点］

（1）

各クレームについて $V_i \le v$ となる確率は $F(v)$ である。従って、$F(v)$ の確率で 1、$1-F(v)$ の確率で 0 の値をとる確率変数を X_j として、L は $L = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$ と表せることから、L のモーメント母関数 $M_L(h)$ は以下のとおり計算できる。

$$M_L(h) = E\left[e^{hL}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\exp\left\{h\sum_{j=1}^{N_t} X_j\right\} \middle| N_t = n\right] P(N_t = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[E\left(\exp\left\{hX_j\right\}\right)\right]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[F(v)e^h + \left(1-F(v)\right)\right]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\lambda t\left\{F(v)e^h + 1 - F(v)\right\}\right]^n}{n!}$$

$$= \exp\left[-\lambda t + \lambda t\left\{F(v)e^h + 1 - F(v)\right\}\right]$$

$$= \exp\left[\lambda t F(v)\left(e^h - 1\right)\right]$$

よって、L はパラメータ $\lambda t F(v)$ のポアソン分布に従う。

（2）

（1）の結果から $T_i \le t$ 、$V_i \le v$ を満たす i の個数はパラメータ $\lambda t F(v)$ のポアソン分布に従い、その期待値は $\lambda t F(v)$ である、よって、$t \le T_i \le t + dt$ 、$v \le V_i \le v + dv$ を満たす i の個数の期待値は

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{d}{dv}\left(\lambda t F(v)\right) dtdv = \lambda f(v) dtdv$ である。

ここで、時刻 $t = 5$ までに保険会社に報告されるクレーム件数の期待値を考える。これは、$T_i \le 5$ 、

$V_i \le 5 - T_i$ を満たす i の個数の期待値であり、$1 \le V_i$ に留意すると、以下のように表せる。

$$\int_0^4 dt \int_1^{5-t} dv \lambda f(v) = \lambda \int_0^4 \{F(5-t) - F(1)\} dt \quad \cdots （ｉ）$$

V_i の確率密度関数は $f(v) = 2/v^3 \ \ (v \ge 1)$ であるから、分布関数は

$F(v) = \int_1^v \frac{2}{x^3} dx = 1 - \frac{1}{v^2} \ \ (v \ge 1)$ である。したがって、（ｉ）は

$$\lambda \int_0^4 \{F(5-t) - F(1)\} dt = \lambda \int_0^4 \left\{1 - \frac{1}{(5-t)^2}\right\} dt = \lambda \left[t - \frac{1}{5-t}\right]_0^4 = 3.2\lambda$$

と計算できる。時刻 $t = 5$ までに発生するクレーム件数の期待値は 5λ であるから、求める IBNR クレーム件数の期待値は $5\lambda - 3.2\lambda = 1.8\lambda$ となる。

Ⅲ.

（１）（Ｉ）　（２）①（Ｄ）②（Ｈ）　　［（１）４点　（２）①２点 ②２点］

（１）

比例再保険を付した場合の１件あたりの正味支払保険金 $X'=(1-\alpha)X$ は、平均 $(1-\alpha)$ の指数分布に従うため、積率母関数 $M_{X'}(R)$ は、$M_{X'}(R)=\dfrac{1}{1-R(1-\alpha)}$ となる。（定義域は $R<\dfrac{1}{1-\alpha}$ ）

また、比例再保険を付した場合の正味収入保険料 c' は、安全割増率を θ、再保険付加率を ξ とすると、

$c'=(1+\theta)\lambda-(1+\xi)\lambda\alpha$ となる。

したがって、調整係数 R は以下のとおりとなる。

$$\lambda+c'R=\lambda M_{X'}(R)$$

$$\lambda+\left\{(1+\theta)\lambda-(1+\xi)\lambda\alpha\right\}R=\lambda\frac{1}{1-R(1-\alpha)}$$

$$1+\left\{(1+\theta)-(1+\xi)\alpha\right\}R=\frac{1}{1-R(1-\alpha)}$$

$$R=\frac{\theta-\alpha\xi}{(1-\alpha)\left\{(1+\theta)-(1+\xi)\alpha\right\}}$$

問題文より、$\alpha=0.4$ 、$\theta=0.5$、$\xi=0.5$ なので、

$$R=\frac{0.5-0.4\times0.5}{(1-0.4)\left\{(1+0.5)-(1+0.5)\times0.4\right\}}=0.56$$

（２）

問題文より、$\theta=0.5$、$\xi=0.8$ なので、調整方程式は

$$1+(1.5-1.8\alpha)R=\frac{1}{1-R(1-\alpha)}\qquad\left(R<\frac{1}{1-\alpha}\right)$$

となる。$R=0$ のとき両辺はともに１となること、および両辺のグラフの形状から、調整係数 R が存在する（調整方程式が正の解をもつ）ための必要十分条件は、$R=0$ において右辺の傾きが左辺の傾きより小さいことである。よって、求める条件は、

$1.5-1.8\alpha>1-\alpha$ より、$\alpha<\dfrac{5}{8}=0.625$ となる。

つぎに、$0<\alpha<0.625$ において、調整係数が最大となる α を求める。

$$R=\frac{0.5-0.8\alpha}{(1-\alpha)(1.5-1.8\alpha)}=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1.5-1.8\alpha}$$

$$\frac{dR}{d\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1.8}{(1.5-1.8\alpha)^2}$$

$\frac{dR}{d\alpha}=0$ となるとき、R の値が最大となるので、

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2}-\frac{1.8}{(1.5-1.8\alpha)^2}=0$$

$$1.8(1-\alpha)^2=(1.5-1.8\alpha)^2$$

$$1.44\alpha^2-1.8\alpha+0.45=0$$

これを解いて

$\alpha=0.35,\ 0.90$

$0<\alpha<0.625$ なので、R の値が最大となる α は $\alpha=0.35$ となる。

Ⅳ.

（１）①（**E**）②（**B**）　（２）③（**D**）④（**B**）　　［（１）①２点 ②２点　（２）③２点 ④２点］

（１）

自動車保険の純保険料：$(350\times0.5+380\times0.5)+(50\times0.5+100\times0.3+150\times0.2)=450$

火災保険の純保険料：$(265\times0.5+295\times0.5)+(100\times0.5+200\times0.3+300\times0.2)=450$

したがって、商品Ａの営業保険料P_Aと商品Ｂの営業保険料P_Bは同一であり、

$$P_A=P_B=\frac{450+150}{1-(0.2+0.05)}=800$$

また、商品Ｃの営業保険料P_Cは

$$P_C=\frac{450+450+270}{1-(0.2+0.05)}=1560$$

以上より、商品Ｃの営業保険料は、商品Ａの営業保険料と商品Ｂの営業保険料の合計と比較して、$(800+800-1560)/1600=2.5\%$小さくなる。

つぎに、自然災害以外と自然災害の合計インカードロスは以下のとおりとなる。

○自然災害以外

インカードロス	615	645	675
発生確率	0.25	0.5	0.25

○自然災害

インカードロス	150	200	250	300	350	400	450
発生確率	0.25	0.15	0.25	0.09	0.16	0.06	0.04

インカードロスが、$1560-270-1560\times0.2=978$を超えるときに保険契約の収支が赤字となるので、赤字となる確率は、$0.25\times(0.06+0.04)+0.5\times(0.16+0.06+0.04)+0.25\times(0.16+0.06+0.04)=0.22$となる。

（２）

$F(X=50,Y=100)=(0.5^{-2}+0.5^{-2}-1)^{-1/2}=0.3780$のように、$F(X,Y)$を計算すると下表のとおりとなる。

	X=50	X=100	X=150
Y=100	0.3780	0.4682	0.5000
Y=200	0.4682	0.6860	0.8000
Y=300	0.5000	0.8000	1.0000

上表より、確率関数 $f(X,Y)$ は次のとおりとなる。

	X=50	X=100	X=150
Y=100	0.3780	0.0902	0.0318
Y=200	0.0902	0.1276	0.0822
Y=300	0.0318	0.0822	0.0860

以上より、自然災害の合計インカードロスは以下のとおりとなる。

インカードロス	150	200	250	300	350	400	450
発生確率	0.3780	0.0902	0.1220	0.1276	0.1140	0.0822	0.0860

したがって、赤字となる確率は、

$$0.25\times(0.0822+0.0860)+0.5\times(0.1140+0.0822+0.0860)+0.25\times(0.1140+0.0822+0.0860)=0.2537$$

となり、（1）の赤字確率に比べて 3.4%上昇する。

また、978 超においてインカードロスのとり得る最小値は 995 であり、インカードロスが 995 を超える確率は

$$0.25\times(0.0822+0.0860)+0.5\times(0.0822+0.0860)+0.25\times(0.1140+0.0822+0.0860)=0.1967$$

であることから、995 のインカードロスが発生しても赤字とならないよう保険料を設定することによって、（1）の赤字確率を下回ることができる。

また、確率変数の和の期待値は独立性によらず、各確率変数の期待値の和に等しいことから、インカードロスの期待値は（1）と同じく 900 である。したがって、求める予定利潤率 δ の条件は、

$$P_C-995-270-0.2P_C>0$$

$$\Leftrightarrow P_C>1581.25$$

$$\Leftrightarrow \frac{900+270}{1-(0.2+\delta)}>1581.25$$ となり、これを解くと $\delta>0.060=6.0\%$ となる。

問題４

Ⅰ.

（１）①（**H**）②（**B**）　（２）③（**D**）④（**A**）　（３）⑤（**A**）⑥（**A**）⑦（**A**）（⑤～⑦は完答）

［（１）①２点 ②２点　（２）③２点 ④２点　（３）２点］

（１）

$$E\left(V\left(X|\Theta\right)\right)=E\left(\frac{\Theta^2}{(3-1)^2(3-2)}\right)=\frac{1}{4}E\left(\Theta^2\right)=\frac{1}{4}\times\left(E\left(\Theta\right)^2+V\left(\Theta\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left\{(2\times100)^2+2\times100^2\right\}=15,000$$

$$V\left(E\left(X|\Theta\right)\right)=V\left(\frac{\Theta}{3-1}\right)=\frac{1}{4}V\left(\Theta\right)=\frac{1}{4}\times2\times100^2=5,000$$

$$E\left(E\left(X|\Theta\right)\right)=E\left(\frac{\Theta}{3-1}\right)=\frac{1}{2}E\left(\Theta\right)=\frac{1}{2}\times2\times100=100$$

であるから、Bühlmann モデルにおける実績値の信頼度 Z は、

$$Z=\frac{12}{12+\dfrac{15,000}{5,000}}=0.8$$

であり、推定量 $\hat{\mu}_1$ は、

$$\hat{\mu}_1=Z\times\bar{X}+(1-Z)\times E\left(E\left(X|\Theta\right)\right)=0.8\times\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}X_i+20$$

となる。

（２）

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ の確率密度関数 $f(y)$ は $f(y)=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\beta y}$ であるから、$X=\dfrac{1}{Y}$ の従う逆ガンマ分布 $IG(\alpha,\beta)$ の確率密度関数 $g(x)$ は、

$$g(x)=f(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|=f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{x^{\alpha+1}}e^{-\frac{\beta}{x}}$$

となる。したがって、事後分布 $\pi_{\Theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})$ は、

$$\pi_{\Theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})\propto\pi(\theta)\prod_{i=1}^{12}f_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)=\frac{1}{\Gamma(2)}\frac{1}{100^2}\theta e^{-\frac{\theta}{100}}\prod_{i=1}^{12}\frac{\theta^3}{\Gamma(3)}\frac{1}{{x_i}^4}e^{-\frac{\theta}{x_i}}$$

$$\propto \theta e^{-\frac{\theta}{100}}\theta^{36}e^{-\sum_{i=1}^{12}\frac{\theta}{x_i}}=\theta^{38-1}e^{-\left(\frac{1}{100}+\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{x_i}\right)\theta}$$

となることから、ガンマ分布$\Gamma\left(38,\frac{1}{100}+\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{x_i}\right)$に従うことがわかる。ベイズ方法論に基づく推定値は、

$IG(3,\Theta)$の期待値$\frac{\Theta}{2}$の$\mathbf{X}=\mathbf{x}$の条件下における期待値を考えて

$$\frac{1}{2}\times\frac{38}{\frac{1}{100}+\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{x_i}}=\frac{19}{0.01+\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{x_i}}$$

となる。以上から、推定量$\hat{\mu}_2$は$\hat{\mu}_2=\frac{19}{0.01+\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}}$となる。

（3）

$\hat{\mu}_2$について、0.01は$\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}$に比べて小さく無視できるものとし、$\hat{\mu}_2\approx\frac{19}{\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}}$と近似する。

ここで、$X_i \sim IG(3,\theta)$であるから、$\frac{1}{X_i}\sim\Gamma(3,\theta)$となる。

ガンマ分布の加法性より、$\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}\sim\Gamma(36,\theta)$となるから、$\frac{1}{\sum_{i=1}^{12}\frac{1}{X_i}}\sim IG(36,\theta)$が得られる。

したがって、$E(\hat{\mu}_2)=19\times\frac{\theta}{36-1}=\frac{19}{35}\theta$ 、$V(\hat{\mu}_2)=19^2\times\frac{\theta^2}{(36-1)^2(36-2)}=\frac{19^2}{35^2\times 34}\theta^2$となる。

よって、

$$E\left[\left(\hat{\mu}_2-\frac{\theta}{2}\right)^2\right]=E\left(\hat{\mu}_2{}^2\right)-\theta E(\hat{\mu}_2)+\frac{\theta^2}{4}=\left\{\left(\frac{19}{35}\theta\right)^2+\frac{19^2}{35^2\times 34}\theta^2\right\}-\theta\times\frac{19}{35}\theta+\frac{\theta^2}{4}$$

$$=0.0105\theta^2$$

となる。

Ⅱ.

（１）①（Ｇ）②（Ｂ）③（Ｇ）（②、③は完答）　（２）④（Ｇ）⑤（Ｂ）
（３）⑥（Ａ）⑦（Ｅ）（⑥、⑦は完答）

［（１）①２点 ②③２点　（２）④２点 ⑤２点　（３） ２点］

（１）

$\Theta=\theta$ の値が与えられているとき、（ｉ）式よりクレーム額 X_k は互いに独立に平均 $\dfrac{1}{\theta}$ の指数分布に従う。

単位時間あたりの収入保険料 c が、単位時間あたりのクレーム額 $\lambda\times\dfrac{1}{\theta}$ 以下であるとき、すなわち、

$c\le\dfrac{\lambda}{\theta} \Leftrightarrow \theta\le\dfrac{\lambda}{c}$ であるとき、破産確率は $\varepsilon(u)=1$ となる。

$\theta>\dfrac{\lambda}{c}$ であるとき、存続確率 $\rho(u)$ が満たす式 $\rho'(u)=\dfrac{\lambda}{c}\left\{\rho(u)-\int_0^u\rho(u-x)dF_X(x)\right\}$ より、

$\rho'(u)=\dfrac{\lambda}{c}\left\{\rho(u)-\int_0^u\rho(u-x)\theta e^{-\theta x}dx\right\}=\dfrac{\lambda}{c}\left\{\rho(u)-\theta e^{-\theta u}\int_0^u\rho(y)e^{\theta y}dy\right\}$　（$y=u-x$ と変数変換）

これを u について微分して

$$\rho''(u)=\frac{\lambda}{c}\left\{\rho'(u)-(-\theta)\theta e^{-\theta u}\int_0^u\rho(y)e^{\theta y}dy-\theta\rho(u)\right\}$$
$$=\frac{\lambda}{c}\rho'(u)-\theta\frac{\lambda}{c}\left\{\rho(u)-\theta e^{-\theta u}\int_0^u\rho(y)e^{\theta y}dy\right\}=\frac{\lambda}{c}\rho'(u)-\theta\rho'(u)=-\left(\theta-\frac{\lambda}{c}\right)\rho'(u)$$

これを解くと、$\rho(u)=C_1\exp\left\{-\left(\theta-\dfrac{\lambda}{c}\right)u\right\}+C_2$ となる。

ここで、$\rho(0)=1-\varepsilon(0)=\dfrac{\theta c-\lambda}{\theta c}$ 、$\rho'(0)=\dfrac{\lambda}{c}\rho(0)=\dfrac{\lambda}{c}\dfrac{\theta c-\lambda}{\theta c}$ より、$C_1=-\dfrac{\lambda}{\theta c}$ 、$C_2=1$ となるので、$\rho(u)=1-\dfrac{\lambda}{\theta c}\exp\left\{-\left(\theta-\dfrac{\lambda}{c}\right)u\right\}$ を得る。

従って、破産確率は $\varepsilon(u)=1-\rho(u)=\dfrac{\lambda}{\theta c}\exp\left\{-\left(\theta-\dfrac{\lambda}{c}\right)u\right\}$ となる。

（２）

Θ が分布関数 $F_\Theta(\theta)$ の分布関数に従う場合を考える。

同時生存関数 $\bar{F}(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1>x_1,\cdots,X_n>x_n)$ と、周辺生存関数 $\bar{F}_{X_1}(x_1),\cdots,\bar{F}_{X_n}(x_n)$ の間には、

生存コピュラを$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)$として、$\bar{F}(x_1,\cdots,x_n)=\hat{C}\left(\bar{F}_{X_1}(x_1),\cdots,\bar{F}_{X_n}(x_n)\right)$の関係が成り立つ。

ここで、$L_\Theta(x)=\int_0^\infty e^{-\theta x}dF_\Theta(\theta)$とおくと、（ｉ）式より、

$$\bar{F}(x_1,\cdots,x_n)=\int_0^\infty e^{-\theta(x_1+\cdots+x_n)}dF_\Theta(\theta)=L_\Theta(x_1+\cdots+x_n)$$

$$\bar{F}_{X_i}(x_i)=\int_0^\infty e^{-\theta x_i}dF_\Theta(\theta)=L_\Theta(x_i)$$

が成り立つことから、$\varphi=L_\Theta{}^{-1}$とおくことによって、

$$\begin{aligned}\hat{C}\left(\bar{F}_{X_1}(x_1),\cdots,\bar{F}_{X_n}(x_n)\right)&=\hat{C}\left(L_\Theta(x_1),\cdots,L_\Theta(x_n)\right)\\&=L_\Theta(x_1+\cdots+x_n)\\&=\varphi^{-1}\left(\varphi\left(L_\Theta(x_1)\right)+\cdots+\varphi\left(L_\Theta(x_n)\right)\right)\end{aligned}$$

と表すことができる。このことから、$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)$は$\varphi=L_\Theta{}^{-1}$を生成作用素として、

$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)=\varphi^{-1}\left(\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_n)\right)$の形で表せるアルキメデス型の生存コピュラであることがわかる。

Θがガンマ分布$f_\Theta(\theta)=\theta e^{-\theta}\ (\theta>0)$に従う場合、

$$L_\Theta(x)=\int_0^\infty e^{-\theta x}dF_\Theta(\theta)=\int_0^\infty e^{-\theta x}\theta e^{-\theta}d\theta=\int_0^\infty \theta e^{-(1+x)\theta}d\theta=\left(\frac{1}{1+x}\right)^2$$

となることから、$L_\Theta{}^{-1}(x)=x^{-\frac{1}{2}}-1$を得る。したがって、生成作用素$\varphi(u)$は$\varphi(u)=u^{-\frac{1}{2}}-1$となる。

これを用いて、生存コピュラ$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)$は

$$\hat{C}(u_1,\cdots,u_n)=\varphi^{-1}\left(\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_n)\right)=\left(u_1{}^{-\frac{1}{2}}+\cdots+u_n{}^{-\frac{1}{2}}-n+1\right)^{-2}$$

となる。よって、右裾従属係数λ_uの値は、

$$\lambda_u=\lim_{u\to 1-0}P\left(F_{X_i}(X_i)>u \middle| F_{X_j}(X_j)>u\right)=\lim_{u\to 1-0}\frac{\hat{C}(1-u,1-u)}{1-u}$$

$$=\lim_{u\to 1-0}\frac{\left\{2(1-u)^{-\frac{1}{2}}-1\right\}^{-2}}{1-u}=\lim_{u\to 1-0}\left\{2(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}-(1-u)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-2}=\lim_{u\to 1-0}\left\{2-(1-u)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-2}=\frac{1}{4}$$

となる。

（3）（1）の結果から、$\Theta=\theta$ の条件下における破産確率 $\varepsilon_\theta(u)$ は

$\theta\le\dfrac{\lambda}{c}$ のとき　$\varepsilon_\theta(u)=1$

$\theta>\dfrac{\lambda}{c}$ のとき　$\varepsilon_\theta(u)=\dfrac{\lambda}{\theta c}\exp\left\{-\left(\theta-\dfrac{\lambda}{c}\right)u\right\}$

である。したがって、Θ がガンマ分布 $f_\Theta(\theta)=\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}\ (\theta>0)$ に従う場合、破産確率 $\varepsilon(u)$ は、

$$\varepsilon(u)=\int_0^\infty\varepsilon_\theta(u)f_\Theta(\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\lambda}{c}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta+\int_{\frac{\lambda}{c}}^\infty\frac{\lambda}{\theta c}\exp\left\{-\left(\theta-\frac{\lambda}{c}\right)u\right\}f_\Theta(\theta)d\theta$$

となる。ここで、$u\to\infty$ の極限において第 2 項は 0 に収束するので、

$$\lim_{u\to\infty}\varepsilon(u)=\int_0^{\frac{\lambda}{c}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{\beta\lambda}{c}}t^{\alpha-1}e^{-t}dt\qquad(t=\beta\theta\text{ と変数変換})$$

$$=\frac{\gamma\left(\alpha,\frac{\beta\lambda}{c}\right)}{\Gamma(\alpha)}\qquad\left(\gamma(a,b)=\int_0^b t^{a-1}e^{-t}dt\text{ とする。}\right)$$

となる。