損保数理（問題）

特に断りがないかぎり、消費税については考慮しないこととする。また、免責金額および支払限度額は１事故あたりのものであり、各クレームは独立であるものとする。

問題１． 次のⅠ～Ⅵの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　　Ⅰ～Ⅲ：各３点　Ⅳ～Ⅵ：各４点　（計２１点）

Ⅰ．ある自動車保険（保険期間１年）において、過去３年間に以下のような料率改定および補償縮小を行った。

2015 年 10 月 1 日　保険料率 10%引上げ
2017 年 4 月 1 日　補償縮小（保険料率 10%引下げ、保険金 10%減少）

この保険の過去３年間の契約年度ごとの契約台数、保険料、保険金は下表のとおりである。

契約年度	契約台数	保険料	保険金
2015 年度	5,000	530,000	360,000
2016 年度	7,000	770,000	500,000
2017 年度	10,000	990,000	594,000

年度は 4 月から 3 月までの期間とし、各年度においての契約内容は 2017 年 4 月 1 日に実施した補償縮小部分以外は同一であり、契約１台あたり一律の保険料が適用されるものとする。また、払込方法は一括払のみであり、インフレの影響は考慮しなくても良いものとする。このとき、直近の料率水準・補償範囲ベースでの 2015 から 2017 年度契約の 3 か年通算の損害率に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）60.3%　（Ｂ）60.8%　（Ｃ）61.3%　（Ｄ）61.8%　（Ｅ）62.3%
（Ｆ）62.8%　（Ｇ）63.3%　（Ｈ）63.8%　（Ｉ）64.3%　（Ｊ）64.8%

Ⅱ．ある保険会社は団体ごとの個別実績ロスデータを用いた団体別料率の算出準備として、団体ごとのデータに全信頼度を与える基準を有限変動信頼性理論によって求めることを検討している。導入に際して、以下の事項を前提とする。

- 年間のクレーム件数 N はポアソン分布に従う。
- 各クレーム額 X は確率密度関数 $f(x)=\dfrac{0.2^5}{\Gamma(5)}x^4e^{-0.2x}\quad\left(x>0\right)$ のガンマ分布に従う。
- 団体ごとの年間クレーム総額 T が 95%の確率で真の期待値の±10%の範囲内にあれば全信頼を与える。
- T は正規近似できると仮定する。

保険会社が料率算定に使用する団体ごとの年間クレーム総額 T に全信頼を与えるために必要な団体ごとの年間クレーム件数に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側 ε 点：$u\left(\varepsilon\right)$

ε	0.100	0.075	0.050	0.025
$u\left(\varepsilon\right)$	1.282	1.440	1.645	1.960

（Ａ）400　（Ｂ）460　（Ｃ）520　（Ｄ）580　（Ｅ）640
（Ｆ）700　（Ｇ）760　（Ｈ）820　（Ｉ）880　（Ｊ）940

Ⅲ．ある積特型積立保険の積立部分に関する条件が下表のとおりであるとする。この積特型積立保険の積立部分の年払営業保険料に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、計算の途中において、現価率および期始払年金現価率は、小数点以下第 5 位を四捨五入して小数点以下第 4 位までの数値を用いることとする。

項目	条件	備考
保険期間	5 年	
払込方法	年払（期始払）	
満期返れい金	250 万	保険期間満了時に支払
予定利率	2%	
予定契約消滅率	3%	
予定払込免除発生率	1%	払込免除事由の発生以後、将来の保険料の払い込みが免除される（満期返れい金は支払われる）
維持費率	2%	年払積立保険料に対する割合
代理店手数料率	3%	年払積立保険料に対する割合

（Ａ）451,000　（Ｂ）452,000　（Ｃ）453,000　（Ｄ）454,000　（Ｅ）455,000
（Ｆ）456,000　（Ｇ）457,000　（Ｈ）458,000　（Ｉ）459,000　（Ｊ）460,000

Ⅳ．ある保険会社の自動車保険の料率は、年齢（a 歳未満か a 歳以上か）と使用目的（日常・レジャー使用か業務使用か）の２つの危険標識で複合的に区分されている。この自動車保険に関するある年度の実績統計が下表のとおりであったとする。

＜エクスポージャ（E_{ij}）＞

	日常・レジャー	業務使用	計
a 歳未満	$E_{11}=300$	$E_{12}=150$	$E_{1\bullet}=450$
a 歳以上	$E_{21}=200$	$E_{22}=100$	$E_{2\bullet}=300$
計	$E_{\bullet 1}=500$	$E_{\bullet 2}=250$	$E_{\bullet\bullet}=750$

＜クレーム総額（C_{ij}）＞

	日常・レジャー	業務使用	計
a 歳未満	$C_{11}=72$	$C_{12}=22$	$C_{1\bullet}=94$
a 歳以上	$C_{21}=25$	$C_{22}=31$	$C_{2\bullet}=56$
計	$C_{\bullet 1}=97$	$C_{\bullet 2}=53$	$C_{\bullet\bullet}=150$

この複合リスクの構造が乗法型であると仮定して、2 つの危険標識について相対クレームコスト指数および料率係数を Minimum Bias 法により求めるとき、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。なお、計算の途中において、クレームコストおよび相対クレームコスト指数は、すべて小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いることとする。

（１）年齢区分「a 歳以上」、使用目的区分「業務使用」に対応する相対クレームコスト指数の実績値 r_{22} に最も近いものは、選択肢のうちどれか。

（Ａ）0.630　（Ｂ）0.745　（Ｃ）0.860　（Ｄ）0.975　（Ｅ）1.090
（Ｆ）1.205　（Ｇ）1.320　（Ｈ）1.435　（Ｉ）1.550　（Ｊ）1.665

（２）年齢区分「a 歳未満」に対応する料率係数 x_1 の値に最も近いものは、選択肢のうちどれか。なお、使用目的区分「日常・レジャー」に対応する料率係数 y_1 は、それに対応する実績の相対クレームコスト指数に等しいものとする。

（Ａ）0.045　（Ｂ）0.245　（Ｃ）0.445　（Ｄ）0.645　（Ｅ）0.845
（Ｆ）1.045　（Ｇ）1.245　（Ｈ）1.445　（Ｉ）1.645　（Ｊ）1.845

V．ある保険会社は、前年度末においてサープラスを 150 万円保有しており、今年度に以下の保険契約を 10 件引き受けた。なお、年度は 4 月から 3 月までの期間とする。

＜保険契約の内容＞

- 保険始期　　すべて 4 月 1 日（4 月 1 日に保険料を一括払で領収する）
- 保険期間　　1 年間
- 年間事故発生頻度　　20%の確率で事故が 1 件発生（保険契約ごとに互いに独立であり、1 件の契約について 2 件以上の事故は発生しない）
- 保険金支払額　　事故発生と同時に 100 万円を定額で支払う

今年度の破産確率を「今年度末のサープラスが 0 円未満となる確率」と定義する。再保険を手配しない場合の今年度の破産確率を P_1、全ての保険契約に対して 60%比例再保険を手配した場合の今年度の破産確率を P_2 としたとき、$P_1 - P_2$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、保険料および再保険料は純保険料法により算出し、経費や手数料等は考慮しないものとする。また、再保険料の支払および再保険金の回収はすべて今年度中に完了するものとする。

（A）0.105	（B）0.115	（C）0.125	（D）0.135	（E）0.145
（F）0.155	（G）0.165	（H）0.175	（I）0.185	（J）0.195

VI. ある保険事故が発生した場合に、保険金 X と保険金 Y をそれぞれ支払う保険商品がある。(X,Y) の同時分布はパラメータ α のクレイトン・コピュラで構成されるものと仮定する。この保険商品において、直近に観測された保険金 X と保険金 Y は下表のとおりである。

事故番号	1	2	3	4	5
保険金 X の観測値	10	26	35	11	20
保険金 Y の観測値	6	20	47	26	15

ケンドールの τ が観測値から算出した値と一致するようにクレイトン・コピュラのパラメータ α を定めたとき、α の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、以下の事項を使用すること。

・ パラメータ α のクレイトン・コピュラは、生成作用素が $\varphi(u)=\dfrac{1}{\alpha}\left(u^{-\alpha}-1\right)\quad(\alpha>0)$ であるアルキメデス型コピュラである。

・ 生成作用素が $\varphi(u)$ であるアルキメデス型コピュラのケンドールの τ は、$\tau=1+4\int_0^1\dfrac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}du$ となる。

（Ａ）0.5　（Ｂ）1.0　（Ｃ）1.5　（Ｄ）2.0　（Ｅ）2.5
（Ｆ）3.0　（Ｇ）3.5　（Ｈ）4.0　（Ｉ）4.5　（Ｊ）5.0

問題２． 次のＩ～Ｖの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。 各７点 （計３５点）

Ｉ．保険料算出原理について、次の（１）、（２）に答えなさい。

（１）確率変数 X, Y に対応する保険料を与える関数を $P(X), P(Y)$ とする。①、②のそれぞれについて、**（Ａ）**～**（Ｃ）**の保険料算出原理のうち、記載の性質を満たすものをすべて選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。ただし、満たすものがない場合は**（Ｄ）**をマークしなさい。

① 互いに独立な X, Y に対して、$P(X+Y)=P(X)+P(Y)$ が成り立つ。
② 任意の非負の定数 a および任意の定数 b に対して、$P(aX+b)=aP(X)+b$ が成り立つ。

（Ａ）期待値原理
（Ｂ）エッシャー原理
（Ｃ）パーセンタイル原理

（２）ある契約集団で１年間に発生するクレーム件数 N は、パラメータ Θ の二項分布 $B(\Theta, 0.3)$（確率関数 $f(y)={}_{\Theta}C_y 0.3^y 0.7^{\Theta-y}$）に従い、$\Theta$ は平均４のポアソン分布に従うとする。また、この契約集団の個々のクレーム額 $X_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ は、確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}x}\exp\left(-\dfrac{(\log x-1)^2}{2}\right)$ $(x>0)$ の対数正規分布に従い、クレーム件数 N と個々のクレーム額 X_i は独立であるとする。年間のクレーム総額 $S=X_1+\cdots+X_N$ に対応する保険料を標準偏差原理 $P(S)=\mu_S+h\sigma_S$ によって算出した値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、$h=0.5$ とする。また、必要があれば、$e=2.718$ を使用すること。

（Ａ）6.2	**（Ｂ）**6.6	**（Ｃ）**7.0	**（Ｄ）**7.4	**（Ｅ）**7.8
（Ｆ）8.2	**（Ｇ）**8.6	**（Ｈ）**9.0	**（Ｉ）**9.4	**（Ｊ）**9.8

Ⅱ．回帰分析について、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ある保険商品の過去 4 年間の事業年度ごとの事故件数は、下表のとおりであった。

i	1	2	3	4
事業年度　x_i	1	2	3	4
事故件数　y_i	3	5	4	8

過去 4 年間の事故件数 y を事業年度 x で最小二乗法により線形回帰することを考える。（y の x に関する線形回帰式は、 $y=\alpha x+\beta$ で表される。）①～③のそれぞれの値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

①　データの相関係数（ピアソンの積率相関係数） r_{xy}

②　残差変動

③　自由度修正決定係数

【①の選択肢】

（Ａ）0.70　（Ｂ）0.72　（Ｃ）0.74　（Ｄ）0.76　（Ｅ）0.78
（Ｆ）0.80　（Ｇ）0.82　（Ｈ）0.84　（Ｉ）0.86　（Ｊ）0.88

【②の選択肢】

（Ａ）2.6　（Ｂ）3.4　（Ｃ）4.2　（Ｄ）5.0　（Ｅ）5.8
（Ｆ）6.6　（Ｇ）7.4　（Ｈ）8.2　（Ｉ）9.0　（Ｊ）9.8

【③の選択肢】

（Ａ）0.50　（Ｂ）0.55　（Ｃ）0.60　（Ｄ）0.65　（Ｅ）0.70
（Ｆ）0.75　（Ｇ）0.80　（Ｈ）0.85　（Ｉ）0.90　（Ｊ）0.95

（2）以下のイ～ハのうち正しいものの組み合わせとして最も適切なものは、選択肢のうちどれか。

イ．相関係数 r_{xy} は 2 種類のデータ x, y 間の関係の強弱を測る指標であるが、あくまで直線的な関係性を測るための尺度であり、非線形の関係を読みとることはできない。

ロ．回帰式が観測値にどの程度当てはまっているかの尺度として残差の二乗和によって評価することが考えられるが、観測値の数に影響を受ける欠点があり、これを取り除いた尺度として決定係数がある。決定係数が 0 に近いほど回帰直線がよく当てはまっていると考えられる。

ハ．回帰式に対して説明変数を追加すると、その説明変数が妥当なものであるか否かにかかわらず、決定係数は必ず増加する。この問題を回避するための指標として自由度修正決定係数がある。自由度修正決定係数は 0 から 1 までの値をとり、説明変数を増やしても一定水準以上の残差変動の減少がなければ、大きくならない特性がある。

（A）全て正しい　　（B）イ、ロのみ正しい
（C）イ、ハのみ正しい　　（D）ロ、ハのみ正しい
（E）イのみ正しい　　（F）ロのみ正しい
（G）ハのみ正しい　　（H）全て誤り

Ⅲ．2016 年度から保険商品の販売を開始した保険会社の 2016 年度から 2017 年度（2016 年 4 月から 2018 年 3 月）までの保険料内訳は、次のとおりであった。なお、保険期間は 1 年のみであり、各保険契約は契約日に責任が開始されるものとする。また、保険料は責任開始日に一括払されるものとする。

責任開始日	保険料
2016/8/1	400
2016/10/1	250
2017/1/1	500
2017/4/1	200
2017/6/1	1,000
2018/2/1	500
2018/3/1	400

また、2016 年 4 月から 2018 年 3 月までの事故発生および保険金支払の状況は次のとおりであった。なお、保険金の欄に数値が記入されている箇所は支払が完了しており、保険金の欄が空欄となっている箇所は当年度の支払は発生しておらず、支払備金を積み立てている。

2016 年度中の支払保険金および備金計上事故

事故番号	事故発生日	保険金
1	2017/1/1	120
2	2017/2/1	
3	2017/3/1	150

※　事故発生日と事故発生の報告日は同日である。（下表においても同様。）

2017 年度中の支払保険金

事故番号	事故発生日	保険金
2	2017/2/1	55
4	2017/7/1	180
5	2017/12/1	210
6	2018/1/1	400
7	2018/2/1	200

会計年度は 4 月から 3 月までの期間とし、次の（1）～（3）の各問に答えなさい。

（1）2016 年度のリトンベーシス損害率は $\boxed{a}\boxed{b}.\boxed{c}$ %である。a、b、c のそれぞれに当てはまる 1 桁の数字を解答用紙の所定の欄にマークしなさい。なお、計算の途中において端数処理は行わず、計算結果はパーセント表示における小数点以下第 2 位を四捨五入して小数点以下第 1 位まで求めること。また、計算結果が 10%未満となった場合は a の欄に 0 をマークしなさい。

（2）2016 年度のアーンドベーシス損害率（<u>会計年度統計ベース</u>）が 60.0%であったとき、2016 年度末における支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、経過保険料は、保険始期が月初にあることを前提とした 12 分の 1 法で計算すること。

（A）5　（B）10　（C）15　（D）20　（E）25
（F）30　（G）35　（H）40　（I）45　（J）50

（3）2017 年度のアーンドベーシス損害率（<u>会計年度－事故年度統計ベース</u>）に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、経過保険料は、保険始期が月初にあることを前提とした 12 分の 1 法で計算すること。

（A）55.5%　（B）56.0%　（C）56.5%　（D）57.0%　（E）57.5%
（F）58.0%　（G）58.5%　（H）59.0%　（I）59.5%　（J）60.0%

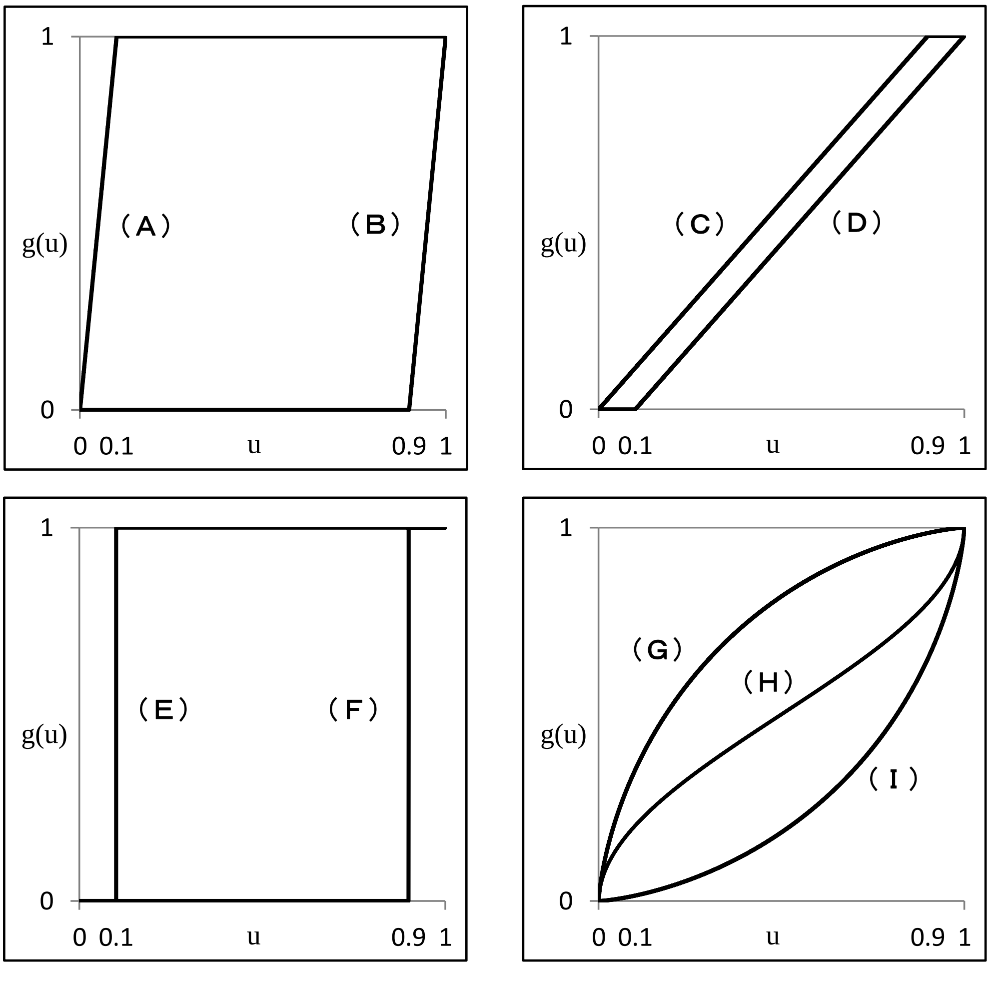
Ⅳ．確率変数 X の生存関数 $S_X(x)=1-F_X(x)$ と、$g(0)=0, g(1)=1$ であるような $[0,1]$ 上の左連続な非減少関数 $g(u)$ を用いて、確率変数 X に対するリスク尺度を下式のとおり定める。

$$E_g(X)=\int_0^{\infty} g\left(S_X(x)\right)dx-\int_{-\infty}^{0}\left\{1-g\left(S_X(x)\right)\right\}dx$$

これを、歪み関数 $g(u)$ により生成される歪みリスク尺度 $E_g(X)$ という。このとき、次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）確率変数 X に対して、以下の①、②のそれぞれの歪みリスク尺度を生成する歪み関数 $g(u)$ のグラフとして最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。

① $VaR_{90\%}(X)$
② $TVaR_{90\%}(X)$



（2）確率変数 X が平均 2 の指数分布に従うとき、以下の歪み関数 $g(u)$ により生成される歪みリスク尺度 $E_g(X)$ の値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$\log 2 = 0.693$ 、$\log 3 = 1.099$ 、$\log 5 = 1.609$ を使用すること。

$$g(u) = \begin{cases} 0 & (0 \le u \le 0.05) \\ 20u - 1 & (0.05 \le u \le 0.1) \\ 1 & (0.1 \le u \le 1) \end{cases}$$

（Ａ）4.0　（Ｂ）4.2　（Ｃ）4.4　（Ｄ）4.6　（Ｅ）4.8
（Ｆ）5.0　（Ｇ）5.2　（Ｈ）5.4　（Ｉ）5.6　（Ｊ）5.8

（3）確率変数 X が平均 2 の指数分布に従うとき、以下のア～ウの歪みリスク尺度の大小関係として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

ア．（2）で求めた歪みリスク尺度 $E_g(X)$

イ．$VaR_{90\%}(X)$

ウ．$TVaR_{90\%}(X)$

（Ａ）ア＞イ＞ウ　（Ｂ）ア＞ウ＞イ　（Ｃ）イ＞ア＞ウ
（Ｄ）イ＞ウ＞ア　（Ｅ）ウ＞ア＞イ　（Ｆ）ウ＞イ＞ア

Ⅴ. 以下のような累計支払保険金実績データのある保険種目に関して、2017 年度末の支払備金（＝「最終累計発生保険金の合計」－「2017 年度末の累計支払保険金の合計」）の評価を行うことを考える。なお、この保険種目は第 4 経過年度で保険金の支払を完了する（支払備金が残らない）ものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用いるものとする。

また、計算の途中において、ロスディベロップメントファクターについては小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用い、保険金・支払備金については小数点以下第 1 位を四捨五入して整数値を用いるものとする。なお、インフレの影響は考慮しなくてよい。

＜事故年度別　累計支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2014 年度	1,483	4,286	5,207	5,650
2015 年度	1,933	4,894	5,604	
2016 年度	2,101	5,526		
2017 年度	2,305			

このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）チェインラダー法による 2017 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（A）6,800　（B）6,940　（C）7,080　（D）7,220　（E）7,360
（F）7,500　（G）7,640　（H）7,780　（I）7,920　（J）8,060

（2）実績データの十分性に疑義があるため、さらにボーンヒュッターファーガソン法を用いて評価を行うこととした。事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値を、下表の既経過保険料および予定損害率から算出するものとすると、ボーンヒュッターファーガソン法による 2017 年度末の支払備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

事故年度	既経過保険料	予定損害率
2014 年度	9,170	60%
2015 年度	10,500	55%
2016 年度	10,870	60%
2017 年度	11,300	55%

（A）6,150　（B）6,290　（C）6,430　（D）6,570　（E）6,710
（F）6,850　（G）6,990　（H）7,130　（I）7,270　（J）7,410

問題３． 次のⅠ～Ⅳの各問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。　各８点　（計３２点）

Ⅰ．比例再保険やストップロス再保険のように、再保険者の責任額が保険会社の年間の支払保険金総額から直接的に算出される再保険方式を関数型再保険と呼ぶこととする。関数型再保険について、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ある保険会社の元受保険金 X は平均１の指数分布に従うことがわかっている。この元受保険金 X に対して、再保険金が $I(X)$ である関数型再保険を手配する。
ネット再保険料 $E(I(X))$ が 0.2 となるような再保険処理のうち、保有保険金 $X - I(X)$ の分散が最小となるものを考える。保有保険金の分散の最小値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。
なお、必要があれば、$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$ を使用すること。

（Ａ）0.08	（Ｂ）0.16	（Ｃ）0.24	（Ｄ）0.32	（Ｅ）0.40
（Ｆ）0.48	（Ｇ）0.56	（Ｈ）0.64	（Ｉ）0.72	（Ｊ）0.80

（２）ある保険会社の元受保険金 Y は平均１の指数分布に従うことがわかっている。この元受保険金 Y に対して、再保険金が $I(Y)$ である関数型再保険を手配する。
この保険会社は保険料を期待値原理 $P(Y) = E(Y) + 0.1E(Y)$ により設定し、再保険会社は再保険料を分散原理 $P(I(Y)) = E(I(Y)) + 0.1V(I(Y))$ により設定している。保有保険金 $Y - I(Y)$ の分散が 0.2 となるような再保険処理のうち、利益（＝保険料－再保険料－保有保険金）の期待値が最大となるものを考える。利益の期待値の最大値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

（Ａ）0.01	（Ｂ）0.02	（Ｃ）0.03	（Ｄ）0.04	（Ｅ）0.05
（Ｆ）0.06	（Ｇ）0.07	（Ｈ）0.08	（Ｉ）0.09	（Ｊ）0.10

Ⅱ．ある 2 種類の給付種類を持つ保険契約のポートフォリオにおいて、1 年間に発生するそれぞれの給付種類$\left(j=1,2\right)$のクレーム件数を確率変数$N^{(j)}$、i番目のクレーム額を確率変数$X_i^{(j)}$で表すと、ポートフォリオ全体の 1 年間のクレーム総額Sは、

$$S=X_1^{(1)}+X_2^{(1)}+\cdots+X_{N^{(1)}}^{(1)}+X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+\cdots+X_{N^{(2)}}^{(2)}$$

と表される。ここで、以下を仮定する。

- 確率変数$N^{(j)}$ $\left(j=1,2\right)$および$X_1^{(j)}, X_2^{(j)},\cdots$ $\left(j=1,2\right)$は、$N^{(1)}$と$N^{(2)}$の間を除き、互いに独立である。
- $X_1^{(1)}, X_2^{(1)},\cdots$および$X_1^{(2)}, X_2^{(2)},\cdots$は、それぞれガンマ分布$\Gamma\left(1,1/\mu\right)$および$\Gamma\left(2,1/\mu\right)$に従う確率変数とする。ここで、ガンマ分布$\Gamma\left(a,b\right)$の確率密度関数は、
$f\left(x\right)=\dfrac{b}{\Gamma\left(a\right)}e^{-bx}\left(bx\right)^{a-1}$ $\quad\left(x>0\right)$ である。
- 保険事故には、給付種類$j=1$のみ支払が発生する事故、給付種類$j=2$のみ支払が発生する事故、2 種類の給付種類両方が発生する事故の 3 種類があり、それぞれが 1 年間に発生する件数$N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$は互いに独立な確率変数で、パラメータ$\lambda_\alpha,\lambda_\beta,\lambda_\gamma$のポアソン分布に従う。

このクレーム総額モデルにおいて、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

（1）クレーム総額Sのキュムラント母関数$\log M_S\left(r\right)$として正しいものは、選択肢のうちのどれか。

（A）　$\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}+\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^3-1\right\}$

（B）　$\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}+\lambda_\gamma\left\{\frac{1}{1-\mu r}+\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}$

（C）　$\lambda_\alpha\left(\frac{\mu}{\mu-r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^2-1\right\}+\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^3-1\right\}$

（D）　$\lambda_\alpha\left(\frac{\mu}{\mu-r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^2-1\right\}+\lambda_\gamma\left\{\frac{\mu}{\mu-r}+\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^2-1\right\}$

（E）　$\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}$

（F）　$\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}+2\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^3-1\right\}$

（G）　$\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}+2\lambda_\gamma\left\{\frac{1}{1-\mu r}+\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}$

（H）　$\lambda_\alpha\left(\frac{\mu}{\mu-r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^2-1\right\}+2\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^3-1\right\}$

（I）　$\lambda_\alpha\left(\frac{\mu}{\mu-r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^2-1\right\}+2\lambda_\gamma\left\{\frac{\mu}{\mu-r}+\left(\frac{\mu}{\mu-r}\right)^2-1\right\}$

（J）　$\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+2\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}$

（K）　いずれにも該当しない

（2）給付種類$j=1,2$の 1 年間のクレーム件数の期待値が、それぞれ 10,5 であることがわかっているとする。本問のモデルにおいて、当初は、2 種類の給付種類両方が発生する保険事故は存在しない（$\lambda_\gamma=0$）と仮定していたものの、クレーム調査の結果に基づき、$\lambda_\gamma>0$を仮定することとした。$\lambda_\gamma=1$の場合のクレーム総額Sの分散は、$\lambda_\gamma=0$の場合の $\boxed{\quad ① \quad}$ 倍となる。また、$\lambda_\gamma=1$の場合のクレーム総額Sの歪度は、$\lambda_\gamma=0$の場合の $\boxed{\quad ② \quad}$ 倍となる。①、②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、歪度は、確率変数Xのk次のキュムラントχ_kを用いて、歪度$=\frac{\chi_3}{\sigma^3}$にて定義される。また、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

（A）1.00　（B）1.01　（C）1.02　（D）1.03　（E）1.04
（F）1.05　（G）1.06　（H）1.07　（I）1.08　（J）1.09

Ⅲ．最尤法について、次の（１）、（２）の各問に答えなさい。

（１）ある保険商品の損害額 X はパラメータ λ の指数分布に従うことがわかっている。ここで、パラメータ λ の指数分布の確率密度関数は以下のとおりである。

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

この商品について、n 件の損害額の実績データ $x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ が得られている。この実績データからパラメータ λ を最尤法によって推定する。
λ の最尤推定値は $\boxed{\quad ① \quad}$ であり、λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ の漸近分散は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。また、$\hat{\lambda}$ を自然対数変換した $\log \hat{\lambda}$ の漸近分散をデルタ法によって算出した値は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。①～③に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。

【①の選択肢】

（Ａ） $\dfrac{1}{n}$　（Ｂ） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$　（Ｃ） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n^2}$　（Ｄ） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$　（Ｅ） $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2}$

（Ｆ） n　（Ｇ） $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$　（Ｈ） $\dfrac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$　（Ｉ） $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$　（Ｊ） $\dfrac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

（Ｋ）いずれにも該当しない

【②、③の選択肢】

（Ａ） $\dfrac{1}{n}$　（Ｂ） $\dfrac{1}{n^2}$　（Ｃ） $\dfrac{\lambda}{n}$　（Ｄ） $\dfrac{\lambda}{n^2}$　（Ｅ） $\dfrac{\lambda^2}{n}$

（Ｆ） $\dfrac{\lambda^2}{n^2}$　（Ｇ） $\dfrac{n}{\lambda}$　（Ｈ） $\dfrac{n^2}{\lambda}$　（Ｉ） $\dfrac{n}{\lambda^2}$　（Ｊ） $\dfrac{n^2}{\lambda^2}$

（Ｋ）いずれにも該当しない

（2）ある保険会社の商品 1 の損害額 X_1、商品 2 の損害額 X_2 は、互いに独立にパラメータ λ_1, λ_2 の指数分布に従うことがわかっている。商品 1、商品 2 の損害額の実績として以下のデータが得られている。

	事故件数	合計損害額
商品 1	80 件	2,000
商品 2	120 件	7,200

この実績データからパラメータ λ_1, λ_2 を最尤法によって推定する。また、最尤推定量を $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ とし、$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2$ を自然対数変換した $\log\hat{\lambda}_1, \log\hat{\lambda}_2$ は、それぞれ近似的に正規分布（デルタ法によって求められる漸近分布）に従うと仮定する。λ_1 / λ_2 の値を区間推定したとき、λ_1 / λ_2 の 95%信頼区間の上限値は $\exp\left(\boxed{\quad ④ \quad}\right)$ となる。④に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、必要があれば、$\log 2 = 0.693$、$\log 3 = 1.099$、$\log 5 = 1.609$、および下表（標準正規分布の上側 ε 点）の数値を使用すること。

＜表＞標準正規分布の上側 ε 点：$u(\varepsilon)$

ε	0.100	0.075	0.050	0.025
$u(\varepsilon)$	1.282	1.440	1.645	1.960

（A）0.88　（B）0.92　（C）0.96　（D）1.00　（E）1.04
（F）1.08　（G）1.12　（H）1.16　（I）1.20　（J）1.24

Ⅳ. 保険事故が発生した場合に保険金 1,000 を支払う保険契約に加入している全ての契約者に対して、今年度のクレーム件数を調べたところ、以下のデータが得られた。ここで、1 契約者あたりのクレーム件数はポアソン分布に従い、契約者ごとにポアソン分布のパラメータは異なり、契約者単位の時系列で観察した場合、同一の契約者のパラメータは同一であるとする。このとき、次の（1）、（2）の各問に答えなさい。

今年度のクレーム件数	契約者数
0 件	300 人
1 件	55 人
2 件	30 人
3 件	15 人

（1）次年度のクレーム件数を予測する場合に、ビュールマン・モデルによって算出した実績クレーム件数に対する信頼度は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、今年度に 2 件のクレームを起こした契約者について、次年度のクレーム件数は $\boxed{\quad ② \quad}$ 件と予測される。①、②に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、算出にあたっては、本保険契約全体のクレーム件数の平均および分散の推定値として、それぞれ標本平均および不偏分散（いずれも小数点以下第 4 位を四捨五入して小数点以下第 3 位までの数値を用いること）を使用するものとする。

【①の選択肢】

（A）0.05　（B）0.10　（C）0.15　（D）0.20　（E）0.25
（F）0.30　（G）0.35　（H）0.40　（I）0.45　（J）0.50

【②の選択肢】

（A）0.64　（B）0.72　（C）0.80　（D）0.88　（E）0.96
（F）1.04　（G）1.12　（H）1.20　（I）1.28　（J）1.36

（2）次年度に適用する純保険料について、ビュールマン・モデルを用いて予測した次年度のクレーム件数を用いて設定する。まず、今年度のクレーム件数にかかわらず一律の純保険料を設定した場合、純保険料は $\boxed{\quad ③ \quad}$ となる。つぎに、以下の設定方法に基づき純保険料を設定した場合、今年度にクレームを起こさなかった契約者の純保険料は $\boxed{\quad ④ \quad}$ となる。③、④に当てはまる数値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。なお、今年度の契約者は全て次年度も継続して加入し、新たな契約加入者はいないものとする。また、算出にあたって使用する信頼度は、（1）で選択した解答の数値を使用すること。

＜設定方法＞

イ．ビュールマン・モデルを用いて予測した次年度のクレーム件数を用いて、今年度のクレーム件数に応じた純保険料を算出する。

ロ．イ．で算出した純保険料が、$\boxed{\quad ③ \quad}$ の 2 倍を超える場合は、保険の入手可能性を損ねないため、$\boxed{\quad ③ \quad}$ の 2 倍を純保険料とする。

ハ．ロ．の調整によって減少する収入純保険料について、今年度にクレームを起こさなかった契約者の純保険料に上乗せすることにより、総収入保険料がイ．の段階と変わらないようにする。

【③の選択肢】

（A）200	（B）250	（C）300	（D）350	（E）400
（F）450	（G）500	（H）550	（I）600	（J）650

【④の選択肢】

（A）220	（B）240	（C）260	（D）280	（E）300
（F）320	（G）340	（H）360	（I）380	（J）400

問題４． 次の問について、最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から選び、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。（１２点）

以下の Lundberg モデルについて、存続確率を 2 通りの方法で解析的に算出することを考える。

- クレーム件数過程のパラメータ　λ
- 個々のクレーム額 X の確率密度関数　$f(x) = 3e^{-4x} + 0.5e^{-2x} \quad (x \geq 0)$
- 個々のクレーム額 X の分布関数　$F_X(x)$
- 安全割増率　$\theta = 0.6$
- 単位時間当たりの収入保険料　c

このモデルでは「時刻 t のサープラス U_t が $U_t < 0$ となる状態」を破産と呼び、破産時刻 T を $T = \min\{t \mid U_t < 0\}$ と定義する。また、これを用いて期首サープラスが u のときの破産確率 $\varepsilon(u)$ を $\varepsilon(u) = P(T < \infty)$、存続確率 $\rho(u)$ を $\rho(u) = 1 - \varepsilon(u)$ と定義する。次の（１）～（３）の各問に答えなさい。

（１）存続確率 $\rho(u)$ が満たす微分方程式を導出し、それを解くことによって $\rho(u)$ を算出する。

期首サープラスが u である場合に、破産が発生し、かつ破産直後の欠損額が y 以上である確率を $G(u, y)$ とすると、$G(0, y)$ は

$$G(0, y) = \frac{\lambda}{c}\int_y^{\infty}\{1 - F_X(x)\}dx \qquad \cdots（\text{i}）$$

と表せることから、期首サープラスが $u = 0$ のときの存続確率 $\rho(0)$ は

$$\rho(0) = \frac{\boxed{\quad ① \quad}}{\boxed{\quad ② \quad}}$$

となる。また、$\rho'(u)$ は、

$$\rho'(u) = \frac{\lambda}{c}\left\{\rho(u) - \int_0^u \rho(u - x)dF_X(x)\right\}$$

を満たす。この式にクレーム額の確率密度関数を代入する。ここで、n を自然数として、

$I_n(u) = \int_0^u \rho(u - x)e^{-nx}dx$ とおくと、$y = u - x$ の変数変換によって、$I_n(u) = e^{-nu}\int_0^u \rho(y)e^{ny}dy$

と表せるため、$I_n{}'(u) = -nI_n(u) + \rho(u)$ が成り立つ。

以上から、存続確率 $\rho(u)$ は以下の微分方程式を満たすことが分かる。

$$\rho'''(u) + (\boxed{\quad ③ \quad})\rho''(u) + (\boxed{\quad ④ \quad})\rho'(u) = 0$$

これを適切な境界条件の下で解くことによって、存続確率 $\rho(u)$ が算出される。①～④に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A）−5	（B）−4	（C）−3	（D）−2	（E）−1
（F）1	（G）2	（H）3	（I）4	（J）5
（K）6	（L）7	（M）8	（N）9	（O）10

（2） L_n を、n 回目にサープラス U_t の「最低記録」を更新したときにおける「記録の更新幅」を表すとすると、破産とは $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$ が u を超えることを意味する。$\rho(u) = 1 - P(L > u)$ より、存続確率 $\rho(u)$ は L の分布関数と等しくなる。L の分布関数を求めることによって $\rho(u)$ を算出する。L のモーメント母関数 $M_L(t)$ を、$\mu = E(X)$、θ、X のモーメント母関数 $M_X(t)$ によって表すことを考える。（1）の（i）式から、「最低記録」の更新が起きる回数 N の確率分布は

$$P(N=n) = \left(\boxed{\quad ⑤ \quad}\right)^n \left(\boxed{\quad ⑥ \quad}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

の幾何分布となる。また、「記録の更新幅」 L_i の確率密度関数は（1）の（i）式より求めることができ、以下のようになる。

$$f_{L_i}(y) = \frac{1}{\mu}\left(1 - F_X(y)\right)$$

以上から、 $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_N$ は複合幾何分布であり、そのモーメント母関数 $M_L(t)$ は

$$M_L(t) = \frac{\boxed{\quad ⑦ \quad}}{\boxed{\quad ⑧ \quad} - M_X(t)}$$

と表すことができる。ただし、t はモーメント母関数を定義できる範囲のみをとるものとする。$M_L(t)$ に μ 、θ の値と $M_X(t)$ の具体的な表式を代入し整理すると、$M_L(t)$ は既知の分布のモーメント母関数の加重平均となる。このことから L の分布関数が求められ、存続確率 $\rho(u)$ が算出される。⑤～⑧に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A） θ	（B） $1+\theta$	（C） $1/\theta$	（D） $1/(1+\theta)$
（E） $\theta/(1+\theta)$	（F） $\theta\mu t$	（G） $1+\theta\mu t$	（H） $1-\theta\mu t$
（I） $(1+\theta)\mu t$	（J） $1+(1+\theta)\mu t$	（K） $1-(1+\theta)\mu t$	（L）いずれにも該当しない

（3）期首サープラスが u のときの存続確率 $\rho(u)$ は以下のようになる。

$$\rho(u)=1-\boxed{⑨}\times\boxed{⑩}-\boxed{⑪}\times\boxed{⑫}$$

⑨～⑫に当てはまる最も適切なものは、選択肢のうちのどれか。ただし、⑨＞⑪とする。

【⑨、⑪の選択肢】

（Ａ）$1/16$　（Ｂ）$1/8$　（Ｃ）$3/16$　（Ｄ）$1/4$　（Ｅ）$5/16$
（Ｆ）$3/8$　（Ｇ）$7/16$　（Ｈ）$1/2$　（Ｉ）$9/16$　（Ｊ）$5/8$

【⑩、⑫の選択肢】

（Ａ）$e^{-u/2}$　（Ｂ）e^{-u}　（Ｃ）$e^{-3u/2}$　（Ｄ）e^{-2u}　（Ｅ）$e^{-5u/2}$
（Ｆ）e^{-3u}　（Ｇ）$e^{-7u/2}$　（Ｈ）e^{-4u}　（Ｉ）$e^{-9u/2}$　（Ｊ）e^{-5u}

以上

損保数理（解答例）

問題１

Ⅰ.

（Ｆ）　　［３点］

2017 年度における契約 1 台当たりの保険料は 990,000÷10,000=99 であるから、直近の料率水準ベースでの 2015 から 2017 年度契約の 3 か年通算の保険料は 99×(5,000＋7,000＋10,000)＝2,178,000 となる。

また、保険金について、直近の補償範囲ベースに揃えるためには、2016 年度以前の保険金を 10%減少させればよいので、直近の補償範囲ベースでの 2015 から 2017 年度契約の 3 か年通算の保険金は (360,000＋500,000)×0.9＋594,000＝1,368,000 となる。

以上から、直近の料率水準・補償範囲ベースでの 2015 から 2017 年度契約の 3 か年通算の損害率は、1,368,000÷2,178,000＝62.8%となる。

Ⅱ.

<u>（B）</u>　　　［３点］

テキスト(3.7)式

$$n_F = \left(\frac{y}{k}\right)^2 \left\{1+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right\}$$

において、

$$y_{2.5\%} = 1.960\text{、}\ k = 0.1\text{、}\ \left(\frac{\sigma}{m}\right)^2 = \frac{V(X)}{\left(E(X)\right)^2} = \frac{5}{0.2^2}\left(\frac{0.2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$$

を代入すると、

$$n_F = \left(\frac{1.960}{0.1}\right)^2 \left(1+\frac{1}{5}\right) = 461$$

Ⅲ.

（Ⅰ）　　［３点］

予定契約消滅率qを考慮した現価率ϕ、および予定契約消滅率qと予定払込免除発生率dを考慮した期始払年金現価率Zは、以下のとおりとなる。

$$\phi=\frac{1-q}{1+i}=0.9510$$

$$Z=\frac{1-\left(1-d\right)^5\phi^5}{1-\left(1-d\right)\phi}=4.4481$$

よって、年払営業保険料は以下のとおりとなる。

年払営業保険料　＝　年払積立保険料 ×（１＋ 維持費率 ＋ 代理店手数料率 ）

　＝（ 満期返れい金　× ϕ^5）÷ Z ×（１＋ 維持費率 ＋ 代理店手数料率 ）

　＝ $\left(250万\times0.9510^5\right)\div4.4481\times\left(1+2\%+3\%\right)$

　＝ 459,047

Ⅳ.

（１）（Ｉ）　（２）（Ｆ）　　［（１）２点　（２）２点］

（１）

各リスク区分のクレームコスト $R_{ij}=\dfrac{C_{ij}}{E_{ij}}$ および相対クレームコスト指数 $r_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{R_{\bullet\bullet}}$ を計算すると、

＜クレームコスト R_{ij} ＞

	日常・レジャー	業務使用	計
a 歳未満	0.240	0.147	0.209
a 歳以上	0.125	0.310	0.187
計	0.194	0.212	0.200

＜相対クレームコスト指数 r_{ij} ＞

	日常・レジャー	業務使用	計
a 歳未満	1.200	0.735	1.045
a 歳以上	0.625	1.550	0.935
計	0.970	1.060	1.000

したがって、$r_{22}=1.550$

（２）

各リスク区分のエクスポージャを E_{ij} 、相対クレームコスト指数の推定値を $\hat{r}_{ij}$ としたとき、Minimum Bias 法における満たすべき条件は、次の連立方程式のようになる。

$$E_{11}\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)+E_{12}\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)=0$$
$$E_{21}\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)+E_{22}\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=0$$
$$E_{11}\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)+E_{21}\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)=0$$
$$E_{12}\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)+E_{22}\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=0$$

この連立方程式において、C を定数として、

$$E_{11}\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)=E_{22}\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=C$$
$$E_{21}\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)=E_{12}\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)=-C$$

と表すことができる。

この分類リスクの構造が乗法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用い

て、$\hat{r}_{ij} = x_i y_j \quad (i=1,2 \quad j=1,2)$ と表される。

これを、上記の連立方程式に代入して整理すると、

$$x_1 y_1 = r_{11} - \frac{C}{E_{11}} \quad \cdots(\mathrm{a}), \qquad x_1 y_2 = r_{12} + \frac{C}{E_{12}} \quad \cdots(\mathrm{b})$$
$$x_2 y_1 = r_{21} + \frac{C}{E_{21}} \quad \cdots(\mathrm{c}), \qquad x_2 y_2 = r_{22} - \frac{C}{E_{22}} \quad \cdots(\mathrm{d})$$

となる。(a)×(d)＝(b)×(c)より、

$$\left(r_{11} - \frac{C}{E_{11}}\right)\left(r_{22} - \frac{C}{E_{22}}\right) = \left(r_{12} + \frac{C}{E_{12}}\right)\left(r_{21} + \frac{C}{E_{21}}\right)$$

$$\left(1.200 - \frac{C}{300}\right)\left(1.550 - \frac{C}{100}\right) = \left(0.625 + \frac{C}{200}\right)\left(0.735 + \frac{C}{150}\right)$$
$$1.200 \times 1.550 - 0.625 \times 0.735 = \left(\frac{0.735}{200} + \frac{0.625}{150} + \frac{1.200}{100} + \frac{1.550}{300}\right) C$$

これを解いて、$C = 56.006$

従って、$x_1 = \dfrac{r_{11} - \dfrac{C}{E_{11}}}{y_1} = \dfrac{1.200 - \dfrac{56.006}{300}}{0.970} = 1.045$

Ⅴ.
（Ｂ）　　［４点］

この保険契約の保険料は、20%×100 万円＝20 万円である。

①　再保険を手配しない場合
保険金支払件数が k 件であるとき、今年度末のサープラス（万円）は以下のようになる。
　前年度末のサープラス ＋ 収入保険料 － 支払保険金
　＝ 150 ＋ 20×10 － 100×k
　＝ 350 － 100k
したがって、保険金支払件数が 4 件以上になると、この保険会社は破産する。

②　60%比例再保険を手配した場合
保険金支払件数が k 件であるとき、今年度末のサープラス（万円）は以下のようになる。
　前年度末のサープラス ＋（ 収入保険料 － 支払再保険料 ）－（ 支払保険金 － 回収再保険金 ）
　＝ 150 ＋（20－20×60%）× 10 －（100－100×60%）× k
　＝ 230 － 40k
したがって、保険金支払件数が 6 件以上になると、この保険会社は破産する。

以上より、
$P_1 - P_2$＝（ 保険金支払件数が 4 件以上となる確率 ）－（ 保険金支払件数が 6 件以上となる確率 ）
　　＝（ 保険金支払件数が 4 件となる確率 ）＋（ 保険金支払件数が 5 件となる確率 ）

$$= {}_{10}C_4 \times 0.2^4 \times 0.8^6 + {}_{10}C_5 \times 0.2^5 \times 0.8^5 = 0.115$$

VI.

（Ｆ）　　［４点］

まず、観測データからケンドールのτを求める。

保険金Xと保険金Yの観測値を、それぞれxとyとする。事故番号が$i>j$であるようなすべての$(x_i,y_i),(x_j,y_j)$の組に対して、(x_i-x_j, y_i-y_j)の符号を調べると、

(x,y)	(10,　6)	(26, 20)	(35, 47)	(11, 26)	(20, 15)
(10,　6)		(＋, ＋)	(＋, ＋)	(＋, ＋)	(＋, ＋)
(26, 20)			(＋, ＋)	(−, ＋)	(−, −)
(35, 47)				(−, −)	(−, −)
(11, 26)					(＋, −)
(20, 15)					

となる。よって、$sign\left((x_i-x_j)(y_i-y_j)\right)$を計算すると、

(x,y)	(10,　6)	(26, 20)	(35, 47)	(11, 26)	(20, 15)
(10,　6)		1	1	1	1
(26, 20)			1	−1	1
(35, 47)				1	1
(11, 26)					−1
(20, 15)					

であることから、ケンドールのτは、

$$\frac{2}{5\times 4}\sum_{i>j} sign\left((x_i-x_j)(y_i-y_j)\right)=\frac{6}{10}=0.6$$

となる。

つぎに、パラメータαのクレイトン・コピュラのケンドールのτは、$\varphi(u)=\frac{1}{\alpha}\left(u^{-\alpha}-1\right)$より、

$$\tau=1+4\int_0^1\frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}du=1-\frac{4}{\alpha}\int_0^1\left(u-u^{\alpha+1}\right)du=1-\frac{4}{\alpha}\left[\frac{u^2}{2}-\frac{u^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right]_0^1=1-\frac{4}{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha+2}\right)=\frac{\alpha}{\alpha+2}$$

これが観測値から求めたケンドールのτと等しいとして、

$\frac{\alpha}{\alpha+2}=0.6$より、$\alpha=3.0$となる。

問題２

Ⅰ.

（１）①（Ａ）（Ｂ）②（Ｃ）　（２）（Ｉ）　　［（１）①２点、②２点　（２）３点］

（１）

①選択肢のうち、「独立なリスクに対する加法性」を満たすものは、期待値原理、エッシャー原理である。

②選択肢のうち、「平行移動不変性」および「正の同次性」をともに満たすものは、パーセンタイル原理である。（テキスト 7-6）

（２）

クレーム件数 N のモーメント母関数は、

$$E\left(e^{tN}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}E\left(e^{tN}\middle|\Theta=k\right)P\left(\Theta=k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(0.3e^{t}+0.7\right)^{k}e^{-4}\frac{4^{k}}{k!}$$

$$=e^{-4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1.2e^{t}+2.8\right)^{k}}{k!}=\exp\left\{1.2\left(e^{t}-1\right)\right\}$$

となることから、クレーム件数 N は平均 1.2 のポアソン分布に従う。

また、個々のクレーム額 X_i は対数正規分布 $LN\left(\mu=1,\sigma^2=1^2\right)$ に従うことから、

$$E(X)=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)=e^{1.5}$$

$$V(X)=\exp\left(2\mu+2\sigma^2\right)-\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)=e^{4}-e^{3}$$

よって、

$$E(S)=E\left(N\right)E\left(X\right)=1.2e^{1.5}$$

$$V(S)=E\left(N\right)V\left(X\right)+V\left(N\right)E\left(X\right)^2=1.2\left(e^{4}-e^{3}\right)+1.2e^{3}=1.2e^{4}$$

となるので、求める保険料は、

$$P(S)=1.2e^{1.5}+0.5\sqrt{1.2e^{4}}=9.4$$

Ⅱ.

（１）①（Ｈ）②（Ｃ）③（Ｂ）　（２）（Ｅ）　　［（１）①２点、②２点、③１点　（２）２点］

（１）

$\bar{x}$ 、$\bar{y}$ をそれぞれ x_i 、y_i $\left(i=1,2,3,4\right)$ の平均値とすると、$\bar{x}=2.5$ 、$\bar{y}=5$ となる。

相関係数の定義より

$$r_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}}=\frac{7}{\sqrt{70}}=0.84$$

決定係数 R^2 の値は $R^2=r_{xy}^2=0.7$ であり、

$$R^2=1-\frac{\text{残差変動}}{\text{全変動}}=1-\frac{\text{残差変動}}{\sum_{i=1}^{4}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}=1-\frac{\text{残差変動}}{14}$$ であるから、残差変動は 4.2 である。

また、自由度修正決定係数 $\bar{R}^2$ は

$$\bar{R}^2=1-\frac{\dfrac{\text{残差変動}}{4-1-1}}{\dfrac{\text{全変動}}{4-1}}=1-\frac{\dfrac{4.2}{2}}{\dfrac{14}{3}}=0.55$$

（２）

イ　正しい（テキスト「モデリング」1-3）

ロ　誤：決定係数が <u>0</u> に近いほど回帰直線がよく当てはまっていると考えられる。

　　正：決定係数が <u>1</u> に近いほど回帰直線がよく当てはまっていると考えられる。

　　（テキスト「モデリング」1-6～7）

ハ　誤り。自由度修正決定係数は次のとおりであり 0 未満の値もとり得る。

　　（テキスト「モデリング」1-9）

$$\bar{R}^2=1-\frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2)$$

$0\leq R^2\leq 1$　より

$$-\frac{k}{n-k-1}\leq \bar{R}^2\leq 1$$

Ⅲ.

（１）a.**２** b.**３** c.**５** （２）（**Ｈ**） （３）（**Ａ**）　［（１）２点 （２）２点 （３）３点］

（１）

2016 年 4 月から 2017 年 3 月までの計上保険料は、400＋250＋500＝1,150

2016 年度中の支払保険金（ペイドロス）は、120＋150＝270

よって、2016 年度のリトンベーシス損害率は、270÷1,150＝23.5％

（２）

2016 年 4 月から 2017 年 3 月までの経過保険料（アーンドプレミアム）は、

$$400\times\frac{8}{12}+250\times\frac{6}{12}+500\times\frac{3}{12}=\frac{6,200}{12}$$

2016 年度のインカードロスを x とすると、

2016 年度のアーンドベーシス損害率（会計年度統計）が、60.0％より

$$\frac{x}{\frac{6,200}{12}}=0.60$$

すなわち、 $x=310$ となり、2016 年度末の支払備金は、310－120－150＝40

（３）

2017 年度の経過保険料（アーンドプレミアム）は、

$$400\times\frac{4}{12}+250\times\frac{6}{12}+500\times\frac{9}{12}+200\times\frac{12}{12}+1,000\times\frac{10}{12}+500\times\frac{2}{12}+400\times\frac{1}{12}=\frac{21,400}{12}\cdots①$$

会計年度－事故年度統計における 2017 年度のインカードロスは、2017 年度に発生した事故にかかる支払である。すなわち、事故番号 4～7 が対象であり、インカードロスは、
180＋210＋400＋200＝990…② となる。
よって、2017 年度のアーンドベーシス損害率（会計年度－事故年度統計）は
②／①＝55.5％

Ⅳ.

（１）①（Ｅ）②（Ａ）　（２）（Ｇ）　（３）（Ｅ）

［（１）①１点、②１点　（２）３点　（３）２点］

（１）

テキスト 10-52 のとおり。

（２）

確率変数 X が平均 2 の指数分布に従うことから、生存関数 $S_X(x)=1-F_X(x)$ は、

$$S_X(x)=\int_x^{\infty}\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)dt=\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

となる。歪み関数 $g(u)$ は

$$g(u)=\begin{cases}0 & (0\le u\le 0.05)\\ 20u-1 & (0.05\le u\le 0.1)\\ 1 & (0.1\le u\le 1)\end{cases}$$

であるから、

$$g(S_X(x))=\begin{cases}1 & (x\le 2\log 10)\\ 20\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right)-1 & (2\log 10\le x\le 2\log 20)\\ 0 & (2\log 20\le x)\end{cases}$$

が得られる。歪みリスク尺度 $E_g(X)$ の定義から、

$$E_g(X)=\int_0^{\infty}g(S_X(x))dx-\int_{-\infty}^{0}\{1-g(S_X(x))\}dx$$

$$=\int_0^{2\log 10}1dx+\int_{2\log 10}^{2\log 20}\left\{20\exp\left(-\frac{x}{2}\right)-1\right\}dx$$

$$=2\log 10+\left[-40\exp\left(-\frac{x}{2}\right)-x\right]_{2\log 10}^{2\log 20}$$

$$=2\log 10+\left(-40\times\frac{1}{20}-2\log 20+40\times\frac{1}{10}+2\log 10\right)$$

$$=2+4\log 10-2\log 20=2+2\log 5=5.2$$

（３）

歪み関数を比較すると、常に$TVaR_{90\%}\left(X\right) \geq E_g\left(X\right) \geq VaR_{90\%}\left(X\right)$となっており、

$0.05 < u < 0.1$においては$TVaR_{90\%}(X) > E_g(X) > VaR_{90\%}(X)$となっている。

したがって、歪みリスク尺度の値は$TVaR_{90\%}(X) > E_g(X) > VaR_{90\%}(X)$となる。

なお、$VaR_{90\%}(X)$と$TVaR_{90\%}(X)$を計算すると次のとおりとなる。

まず、$VaR_{90\%}(X)$の$g(S_X(x))$は

$$g\left(S_X\left(x\right)\right) = \begin{cases} 1 & (x \leq 2\log 10) \\ 0 & (2\log 10 \leq x) \end{cases}$$

となるので

$$VaR_{90\%}(X) = \int_0^{\infty} g\left(S_X\left(x\right)\right)dx - \int_{-\infty}^{0}\left\{1 - g\left(S_X\left(x\right)\right)\right\}dx$$

$$= \int_0^{2\log 10} 1dx = 2\log 10 = 2(\log 2 + \log 5) = 4.6$$

となる。

つぎに、$TVaR_{90\%}(X)$の$g(S_X(x))$は

$$g\left(S_X\left(x\right)\right) = \begin{cases} 1 & (x \leq 2\log 10) \\ 10\exp\left(-\dfrac{x}{2}\right) & (2\log 10 \leq x) \end{cases}$$

となるので

$$TVaR_{90\%}(X) = \int_0^{\infty} g\left(S_X\left(x\right)\right)dx - \int_{-\infty}^{0}\left\{1 - g\left(S_X\left(x\right)\right)\right\}dx$$

$$= \int_0^{2\log 10} 1dx + \int_{2\log 10}^{\infty} 10\exp\left(-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= 2\log 10 + \left[-20\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\right]_{2\log 10}^{\infty}$$

$$= 2\log 10 + 2 = 6.6$$

となる。

Ⅴ.

（1）**（G）**　（2）**（B）**　　［（1）４点 （2）３点］

（1）

実績の累計支払保険金のロスディベロップメントファクターは、以下のとおり。

事故年度	経過年度		
	1→2	2→3	3→4
2014 年度	2.890	1.215	1.085
2015 年度	2.532	1.145	
2016 年度	2.630		
2017 年度			

以上より、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値は以下のようになる。

経過年数	1→2	2→3	3→4
LDF	2.684	1.180	1.085

したがって、2015 年度から 2017 年度は各々、累積支払保険金のロスディベロップメントファクターは 1.085、1.280、3.436 となる。また、2014 年度は第 4 経過年度まで達しているため、ロスディベロップメントファクターは 1.000 となる。これらを各事故年度の直近累計支払保険金に乗じると、予想最終発生保険金は 5,650、6,080、7,073、7,920 となる。したがって、支払備金は

（5,650＋6,080＋7,073＋7,920）－（5,650＋5,604＋5,526＋2,305）＝7,638

となる。

（2）

与えられた既経過保険料と予定損害率から、事故年度ごとの最終累計発生保険金の当初予測値は 5,502、5,775、6,522、6,215 となる。これより、支払備金は

$$\left(1-\frac{1}{1}\right)\times 5,502+\left(1-\frac{1}{1.085}\right)\times 5,775+\left(1-\frac{1}{1.280}\right)\times 6,522+\left(1-\frac{1}{3.436}\right)\times 6,215$$

＝452＋1,427＋4,406＝6,285

となる。

問題３

Ｉ.

（１）（D）　（２）（G）　　［（１）４点　（２）４点］

（１）

ネット再保険料が等しい再保険処理のうちで、ストップロス再保険$I(X)=\max(X-d,0)$が保有保険金の分散を最小にする。（テキスト 9-18）

$$E(I(X))=\int_d^{\infty}(x-d)e^{-x}dx=\left[-(x-d)e^{-x}-e^{-x}\right]_d^{\infty}=e^{-d}=0.2$$

より、エクセスポイントdは、$d=\log 5$となる。

保有保険金をZとすると、

$$Z=\begin{cases}X & (X\le d)\\ d & (X>d)\end{cases}$$

であるから、

$$E(Z)=E(X)-E(I(X))=1-0.2=0.8$$

$$E(Z^2)=\int_0^d x^2e^{-x}dx+\int_d^{\infty}d^2e^{-x}dx$$

$$=\left[-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}\right]_0^d+d^2e^{-d}$$

$$=2-2de^{-d}-2e^{-d}=2-2\log 5\times 0.2-2\times 0.2=1.6-0.4\log 5$$

従って、保有保険金の分散の最小値は、

$$V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=1.6-0.4\log 5-0.8^2=0.96-0.4\times 1.609=0.32$$

（２）

利益の期待値は、

$$\{E(Y)+0.1E(Y)\}-\{E(I(Y))+0.1V(I(Y))\}-E(Y-I(Y))$$

$$=0.1E(Y)-0.1V(I(Y))=0.1-0.1V(I(Y))$$

である。従って、保有保険金$Y-I(Y)$の分散が 0.2 となるような再保険処理のうち$V(I(Y))$が最小となるのものを考えればよい。

$$V(I(Y))=V(Y+I(Y)-Y)=V(Y)+V(I(Y)-Y)-2Cov(Y,Y-I(Y))$$

$$=V(Y)+V(I(Y)-Y)-\sqrt{V(Y)V(I(Y)-Y)}\,2\rho(Y,Y-I(Y))$$

$$=1+0.2-\sqrt{1\times 0.2}\,2\rho\left(Y,Y-I\left(Y\right)\right)$$

であるから、$\rho\left(Y,Y-I\left(Y\right)\right)=1$となることがあれば、そのとき、$V\left(I\left(Y\right)\right)$は最小となる。

ここで、比例再保険$I\left(Y\right)=kY \quad \left(0\le k\le 1\right)$を考えると、

$\rho\left(Y,Y-I\left(Y\right)\right)=\rho\left(Y,\left(1-k\right)Y\right)=1$（テキスト 9-19）

であるから、このとき、$V\left(I\left(Y\right)\right)$は最小値

$=1+0.2-\sqrt{1\times 0.2}\,2\rho\left(Y,Y-I\left(Y\right)\right)=1.2-2\sqrt{0.2}=0.306$

をとる。このとき、利益の期待値は最大となり、最大値は

$0.1-0.1V\left(I\left(Y\right)\right)=0.1-0.1\times 0.306=0.07$

となる。

なお、kの値は、

$V\left(Y-I\left(Y\right)\right)=V\left(Y-kY\right)=\left(1-k\right)^2V\left(Y\right)=\left(1-k\right)^2=0.2$より、

$k=1-\sqrt{0.2}=0.553$となり、確かに$0\le k\le 1$を満たす。

Ⅱ.

（１）（Ａ）　（２）①（Ｉ）②（Ｅ）　　［（１）４点　（２）①２点、②２点］

（１）

題意より、確率変数$N^{(j)}\left(j=1,2\right)$は、$N_\alpha$、$N_\beta$、$N_\gamma$を用いて、

$$N^{(1)}=N_\alpha+N_\gamma$$

$$N^{(2)}=N_\beta+N_\gamma$$

と書ける。したがって、

$$
\begin{aligned}
M_S\left(r\right)&=E\left[e^{rS}\right]\\
&=E\left[\exp\left[r\left\{\sum_{i=1}^{N_\alpha+N_\gamma}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{N_\beta+N_\gamma}X_i^{(2)}\right\}\right]\right]\\
&=E_{N_\alpha,N_\beta,N_\gamma}\left[\exp\left[r\left\{\sum_{i=1}^{N_\alpha+N_\gamma}X_i^{(1)}+\sum_{i=1}^{N_\beta+N_\gamma}X_i^{(2)}\right\}\right]\middle|N_\alpha,N_\beta,N_\gamma\right]\\
&=E_{N_\alpha,N_\beta,N_\gamma}\left[M_{X^{(1)}}\left(r\right)^{N_\alpha+N_\gamma}M_{X^{(2)}}\left(r\right)^{N_\beta+N_\gamma}\right]\\
&=\sum_{N_\alpha}f_\alpha\left(N_\alpha\right)M_{X^{(1)}}\left(r\right)^{N_\alpha}\sum_{N_\beta}f_\beta\left(N_\beta\right)M_{X^{(2)}}\left(r\right)^{N_\beta}\sum_{N_\gamma}f_\gamma\left(N_\gamma\right)M_{X^{(1)}}\left(r\right)^{N_\gamma}M_{X^{(2)}}\left(r\right)^{N_\gamma}\\
&=M_{N_\alpha}\left(\log M_{X^{(1)}}\left(r\right)\right)M_{N_\beta}\left(\log M_{X^{(2)}}\left(r\right)\right)M_{N_\gamma}\left(\log M_{X^{(1)}}\left(r\right)+\log M_{X^{(2)}}\left(r\right)\right)\\
&=\exp\left(\lambda_\alpha\left(M_{X^{(1)}}\left(r\right)-1\right)\right)\exp\left(\lambda_\beta\left(M_{X^{(2)}}\left(r\right)-1\right)\right)\exp\left(\lambda_\gamma\left(M_{X^{(1)}}\left(r\right)M_{X^{(2)}}\left(r\right)-1\right)\right)
\end{aligned}
$$

ここで、f_*はN^*の確率密度関数（ポアソン分布）、$M_{X^{(1)}}\left(r\right)$、$M_{X^{(2)}}\left(r\right)$は$X_i^{(1)}$および$X_i^{(2)}$のモーメント母関数である。よって、

$$\log M_S\left(r\right)=\lambda_\alpha\left(M_{X^{(1)}}\left(r\right)-1\right)+\lambda_\beta\left(M_{X^{(2)}}\left(r\right)-1\right)+\lambda_\gamma\left(M_{X^{(1)}}\left(r\right)M_{X^{(2)}}\left(r\right)-1\right)$$

さらに、ガンマ分布$\Gamma\left(1,1/\mu\right)$、$\Gamma\left(2,1/\mu\right)$のモーメント母関数は、それぞれ

$\dfrac{1}{1-\mu r}$、$\left(\dfrac{1}{1-\mu r}\right)^2$であることから、

$$\log M_S\left(r\right)=\lambda_\alpha\left(\frac{1}{1-\mu r}-1\right)+\lambda_\beta\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^2-1\right\}+\lambda_\gamma\left\{\left(\frac{1}{1-\mu r}\right)^3-1\right\}$$

となる。

（2）

$$\frac{d}{dr}\log M_S(r)=\lambda_\alpha\frac{\mu}{(1-\mu r)^2}+\lambda_\beta\frac{2\mu}{(1-\mu r)^3}+\lambda_\gamma\frac{3\mu}{(1-\mu r)^4}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\log M_S(r)=\lambda_\alpha\frac{2\mu^2}{(1-\mu r)^3}+\lambda_\beta\frac{6\mu^2}{(1-\mu r)^4}+\lambda_\gamma\frac{12\mu^2}{(1-\mu r)^5}$$

$$\frac{d^3}{dr^3}\log M_S(r)=\lambda_\alpha\frac{6\mu^3}{(1-\mu r)^4}+\lambda_\beta\frac{24\mu^3}{(1-\mu r)^5}+\lambda_\gamma\frac{60\mu^3}{(1-\mu r)^6}$$

より、k 次のキュムラント $\chi_k=\frac{d^k}{dr^k}\log M_S(r)\Big|_{r=0}$ は、$k=1,2,3$ のとき以下のようになる。

$$\chi_1=\mu\left(\lambda_\alpha+2\lambda_\beta+3\lambda_\gamma\right)$$

$$\chi_2=\mu^2\left(2\lambda_\alpha+6\lambda_\beta+12\lambda_\gamma\right)$$

$$\chi_3=\mu^3\left(6\lambda_\alpha+24\lambda_\beta+60\lambda_\gamma\right)$$

よって、

$$\text{クレーム総額}S\text{の分散}=\sigma^2=\chi_2=\mu^2\left(2\lambda_\alpha+6\lambda_\beta+12\lambda_\gamma\right)$$

$$\text{クレーム総額}S\text{の歪度}=\frac{\chi_3}{\sigma^3}=\frac{6\lambda_\alpha+24\lambda_\beta+60\lambda_\gamma}{\left(2\lambda_\alpha+6\lambda_\beta+12\lambda_\gamma\right)^{3/2}}$$

となる。

題意より、$\lambda_\alpha+\lambda_\gamma=10$ 、$\lambda_\beta+\lambda_\gamma=5$ であるから、

$\lambda_\gamma=0$ のモデルでは、$\lambda_\alpha=10$ 、$\lambda_\beta=5$

$\lambda_\gamma=1$ のモデルでは、$\lambda_\alpha=9$ 、$\lambda_\beta=4$

したがって、

分散は $\frac{2\times9+6\times4+12\times1}{2\times10+6\times5+12\times0}=\frac{54}{50}=1.08$ 倍となり、

歪度は $\frac{6\times9+24\times4+60\times1}{(2\times9+6\times4+12\times1)^{3/2}}\frac{(2\times10+6\times5+12\times0)^{3/2}}{6\times10+24\times5+60\times0}=\frac{210}{54\sqrt{54}}\frac{50\sqrt{50}}{180}=1.04$ 倍となる。

Ⅲ.

（１）①（Ｇ）②（Ｅ）③（Ａ）　（２）（Ｈ）

［（１）①２点、②２点、③１点　（２） ３点］

（１）

損害額の実績データ $x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$ を用いて、尤度 L は以下のように書ける。

$$L=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

したがって、対数尤度 l は

$$l=n\log\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$$

となる。λ の最尤推定値は、

$\dfrac{\partial l}{\partial\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ を解いて、$\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$ となる。つぎに、

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\lambda^2}=-\frac{n}{\lambda^2}$$

であるから、$\hat{\lambda}$ の漸近分散は、

$$V\left[\hat{\lambda}\right]\approx-\left(-\frac{n}{\lambda^2}\right)^{-1}=\frac{\lambda^2}{n}$$

となる。また、

$$\left(\log\lambda\right)'=\frac{1}{\lambda}$$

であるから、デルタ法によって $\log\hat{\lambda}$ の漸近分散は以下のように計算できる。

$$V\left[\log\hat{\lambda}\right]\approx\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 V\left[\hat{\lambda}\right]\approx\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\frac{\lambda^2}{n}=\frac{1}{n}$$

（２）

商品 1、商品 2 の事故件数をそれぞれ n_1、n_2 とおく。

（１）の結果から、デルタ法によって $\log\hat{\lambda}_1$ は漸近的に、平均 $\log\lambda_1$、分散 $\dfrac{1}{n_1}$ の正規分布 $N\left(\log\lambda_1,\dfrac{1}{n_1}\right)$

に従うことがわかる。問題文の仮定から、$\log\hat{\lambda}_1\sim N\left(\log\lambda_1,\dfrac{1}{n_1}\right)$ と近似する。

同様に、$\log \hat{\lambda}_2 \sim N\left(\log \lambda_2, \frac{1}{n_2}\right)$と近似するとき、$\log \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2} = \log \hat{\lambda}_1 - \log \hat{\lambda}_2 \sim N\left(\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$と

なるため、$\frac{\log \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2} - \log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0,1)$が得られる。

よって、$\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$の 95%信頼区間の上限値は、$\log \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2} + 1.960\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$となる。

ここで、$\hat{\lambda}_1 = \frac{n_1}{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}$ 、$\hat{\lambda}_2 = \frac{n_2}{\sum_{j=1}^{n_2} X_{2j}}$の実績値はそれぞれ$\frac{80}{2,000} = \frac{1}{25}$ 、$\frac{120}{7,200} = \frac{1}{60}$であるから、

$\log \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$の 95%信頼区間の上限値は、

$$\log \frac{60}{25} + 1.960\sqrt{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}}$$
$$= 2\log 2 + \log 3 - \log 5 + 1.960\sqrt{\frac{1}{48}}$$
$$= 2 \times 0.693 + 1.099 - 1.609 + 1.960\sqrt{\frac{1}{48}}$$
$$= 1.16$$

となる。したがって、$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$の 95%信頼区間の上限値は、$\exp(1.16)$となる。

Ⅳ.

（１）①（G）②（E）　（２）③（E）④（E）

［（１）①２点、②２点　（２）③１点、④３点］

（１）

契約者ごとのクレーム件数をX、契約者ごとのポアソンパラメータを表す確率変数をΘ、全体のクレーム件数の平均をμ、分散をσ^2とすると、

$$E\left(V\left(X\middle|\Theta\right)\right)=E\left(\Theta\right)=\mu$$

$$V\left(E\left(X\middle|\Theta\right)\right)=V\left(X\right)-E\left(V\left(X\middle|\Theta\right)\right)=\sigma^2-\mu$$

また、全体のクレーム件数の標本平均$\overline{x}$および不偏分散s^2は次のとおり。

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{300\times 0+55\times 1+30\times 2+15\times 3}{300+55+30+15}=0.400$$

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\frac{300\times\left(0-0.400\right)^2+55\times\left(1-0.400\right)^2+30\times\left(2-0.400\right)^2+15\times\left(3-0.400\right)^2}{300+55+30+15-1}=0.617$$

μおよびσ^2の推定値として、$\overline{x}$およびs^2を使用すると、実績クレーム件数に対する信頼度Zは次のとおりとなる。

$$Z=\frac{1}{1+\dfrac{E\left(V\left(X\middle|\Theta\right)\right)}{V\left(E\left(X\middle|\Theta\right)\right)}}=\frac{1}{1+\dfrac{0.400}{0.617-0.400}}=0.35$$

また、今年度に２件のクレームを起こした契約者の次年度のクレーム件数の予測値は次のとおりとなる。

$$2\times Z+\overline{x}\times\left(1-Z\right)=2\times 0.35+0.4\times\left(1-0.35\right)=0.96$$

（２）

（１）より、今年度のクレーム件数に応じた次年度のクレーム件数の予測値は次のとおりとなる。

今年度のクレーム件数	次年度の予測クレーム件数	契約者数
0 件	0.26 件	300 人
1 件	0.61 件	55 人
2 件	0.96 件	30 人
3 件	1.31 件	15 人

したがって、今年度のクレーム件数にかかわらず一律の純保険料を設定した場合の純保険料は次のとおりとなる。

$$1000\times\frac{300\times0.26+55\times0.61+30\times0.96+15\times1.31}{300+55+30+15}=400$$

つぎに、今年度のクレーム件数に応じた純保険料を算出する場合の純保険料は次のとおりとなる。

今年度のクレーム件数	次年度の純保険料（調整前）	契約者数
0 件	260	300 人
1 件	610	55 人
2 件	960	30 人
3 件	1,310	15 人

このとき、今年度のクレーム件数が 2 件、3 件の純保険料が 400×2＝800 を超えているため、設定方法ロ．に従って、純保険料を 800 に調整する。
この調整によって、収入純保険料が

$$(960-800)\times30+(1{,}310-800)\times15=12{,}450$$

だけ減少するため、設定方法ハ．において、今年度にクレームを起こさなかった契約者に上乗せされる純保険料は

$$12{,}450\div300=41.5$$

となる。したがって、今年度にクレームを起こさなかった契約者の調整後の純保険料は

$$260+41.5=301.5$$

となる。

問題４

（１）①（Ｈ）②（Ｍ）（①、②は完答）③（Ｉ）④（Ｈ）（③、④は完答）

（２）⑤（Ｄ）⑥（Ｅ）（⑤、⑥は完答）⑦（Ｆ）⑧（Ｊ）（⑦、⑧は完答）

（３）⑨（Ｉ）⑩（Ｂ）⑪（Ａ）⑫（Ｆ）（⑨～⑫は完答）

［（１）①②１点、③④３点　（２）⑤⑥１点、⑦⑧３点　（３）４点］

（１）

問題文中の（ｉ）式より、

$$\rho(0)=1-\varepsilon(0)=1-G(0,0)=1-\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\left\{1-F_X(x)\right\}dx$$

ここで、

$$\frac{c}{\lambda}=(1+\theta)E(X) \quad 、\quad \int_0^\infty\left\{1-F_X(x)\right\}dx=E(X)$$

であるから、

$$\rho(0)=1-\frac{1}{(1+\theta)E(X)}E(X)=\frac{\theta}{1+\theta}$$

$\theta=0.6$ を代入して、$\rho(0)=\dfrac{3}{8}$ となる。次に、

$$f(x)=3e^{-4x}+0.5e^{-2x}=\frac{3}{4}\times4e^{-4x}+\frac{1}{4}\times2e^{-2x}$$

であるから、

$$E(X)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16} \quad 、\quad \frac{c}{\lambda}=(1+\theta)E(X)=(1+0.6)\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$$

となる。従って、

$$\rho'(u)=\frac{\lambda}{c}\left\{\rho(u)-\int_0^u\rho(u-x)dF_X(x)\right\}=2\rho(u)-2\int_0^u\rho(u-x)f(x)dx$$

$$=2\rho(u)-2\int_0^u\rho(u-x)\left(3e^{-4x}+0.5e^{-2x}\right)dx=2\rho(u)-6I_4(u)-I_2(u) \quad \cdots①$$

が成り立つ。ここで、n を自然数として、$I_n(u)=\int_0^u\rho(u-x)e^{-nx}dx$ とおいた。

$I_n(u)$ において、$y=u-x$ と変数変換すると、$I_n(u)=e^{-nu}\int_0^u\rho(y)e^{ny}dy$ となることから、$I_n(u)$ を u について微分すると、

$$I_n'(u)=-ne^{-nu}\int_0^u\rho(y)e^{ny}dy+e^{-nu}\rho(u)e^{nu}=-nI_n(u)+\rho(u)$$

が成り立つ。①式を u について微分して、

$$\rho''(u)=2\rho'(u)-6\left\{-4I_4(u)+\rho(u)\right\}-\left\{-2I_2(u)+\rho(u)\right\}=2\rho'(u)+24I_4(u)+2I_2(u)-7\rho(u)$$

①式により $I_2(u)$ を消去して、

$$\rho''(u) = -3\rho(u) + 12I_4(u) \quad \cdots ②$$

②式を u について微分して、

$$\rho'''(u) = -3\rho'(u) + 12\{-4I_4(u) + \rho(u)\} = -3\rho'(u) - 48I_4(u) + 12\rho(u)$$

②式により $I_4(u)$ を消去して、

$$\rho'''(u) = -3\rho'(u) - 4\rho''(u)$$

従って、存続確率 $\rho(u)$ は、

$$\rho'''(u) + 4\rho''(u) + 3\rho'(u) = 0$$

を満たす。

（２）

「最低記録」の更新が発生しない確率は、期首サープラス $u = 0$ のときに破産しない確率に等しく、（１）より $\theta/(1+\theta)$ である。また「最低記録」の更新回数が 1 回である確率は、ある時刻 T_1 においてサープラス U_t が初期サープラスを下回り（確率 $1/(1+\theta)$）、その後は一度も U_t が U_{T_1} を下回らない（確率 $\theta/(1+\theta)$）確率として求められる。以下同様に考えて、

$$P(N = n) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる。したがって、N のモーメント母関数 $M_N(t)$ は

$$M_N(t) = \frac{\theta}{1+\theta} \frac{1}{1 - \dfrac{e^t}{1+\theta}} = \frac{\theta}{1+\theta-e^t}$$

となる。また、L_i の確率分布は期首サープラス $u = 0$ で破産が発生した時の欠損額 Y の確率分布に等しい。従って、$F_{L_i}(y)$ は（１）の（ｉ）式より、

$$F_{L_i}(y) = F_Y(y) = P(Y \le y | T < \infty) = 1 - P(Y > y | T < \infty) = 1 - \frac{P(Y > y, T < \infty)}{P(T < \infty)} = 1 - \frac{G(0, y)}{\varepsilon(0)}$$

$$= 1 - (1+\theta)\frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_y^\infty \{1 - F_X(x)\} dx = \frac{1}{\mu}\int_0^y \{1 - F_X(x)\} dx$$

となる。これを y について微分して、L_i の確率密度関数 $f_{L_i}(y)$ は、

$$f_{L_i}(y)=\frac{1}{\mu}\left(1-F_X(y)\right)$$

となるから、L_i のモーメント母関数 $M_{L_i}(t)$ は、

$$M_{L_i}(t)=\int_0^\infty e^{ty}\frac{1}{\mu}\left(1-F_X(y)\right)dy=\frac{1}{\mu}\left[\frac{e^{ty}}{t}\left(1-F_X(y)\right)\right]_0^\infty+\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\frac{e^{ty}}{t}f(y)dy=\frac{1}{\mu t}\left\{M_X(t)-1\right\}$$

と計算できる。従って、複合幾何分布 $L=L_1+L_2+\cdots+L_N$ のモーメント母関数 $M_L(t)$ は、

$$M_L(t)=M_N\left(\log M_{L_i}(t)\right)=\frac{\theta}{1+\theta-\frac{1}{\mu t}\left\{M_X(t)-1\right\}}=\frac{\theta\mu t}{1+(1+\theta)\mu t-M_X(t)}$$

となる。

（３）

<u>（１）の方法で算出する場合</u>

（１）で得た微分方程式を $\rho'(u)$ についての微分方程式と考えると、その解は、

$$\rho'(u)=C_1e^{\alpha_1 u}+C_2e^{\alpha_2 u}$$（C_1、C_2 は積分定数）

となる。ここで、α_1、α_2 は方程式 $t^2+4t+3=(t+1)(t+3)=0$ の解であり、$\alpha_1=-1$、$\alpha_2=-3$

従って、$\rho'(u)=C_1e^{-u}+C_2e^{-3u}$ となる。

これを u について積分すると、$\rho(\infty)=1$ を踏まえ、

$$\rho(u)=1-C_1e^{-u}-\frac{1}{3}C_2e^{-3u}$$

を得る。ここで（１）より、$\rho(0)=1-C_1-\frac{1}{3}C_2=\frac{3}{8}$

（１）の①式より、$\rho'(0)=2\rho(0)=\frac{3}{4}=C_1+C_2$

これらを連立して、$C_1=\frac{9}{16}$、$C_2=\frac{3}{16}$ と解ける。従って、存続確率 $\rho(u)$ は、

$$\rho(u)=1-\frac{9}{16}e^{-u}-\frac{1}{16}e^{-3u}$$

となる。

（２）の方法で算出する場合

$$M_L(t)=\frac{\theta\mu t}{1+(1+\theta)\mu t-M_X(t)}$$

において、$\theta=0.6$、$\mu=E(X)=5/16$、

$f(x)=3e^{-4x}+0.5e^{-2x}=\frac{3}{4}\times 4e^{-4x}+\frac{1}{4}\times 2e^{-2x}$ より、$M_X(t)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{4-t}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{2-t}=\frac{3}{4-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{2-t}$

となることから、

$$M_L(t)=\frac{\frac{3}{5}\frac{5}{16}t}{1+\frac{8}{5}\frac{5}{16}t-\frac{3}{4-t}-\frac{1}{2}\frac{1}{2-t}}=\frac{\frac{3}{8}t^2-\frac{9}{4}t+3}{t^2-4t+3}=\frac{\frac{3}{8}t^2-\frac{9}{4}t+3}{(1-t)(3-t)}$$

ここで、A、B、C を定数として、

$$M_L(t)=A\times 1+B\frac{1}{1-t}+C\frac{3}{3-t}$$

と展開できるものとすると、

$$M_L(t)=\frac{At^2-(4A+B+3C)t+(3A+3B+3C)}{(1-t)(3-t)}=\frac{\frac{3}{8}t^2-\frac{9}{4}t+3}{(1-t)(3-t)}$$

となるので、

$$A=\frac{3}{8}\quad、\quad 4A+B+3C=\frac{9}{4}\quad、\quad 3A+3B+3C=3$$

を得る。これを解いて、

$$A=\frac{3}{8}\quad、\quad B=\frac{9}{16}\quad、\quad C=\frac{1}{16}$$

となる。従って、$M_L(t)$ は、確率 1 で 0 になる確率変数と、期待値が 1 の指数分布と、期待値が 1/3 の指数分布の各々のモーメント母関数が、$A:B:C$ で加重平均されたものとなっていることから、L の分布関数 $F_L(u)$ は、

$$F_L(u)=\frac{3}{8}\times 1+\frac{9}{16}\left(1-e^{-u}\right)+\frac{1}{16}\left(1-e^{-3u}\right)=1-\frac{9}{16}e^{-u}-\frac{1}{16}e^{-3u}$$

と求められる。存続確率 $\rho(u)$ は $\rho(u)=F_L(u)$ を満たすので、

$$\rho(u)=1-\frac{9}{16}e^{-u}-\frac{1}{16}e^{-3u}$$

となる。