生保数理（問題）

問題１． 次の（１）～（６）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

各４点（計２４点）

（１）$a_{\overline{n|}} \cdot (Ia)_{\infty} - a_{\infty} \cdot (Ia)_{\overline{n|}}$ に等しいものは次のうちどれか。

（Ａ）$\dfrac{n}{i}$　（Ｂ）$\dfrac{n}{d}$　（Ｃ）$\dfrac{n}{i^2}$　（Ｄ）$\dfrac{n}{d^2}$　（Ｅ）$\dfrac{n}{i \cdot d}$

（Ｆ）$\dfrac{n \cdot v^n}{i}$　（Ｇ）$\dfrac{n \cdot v^n}{d}$　（Ｈ）$\dfrac{n \cdot v^n}{i^2}$　（Ｉ）$\dfrac{n \cdot v^n}{d^2}$　（Ｊ）$\dfrac{n \cdot v^n}{i \cdot d}$

（２）x 歳における死力 μ_x を求めたいが、l_x の具体的な関数形が不明なため、区間 $[x-1, x+1]$ において、年齢の 2 次関数で近似することを考える。この 2 次関数が $(x-1, l_{x-1}), (x, l_x), (x+1, l_{x+1})$ の 3 点を通るものとしたとき、死力 μ_x は次のように表される。このとき、①、②の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ次の選択肢の中から選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

$$\mu_x = \boxed{\quad ① \quad} \cdot \frac{l_{x-1}}{l_x} + \boxed{\quad ② \quad} \cdot \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

（Ａ）-2　（Ｂ）-1.5　（Ｃ）-1　（Ｄ）-0.5　（Ｅ）0

（Ｆ）0.5　（Ｇ）1　（Ｈ）1.5　（Ｉ）2　（Ｊ）2.5

（３）x 歳加入、保険料年払、保険金年度末支払、保険金額 1 の終身保険を考える。

保険料払込期間が 30 年の場合の年払純保険料を P_1 とし、

加入後 30 年間は年払純保険料として P_2 を支払い、そののち終身にわたり年払純保険料として $\dfrac{P_2}{2}$ を支払う場合の純保険料を P_2 とすると、

$P_1 = 0.02360$

$P_2 = 0.01840$

となったとする。

このとき保険料払込期間が終身の場合の年払純保険料 P_3 の値に最も近いものは次のうちどれか。

（Ａ）0.0135　（Ｂ）0.0140　（Ｃ）0.0145　（Ｄ）0.0150　（Ｅ）0.0155

（Ｆ）0.0160　（Ｇ）0.0165　（Ｈ）0.0170　（Ｉ）0.0175　（Ｊ）0.0180

（4）x 歳加入、保険料年払終身払込、保険金年度末支払、保険金額 1 の終身保険の第 k 保険年度末の平準純保険料式責任準備金 ${}_kV_x$ について、$\dfrac{{}_kV_x}{1-{}_kV_x}={}_kV_{x+k}$ なる関係式が成り立つとき、$\ddot{a}_{x+2k}$ は次のように表される。ただし、$x+2k<\omega$（ω は最終年齢）とする。

$$\ddot{a}_{x+2k}=\boxed{\quad ① \quad}\cdot a_x+\boxed{\quad ② \quad}\cdot a_{x+k}+\boxed{\quad ③ \quad}$$

このとき、①～③の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ次の選択肢の中から選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

（A） -4　（B） -3　（C） -2　（D） -1　（E） 0
（F） 1　（G） 2　（H） 3　（I） 4　（J） 5

（5）次の（A）～（D）のうち、常に正しい関係を表している等式をすべて選びなさい。なお、（A）～（D）の中に常に正しい関係を表している等式が 1 つもない場合は（E）を選びなさい。

（A） $A_{\overline{xy}:\overline{n}|}=1-d\cdot\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}$

（B） $a_{\overline{xy}|z:\overline{n}|}=a_{z:\overline{n}|}-a_{xz:\overline{n}|}-a_{yz:\overline{n}|}+a_{xyz:\overline{n}|}$

（C） $A^{\,1}_{xy,z:\overline{n}|}=A_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z:\overline{n}|}+A_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z:\overline{n}|}$

（D） $a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|}=a_{x|z:\overline{n}|}-a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|}$

（6）死亡・就業不能脱退残存表において、生存者総数に占める就業不能者数の割合が x 歳では 0.019950、$x+1$ 歳では 0.022249 であるとする。x 歳の就業者が 1 年以内に就業不能になる確率が 0.002756、x 歳の死亡率が 0.008755 のとき、x 歳の就業不能者の絶対死亡率 q_x^i の値に最も近いものは次のうちどれか。ただし、死亡および就業不能はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。また、就業不能者でない者は就業者であるものとし、就業不能者が回復して就業者に復帰することはないものとする。

（A） 0.0264　（B） 0.0268　（C） 0.0272　（D） 0.0276　（E） 0.0280
（F） 0.0284　（G） 0.0288　（H） 0.0292　（I） 0.0296　（J） 0.0300

余白ページ

問題２． 次の（１）～（８）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。
各７点（計５６点）

（１）ある集団が原因 A、B によって減少していく 2 重脱退表を考える。ここで、x 歳の原因 A の脱退者数を a_x、x 歳の原因 B の脱退者数を b_x とし、各脱退はそれぞれ独立かつ 1 年を通じて一様に発生するものとする。
2 重脱退表のうち、判明している数値が下表のとおりであり、$x+1$歳の原因 A の中央脱退率は x 歳の原因 A の中央脱退率の 1.5 倍、$x+1$歳の原因 B の絶対脱退率は $x+1$歳の原因 A の絶対脱退率の 2 倍であるとき、l_{x+2} に最も近いものは次のうちどれか。
なお、$x+1$歳におけるそれぞれの原因による脱退者数は小数点以下を四捨五入して整数として答えなさい。

	l_x	a_x	b_x
x	95,000	1,783	2,743

（Ａ） 82,500　（Ｂ） 82,550　（Ｃ） 82,600　（Ｄ） 82,650　（Ｅ） 82,700
（Ｆ） 82,750　（Ｇ） 82,800　（Ｈ） 82,850　（Ｉ） 82,900　（Ｊ） 82,950

（２）x 歳加入、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年、予定利率 2.00%の養老保険を考える。
養老保険の支出現価 $A_{x:\overline{n|}}$ は、発生確率｛q_x, ${}_{1|}q_x$, …, ${}_{n-1|}q_x$, ${}_{n}p_x$｝で生じる支払保険金の現価を確率変数とした際の平均値と考えることができる。
このとき、支払保険金の現価の分散の値に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、計算基数は以下のとおり与えられるものとする。

予定利率	2.00%	4.04%
D_x	54,572	30,128
N_x	1,756,668	661,727
N_{x+n}	531,164	130,119

（Ａ） 0.0011　（Ｂ） 0.0016　（Ｃ） 0.0021　（Ｄ） 0.0026　（Ｅ） 0.0031
（Ｆ） 0.0036　（Ｇ） 0.0041　（Ｈ） 0.0046　（Ｉ） 0.0051　（Ｊ） 0.0056

（3）次の（A）～（G）のうち、常に正しい関係を表している不等式をすべて選びなさい。なお、（A）～（G）の中に常に正しい関係を表している不等式が 1 つもない場合は（H）を選びなさい。

【前提】
・「 $'$ 」がつかない年金現価（$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ および $\ddot{a}_{\overline{n}|}$）、保険料（$A_{x:\overline{n}|}, P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}, P_{x:\overline{n}|}^{1}$ および $P_{x:\overline{n}|}$）、責任準備金（${}_tV_{x:\overline{n}|}$）は予定利率 i で計算されたものとする。
・「 $'$ 」がつく年金現価（$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$ および $\ddot{a}'_{\overline{n}|}$）、保険料（$A'_{x:\overline{n}|}, P'^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|}, P'^{1}_{x:\overline{n}|}$ および $P'_{x:\overline{n}|}$）、責任準備金（${}_tV'_{x:\overline{n}|}$）は予定利率 i' で計算されたものとする。
・予定利率の大小関係は $i' \geqq i$ とする。
・予定死亡率は同一の生命表に基づき、年齢に関して単調増加とする。

（A） $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} \leqq \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　（B） $A'_{x:\overline{n}|} \leqq A_{x:\overline{n}|}$　（C） $P'^{\ \ 1}_{x:\overline{n}|} \leqq P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$

（D） $P'^{1}_{x:\overline{n}|} \leqq P^{1}_{x:\overline{n}|}$　（E） $P'_{x:\overline{n}|} \leqq P_{x:\overline{n}|}$　（F） ${}_tV'_{x:\overline{n}|} \leqq {}_tV_{x:\overline{n}|}$

（G） $\dfrac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}} \leqq \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$

（4）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険期間 n 年の定期保険特約付養老保険において、下記のような保険料割引制度を導入したところ、年払営業保険料は割引前と比べて 10%の割引となった。このとき、定期保険特約の保険金額の、養老保険の保険金額に対する倍率として、最も近いものは次のうちどれか。予定事業費率および年払純保険料は下表のとおりとする。ただし、$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 18.02201$ とする。

	養老保険	定期保険特約
予定新契約費	新契約時にのみ、保険金額 1 に対し 0.06	新契約時にのみ、保険金額 1 に対し 0.03
予定維持費	毎保険年度始に、保険金額 1 に対し 0.001	毎保険年度始に、保険金額 1 に対し 0.001
予定集金費	0	0
年払純保険料	保険金額 1 に対し 0.045587	保険金額 1 に対し 0.001612

【保険料割引制度の内容】
・割引前の年払営業保険料 1 に対し 0.03
・保険金額 1 に対し 0.0005

（A） 10 倍　（B） 11 倍　（C） 12 倍　（D） 13 倍　（E） 14 倍
（F） 15 倍　（G） 16 倍　（H） 17 倍　（I） 18 倍　（J） 19 倍

（５）x 歳加入、保険料年払全期払込、生存保険金額 1、保険期間 10 年の満期生存保険において、第 t 年度の死亡に対しては第 t 保険年度末 5 年チルメル式責任準備金を年度末に支払うものとするとき、この保険の年払営業保険料の値に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、予定事業費は生存保険金額 1 に対し予定新契約費 $\alpha = 0.03$ のみとし、チルメル割合は予定新契約費に等しいものとする。
また、$v^5 = 0.951466$、$\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 9.529853$、$\ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 4.894478$、$\ddot{a}_{\overline{10}|} = 9.566018$、$\ddot{a}_{\overline{5}|} = 4.901966$ とする。

（Ａ） 0.090	（Ｂ） 0.091	（Ｃ） 0.092	（Ｄ） 0.093	（Ｅ） 0.094
（Ｆ） 0.095	（Ｇ） 0.096	（Ｈ） 0.097	（Ｉ） 0.098	（Ｊ） 0.099

（６）x 歳加入、保険料年払全期払込、保険金年度末支払、保険金額 1、保険期間 n 年、予定利率 $i = 1.00\%$ の養老保険において、以下のような延長保険への変更を考える。

・養老保険の契約当初は解約返戻金が少額なため、延長保険に変更しても死亡保険金のみで満期日に支払う生存保険金はない。$t-1$（$t>1$）年経過時点に延長保険へ変更すると生存保険金はないが、t 年経過時点に延長保険へ変更すると生存保険金があるため、t 年経過時点に延長保険へ変更する。
・変更の時点で貸付金があるため、延長保険の生存保険金額を計算する際には、変更時点の解約返戻金から貸付金を差し引き、延長保険の死亡保険金額については変更前の死亡保険金額から貸付金を差し引いた額に変更するものとする。なお、貸付金についての利息は考慮しないものとする。
・延長保険の予定事業費は、毎年度始の死亡保険金額 1 に対し 0.001 で、生存保険金額に対する予定事業費はないものとする。

このとき、変更後の保険期間 $n-t$ の値に最も近いものは次のうちどれか。
ただし、$t-1$ 年経過時点の解約返戻金 ${}_{t-1}W = 0.2700$、t 年経過時点の解約返戻金 ${}_{t}W = 0.3014$、$t-1$ 年経過時点の貸付金 ${}_{t-1}L = 0.2150$、t 年経過時点の貸付金 ${}_{t}L = 0.2491$、生存率 $p_{x+t-1} = 0.9989$、生存率 ${}_{n-t}p_{x+t} = 0.9417$、$\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} = 17.8767$ とする。

（Ａ） 18	（Ｂ） 19	（Ｃ） 20	（Ｄ） 21	（Ｅ） 22
（Ｆ） 23	（Ｇ） 24	（Ｈ） 25	（Ｉ） 26	（Ｊ） 27

（7）2 人の被保険者 X、Y の年齢をそれぞれ x 歳、y 歳とし、2 人は同一の生命表に従うとする。t 歳の死力が $\mu_t = A + B\cdot c^t$（A、B、c は定数）で表されるとき、$\bar{A}^{1}_{xy}$ は $\bar{A}_{xy}$、$\bar{a}_{xy}$ を用いて次のように表される。このとき、①、②の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ次の選択肢の中から選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

$\bar{A}^{1}_{xy} = \boxed{①}\cdot\bar{A}_{xy} + \boxed{②}\cdot A\cdot\bar{a}_{xy}$

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）$\left(c^x - c^y\right)$　（C）$\left(c^y - c^x\right)$　（D）$\dfrac{c^y}{2c^x}$　（E）$\dfrac{c^x}{2c^y}$

（F）$\dfrac{1}{c^x + c^y}$　（G）$\dfrac{c^x}{c^x + c^y}$　（H）$\dfrac{c^y}{c^x + c^y}$　（I）$\dfrac{c^x - c^y}{c^x + c^y}$　（J）$\dfrac{c^y - c^x}{c^x + c^y}$

（8）災害死亡時に割増保障を行う、次の 2 種類の契約を考える。この 2 種類の契約は同一の生命表に従い、予定利率 i（$i > 0$）および予定災害死亡率は同一である。なお、予定災害死亡率は年齢によらず一定（$= q^a > 0$）とし、災害以外の事由を原因とする x 歳の予定死亡率は、生命表に基づく予定死亡率 q_x を用いて $q_x - q^a$（>0）と表されるものとする。

	契約① （災害割増保障付養老保険）	契約② （災害割増保障付終身保険）
加入年齢	x 歳	x 歳
保険料払込方法	年払全期払込	年払終身払込
保険期間	n 年（$1 < n < \omega - x - 1$）	終身
災害以外の事由を原因として死亡した場合	死亡した年度末に 1 を支払う	死亡した年度末に 0.5 を支払う
災害を原因として死亡した場合	死亡した年度末に a（$a > 1$）を支払う	次の金額を死亡した年度末に支払う 第 n 年度以前：$2a$ 第 $n+1$ 年度以降：0.5
満期まで生存した場合	満期時に 1 を支払う	－

いま、生命表に基づく年金現価に $\ddot{a}_x = 2\ddot{a}_{x:\overline{n|}} > 0$ なる関係が成り立ち、契約①の平準純保険料が、契約②の平準純保険料の 2 倍となった。このとき、予定災害死亡率 q^a に等しいものは次のうちどれか。

（A）$\dfrac{1}{(a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$　（B）$\dfrac{1}{(2a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$　（C）$\dfrac{1}{(3a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

（D）$\dfrac{1}{(4a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$　（E）$\dfrac{1}{(5a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$　（F）$\dfrac{1+i}{(a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

（G）$\dfrac{1+i}{(2a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$　（H）$\dfrac{1+i}{(3a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$　（I）$\dfrac{1+i}{(4a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

（J）$\dfrac{1+i}{(5a+1)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$

問題３． 次の（１）、（２）について、各問の指示に従い、解答用紙の所定の欄にマークしなさい。

各１０点（計２０点）

（１） A 脱退、(i) 脱退（$i=1,2,\cdots,n$）がある多重脱退表を考えたとき、A 脱退に関する脱退率を絶対脱退率を用いて計算したい。x 歳の期始の集団の人数を l_x とし、事象 X_i を (i) 脱退ののちに A 脱退が起こる事象とする（ただし (i) 脱退、A 脱退ともに 1 年以内に起こるものとする）。また、x 歳の脱退率をそれぞれ $q_x^A, q_x^{(i)}$（$i=1,2,\cdots,n$）、絶対脱退率をそれぞれ $q_x^{A*}, q_x^{(i)*}$（$i=1,2,\cdots,n$）とする。なお、一般に事象 X に対して、事象 X を満たす人数の期待値を $n(X)$ と表す。

(a) 次の①～⑨の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

まず各脱退について以下の仮定が成立する場合を考える。
（ア） A 脱退、(i) 脱退（$i=1,2,\cdots,n$）はそれぞれ独立に発生する。
（イ）脱退の発生は 1 年を通じて一様に起こる。

まず $n=1$ の場合、2 重脱退表を考える（A 脱退と(1)脱退のみ存在する）。$l_x\cdot q_x^A$ は $l_x\cdot q_x^{A*}$ から(1)脱退が A 脱退よりも先に起こったためカウントされなかった分、$n(X_1)$ を差し引いたものである。カウントされなかった数を求めよう。ある時間区間 $(t, t+\Delta t)$ $(0<t<1)$ で A 脱退する者の数は仮定（イ）より $\boxed{①}\cdot l_x\cdot\Delta t$ であるが、時刻 t までに(1)脱退が起こる確率は仮定（ア）（イ）より $\boxed{②}$ であるから、求める数は

$$\int_0^1 \boxed{②}\cdot\boxed{①}\cdot l_x dt=\boxed{③}\cdot l_x$$

となる。よって、

$$l_x\cdot q_x^A=l_x\cdot q_x^{A*}-\boxed{③}\cdot l_x$$

となる。

次に $n=2$ の場合、3 重脱退表を考える（A 脱退と(1)脱退,(2)脱退のみ存在する）。$l_x\cdot q_x^A$ は $l_x\cdot q_x^{A*}$ から(1)脱退または(2)脱退が A 脱退よりも先に起こったためカウントされなかった分、$n(X_1\cup X_2)$ を差し引いたものである。和の法則より、

$$n(X_1\cup X_2)=n(X_1)+n(X_2)-n(X_1\cap X_2)$$

となる。$n(X_1\cap X_2)$ を計算しよう。時刻 t までに(1)脱退も(2)脱退も起こる確率は仮定（ア）（イ）より、$\boxed{④}$ であるから、求める数は

$$n(X_1\cap X_2)=\int_0^1\boxed{④}\cdot\boxed{①}\cdot l_x dt=\boxed{⑤}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q_x^{(1)*}\cdot q_x^{(2)*}$$

となる。以上と $n=1$ の場合を合わせると、$q_x^{(i)*}=q$ $(i=1,2)$ と仮定すると、

$$l_x\cdot q_x^A=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\boxed{⑥}\cdot q+\boxed{⑦}\cdot q^2\right)$$

となる。

さらに $n\geqq 3$ の場合を考える。$n\left(X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap\cdots\cap X_{i_m}\right)$（ただし、$i_1,i_2\cdots,i_m$ は、$1,2,\cdots,n$ のうちの異なる m 個の数字の組み合わせとし、$1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n$ とする）を計算する。
$q_x^{(i)*}=q$ $(i=1,2,\cdots,n)$ と仮定すると、同様に

$$n\left(X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap\cdots\cap X_{i_m}\right)=\int_0^1\boxed{\quad ⑧\quad}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q^m\,dt=\boxed{\quad ⑨\quad}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q^m$$

となる。

これらと和の法則より $n\left(X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_n\right)$ を計算することができ、$l_x\cdot q_x^A$ を絶対脱退率で表現することができる。

(b) $n=4$、$q_x^{(i)*}=0.4\quad(i=1,2,3,4)$、(a)と同じ仮定（ア）（イ）を満たすとき、次の⑩の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

$$l_x\cdot q_x^A=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\boxed{\quad ⑩\quad}\right)$$

(c) $n=4$、$q_x^{(i)*}=0.4\quad(i=1,2,3,4)$、(a)と同じ仮定（ア）は成立するが、（イ）は成立しないとする。ただし、次の仮定（ウ）を満たす。

（ウ） A 脱退については 1 年を通じて一様に発生するが、(i) 脱退 $(i=1,2,3,4)$ については、時刻 $t\,(0<t<1)$ までに脱退が起こる確率を $t^2\cdot q_x^{(i)*}$ とする。

このとき、次の⑪の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

$$l_x\cdot q_x^A=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\boxed{\quad ⑪\quad}\right)$$

【(a) の選択肢】

（ア）	q_x^A	（イ）	q_x^{A*}	（ウ）	$q_x^{(1)}$	（エ）	$q_x^{(1)*}$
（オ）	$t\cdot q_x^{(1)}$	（カ）	$t\cdot q_x^{(1)*}$	（キ）	$q_x^{(1)}\cdot q_x^{(2)}$	（ク）	$q_x^{(1)*}\cdot q_x^{(2)*}$
（ケ）	$t\cdot q_x^{(1)}\cdot q_x^{(2)}$	（コ）	$t\cdot q_x^{(1)*}\cdot q_x^{(2)*}$	（サ）	$t^2\cdot q_x^{(1)}\cdot q_x^{(2)}$	（シ）	$t^2\cdot q_x^{(1)*}\cdot q_x^{(2)*}$
（ス）	$2t\cdot q_x^{(1)}\cdot q_x^{(2)}$	（セ）	$2t\cdot q_x^{(1)*}\cdot q_x^{(2)*}$	（ソ）	$\frac{1}{2}t^2\cdot q_x^{(1)}\cdot q_x^{(2)}$	（タ）	$\frac{1}{2}t^2\cdot q_x^{(1)*}\cdot q_x^{(2)*}$
（チ）	$q_x^A\cdot q_x^{(1)}$	（ツ）	$q_x^{A*}\cdot q_x^{(1)*}$	（テ）	$\frac{1}{2}q_x^A\cdot q_x^{(1)}$	（ト）	$\frac{1}{2}q_x^{A*}\cdot q_x^{(1)*}$
（ナ）	$2q_x^A\cdot q_x^{(1)}$	（ニ）	$2q_x^{A*}\cdot q_x^{(1)*}$	（ヌ）	1	（ネ）	$\frac{1}{2}$
（ノ）	$\frac{1}{3}$	（ハ）	$\frac{1}{4}$	（ヒ）	2	（フ）	3
（ヘ）	4	（ホ）	$\frac{1}{m-1}$	（マ）	$\frac{1}{m}$	（ミ）	$\frac{1}{m+1}$
（ム）	t^m	（メ）	t^{m-1}	（モ）	$m\cdot t^{m-1}$		

【(b) の選択肢】

（Ａ）	0.499	（Ｂ）	0.504	（Ｃ）	0.509	（Ｄ）	0.514	（Ｅ）	0.519
（Ｆ）	0.524	（Ｇ）	0.529	（Ｈ）	0.534	（Ｉ）	0.539	（Ｊ）	0.544

【(c) の選択肢】

（Ａ）	0.350	（Ｂ）	0.355	（Ｃ）	0.360	（Ｄ）	0.365	（Ｅ）	0.370
（Ｆ）	0.375	（Ｇ）	0.380	（Ｈ）	0.385	（Ｉ）	0.390	（Ｊ）	0.395

（２）累減定期保険のような保障額が減少していく契約の平準純保険料式責任準備金は、ある時点で負値となる場合がある。以下では、x 歳加入、保険料年払、保険金年度末支払、第 t 年度の死亡保険金額 S_t、保険期間 n 年、保険料払込期間 k（≦n）年、予定利率 i（＞0）の累減定期保険について考える。

(a) 次の①～⑫の空欄に当てはまる最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回用いてもよい。

各年度の死亡保険金額と予定死亡率について、次の関係が成り立っているとする。

$$S_1 \cdot q_x > S_2 \cdot q_{x+1} > \cdots > S_n \cdot q_{x+n-1} \qquad \ldots \text{(I)}$$

まず、この累減定期保険の第 t 年度末の平準純保険料式責任準備金 ${}_tV_x$ を考える。年払純保険料を P_x とし、<u>過去法</u>により平準純保険料式責任準備金を導出すると、t≦k の場合、

$$\begin{aligned} {}_tV_x &= \frac{1}{\boxed{①}} \cdot \sum_{j=1}^{t} \left(P_x \cdot \boxed{②} - \boxed{③} \cdot \boxed{④} \right) \\ &= \frac{1}{\boxed{①}} \cdot \sum_{j=1}^{t} \left\{ \boxed{②} \cdot \left(P_x - \boxed{③} \cdot \frac{\boxed{④}}{\boxed{②}} \right) \right\} \qquad \cdots \text{(II)} \end{aligned}$$

と表される。これが保険料払込期間中のすべての t（1≦t≦k）について 0 以上であるためには、(I)式から、

$$\min_{1 \leqq t \leqq k} \left\{ {}_tV_x \right\} = \boxed{⑤} \geqq 0$$

が条件となる。

さて、ここで、年払純保険料 P_x は

$$P_x = \frac{1}{\boxed{⑥}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(\boxed{⑦} \cdot \boxed{⑧} \right)$$

であるから、(II)式の右辺の中括弧｛｝の中は次のように変形できる。

$$\boxed{②} \cdot \left\{ \frac{1}{\boxed{⑥}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(\boxed{⑦} \cdot \boxed{⑧} \right) - \boxed{③} \cdot \frac{\boxed{④}}{\boxed{②}} \right\}$$

この結果と、$\boxed{⑤} \geqq 0$ の条件とから、保険料払込期間中のすべての t（1≦t≦k）について平準純保険料式責任準備金が 0 以上となる条件は、

$$N_{x+k} \geqq \boxed{⑨} - \frac{\boxed{⑩}}{\boxed{⑪} \cdot \boxed{⑫}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(\boxed{⑦} \cdot \boxed{⑧} \right) \qquad \ldots \text{(III)}$$

であることがわかる。

すなわち、(III)式の条件を満たさない場合、平準純保険料式責任準備金が負値となる年度が存在することとなる。

(b) 下記の計算基数および死亡保険金額が与えられているとき、保険料払込期間中の各年度末の平準純保険料式責任準備金が 0 以上となる最大の保険料払込期間 k を、選択肢の中から選びなさい。ただし、保険期間 $n=10$ であり、下記の計算基数および死亡保険金額は(I)式の関係を満たしているものとする。

【計算基数および死亡保険金額】

y	D_y	N_y	C_y	S_{y-x+1}	$S_{y-x+1}\cdot C_y$
x	183,199	3,289,411	1,008	10	10,080
$x+1$	176,854	3,106,212	1,056	9	9,504
$x+2$	170,647	2,929,358	1,103	8	8,824
$x+3$	164,574	2,758,711	1,147	7	8,029
$x+4$	158,633	2,594,137	1,192	6	7,152
$x+5$	152,821	2,435,504	1,237	5	6,185
$x+6$	147,132	2,282,683	1,288	4	5,152
$x+7$	141,558	2,135,551	1,348	3	4,044
$x+8$	136,087	1,993,993	1,416	2	2,832
$x+9$	130,707	1,857,906	1,497	1	1,497
$x+10$	―	1,727,199	―	―	―
合計	―	―	―	―	63,299

【(a) の選択肢】

(ア) D_x	(イ) D_{x+1}	(ウ) D_{x+j-1}	(エ) D_{x+j}
(オ) D_{x+t-1}	(カ) D_{x+t}	(キ) D_{x+u-1}	(ク) D_{x+u}
(ケ) N_x	(コ) N_{x+1}	(サ) N_{x+k-1}	(シ) N_{x+k}
(ス) N_{x+n-1}	(セ) N_{x+n}	(ソ) C_x	(タ) C_{x+1}
(チ) C_{x+j-1}	(ツ) C_{x+j}	(テ) C_{x+t-1}	(ト) C_{x+t}
(ナ) C_{x+u-1}	(ニ) C_{x+u}	(ヌ) S_1	(ネ) S_j
(ノ) S_k	(ハ) S_u	(ヒ) S_n	(フ) ${}_1V_x$
(ヘ) ${}_jV_x$	(ホ) ${}_{k-1}V_x$	(マ) ${}_kV_x$	(ミ) N_x-N_{x+k}
(ム) N_x-N_{x+k+1}	(メ) N_x-N_{x+n}	(モ) N_x-N_{x+n+1}	(ヤ) q_x
(ユ) q_{x+1}	(ヨ) q_{x+j-1}	(ラ) q_{x+u-1}	(リ) q_{x+k-1}

【(b) の選択肢】

(A) 1	(B) 2	(C) 3	(D) 4	(E) 5
(F) 6	(G) 7	(H) 8	(I) 9	(J) 10

(K) 各年度末の平準純保険料式責任準備金が 0 以上となる保険料払込期間 k は存在しない

以上

生保数理（解答例）

問題１.

設問	解答	配点	設問	解答	配点
（１）	**（Ｈ）**	４点	（４）	**①（Ｄ）②（Ｇ）③（Ｆ）**	４点
（２）	**①（Ｆ）②（Ｄ）**	４点	（５）	**（Ｂ）、（Ｃ）、（Ｄ）**	４点
（３）	**（Ｄ）**	４点	（６）	**（Ｅ）**	４点

※（２）、（４）、（５）は完答の場合のみ得点。

（１）

$(Ia)_{\infty}=\dfrac{1}{i\cdot d}$、$a_{\infty}=\dfrac{1}{i}$、$(Ia)_{\overline{n|}}=\dfrac{1}{d}\cdot a_{\overline{n|}}-\dfrac{n\cdot v^n}{i}$ より、

$$a_{\overline{n|}}\cdot\frac{1}{i\cdot d}-\frac{1}{i}\cdot\left(\frac{1}{d}\cdot a_{\overline{n|}}-\frac{n\cdot v^n}{i}\right)$$
$$=\frac{n\cdot v^n}{i^2}$$

解答（**Ｈ**）

（２）

$l_{x+t}=f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ とすると、$f(t)$ は、$(-1,l_{x-1}),(0,l_x),(1,l_{x+1})$ を通るため、

$l_{x-1}=a_0-a_1+a_2$

$l_x=a_0$

$l_{x+1}=a_0+a_1+a_2$

となる。したがって、

$a_0=l_x, a_1=-\dfrac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2}, a_2=\dfrac{l_{x-1}-2l_x+l_{x+1}}{2}$ である。

以上より、$\mu_x=-\dfrac{1}{l_x}\cdot\dfrac{dl_x}{dx}=-\dfrac{1}{l_x}\cdot\left.\dfrac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}=-\dfrac{a_1}{l_x}=\dfrac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2l_x}=0.5\cdot\dfrac{l_{x-1}}{l_x}-0.5\cdot\dfrac{l_{x+1}}{l_x}$ となる。

解答：①（**Ｆ**）②（**Ｄ**）

（3）

条件より

$$P_1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{30|}} = P_2 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{30|}} + \frac{P_2}{2} \cdot {}_{30|}\ddot{a}_x$$

$${}_{30|}\ddot{a}_x = \frac{2(P_1 - P_2) \cdot \ddot{a}_{x:\overline{30|}}}{P_2} = 0.565217\ddot{a}_{x:\overline{30|}}$$

したがって、保険料払込期間が終身の場合の年払純保険料は

$$\frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{30|}} + {}_{30|}\ddot{a}_x} = \frac{P_1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{30|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{30|}} + {}_{30|}\ddot{a}_x} = \frac{P_1 \cdot \ddot{a}_{x:\overline{30|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{30|}} + 0.565217\ddot{a}_{x:\overline{30|}}}$$

$$= 0.01508$$

解答（**D**）

（4）

終身保険の責任準備金に関する関係式 ${}_kV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}$ を用いて与式を変形すると、

$$\frac{1 - \frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}}{\frac{\ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_x}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+2k}}{\ddot{a}_{x+k}}$$

$$\frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+k}}{\ddot{a}_{x+k}} = \frac{\ddot{a}_{x+k} - \ddot{a}_{x+2k}}{\ddot{a}_{x+k}}$$

$$\ddot{a}_{x+2k} = 2\ddot{a}_{x+k} - \ddot{a}_x$$

ここで $\ddot{a}_x = a_x + 1$、$\ddot{a}_{x+k} = a_{x+k} + 1$ であるから、

$$\ddot{a}_{x+2k} = -a_x + 2a_{x+k} + 1$$

解答：①（**D**）②（**G**）③（**F**）

（5）

（**A**）誤り：$A_{\overline{xy}:\overline{n|}} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}}$ が正解

（**B**）正しい：$a_{\overline{xy}|z:\overline{n|}} = a_{z:\overline{n|}} - a_{\overline{xy},z:\overline{n|}} = a_{z:\overline{n|}} - \left(a_{xz:\overline{n|}} + a_{yz:\overline{n|}} - a_{xyz:\overline{n|}}\right)$

（**C**）正しい：$\overline{xy}$ は x, y の最終生存者の生存を意味する。$\overline{xy}$ が最初に亡くなるのは、x が 1 番目 y が 2 番目に亡くなるかその逆のいずれか。

（**D**）正しい：x が 2 番目に亡くなる事象は、x が亡くなる事象から、x が 1 番目（y より先に）亡くなる事象を除いた事象。

解答（**B**）、（**C**）、（**D**）

（６）

$d_x^{ii}=l_x^{ii}+i_x-l_{x+1}^{ii}$、 $i_x=q_x^{(i)}\cdot l_x^{aa}=q_x^{(i)}\cdot\left(l_x-l_x^{ii}\right)$であることから、

$$q_x^i=\frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x}=\frac{l_x^{ii}+i_x-l_{x+1}^{ii}}{l_x^{ii}+\frac{1}{2}q_x^{(i)}\cdot(l_x-l_x^{ii})}=\frac{l_x^{ii}+q_x^{(i)}\cdot(l_x-l_x^{ii})-l_{x+1}^{ii}}{l_x^{ii}+\frac{1}{2}q_x^{(i)}\cdot(l_x-l_x^{ii})}$$

右辺の分母・分子をl_xで割り、

$$=\frac{\frac{l_x^{ii}}{l_x}+q_x^{(i)}\cdot(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})-\frac{l_{x+1}^{ii}}{l_x}}{\frac{l_x^{ii}}{l_x}+\frac{1}{2}q_x^{(i)}\cdot(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})}=\frac{\frac{l_x^{ii}}{l_x}+q_x^{(i)}\cdot(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})-\frac{l_{x+1}^{ii}}{l_{x+1}}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}}{\frac{l_x^{ii}}{l_x}+\frac{1}{2}q_x^{(i)}\cdot(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})}=\frac{\frac{l_x^{ii}}{l_x}+q_x^{(i)}\cdot(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})-\frac{l_{x+1}^{ii}}{l_{x+1}}\cdot(1-q_x)}{\frac{l_x^{ii}}{l_x}+\frac{1}{2}q_x^{(i)}\cdot(1-\frac{l_x^{ii}}{l_x})}$$

$$=\frac{0.019950+0.002756\cdot(1-0.019950)-0.022249\cdot(1-0.008755)}{0.019950+0.5\cdot0.002756\cdot(1-0.019950)}=0.0280184$$

解答（**E**）

問題２.

設問	解答	配点	設問	解答	配点
（１）	**（Ｉ）**	７点	（５）	**（Ｉ）**	７点
（２）	**（Ｂ）**	７点	（６）	**（Ｃ）**	７点
（３）	**（Ａ）、（Ｂ）、（Ｃ） （Ｄ）、（Ｅ）、（Ｆ）**	７点	（７）	**①（Ｇ）②（Ｊ）**	７点
（４）	**（Ｆ）**	７点	（８）	**（Ｇ）**	７点

※（３）、（７）は完答の場合のみ得点。

（１）

$l_{x+1}=l_x-a_x-b_x=90{,}474$ であり、ここから x 歳の原因 A の中央脱退率は

$$m_x^A=\frac{a_x}{\frac{1}{2}(l_x+l_{x+1})}=0.019226$$

となる。

問題文から、 $m_{x+1}^A=1.5m_x^A=0.028839$ が分かり、A，B それぞれの絶対脱退率は

$$q_{x+1}^{A*}=\frac{2m_{x+1}^A}{2+m_{x+1}^A}=0.028429、\quad q_{x+1}^{B*}=2q_{x+1}^{A*}=0.056858$$

となる。

さらに、脱退率はそれぞれ、

$$q_{x+1}^{A}=q_{x+1}^{A*}\left(1-\frac{1}{2}q_{x+1}^{B*}\right)=0.027621、\quad q_{x+1}^{B}=q_{x+1}^{B*}\left(1-\frac{1}{2}q_{x+1}^{A*}\right)=0.05605$$

となり、これを l_{x+1} に乗じることで、 $a_{x+1}=2{,}499$、 $b_{x+1}=5{,}071$ となり、 $l_{x+2}=82{,}904$ となる。

解答（Ｉ）

（２）

養老保険の支出現価は

$$A_{x:\overline{n|}}=(v)^1\cdot q_x+(v)^2\cdot {}_{1|}q_x+\cdots+(v)^n\cdot {}_{n-1|}q_x+(v)^n\cdot {}_np_x\cdots①$$

と記載することができるため、これは支払保険金の現価に関する期待値と考えられる。

$$(v^2)^1\cdot q_x+(v^2)^2\cdot {}_{1|}q_x+\cdots+(v^2)^n\cdot {}_{n-1|}q_x+(v^2)^n\cdot {}_np_x\cdots②$$

は予定利率が $(1+2\%)^2-1=4.04\%$ の基数に基づく養老保険の支出現価に一致する。

$$①=1-d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=1-\frac{0.02}{1.02}\times\frac{1{,}756{,}668-531{,}164}{54{,}572}=0.559674$$

同様にして、

$$②=1-\frac{0.0404}{1.0404}\times\frac{661{,}727-130{,}119}{30{,}128}=0.314824$$

従って、支出現価の分散は

$$0.314824-0.559674^2=0.001589$$

解答（Ｂ）

（３） $i' \geqq i$ とすると $v' \leqq v$ となるため、

（Ａ）正しい： $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v')^t \leqq \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot v^t = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$

（Ｂ）正しい： $A'_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \cdot (v')^{t+1} + {}_n p_x \cdot (v')^n \leqq \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \cdot (v)^{t+1} + {}_n p_x \cdot (v)^n = A_{x:\overline{n}|}$

（Ｃ）正しい： $P'_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \dfrac{A'_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{{}_n p_x \cdot (v')^n}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v')^t} = \dfrac{{}_n p_x}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v')^{-(n-t)}} \leqq \dfrac{{}_n p_x}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v)^{-(n-t)}} = \dfrac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

（Ｄ）正しい： $P'^{1}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A'^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x \cdot (v')^{t+1}}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v')^t} = v' \times \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} \left\{ ({}_t p_x \cdot (v')^t) \cdot (q_{x+t}) \right\}}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v')^t}$

$\leqq v \cdot \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} \left\{ ({}_t p_x \cdot (v)^t) \cdot (q_{x+t}) \right\}}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x \cdot (v)^t} = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = P^{1}_{x:\overline{n}|}$

（Ｅ）正しい： $P'_{x:\overline{n}|} = P'_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + P'^{1}_{x:\overline{n}|} \leqq P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + P^{1}_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}$

（Ｆ）正しい： ${}_t V'_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \leqq 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = {}_t V_{x:\overline{n}|}$

（Ｇ）誤り： $\dfrac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}} = \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} ({}_t p_x) \cdot (v')^t}{\sum_{t=0}^{n-1} (1) \cdot (v')^t} \geqq \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} ({}_t p_x) \cdot (v)^t}{\sum_{t=0}^{n-1} (1) \cdot (v)^t} = \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$

解答：（Ａ）、（Ｂ）、（Ｃ）、（Ｄ）、（Ｅ）、（Ｆ）

（４）

養老保険の保険金額 1 に対する割引前の年払営業保険料を $P^{*}_{x:\overline{n|}}$ 、定期保険特約の保険金額 1 に対する割引前の年払営業保険料を $P^{1*}_{x:\overline{n|}}$ 、養老保険の保険金額に対する定期保険特約の保険金額の倍率を k とすると、

$$P^{*}_{x:\overline{n|}} = 0.045587 + \frac{0.06}{18.02201} + 0.001 = 0.049916$$

$$P^{1*}_{x:\overline{n|}} = 0.001612 + \frac{0.03}{18.02201} + 0.001 = 0.004277$$

$$(P^{*}_{x:\overline{n|}} + k \cdot P^{1*}_{x:\overline{n|}}) \cdot (1-0.03) - (1+k) \cdot 0.0005 = 0.9 \cdot (P^{*}_{x:\overline{n|}} + k \cdot P^{1*}_{x:\overline{n|}})$$

$$\Leftrightarrow \quad k \cdot (0.0005 - 0.07\, P^{1*}_{x:\overline{n|}}) = 0.07\, P^{*}_{x:\overline{n|}} - 0.0005$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{0.07 \cdot 0.049916 - 0.0005}{(0.0005 - 0.07 \cdot 0.004277)} = 14.925$$

解答（Ｆ）

（５）

平準払純保険料を P 、第 1 年度の 5 年チルメル式純保険料を P_1 、第 2 年度以降第 5 年度までの 5 年チルメル式純保険料を P_2 、第 t 保険年度末 5 年チルメル式責任準備金を ${}_{t}V^{[5z]}$ とすると、

$$P_1 = v \cdot q_x \cdot {}_{1}V^{[5z]} + v \cdot p_x \cdot {}_{1}V^{[5z]} = v \cdot {}_{1}V^{[5z]}$$

$$P_2 + {}_{t}V^{[5z]} = v \cdot q_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{[5z]} + v \cdot p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V^{[5z]} = v \cdot {}_{t+1}V^{[5z]} \ (1 \leqq t \leqq 4)$$

$$P + {}_{t}V^{[5z]} = v \cdot {}_{t+1}V^{[5z]} \ (5 \leqq t \leqq 9) \quad \cdots (\mathrm{I})$$

ここで、 $P_1 = P + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} - \alpha$ 、 $P_2 = P + \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}$ より、

$$P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} - \alpha = v \cdot {}_{1}V^{[5z]} \cdots (\mathrm{II})$$

$$P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} + {}_{t}V^{[5z]} = v \cdot {}_{t+1}V^{[5z]} \quad (1 \leqq t \leqq 4) \quad \cdots (\mathrm{III})$$

(I)、(III)の両辺に v^t を掛けて、(I)、(II)、(III)を加えると

$$P \cdot \sum_{t=0}^{9} v^t + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} \cdot \sum_{t=0}^{4} v^t - \alpha = v^{10} \cdot {}_{10}V^{[5z]}$$

$$\therefore P = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{10|}}} \cdot \left(v^{10} + \alpha - \frac{\alpha \cdot \ddot{a}_{\overline{5|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} \right) = \frac{1}{9.566018} \cdot \left((0.951466)^2 + 0.03 - \frac{0.03 \cdot 4.901966}{4.894478} \right) = 0.094631$$

従って、営業保険料は、

$$P + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}}} = 0.094631 + \frac{0.03}{9.529853} = 0.097779$$

解答（Ｉ）

（6）

条件より、

$(1-{}_{t-1}L)\cdot(A^1_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}+0.001\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|})>{}_{t-1}W-{}_{t-1}L\cdots\cdots$①

$(1-{}_{t}L)\cdot(A^1_{x+t:\overline{n-t}|}+0.001\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})<{}_{t}W-{}_{t}L\cdots\cdots$②

①より、

$$vq_{x+t-1}+vp_{x+t-1}\cdot A^1_{x+t:\overline{n-t}|}+0.001\cdot(1+vp_{x+t-1}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})>\frac{{}_{t-1}W-{}_{t-1}L}{1-{}_{t-1}L}$$

$$v(1-p_{x+t-1})+vp_{x+t-1}\cdot(1-d\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-v^{n-t}{}_{n-t}p_{x+t})+0.001\cdot(1+vp_{x+t-1}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})>\frac{{}_{t-1}W-{}_{t-1}L}{1-{}_{t-1}L}$$

$$v^{n-t}<\frac{v+0.001-\dfrac{{}_{t-1}W-{}_{t-1}L}{1-{}_{t-1}L}-(d-0.001)\cdot v\cdot p_{x+t-1}\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{vp_{x+t-1}\cdot{}_{n-t}p_{x+t}}=0.81995$$

また、②より

$$1-d\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-v^{n-t}\cdot{}_{n-t}p_{x+t}+0.001\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}<\frac{{}_{t}W-{}_{t}L}{1-{}_{t}L}$$

$$v^{n-t}>\frac{1-\dfrac{{}_{t}W-{}_{t}L}{1-{}_{t}L}-(d-0.001)\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{{}_{n-t}p_{x+t}}=0.81898$$

したがって、$0.81898<v^{n-t}<0.81995$ となり、

$v^{19}=0.8277, v^{20}=0.8195, v^{21}=0.8114$ であるため、$n-t=20$ となる。

解答（**C**）

（7）

$$\bar{A}^{1}_{xy}=\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}\cdot\mu_{x+t}dt=\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}\cdot\left(A+B\cdot c^{x+t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{c^x+c^y}\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}\cdot\left\{A\cdot\left(c^x+c^y\right)+c^x\cdot B\cdot\left(c^{x+t}+c^{y+t}\right)\right\}dt$$
$$=\frac{1}{c^x+c^y}\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}\cdot\left\{A\cdot\left(c^x+c^y\right)+c^x\cdot\left(\mu_{x+t}-A+\mu_{y+t}-A\right)\right\}dt$$
$$=\frac{1}{c^x+c^y}\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}\cdot\left\{A\cdot\left(c^y-c^x\right)+c^x\cdot\left(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}\right)\right\}dt$$
$$=\frac{c^x}{c^x+c^y}\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}\cdot\left(\mu_{x+t}+\mu_{y+t}\right)dt+\frac{c^y-c^x}{c^x+c^y}\cdot A\cdot\int_0^\infty v^t\cdot {}_tp_{xy}dt$$
$$=\frac{c^x}{c^x+c^y}\cdot\bar{A}_{xy}+\frac{c^y-c^x}{c^x+c^y}\cdot A\cdot\bar{a}_{xy}$$

解答：①（Ｇ）②（Ｊ）

（8）

通常の養老・終身保険に加え、災害を原因として死亡した場合に上乗せ給付があることを踏まえると、契約①および契約②の平準純保険料 $P_x^{①}$ 、 $P_x^{②}$ は収支相等の原則からそれぞれ次のように表される。

契約①および契約②の平準純保険料 $P_x^{①}$ 、 $P_x^{②}$ は収支相等の原則から、それぞれ次のように表される。

$$P_x^{①}=\frac{A_{x:\overline{n}|}+v\cdot\left(a-1\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{1-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+v\cdot\left(a-1\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

$$P_x^{②}=\frac{0.5A_x+v\cdot\left(2a-0.5\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_x}=\frac{0.5\cdot\left(1-d\cdot\ddot{a}_x\right)+v\cdot\left(2a-0.5\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_x}$$

ここで $\ddot{a}_x=2\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ の関係式から、

$$P_x^{②}=\frac{0.5-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+v\cdot\left(2a-0.5\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{2\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

これらについて、 $P_x^{①}=2P_x^{②}$ であるから、両辺に $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を乗じて整理すると、

両辺に $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を乗じて整理すると、

$$1-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+v\cdot\left(a-1\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=0.5-d\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}+v\cdot\left(2a-0.5\right)\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$
$$\left(a+0.5\right)\cdot v\cdot q^a\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=0.5$$
$$q^a=\frac{0.5}{\left(a+0.5\right)\cdot v\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{1+i}{\left(2a+1\right)\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

解答：（Ｇ）

問題３.

設問			解答	配点
（１）	(a)	①	**（イ）**	1 点（完答のみ）
		②	**（カ）**	
		③	**（ト）**	1 点
		④	**（シ）**	1 点（完答のみ）
		⑤	**（ノ）**	
		⑥	**（ヌ）**	1 点（完答のみ）
		⑦	**（ノ）**	
		⑧	**（ム）**	1 点（完答のみ）
		⑨	**（ミ）**	
	(b)		**（Ｉ）**	2 点
	(c)		**（Ｆ）**	3 点

設問			解答	配点
（２）	(a)	①	**（カ）**	1 点（完答のみ）
		②	**（ウ）**	
		③	**（ネ）**	
		④	**（チ）**	
		⑤	**（フ）**	1 点
		⑥	**（ミ）**	1 点（完答のみ）
		⑦	**（ハ）**	
		⑧	**（ナ）**	
		⑨	**（ケ）**	1 点
		⑩	**（ア）**	1 点（完答のみ）
		⑪	**（ヌ）**	
		⑫	**（ソ）**	
	(b)		**（Ｆ）**	5 点

※（２）(a)の③と④、⑦と⑧、⑪と⑫はそれぞれ順不同。

（１）

(a)

$n=1$ の場合、

ある時間区間 $(t, t+\Delta t)$ $(0<t<1)$ で A 脱退する者の数は仮定（イ）より $\boxed{\text{①}\ q_x^{A*}} \cdot l_x \cdot \Delta t$

時刻 t までに(1)脱退のある確率は仮定（ア）（イ）より $\boxed{\text{②}\ t \cdot q_x^{(1)*}}$

$$\int_0^1 \boxed{\text{②}\ t \cdot q_x^{(1)*}} \cdot \boxed{\text{①}\ q_x^{A*}} \cdot l_x dt = \int_0^1 t \cdot q_x^{(1)*} \cdot q_x^{A*} \cdot l_x dt = \boxed{\text{③}\ \frac{1}{2} q_x^{A*} \cdot q_x^{(1)*}} \cdot l_x$$

よって、

$$l_x \cdot q_x^A = l_x \cdot q_x^{A*} - \boxed{\text{③}\ \frac{1}{2} q_x^{A*} \cdot q_x^{(1)*}} \cdot l_x$$

となる。

$n=2$ の場合、

和の法則より　　$n(X_1)+n(X_2)-n(X_1 \cap X_2)$

時刻 t までに(1)脱退かつ(2)脱退のある確率は仮定（ア）（イ）より、$\left(t \cdot q_x^{(1)*}\right) \cdot \left(t \cdot q_x^{(2)*}\right) = \boxed{\text{④}\ t^2 \cdot q_x^{(1)*} \cdot q_x^{(2)*}}$ であるから、求める数は

$$n(X_1 \cap X_2) = \int_0^1 \boxed{\text{④}\ t^2 \cdot q_x^{(1)*} \cdot q_x^{(2)*}} \cdot \boxed{\text{①}\ q_x^{A*}} \cdot l_x dt = \boxed{\text{⑤}\ \frac{1}{3}} \cdot l_x \cdot q_x^{A*} \cdot q_x^{(1)*} \cdot q_x^{(2)*}$$

よって、$q_x^{(i)*} = q$ $(i=1,2)$ であるならば、

$$l_x \cdot q_x^A = l_x \cdot q_x^{A*} \left(1 - \boxed{\text{⑥}\ 1} \cdot q + \boxed{\text{⑦}\ \frac{1}{3}} \cdot q^2\right)$$

⑥に関しては、$n(X_1)+n(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} l_x \cdot q \cdot q_x^{A*}$ より計算できる。

一般の n≧3 の場合も同様に、

$$n\left(X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap\cdots\cap X_{i_m}\right)=\int_0^1 \boxed{⑧\ t^m}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q^m\,dt=\boxed{⑨\ \frac{1}{m+1}}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q^m$$

(b)

$$l_x\cdot q_x^A=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\left({}_4C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot q-{}_4C_2\cdot\frac{1}{3}\cdot q^2+{}_4C_3\cdot\frac{1}{4}\cdot q^3-{}_4C_4\cdot\frac{1}{5}\cdot q^4\right)\right)$$

$$=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\left(2q-2q^2+q^3-\frac{1}{5}q^4\right)\right)$$

$$=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\boxed{⑩\ 0.539}\right)$$

(c)

同様に考えると $n\left(X_{i_1}\cap X_{i_2}\cap\cdots\cap X_{i_m}\right)=\int_0^1 t^{2m}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q^m dt=\frac{1}{2m+1}\cdot l_x\cdot q_x^{A*}\cdot q^m$

$$l_x\cdot q_x^A=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\left({}_4C_1\cdot\frac{1}{2\cdot1+1}\cdot q-{}_4C_2\cdot\frac{1}{2\cdot2+1}\cdot q^2+{}_4C_3\cdot\frac{1}{2\cdot3+1}\cdot q^3-{}_4C_4\cdot\frac{1}{2\cdot4+1}\cdot q^4\right)\right)$$

$$=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\left(\frac{4}{3}q-\frac{6}{5}q^2+\frac{4}{7}q^3-\frac{1}{9}q^4\right)\right)$$

$$=l_x\cdot q_x^{A*}\left(1-\boxed{⑪\ 0.375}\right)$$

（２）

(a)各年度の死亡保険金額と予定死亡率について、次の関係が成り立っている。

$$S_1 \cdot q_x > S_2 \cdot q_{x+1} > \ \cdots \ > S_n \cdot q_{x+n-1} \qquad \cdots \ \text{(I)}$$

まず、この累減定期保険の第 t 年度末の平準純保険料式責任準備金 ${}_tV_x$ を考える。年払純保険料を P_x とし、過去法により平準純保険料式責任準備金を導出すると、$t \leqq k$ の場合、

$$\begin{aligned}
{}_tV_x &= \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \left\{ P_x \cdot \left(D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+t-1} \right) - \left(S_1 \cdot C_x + S_2 \cdot C_{x+1} + \cdots + S_t \cdot C_{x+t-1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \left\{ \left(P_x \cdot D_x - S_1 \cdot C_x \right) + \left(P_x \cdot D_{x+1} - S_2 \cdot C_{x+1} \right) + \cdots + \left(P_x \cdot D_{x+t-1} - S_t \cdot C_{x+t-1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{D_{x+t}} \cdot \sum_{j=1}^{t} \left(P_x \cdot D_{x+j-1} - S_j \cdot C_{x+j-1} \right) \\
&= \frac{1}{\boxed{① \ D_{x+t}}} \cdot \sum_{j=1}^{t} \left\{ \boxed{② \ D_{x+j-1}} \cdot \left(P_x - \boxed{③ \ S_j} \cdot \frac{\boxed{④ \ C_{x+j-1}}}{\boxed{② \ D_{x+j-1}}} \right) \right\} \qquad \cdots \text{(II)}
\end{aligned}$$

と表される。これが保険料払込期間中のすべての t（$1 \leqq t \leqq k$）について 0 以上であるためには、(I)式から、

$$S_1 \cdot \frac{C_x}{D_x} > S_2 \cdot \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}} > \ \cdots \ > S_k \cdot \frac{C_{x+k-1}}{D_{x+k-1}}$$

$\left(i > 0 \text{ より } v > 0 \text{ であるから不等号の向きは変わらない} \right)$

となり、$P_x - S_1 \cdot \dfrac{C_x}{D_x} < P_x - S_2 \cdot \dfrac{C_{x+1}}{D_{x+1}} < \ \cdots \ < P_x - S_k \cdot \dfrac{C_{x+k-1}}{D_{x+k-1}}$

したがって、${}_1V_x = \dfrac{D_x}{D_{x+1}} \cdot \left(P_x - S_1 \cdot \dfrac{C_x}{D_x} \right) \geqq 0$ であれば ${}_tV_x$ は t について単調増加となり、求める条件は

$$\min_{1 \leqq t \leqq k} \left\{ {}_tV_x \right\} = \boxed{⑤ \ {}_1V_x} \geqq 0$$

となる。

さて、ここで、年払純保険料 P_x は

$$P_x = \frac{1}{\boxed{⑥ \ N_x - N_{x+k}}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(\boxed{⑦ \ S_u} \cdot \boxed{⑧ \ C_{x+u-1}} \right)$$

であるから、(II)式の右辺の中括弧｛｝の中は次のように変形できる。

$$D_{x+j-1} \cdot \left\{ \frac{1}{N_x - N_{x+k}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(S_u \cdot C_{x+u-1} \right) - S_j \cdot \frac{C_{x+j-1}}{D_{x+j-1}} \right\}$$

この結果と、${}_1V_x \geqq 0$ の条件とから、保険料払込期間中のすべての t（$1 \leqq t \leqq k$）について平準純保険料式責任準備金が 0 以上となる条件は、

$${}_1V_x = \frac{D_x}{D_{x+1}} \cdot \left\{ \frac{1}{N_x - N_{x+k}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(S_u \cdot C_{x+u-1} \right) - S_1 \cdot \frac{C_x}{D_x} \right\} \geqq 0$$

であり、計算基数はそれぞれ非負であることから、この不等式を変形して、

$$N_{x+k} \geqq \boxed{⑨ \ N_x} - \frac{\boxed{⑩ \ D_x}}{\boxed{⑪ \ S_1} \cdot \boxed{⑫ \ C_x}} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(S_u \cdot C_{x+u-1} \right) \qquad \cdots \ \text{(III)}$$

であることがわかる。

(b)

(III)式に、与えられた計算基数等を代入すると、

$$N_{x+k} \geqq N_x - \frac{D_x}{S_1 \cdot C_x} \cdot \sum_{u=1}^{n} \left(S_u \cdot C_{x+u-1} \right)$$

$$= 3,289,411 - \frac{183,199}{10,080} \cdot 63,299 = 2,138,983.1$$

となる。計算基数表からこれを上回る N_{x+k} のうち最大の k を探すと、

$N_{x+6} = 2,282,683$ ＞2,138,983.1

$N_{x+7} = 2,135,551$ ＜2,138,983.1

したがって $k = 6$。（もちろん、しらみつぶしに P_x および ${}_1V_x$ を計算して符号を確認し解答してもよい。）参考までに、各 k における ${}_1V_x$ の値を次に記す。

k	${}_1V_x$
1	0.30092
2	0.12512
3	0.06656
4	0.03731
5	0.01979

k	${}_1V_x$
6	0.00814
7	–0.00017
8	–0.00638
9	–0.01119
10	–0.01502

以上