損　保　数　理

平成２３年２月改訂

日本アクチュアリー会

改訂によせて

平成12年の資格試験制度変更に伴い発行した本テキストは、アクチュアリーとして損害保険業に携わる際に必要となる「数理的な知識や技術ならびに基本的な考え方の取得」を目的に作成しております。

損害保険会社の抱えるリスクを適切に分析するというアクチュアリーの使命を果たすためには、常に時代のニーズに適した知識や技術の理解・習得が不可欠であることは論を俟たず、本テキストも同観点から常に内容の見直しや追加を行って行く必要があります。そのため、今回の改訂では、極値理論やリスクの統合、リスク尺度に関する数理的な内容を「第10章　リスク評価の数理」として新たに盛り込みました。

今後とも、本テキストを損保数理に関する教本として、より完成度の高い内容とするために必要な修正を行っていく所存でありますが、そのためにも皆様からの貴重なご意見やご高教をいただけるようお願い申し上げます。

平成23年2月

教育委員会テキスト部会

教育委員会テキスト部会（損保担当）

大友　貴人（三井住友海上火災保険）
須藤　敦子（あいおいニッセイ同和損害保険）
田中　和宏（日本興亜損害保険）
田辺　輔仁（損害保険料率算出機構）
富張　雅人（三井住友海上火災保険）
古屋　正人（日本興亜損害保険）
星野　吉孝（東京海上日動火災保険）

目　　次

序　章

確率・統計の予備知識

序章　確率・統計の予備知識

0.1　確率論

ここでは損害保険数理を理解するうえで必要となる確率論の基礎知識について述べる。

なお、以降の議論で必要なレベルに絞っているため、数学的な厳密さに欠ける表現も多いが、正確な定義等に関しては他の確率論の文献を参照していただきたい。

0.1.1　確率論の基礎概念

確率的にさまざまな値をとる変数を**確率変数**といい、通常 X,Y,Z など大文字で表す。最も簡単な確率変数の例としては、確率変数 $X=$（一つのさいころを振ったときに出る目）などが考えられる。

以下、確率変数 X が a 以上 b 以下の値を取る確率を $P(a \le X \le b)$ により表すものとする。

確率変数 X に対して、$F(x)=P(X \le x)$ として定義される関数 $F(x)$ を**確率変数 X の分布関数**という。分布関数が与えられれば、確率変数 X が $a < X \le b$ となる確率 $P(a < X \le b)$ は $F(b)-F(a)$ により計算することができる。

確率変数 X に係る確率に関して下式を満たす関数 $f(x)$ が存在するとき、この $f(x)$ を**確率変数 X の確率密度関数**という。

$$\text{任意の } a \le b \text{ に対して } P(a \le X \le b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

確率密度関数 $f(x)$ が存在するとき、分布関数 $F(x)$ との間に次の関係が成り立つ。

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

1点の積分値はゼロであるため、1点で正の確率を持つような確率変数（上記のさいころの例など）には確率密度関数は存在しない。離散的な値 $x_1, x_2, x_3 \cdots$ のみをとる確率変数 X に対しては、

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

として定義される関数 $f(x_i)$ を**確率変数 X の確率関数**という。

2次元の確率変数に対する分布関数、確率密度関数、確率関数は次のように定義される。

確率変数 X, Y に対して $F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$（$X$ が x 以下であり、かつ Y が y 以下である確率）によって定義される関数 $F(x, y)$ を、**確率変数 X, Y の（同時）分布関数**という。

確率変数 X, Y に対して下式を満たす関数 $f(x, y)$ が存在するとき、この $f(x, y)$ を**確率変数 X, Y の（同時）確率密度関数**という。

任意の $a \le b, c \le d$ 対して $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$

なお、1次元の場合と同様に、確率密度関数 $f(x, y)$ が存在するとき、分布関数 $F(x, y)$ との間に次の関係が成り立つ。

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

また、確率変数 X, Y の（同時）確率密度関数が分かれば、X, Y それぞれの確率密度関数を次のように求めることができる。

X の確率密度関数 $f_X(x) = \int f(x, y) dy$

Y の確率密度関数 $f_Y(y) = \int f(x, y) dx$

離散的な値 $x_1, x_2, x_3 \cdots$, $y_1, y_2, y_3 \cdots$ のみをとる確率変数 X, Y に対して下

式によって定義される関数 $f(x_i, y_j)$ を確率変数 X, Y の(同時)確率関数という。

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

離散的な場合についても確率変数 X, Y の(同時)確率関数を用いて、X, Y それぞれの確率関数を次のように求めることができる。

X の確率関数　$f_X(x_i) = \sum_j f(x_i, y_j)$

Y の確率関数　$f_Y(y_j) = \sum_i f(x_i, y_j)$

0.1.2 独立性

二つの確率変数 X, Y が下式を満たすとき、この二つの確率変数 X, Y は独立であるという。

任意の $a < b, c < d$ に対して、

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = P(a < X \le b)P(c < Y \le d)$$

独立な確率変数 X, Y に対しては次の性質が成り立つ。

① ϕ と ψ を任意の関数として、二つの確率変数 $\phi(X)$ と $\psi(Y)$ は独立

② それぞれの分布関数を $F_X(x), F_Y(y)$ とするとき、確率変数 X, Y の分布関数 $F(x, y)$ は、$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ として表される。

③ それぞれに確率密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ が存在するとき、確率変数 X, Y の確率密度関数 $f(x, y)$ は、$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ として表される。

④ それぞれ確率関数を $f_X(x_i), f_Y(y_j)$ とする離散型の確率変数であるとき、確率変数 X, Y の確率関数 $f(x_i, y_j)$ は、$f(x_i, y_j) = f_X(x_i)f_Y(y_j)$ として表される。

0.1.3 期待値

Xを確率変数として、下式によって定義される値$E(h(X))$を$h(X)$の**期待値**という。

・ 確率変数Xが確率密度関数を持つ場合

確率密度関数を$f(x)$として、$E(h(X)) = \int h(x) f(x) dx$ (0.1)

・ 確率変数Xが離散的な値のみを取る場合

確率関数を$f(x_i)$として、$E(h(X)) = \sum_i h(x_i) f(x_i)$ (0.2)

ここでスティルチェス積分について簡単に説明しておく。

(0.1)式、(0.2)式によって定義される期待値の式を、確率密度関数がある場合と離散的な場合に分けず、分布関数$F(x)$によって下式のように定義している場合がある。

$$E(h(X)) = \int h(x) dF(x) \tag{0.3}$$

この右辺は**スティルチェス積分**と呼ばれるものであり、通常の積分を一般化したものである。スティルチェス積分の厳密な定義はここでは述べないが、この積分を用いると、確率密度関数がある場合、離散的な場合、さらにこのいずれでもない場合[1]に対しても、(0.3)式のみで期待値の定義をすることができる。

第1章以降、(0.3)式のように表現されている積分があるが、(0.1)式と(0.2)式をまとめて便宜的に表現しているものと考えていただければ十分である。

いくつかの期待値には特別な名前が付けられている[2]。

---

1 たとえば0という値を取る確率が0.5であり、それ以外は(0,1]の値を一様に取るような確率変数を考えると、このような確率変数には確率密度関数は存在せず、また離散的な場合でもない。

2 歪度および尖度に関しては0.1.5を参照。

確率変数Xの**平均**（μ） $=E(X)$

確率変数Xの**分散**（$V(X),\sigma^2$） $=E((X-\mu)^2)$

確率変数Xの**標準偏差**（σ） $=\sqrt{V(X)}$

確率変数Xの**原点周りのk次積率**（μ_k） $=E(X^k)$

確率変数Xの**平均値周りのk次積率**（ν_k） $=E((X-\mu)^k)$

確率変数Xの**歪度** $=\dfrac{\nu_3}{\sigma^3}$

確率変数Xの**尖度** $=\dfrac{\nu_4}{\sigma^4}-3$

2次元の確率変数X,Yに対する$h(X,Y)$の期待値$E(h(X,Y))$は次のように定義される。

・ 確率変数X,Yが確率密度関数を持つ場合

(同時)確率密度関数を$f(x,y)$として、

$$E(h(X,Y))=\iint h(x,y)f(x,y)dxdy$$

・ 確率変数X,Yが離散的な値のみを取る場合

(同時)確率関数を$f(x_i,y_j)$として、

$$E(h(X,Y))=\sum_j\sum_i h(x_i,y_j)f(x_i,y_j)$$

2次元の確率変数に対する期待値を用いて共分散、相関係数が定義される。

確率変数X,Yの**共分散**（$Cov(X,Y)$） $=E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$

確率変数X,Yの**相関係数**（$\rho(X,Y)$） $=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

最後に、これら期待値に関する重要な公式・性質を示しておく。

① $E(aX+b)=aE(X)+b$（a,bは定数）

② $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

③ $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

④ $V(aX+b)=a^2V(X)$ （a,bは定数）

⑤ $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)$

⑥ $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

⑦ $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1,$

$$\rho(X,Y)=\pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}=\pm\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{V(Y)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y=\pm aX+b\ (a\text{は正の定数}) \quad \text{複号同順}$$

⑧ X,Yが独立 $\Rightarrow$ $E(XY)=E(X)E(Y)$

$$Cov(X,Y)=\rho(X,Y)=0$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

0.1.4 損害保険数理で用いる確率分布

(1) 正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ $-\infty<x<\infty$

（パラメータの範囲: $-\infty<\mu<\infty$, $0<\sigma^2<\infty$）

平均 μ

分散 σ^2

積率母関数[3] $\exp\left(\mu t+\dfrac{\sigma^2t^2}{2}\right)$

パラメータ μ,σ^2 に関して再生性[4]を持つ。

---

[3] 0.1.5参照。

[4] 0.1.7参照。

(2) ポアソン分布 $Po(\lambda)$

確率関数　$f(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0,1,2,\cdots$

（パラメータの範囲：$0 < \lambda < \infty$）

平均　λ

分散　λ

積率母関数　$\exp\left(\lambda e^t - \lambda\right)$

パラメータλに関して再生性を持つ。

(3) 二項分布 $B(n, p)$

確率関数　$f(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\cdots,n$

（パラメータの範囲：$n = 1,2,\cdots, \quad 0 < p < 1$）

平均　np

分散　$np(1-p)$

積率母関数　$(pe^t + (1-p))^n$

パラメータnに関して再生性を持つ。

(4) 負の二項分布 $NB(k, p)$

確率関数　$f(x) = \begin{pmatrix} k+x-1 \\ x \end{pmatrix} p^k (1-p)^x \quad x = 0,1,2,\cdots$

（パラメータの範囲：$0 < k < \infty, \quad 0 < p < 1$）

平均　$\dfrac{k(1-p)}{p}$

分散　$\dfrac{k(1-p)}{p^2}$

積率母関数　$\dfrac{p^k}{\left\{1-(1-p)e^t\right\}^k}$

パラメータkに関して再生性を持つ。

ポアソン分布のパラメータλがガンマ分布に従う場合に導かれる分布である。

(5) ガンマ分布$\Gamma(\alpha,\beta)$

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta x}(\beta x)^{\alpha-1} \quad 0\le x<\infty$

（パラメータの範囲：$0<\alpha<\infty,\quad 0<\beta<\infty$）

平均 $\dfrac{\alpha}{\beta}$

分散 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$

積率母関数 $\left(\dfrac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha} \quad t<\beta$

パラメータαに関して再生性を持つ。

$\Gamma(1,\lambda)$（$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \quad 0\le x<\infty$）を**指数分布**といい、$\Gamma\left(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2}\right)$（$f(x)=\dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-x/2}x^{n/2-1} \quad 0<x<\infty$）を**自由度$n$のカイ2乗分布**$\chi^2(n)$という。また、$X$と$Y$が独立に、それぞれ$\chi^2(m)$、$\chi^2(n)$に従うとき、$\dfrac{X/m}{Y/n}$を自由度$(m,n)$の$F$分布$F(m,n)$という。確率密度関数は次のとおり。

$$f(x)=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}=\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}},$$

$$0<x<\infty$$

a. 指数分布の特徴

任意の正数aに対して、$P(X\ge x+a\mid X\ge a)=P(X\ge x)$となる。

b. F 分布の特徴

F 分布 $F(m,n)$ の上側確率が α となるパーセント点は[5]、$F(n,m)$ の下側確率が α となるパーセント点の逆数に等しい。

(6) 対数正規分布 $LN(\mu,\sigma^2)$

確率密度関数　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\,x}\exp\left(-\dfrac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\quad 0<x<\infty$

（パラメータの範囲: $-\infty<\mu<\infty,\quad 0<\sigma^2<\infty$）

平均　$\exp\left(\mu+\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)$

分散　$\exp(2\mu+\sigma^2)\{\exp(\sigma^2)-1\}$

積率母関数　存在しない

$\log X$ が正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従う確率変数 X の確率分布である。

(7) パレート分布

確率密度関数　$f(x)=\dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}\quad \beta<x$

（パラメータの範囲: $0<\alpha<\infty,\quad 0<\beta<\infty$）

平均　$\dfrac{\alpha\beta}{\alpha-1}\qquad 1<\alpha$

分散　$\dfrac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}\qquad 2<\alpha$

積率母関数　存在しない

---

5 確率変数 X の上側確率が α となるパーセント点とは、$P(a<X)=\alpha$ となる点 a のことをいう（下側確率が α となるパーセント点は、$P(X<a)=\alpha$ となる点 a のことをいう）。

(8) 一様分布 $U(a,b)$

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{b-a} \quad a<x<b$

（パラメータの範囲: $-\infty<a<b<\infty$）

平均 $\dfrac{a+b}{2}$

分散 $\dfrac{(b-a)^2}{12}$

積率母関数 $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

(9) ベータ分布 $B(p,q)$

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{B}(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad 0<x<1$

（パラメータの範囲: $0<p<\infty,\quad 0<q<\infty$）

平均 $\dfrac{p}{p+q}$

分散 $\dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$

(10) t 分布 $t(n)$

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty<x<\infty$

（パラメータの範囲: $0<n$）

平均 $0 \quad (n\geq 2)$

分散 $\dfrac{n}{n-2}\ (n\geq 3)$

X と Y が独立で、X が $N(0,1)$ に Y が $\chi^2(n)$ に従うとき、$\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ は $t(n)$ に従う。

(11) ワイブル分布 $W(p,\theta)$

確率密度関数 $f(x)=\dfrac{p}{\theta}\cdot\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{p-1}\cdot\exp\left(-\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^{p}\right)\quad 0<x<\infty$

（パラメータの範囲：$0<p<\infty$、$0<\theta<\infty$）

平均 $\theta\cdot\Gamma\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$

分散 $\theta^2\left\{\Gamma\left(1+\dfrac{2}{p}\right)-\Gamma^2\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\right\}$

0.1.5 積率母関数

確率変数 X に対して下式期待値によって定義される関数 $M_X(t)$ を確率変数 X の**積率母関数**という。

$$M_X(t)=E(e^{tX})$$

積率母関数については次の性質が成り立つ。

① 確率変数 X,Y が独立であるとき、$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t)$

② 原点周りの k 次積率 $\mu_k=E(X^k)=\left.\dfrac{d^kM_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$

③ $M_X(t)=M_Y(t)\iff$ 確率変数 X,Y は同じ確率分布に従う。

ここで、積率母関数と似た概念である特性関数について簡単に説明しておく。

確率変数 X に対して下式期待値によって定義される関数 $\varphi_X(t)$ を確率変数 X の**特性関数**という。

$$\varphi_X(t)=E(e^{itX})\quad(i\text{は虚数単位}\sqrt{-1})$$

積率母関数の定義におけるtをitとしたものであり、積率母関数と同様の性質が成り立つ。積率母関数は必ずしも存在するとは限らないが[6]、特性関数は必ず存在する。

一般的な議論をする際には特性関数が用いられることが多いが、第1章以降では特性関数は用いずに、積率母関数によって議論を進めるものとする。なお、章末に掲げている参考文献においては特性関数を用いたものが多いが、積率母関数に置き換えて理解できる場合がほとんどである。

積率母関数$M_X(t)$の対数 $\log M_X(t)$として定義される関数を、確率変数Xの**キュムラント母関数**という。また、

$$\chi_k = \left.\frac{d^k \log M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

として定義されるχ_kを確率変数Xのk**次のキュムラント**という。

キュムラントと積率には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \mu \\
\chi_2 &= \mu_2 - \mu^2 = \sigma^2 \\
\chi_3 &= \mu_3 - 3\mu\,\mu_2 + 2\mu^3 = \nu_3 \\
\chi_4 &= \mu_4 - 4\mu\,\mu_3 - 3{\mu_2}^2 + 12\mu^2\,\mu_2 - 6\mu^4 = \nu_4 - 3\sigma^4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

0.1.3において定義した歪度および尖度をキュムラントを用いて表現すると次のようになる。

$$\text{歪度} = \frac{\chi_3}{\sigma^3},\quad \text{尖度} = \frac{\chi_4}{\sigma^4}$$

歪度および尖度はもともとキュムラントを用いて定義される概念であり、正規分布では$\chi_k = 0\ (k \geq 3)$となることから、正規分布からの乖離を表す指標として

6 $t=0$の近傍で期待値$E(e^{tX})$が存在するとき、積率母関数は存在するという。

用いられるものである。

2次元の確率変数 X, Y に対する積率母関数 $M_{X,Y}(t_1, t_2)$ は、

$$M_{X,Y}(t_1, t_2) = E(\exp(t_1 X + t_2 Y))$$

として定義される。

2次元の積率母関数については次の性質が成り立つ。

① 確率変数 X, Y が独立であるとき、$M_{X,Y}(t_1, t_2) = M_X(t_1) M_Y(t_2)$

② $E(X^k Y^l) = \left.\dfrac{\partial^{k+l} M_{X,Y}(t_1, t_2)}{\partial {t_1}^k \partial {t_2}^l}\right|_{(t_1, t_2)=(0,0)}$

0.1.6 条件付確率

事象 A, B に対して $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ によって定義される確率 $P(A \mid B)$ を、事象 B が与えられたときの事象 A の**条件付確率**という。

定義より明らかに、

$P(A \mid B) = P(A)$（または $P(B \mid A) = P(B)$）$\Leftrightarrow$ 事象 A、B が互いに独立が成り立つ。

条件付確率に関する定理としては、次のベイズの定理が重要である。

ベイズの定理　和事象が標本空間全体である排反な事象 $A_1, A_2, \cdots A_n$ と事象 B に関して、下式が成り立つ。

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k \cap B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

「原因 A_i によって結果 B が起こる」という因果関係があり、結果 B から原因 A_i を推定するような場合にベイズの定理は極めて有用である。

次に条件付期待値について述べる。

X, Y を確率変数として任意の $a \le b$ に対して下式を満たす $f(x)$ が存在するとき、この $f(x)$ を $Y=y$ という条件の下での確率変数 X の**条件付確率密度関数**といい、$f_{X|Y}(x|y)$ によって表す。

$$P(a \le X \le b \mid Y=y) = \int_a^b f(x)\,dx$$

確率変数の(同時)確率密度関数 $f(x,y)$ が存在する場合には、条件付確率密度関数 $f_{X|Y}(x|y)$ は次式によって表される。

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{\int f(x,y)dx} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

また、$Y=y$ という条件の下での確率変数 X の**条件付期待値**および**条件付分散**を、それぞれ $E(X|Y=y)$、$V(X|Y=y)$ によって表す。すなわち、$E(X|Y=y)$ は $f_{X|Y}(x|y)$ を用いて $E(X|Y=y)=\int x\, f_{X|Y}(x|y)dx$ として定義される値であり、$V(X|Y=y)$ は $E((X-E(X|Y=y))^2|Y=y)$ によって定義される値である。(条件付共分散も条件付期待値を用いて同様に定義される。)

確率変数 X, Y が離散的な値のみを取る場合も同様に条件付確率関数、条件付期待値、条件付分散が定義される。このときは、

$$f_{X|Y}(x_i \mid y_j) = \frac{f(x_i, y_j)}{\sum_k f(x_k, y_j)} = \frac{f(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)}$$

$$E(X \mid Y=y_j) = \sum_i x_i f_{X|Y}(x_i \mid y_j)$$

となる。

上述の条件付期待値は一つの実数値であるが、次に確率変数としての条件付期待値について述べておく。

下式によって定義される確率変数 $E(X|Y)$ を X の Y による**条件付期待値**と

いう。

$$E(X \mid Y) = \begin{pmatrix} Y = y \text{となるときに} E(X \mid Y = y) \\ \text{という値を与える確率変数} \end{pmatrix}$$

つまり、この条件付期待値$E(X \mid Y)$は、確率変数Yの関数として表されるような確率変数である。

同様に、XのYによる**条件付分散**およびX,YのZによる**条件付共分散**は下式によって定義される。

$$V(X \mid Y) = \begin{pmatrix} Y = y \text{となるときに} V(X \mid Y = y) \\ \text{という値を与える確率変数} \end{pmatrix}$$

$$Cov(X,Y \mid Z) = \begin{pmatrix} Z = z \text{となるときに} Cov(X,Y \mid Z = z) \\ \text{という値を与える確率変数} \end{pmatrix}$$

確率変数である条件付期待値、条件付分散および条件付共分散に関しては、X,Y,Zを任意の確率変数として、次の重要な公式が成り立つ。

① $E(X) = E(E(X \mid Y))$

② $V(X) = V(E(X \mid Y)) + E(V(X \mid Y))$

③ $Cov(X,Y) = Cov(E(X \mid Z), E(Y \mid Z)) + E(Cov(X,Y \mid Z))$

なお、これらの公式に関しては確率論、統計学の書籍では扱っていないことが多いので、この章の最後に証明を載せている。

0.1.7 確率変数の和の分布

確率変数Xの確率密度関数を$f(x)$としたとき、$y = \varphi(x)$が狭義単調な関数で、これをxについて解いた$x = \psi(y)$に対し$\psi'(y)$が存在するならば、$Y = \varphi(X)$の確率密度関数は$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$となる。

また、(X,Y)の確率密度関数を$f(x,y)$としたとき、xy平面からuv平面への1対1の変換$u = \varphi_1(x,y)$　$v = \varphi_2(x,y)$に対し、これをx、yについて解いた$x = \psi_1(u,v)$　$y = \psi_2(u,v)$のu、vに対する偏導関数が存在するならば、確率変数$U = \varphi_1(X,Y)$　$V = \varphi_2(X,Y)$の確率密度関数は以下のとおりとなる。

$$g(u,v)=f(\psi_1(u,v),\psi_2(u,v))\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

以上から、確率変数X,Yが独立であるとき、その和$Z=X+Y$の分布関数$F_{X+Y}(z)$および確率密度関数$f_{X+Y}(z)$は下式のとおり表せる（同様に$Z={X}/{Y}$などについても導くことができる）。：

$$F_{X+Y}(z)=\int f_X(x)F_Y(z-x)dx \tag{0.4}$$

$$=\int f_Y(y)F_X(z-y)dy \tag{0.5}$$

$$f_{X+Y}(z)=\int f_X(x)f_Y(z-x)dx \tag{0.6}$$

$$=\int f_Y(y)f_X(z-y)dy \tag{0.7}$$

(0.4)式（もしくは(0.5)式）によって定義される関数を、F_XとF_Yの**畳み込み**といい、$F_X * F_Y (= F_Y * F_X)$によって表す。つまり、

$$F_{X+Y}(z)=(F_X * F_Y)(z)=(F_Y * F_X)(z)$$

である。また、(0.6)式（もしくは(0.7)式）によって定義される関数を、f_Xとf_Yの**畳み込み**といい、$f_X * f_Y (= f_Y * f_X)$によって表す。同様に、

$$f_{X+Y}(z)=(f_X * f_Y)(z)=(f_Y * f_X)(z)$$

である。

三つ以上の畳み込みも帰納的に定義することができ、

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z)=(F_{X_1} * F_{X_2} * \cdots * F_{X_n})(z)$$

$$f_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z)=(f_{X_1} * f_{X_2} * \cdots * f_{X_n})(z)$$

となる。

さらに確率変数が同じ分布に従う場合は、その分布の分布関数をF、確率密度関数をfとして、

$$F_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z)=(\underbrace{F * \cdots * F}_{n\text{個}})(z)=F^{n*}(z)$$

$$f_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z) = (\underbrace{f * \cdots * f}_{n\text{個}})(z) = f^{n*}(z)$$

として表す。

通常、独立な確率変数の和の分布を求める際は畳み込みの積分計算をする必要があるが、あるクラスに属する確率変数は再生性という極めて好ましい性質を持っている。あるクラスの分布に従う二つの独立な確率変数の和がまたそのクラスの分布に従うとき、そのクラスの分布は**再生性を持つ**という。

損害保険数理で扱う確率分布の多くは、この再生性という性質を持っている。

正規分布に関しては、さらに$a_i (i=1,\cdots,n)$を定数として

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)\ (i=1,\cdots,n),\ \text{独立}\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma_i^2\right)$$

が成り立つ。

［ 再生性を持つ確率分布 ］

分　布　名	X_iの分布	$X_1+X_2+\cdots+X_n$の分布
正　規　分　布	$N(\mu_i, \sigma_i^2)$	$N(\mu_1+\cdots+\mu_n, \sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)$
ポ ア ソ ン 分 布	$Po(\lambda_i)$	$Po(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)$
二　項　分　布	$B(m_i, p)$	$B(m_1+\cdots+m_n, p)$
負 の 二 項 分 布	$NB(k_i, p)$	$NB(k_1+\cdots+k_n, p)$
ガ ン マ 分 布	$\Gamma(\alpha_i, \beta)$	$\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_n, \beta)$
カ イ 二 乗 分 布	$\chi^2(m_i)$	$\chi^2(m_1+\cdots+m_n)$

※ $X_1, X_2, \cdots, X_n$は独立な確率変数である。

0.2 統計学

0.2.1 チェビシェフの不等式

確率変数Xが、有限な分散σ^2を持つとき、任意の$\varepsilon > 0$に対して、

$$P\left(|X - E(X)| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

が成立する。これを**チェビシェフの不等式**（Chebyshev's inequality）という。

$\lambda = \dfrac{\varepsilon}{\sigma}$とおいて考えてみると、不等式の左辺は$\dfrac{|X - E(X)|}{\sigma} > \lambda$となる確率、すなわち$X$が平均値$E(X)$から標準偏差$\sigma$の$\lambda$倍以上離れる確率となり、右辺は$\dfrac{1}{\lambda^2}$となる。つまり、チェビシェフの不等式により、確率変数が平均値から標準偏差のλ倍以上離れる確率は$\dfrac{1}{\lambda^2}$よりも小さいことがわかる。

チェビシェフの不等式は分布に依存しないで成立する極めて基本的かつ有用な不等式であり、この不等式を用いて重要な大数の弱法則が導かれる。

大数の弱法則　$X_1, X_2, \cdots, X_n$を互いに独立で平均がμの同一の分布に従う確率変数とする。

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

とすると、任意の正数εに対して、

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つ。

0.2.2 中心極限定理

中心極限定理(central limit theorem)によって、正規分布が種々の分布の中

で重要な役割を果たしていることがわかる。

中心極限定理　確率変数$X_1, X_2, \cdots, X_n$が独立、かつ同一の分布（平均μ、分散σ^2）に従うとき、確率変数Yを

$$Y = \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

と定めると、任意の実数a, bに対して、

$$\lim_{n \to \infty} P(a < Y < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

が成立する。

$X_1, X_2, \cdots, X_n$の平均を$\bar{X}$とすると、Yは$Y = \dfrac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}}$として表すことができるので、上記の中心極限定理は、

「 同一の分布に従う独立なn個の確率変数の平均$\bar{X}$を標準化[7]した確率変数Yは、$n \to \infty$のとき、標準正規分布$N(0,1)$に従う。」

として言い換えることができる。また、中心極限定理を$\bar{X}$によって表現すれば、

「 同一の分布に従う独立なn個の確率変数の平均$\bar{X}$は、$n \to \infty$のとき、正規分布$N(E(\bar{X}), V(\bar{X}))$に従う。」

となることがわかる。

7　確率変数Xに対して、$Y = \dfrac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}}$として定義される確率変数$Y$を、$X$を標準化した確率変数という。$E(Y) = 0, V(Y) = 1$であるので、標準化とは確率変数を平行移動および定数倍することによって平均0，分散1に変換することである。

0.2.3　点推定

一般に確率分布は、数個の母数(パラメータ)によって決定されるが、特定の問題に確率分布を応用するには、事前に母数を推定しておく必要がある。このとき、実際の標本値をもとに母数を推測する方法が、**統計的推定**であり、一方で、この母数についてある仮説を立てて、その仮説が正しいかどうかを標本値をもとに判定する方法が**統計的検定**である。

母数 θ を推定する際に、標本変量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の関数である $\hat{\theta}_n(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ (推定量)の一つの実現値 $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ (推定値)をもって行う方法を**点推定**という。正規分布の母数の一つである μ を、

$$\hat{\mu}_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

で推定する方法は、点推定である。

(1)　推定量が満たすべき性質

母数の推定量はただ一つ存在するというものではない。たとえば、正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の母数 μ の推定量としては、標本平均 $\bar{X}$ の代わりに標本中央値を用いることも考えられる。

一般的に推定量が満たすことが望ましい性質として次の4つを挙げておく。

①　不偏性

確率変数である $\hat{\theta}_n$ は、θ を中心に分布することが望ましい。(すなわち、$E(\hat{\theta}_n) = \theta$)　このような $\hat{\theta}_n$ を**不偏推定量**という。

②　有効性

二つの不偏推定量があるとき、分散のより小さい方が望ましい。最小分散の不偏推定量を**有効推定量**という。

③　一致性

標本数が大きくなると真の母数に近づくものの方が望ましい。これを数学的に表現した、

$$任意の\varepsilon > 0 に対して、\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$$

を満たす$\hat{\theta}_n$を**一致推定量**という。

直接的に表現すると、$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta$であるが、$\hat{\theta}_n$が確率変数であるため上記のような表現となる。

④ **充足性**

標本変量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$の確率密度関数$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$が$\hat{\theta}_n$の確率密度関数$g(\hat{\theta}_n;\theta)$と$\theta$に無関係の$h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$により、

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = g(\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \cdots, x_n);\theta) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

と分解できるとき、$\hat{\theta}_n$を**充足推定量**（もしくは**十分推定量**）という。

定義から明らかなように、充足推定量$\hat{\theta}_n$による$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$の条件付確率密度関数は母数θには依存しないものとなる。これは、θの推定を行ううえで$\hat{\theta}_n$以外の情報は必要ないことを意味している。

充足性は上記の三つの概念と比べて難解であるが、重要な概念である。

(2) 母数の推定量の計算方法

a. モーメント法

最も簡便な推定量の求め方としてモーメント法がある。これは$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$を母数とする母集団分布の原点の周りの$\nu$次の積率を$\mu_\nu'(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$として、

$$\mu_\nu'(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = m_\nu' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k)$$

を$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$について解いた$\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，…，$\hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を推定値とするものである。

モーメント法は計算が容易であるが、(1)として述べた推定量が満たすべき性質との関係が不明確であるため、一般的にはb. に示す最尤法の方が好ましい推定量であると考えられている。

b. 最尤法

望ましい推定量を得るためのより一般的な方法としては最尤法がある。

標本変量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$の確率密度関数は、$X_i (i = 1,2,\cdots, n_n)$の確率密度関数を$f(x;\theta)$として、$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ (θは固定)によって表すことができる。

ここで、$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を標本値として固定すれば、上式は未知の母数θの関数として考えることができ、これを$l(\theta) = l(\theta; x_1, x_2, \cdots, x_n)$として表せば、$l(\theta)$は標本値$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を与える確率密度として解釈することができる。すなわち、標本値$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$に対する母集団分布の母数がθであることの「尤(もっと)もらしさの度合」を表すものと考えることができる(**尤度関数**と呼ぶ)。

このような考えのもとに、$l(\theta)$を最大にするθが最も望ましい推定値であるとして導かれる推定量が**最尤推定量**である。最尤推定量(すなわち$l(\theta)$を最大にするθ)を求めるには、$\dfrac{\partial}{\partial\theta} l(\theta) = 0$または$\dfrac{\partial}{\partial\theta} \log l(\theta) = 0$を解けばよい。

最尤推定量は、推定量として以下のような好ましい性質を持つ。

① 有効推定量が存在するならば、それはある条件のもとで、最尤推定量と一致する。

② 充足推定量が存在するならば、最尤推定量はこの関数となる。

③ 不偏でないことがしばしばあるが、適当な修正で不偏にできることが多い。

0.2.4 区間推定

0.2.3において議論した母集団分布の未知の母数θに対する推定量$\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は一つの値にすぎないので、真の値を上回りも下回りもする。

したがって、実用上の見地からも次のような推定方法がしばしば有用である。

「 ある与えられた危険率εに対して、θが区間$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$に含まれる確率が$1-\varepsilon$であるような推定量$\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を考え、区

間$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$によって$\theta$の取り得るを推定する。」

これを**区間推定**という。区間$(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$を信頼係数$1-\varepsilon$の**信頼区間**であるといい、$\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$をそれぞれ**信頼下限**、**信頼上限**、また両者を一緒にして**信頼限界**と呼んでいる。εとしては通常5%ないし1%を用いる。信頼区間は幅が小さい方が好ましいが、信頼区間の幅をなるべく小さくするためには、$P(\theta \le \hat{\theta}_L) = P(\theta \ge \hat{\theta}_U) = \dfrac{\varepsilon}{2}$となるように$\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U$を決めればよいことが多い。たとえば$\varepsilon = 5\%$の場合、信頼下限を下回る確率、信頼上限を上回る確率とも、2.5%となるよう信頼限界を決めればよい。

信頼区間の定め方は、通常次のとおりである。

① 推定しようとする未知の母数θのみを母数に含む統計量$T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$で、その分布が$\theta$に無関係のものを選ぶ。

② この$T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$を用いて、

$$P(T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) \le \theta_1') = P(T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) \ge \theta_2') = \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにθ_1', θ_2'を定めれば、①よりこの値はθに無関係となり、

$$P(\theta_1' < T(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < \theta_2') = 1-\varepsilon$$

となる。

③ ②の括弧内がθについて解ければ、

$$P(\theta \le \hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = P(\theta \ge \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = \frac{\varepsilon}{2}$$

となることから、

$$P(\hat{\theta}_L(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_U(X_1, X_2, \cdots, X_n)) = 1-\varepsilon$$

となる。

0.2.5 仮説検定

母集団の母数などに関する理論的仮説を採択するか棄却するかにつき、母

集団からの標本の統計的解析に基づき判定することを**仮説検定**という。このとき、検定の対象となる仮説を**帰無仮説**（H_0と書く）、帰無仮説が正しくないときに考えられる仮説を**対立仮説**（H_1と書く）という。

仮説H_0が正しいときにこれを棄却する誤りを**第1種の誤り**、反対にH_0が正しくないときにこれを採択する誤りを**第2種の誤り**と呼ぶ。仮説検定においては、第1種の誤りの起こる確率をあらかじめ定めた値（通常5%または1%であり、これを**有意水準**という）にしておき、第2種の誤りの起こる確率をなるべく小さくするような方式を定めている。第1種の誤りの起こる確率は一定であるが、第2種の誤りの起こる確率が小さいとは一概にいえない（とくに標本の大きさnが小さいとき）ので、H_0を棄却する（H_0は有意であるともいう）ときは"積極的に"行うが、反対にH_0を採択するときは"消極的に"行うという立場をとるのが合理的である。

一般的な仮説検定の手順は、以下のとおりである。

① 有意水準εを選択する（通常5%または1%）。

② 統計的モデルの定式化を行う。

（例）保険金支払額X_iは、平均μ、分散σ^2の正規分布に従う。

③ 帰無仮説H_0、対立仮説H_1を設定する。

（例） $H_0:\theta=\theta_0$、$H_1:\theta=\theta_1$

④ ②における確率変数を用いて、性質の判っている統計量を導く。

（例） $T=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$は、標準正規分布$N(0,1)$に従う。

⑤ ④で導いた統計量Tについて、

$$P(T\in R\,|\,\theta=\theta_0)=\varepsilon$$
$$P(T\notin R\,|\,\theta=\theta_1)=1-P(T\in R\,|\,\theta=\theta_1)=\xi$$

とおいたときに、ξが最小、すなわち$P(T\in R\,|\,\theta=\theta_1)$が最大になるように$R$を決定する。この$R$を**棄却域**と呼び、$T$の値がこの領域に落ちた場合には、帰無

仮説 H_0 を棄却することにする。

⑥ 帰無仮説 H_0 が正しいとの仮定のもとで、標本値より T の値を計算する。

⑦ 標本値より計算した T の値が棄却域に落ちたか否かを判定する。

⑧ 結論を導き出す（H_0 を採択するか棄却するか）。

なお、母数の区間推定や検定を行う場合に用いる一般的な統計量は下表のとおりである。

推定する母数	統計量および統計量が従う分布
正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の σ^2（μ が既知の場合）	$T=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)^2}{\sigma^2}$　$\chi^2(n)$
正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の μ（σ が既知の場合）	$T=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$　$N(0,1)$
正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の σ^2（μ が未知の場合）	$T=\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)^2}{\sigma^2}$　$\chi^2(n-1)$
正規母集団 $N(\mu,\sigma^2)$ の μ（σ が未知の場合）	$T=\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k)^2}}$　$t(n-1)$
指数母集団 $\Gamma(1,\lambda)$ の λ	$T=2\lambda\sum_{k=1}^{n}X_k$　$\chi^2(2n)$

また、上記では「定式化したモデルの母数」に対する検定を取り上げたが、その他にカイ2乗分布を用いた検定を紹介する。

① カイ2乗適合度検定

カイ2乗適合度検定は、（モデルとしての定式化に際し）選択した確率分布に対し、その適合度を検定する方法として一般的に用いられるものである。

まず、定式化にあたり行った確率分布の選択が正しいことを、帰無仮説H_0とする。また、事象A_1からA_kを母集団Ωのk個の排反的な事象とし、上記確率分布をもとに計算したそれぞれの事象の発生確率を$p_1,\cdots,p_k$で、それぞれの事象における標本数を$n_1,\cdots,n_k$（$n_1+\cdots+n_k=N$）で表す。

ここで、rを標本から推定した（確率分布の）母数の数、εを有意水準、$\chi^2{}_{k-r-1}(\varepsilon)$を$\chi^2(k-r-1)$における上側$\varepsilon$点とし、$Np_i \geq 5$などの条件のもとで、$T=\sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i-Np_i)^2}{Np_i} \geq \chi^2{}_{k-r-1}(\varepsilon)$の場合$H_0$を棄却する。

なお、実務において連続型の確率分布を用いたモデル化をする場合、本検定を行うにあたっては、確率変数のとる範囲を適当な区間ごとに区切り、事象A_1からA_kを設定する必要がある。

② 独立性の検定

N個のデータが、2種類の属性A,Bによるそれぞれの各階級A_1からA_rとB_1からB_rに分割されており、結果として下表の度数表ができているものとする。

	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	計
A_1	f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1s}	$f_{1\cdot}$
A_2	f_{21}	f_{22}	$\cdots$	f_{2s}	$f_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	f_{r1}	f_{r2}	$\cdots$	f_{rs}	$f_{r\cdot}$
計	$f_{\cdot 1}$	$f_{\cdot 2}$		$f_{\cdot s}$	N

ここで、二つの属性A,Bが互いに独立であることを帰無仮説H_0とし、εを有意水準、$\chi^2{}_{(r-1)(s-1)}(\varepsilon)$を$\chi^2((r-1)(s-1))$における上側$\varepsilon$点とし、$f_{ij} \geq 5$な

どの条件のもとで、$T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{\left(f_{ij}-\frac{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}{N}\right)^2}{\frac{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}{N}}\geq\chi^2{}_{(r-1)(s-1)}(\varepsilon)$ の場合 H_0 を棄却する。

0.3 補足

最後に、0.1.6節における条件付期待値に関する公式①、②、③の証明を補足として示しておく。

① $E(X)=E(E(X\mid Y))$

条件付確率密度関数が存在する場合のみについて示しておく。

$$E(E(X\mid Y))=\int E(X\mid Y=y)f_Y(y)dy=\int\left\{\int xf_{X|Y}(x\mid y)dx\right\}\cdot f_Y(y)dy$$
$$=\int x\int f_{X|Y}(x\mid y)\cdot f_Y(y)dydx=\int x\cdot f_X(x)dx=E(X)$$

（証明終）

② $V(X)=V(E(X\mid Y))+E(V(X\mid Y))$

$$\begin{aligned}E(V(X\mid Y))&=E(E(X^2\mid Y)-\{E(X\mid Y)\}^2)\\&=E(E(X^2\mid Y))-E(\{E(X\mid Y)\}^2)\\&=E(X^2)-E(\{E(X\mid Y)\}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(E(X\mid Y))&=E(\{E(X\mid Y)\}^2)-\{E(E(X\mid Y))\}^2\\&=E(\{E(X\mid Y)\}^2)-\{E(X)\}^2\end{aligned}$$

両辺を足し合わせると、

$$E(V(X\mid Y))+V(E(X\mid Y))=E(X^2)-\{E(X)\}^2=V(X)$$

（証明終）

③ $Cov(X,Y)=Cov(E(X\mid Z),E(Y\mid Z))+E(Cov(X,Y\mid Z))$

$$\begin{aligned}&Cov(E(X\mid Z),E(Y\mid Z))\\&\quad=E(E(X\mid Z)\cdot E(Y\mid Z))-E(E(X\mid Z))\cdot E(E(Y\mid Z))\\&\quad=E(E(X\mid Z)\cdot E(Y\mid Z))-E(X)E(Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Cov(X,Y\mid Z))&=E(E(XY\mid Z)-E(X\mid Z)\cdot E(Y\mid Z))\\&=E(E(XY\mid Z))-E(E(X\mid Z)\cdot E(Y\mid Z))\\&=E(XY)-E(E(X\mid Z)\cdot E(Y\mid Z))\end{aligned}$$

両辺を足し合わせると、

$$
\begin{aligned}
&Cov(E(X|Z),E(Y|Z))+E(Cov(X,Y|Z)) \\
&\qquad = E(XY)-E(X)\cdot E(Y) \\
&\qquad = Cov(X,Y)
\end{aligned}
$$

（証明終）

［参考文献］

1. 国沢清典著『確率論とその応用』（岩波全書）
2. 国沢清典著『確率統計演習1 確率』、『確率統計演習1 統計』（培風館）
3. 竹内啓著『数理統計学』（東洋経済）
4. 損保アクチュアリー学調査研究会訳『損害保険における統計学とその応用』（日本アクチュアリー会会報別冊 第142号）
5. Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt “ACTUARIAL MATHEMATICS” The Society of Actuaries
6. Stuart A.Klugman, Harry H.Panjer, Gordan E.Willmot 著『統計データの数理モデルへの適用（Loss Models From Data to Decisions）』（社団法人 日本アクチュアリー会　日本語版編集）

第１章

損害保険料率の基礎知識

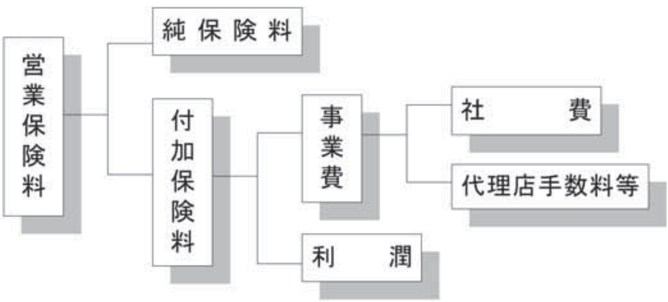
第1章　損害保険料率の基礎知識

1.1 損害保険料の仕組み

損害保険において一般に保険料と呼ばれている営業保険料、すなわち保険契約者が損害保険会社に支払う保険料は、大別して純保険料(危険保険料ともいう)と付加保険料から構成されている[1]。このうち純保険料は、将来の保険金支払いに充当する支払期待額であり、過去の損害に関する統計資料に基づき、統計上の誤差に対する安全割増相当を勘案して、将来発生する支払額を予測することにより算出される。

また付加保険料は、保険会社の運営に必要な経費、代理店へ支払う手数料および保険会社の利潤から構成されている。

これらの関係を図示すると次のようになる。



ただし、純保険料と付加保険料の区分は、絶対的なものではなく、付加保険

1　ただし、実際に契約者に課される保険料は、各種の保険料の割増引、あるいは保険成績に基づく保険料の調整等を行った後のものであって、正確な意味での営業保険料とは、この最終的な保険料のことを指す。これに対して割増引・調整等を行う前の保険料率のことを営業基本料率と呼ぶことがある

料の中には保険契約上提供を約したサービスにかかる原価も含んでおり、これらも純保険料として考えることができる。しかしながら、料率算定上の技術的理由により、便宜的に付加保険料に含められている。

1.2　料率算定のための基礎項目

さまざまな分野におけるリスクを扱う損害保険においては、リスクの引き受けに見合った保険料率を算定する際に考慮すべき事項は、非常に多岐にわたっているとともに、損害保険特有の事情や考え方も多く反映されている。

したがって、料率算定の理論や手法について述べる前に、本節では料率算定の際に前提となる基本的考え方やそこで用いられる基本的用語等について説明することとする。

1.2.1　料率測定単位

保険料率は、個々の付保物件の保険料算出に用いるものであるから、個別に当該リスクに適用しうるよう設定される。そこで、個別リスク(これを**ロスエクスポージャ**という)を構成する要素を検討する必要がある。一般に、料率算定の際にそのよりどころとする、ロスエクスポージャに対する測定基準を、料率測定基準といい、測定基準となるものの料率表示単位のことを、料率測定単位(エクスポージャユニット)という。

たとえば、火災保険においてロスエクスポージャを構成する主な要素として、所在地(場所・地域)、構造、用法、そして消防火設備等があるが、料率測定基準としては建物棟数や保険金額などがあり、それに対する料率測定単位としては建物1棟・年、すなわち保険期間1年につき建物1棟といった単位が用いられている。また、自家用自動車保険の場合には、料率測定基準として台数、料率測定単位として自動車1台・年、すなわち保険期間1年につき自動車1台(これを経過台数という)が用いられている。

主な保険種目について、料率測定基準として考えられるものを示すと、表

1-1のとおりとなるが、実際の料率算定の際にどの料率測定基準を用いているかは、各国の事情あるいは保険市場の状況などにより異なっている。

表1-1

保険種目	主な料率測定基準
自　動　車	台数、走行距離、期間、保険金額
傷　　　害	人数・期間、保険金額
火　　　災	建物棟数、期間、保険金額
海　　　上	航海数、走航距離、保険金額

一般に料率測定基準は、次の3要件を備えていることが望ましい。

① 危険度の大小を正確に反映するものであること

② 保険会社にとって危険度の測定が容易であること

③ 被保険者の恣意的な操作が困難なものであること

これら3要件をすべて厳格に満たす料率測定基準を見出すのは非常に難しいので、実際には各保険種目の料率測定基準をみれば分かるとおり、現実的な対応を図っている。

また、料率測定基準として備えることが望ましいもう一つの要件として、1970年代に経験したような高インフレーションに堪えられるものであることが挙げられる。つまり、料率測定基準がインフレーションに対する自動調整能力をある程度有していることである。たとえば生産物賠償責任保険では、料率測定基準として売上高が用いられており、これはインフレーションに連動して自動的に増加する傾向がある。その結果、保険料はインフレーションを反映するために頻繁かつ大幅な料率引き上げを行う必要なく、自動的に上昇していく仕組みになっている。

1.2.2 損害率

損害率とは、保険料に対する保険金の割合をいう。

米国においては、保険料に対する保険金と、損害の調査および立証のためまたはそれに付随する費用(これを損害調査費という)の合計額の割合を損害率と呼ぶこともあるので、損害調査費を含めないときには純損害率(pure loss ratio)と呼んで区別することがある。

損害率の算出方法としては、一定期間内に収入した保険料(リトンプレミアム)に対してその期間内に支払った保険金(ペイドロス)の比率を見るリトンベーシス(paid-to-written basis)、一定期間内に引き受けた保険契約の保険料合計に対して当該契約について支払われた保険金の比率を見るポリシー・イヤー・ベーシス(policy-year basis)、一定期間中に責任が経過したすべての保険料(アーンドプレミアム)とその期間中の発生保険金(インカードロス)の比率を見るアーンドベーシス(incurred-to-earned basis)の3種類がある。

$$\text{リトンベーシス損害率}=\frac{\text{ペイドロス(支払保険金)}}{\text{リトンプレミアム(計上保険料)}}$$

$$\text{ポリシー・イヤー・ベーシス損害率}=\frac{\text{当該契約について支払われた保険金}}{\text{当該契約の保険料合計}}$$

$$\text{アーンドベーシス損害率}=\frac{\text{インカードロス(既発生保険金)}}{\text{アーンドプレミアム(既経過保険料)}}$$

このうちポリシー・イヤー・ベーシスについては、後で詳しく述べることとし、ここでは、2種類の保険料(リトンプレミアムとアーンドプレミアム)と、2種類の保険金(ペイドロスとインカードロス)について、それぞれの用語の意味を明らかにすることによって、アーンドベーシスの損害率が料率算定上適していることを述べることにする。

(1) リトンプレミアム

ある期間内のリトンプレミアム(written premium)とは、当該期間内に保険会社の帳簿上に計上される保険料をいう。

ほとんどの場合、各契約の保険料は契約開始日直前に保険会社の帳簿上に計上されることになる。したがって、リトンプレミアムの大半は、将来に向けての損害てん補に備えるものであり、決算日時点においても収入保険料のうち保険者の責任が残存している期間に対応する保険料（これを未経過保険料という）を大量に残すことになるため、料率算定に用いる保険料として適当であるとはいえない。

(2) アーンドプレミアム

ある期間内のアーンドプレミアム（earned premium）は、当該期間内あるいはそれ以前に引き受けた契約のうち、当該期間の実際の補償に充当される保険料をいう。リトンプレミアムとアーンドプレミアムの違いを具体例により明らかにするため、2000年度に保険会社が1件の火災保険契約を引き受けたと仮定する。保険期間を1か年、契約開始日を2000年6月1日とし、その保険契約の収入保険料を12,000円とすれば、2000年度のリトンプレミアムは12,000円となる。ところが、2001年3月末時点でこの契約は10か月間だけが既経過となるので、アーンドプレミアムとしては、リトンプレミアム12,000円の12分の10である10,000円となり、残りの2,000円は次年度である2001年度になって初めて既経過となる。保険会社は、個々の契約について上述した方法に基づき、1件ずつリトンプレミアムおよびアーンドプレミアムを計算することも可能であるが、大量の契約を抱える保険会社は、アーンドプレミアム計算の簡便法として2分の1法、12分の1法、24分の1法あるいは365分の1法などを用いるのが一般的である。

これらの方式によるアーンドプレミアムの計算方法は、概略以下のとおりである。なお、簡略化のため以下においては、1年契約に限って説明を進めることにする。

① 2分の1法

契約の分布が年間均等であると仮定して、前年度契約保険料の50％および

当年度契約保険料の50%を当年度アーンドプレミアムとする方法。

② 12分の1法(末日引受基準)

すべての契約が毎月の末日に引き受られたと仮定して計算する方法(大の月、小の月を問わず、毎月均等にリスクがあると仮定して)。

n年度アーンドプレミアム ＝(n−1年4月分保険料)×1/12
＋(n−1年5月分保険料)×2/12
＋…
＋(n年3月分保険料)×12/12
＋(n年4月分保険料)×11/12
＋(n年5月分保険料)×10/12
＋…
＋(n+1年2月分保険料)×1/12
＋(n+1年3月分保険料)×0/12

③ 24分の1法

すべての契約が月間均等であると仮定して、毎月の半ばに契約が集中しているものとみなし計算する方法(大の月、小の月を問わず、毎月均等にリスクがあると仮定して)。

n年度アーンドプレミアム ＝(n−1年4月分保険料)×1/24
＋(n−1年5月分保険料)×3/24
＋…
＋(n年3月分保険料)×23/24
＋(n年4月分保険料)×23/24
＋(n年5月分保険料)×21/24
＋…
＋(n+1年3月分保険料)×1/24

④ 365分の1法

契約ごとに日割計算によってアーンドプレミアムを計算する方法。

(3) ペイドロス

ある期間内のペイドロス(paid loss)とは、クレームに対する全額あるいは一部の額として、保険会社が当該期間内に実際に支払った額をいう。クレームが、当該期間あるいはそれよりも以前の期間に発生したものなのかは問題にしておらず、支払いそのものが当該期間に行われたものをいう。

(4) インカードロス

ある期間内のインカードロス(incurred loss)とは、当該期間内に発生した事故に基づくクレームに対する、当該期間内の支払額、および将来の支払いのための準備金(これを支払備金という)の合計額をいう。つまりインカードロスは、当該期間内に発生した事故に基づくものであるかどうかがポイントであり、実際の支払いがその期間内かあるいはそれ以後になるかは問題にしていない。

ペイドロスとインカードロスとの違いを明らかにするため、ある保険会社に対して、以下に示すようなクレームが生じたとする。

表1-2 2000年度以前のクレーム

クレーム No.	事故発生日	支払備金 (2000.3.31現在)	2000年度中の支払い
1	1995. 6.15	1,000,000円	1,000,000円
2	1999.10.21	2,000,000円	2,000,000円
*	小 計	3,000,000円	3,000,000円

表1-3 2000年度における追加クレーム

クレーム No.	事故発生日	支払備金 (2001.3.31現在)	2000年度中の支払い
3	2000. 4.17	0円	1,500,000円
4	2000. 9. 3	2,500,000円	0円
*	小 計	2,500,000円	1,500,000円

表1-2に示すとおり、2000年3月31日現在において二つのクレームに関する支払備金が計上されている。したがって、2000年度中のペイドロスの合計額は、2000年度以前のクレームに対する支払額3,000,000円と、表1-3に示す2000年度中に発生した事故に基づくクレームに対する支払額1,500,000円の合計額4,500,000円となる。

2000年度のインカードロスの合計は、2,500,000＋1,500,000＝4,000,000円であるが、そのうち1,500,000円が同年度中に支払われ、2,500,000円が同年度末時点で未払いのまま支払備金として計上されている。

以上の例からも分かるとおり、料率算定にリトンベーシス損害率を使用することが適切さを欠くことが分かる。つまり、この保険会社が保険期間1年ものの契約しか引き受けていないと仮定すれば、2000年度中のリトンプレミアムは、本来は2000年度および2001年度中に発生するロスに充当されるべきものとなろう。しかしながら、2000年度中に支払われる保険金の3分の2(3,000,000円)は、1995年度と1999年度に発生した事故によるものである。その結果、支払保険金は概して収入した保険料に対応していないことになる。

保険料が急増中の保険会社にとっては、リトンプレミアムは今日の急成長を反映したものとなるが、ペイドロスは、概して従前の保険料のボリュームがまだ少ない当時のものを反映していることになる。その結果、リトンベーシス損害率は実態より低めとなり、急成長中の保険会社の収益を過大評価し、必要な料率水準を低めに見積もってしまう傾向にある。とくに、賠償責任保険や労働者災害補償責任保険などの保険種目は支払完了までに長期間を要することから、問題はさらに深刻化する。

逆に、保険料が年々下降線をたどっている保険会社の場合には、リトンベーシス損害率は実態より高くなることから、必要以上に料率水準を高めに見積もってしまうことになる。

一方、アーンドベーシス損害率は、クレームが発生した期間に充当すべき保

険料に対して、当該クレームのロスが対応している。したがって、保険会社の保険料ボリュームが増加、減少あるいは横ばいのいずれの場合であっても、収益および必要な料率水準をある程度適正に表示してくれることになる。

以上のことから、アーンドベーシス損害率の方が料率算定上、優れた方法であるといえる。

1.2.3 保険成績の観察期間

保険成績の観察期間とは、料率算定のためにロスおよび保険料等のデータを集計する際の観察期間をいう。

観察期間を何年にするかは、法律あるいは省令などで明確に定められているわけではなく、それぞれの保険種目の損害率の安定性を勘案しながら決められている。たとえば、火災保険の住宅物件や一般物件の普通保険約款で担保している風災・ひょう災・雪災損害については、台風などの自然災害により大きく影響を受けることになるので、年度間の変動を平準化するためには、できるだけ長期の観察期間が必要である。一方それ以外の場合には、クレーム頻度およびロス損傷率においてできるだけ直近のトレンドを反映するためにも、長くとらない方がよい場合もある。

1.2.4 統計データの集計方法

統計データは、科学的な保険料率算定のために必要不可欠な基礎をなすものであり、統計データをいかに迅速、正確かつ意味をなす方法で収集するかが、料率算定者にとって常に最大の関心事である。

料率算定の初期の頃は、料率算定のための統計といえば保険会社の決算数字に限られていた。決算数字は通常会計年度ベースで記録されるので、これらの数字から得られた統計を会計年度統計と呼んでいる。

(1) 会計年度統計

保険会社の会計帳簿は、主に金銭取引の流れを取り扱ったものである。したがって、料率算定に関する主な統計項目としては、①ペイドロス、②リトンプレミアム、③経費(発生主義に基づく)、④支払備金、および⑤未経過保険料などがある。前述したとおり、リトンベーシス損害率は、ある所定期間内に支払われたロスと当該期間内に計上された保険料との間の関連が薄いので、料率算定の目的のためには望ましい統計とはいえない。とくに労働者災害補償責任保険や賠償責任保険など、保険金支払いが長期に及ぶ保険種目の場合には、その傾向が著しい。つまり、支払保険金として認識されるもの大部分は支払備金であり、将来に支払いが到来する保険契約に対応するものであるからである。したがって、決算数字からアーンドプレミアムとインカードロスを何らかの方法で推定しなければならない。当年度アーンドプレミアムと当年度インカードロスは、それぞれ次式で算出される。

当年度アーンドプレミアム

＝前年度末未経過保険料＋当年度リトンプレミアム

－当年度末未経過保険料

当年度インカードロス

＝当年度末支払備金＋当年度ペイドロス－前年度末支払備金

会計年度統計を料率算定目的に用いる場合、二つの主な利点がある。

第一に、会計記録は1年を通じて常時記帳され年度末に閉じられるので、その結果は比較的早く判明することである。第二には、会計年度統計は行政当局への事業報告書の届出、商法・規定に基づく株主へのディスクローズ等の目的のために作成される会計記録の副産物として得られるので、作成費用が割安であることである。

逆に会計年度統計の欠点は、とくにインカードロスの推定において正確性に欠ける点である。もし前年度に発生したロスのために支払備金が増加したなら

ば、それは当年度のインカードロスの増加となって現れることになる。また逆に支払備金の減少は当年度のインカードロスの減少となって現れる。以上の点を簡単に例示する。

A保険会社が2000年度初めに前年度からの2件のクレームを繰り越したと仮定する(クレーム1:200万円の支払備金、クレーム2:100万円の支払備金で、当該年度に新たなクレーム報告がないものとする)。

クレーム1については、2000年度の200万円の支払いで完了し、その額は当年初めに支払備金として手当てされていたものである。また、クレーム2については、2000年度末時点でもまだ完了せず、たとえば被保険者のけがが当初想定していたものより重傷であることが判明し、支払備金が400万円に上昇したものとする。このときA保険会社の2000会計年度のインカードロスは、上述した算式に従えば、

当年度インカードロス

＝当年度末支払備金＋当年度ペイドロス－前年度末支払備金

＝400万円＋200万円－300万円

＝300万円

となる。実際には当年度には1件もロスが発生していないにもかかわらず、上記の算式に従えば、当年度インカードロスが計上されることになってしまう。もちろん、これは極端な例であり、全体としてみると個々の支払備金増加分は、他の支払備金減少分である程度相殺してくれることになる。しかしながら、会計年度統計が用いられる場合には、大幅な支払備金の変化が料率算定上の歪みをもたらす可能性がある。

アーンドプレミアムもまた、上記の推定方式を用いるといくぶん歪められることになる。たとえば、保険契約の解約、失効などにより契約者に返還した保険料(以下「返還保険料」という)や、被保険実体の危険の増加などにより契約者に請求した保険料(以下「追徴保険料」という)について、それらは実際には前

年度以前に引き受けた保険契約に関係するものであったとしても、当年度のアーンドプレミアムの計算に影響を与えることになる。遡及料率算定法[2]の場合にも、同様の問題が生じる。

労働者災害補償責任保険や賠償責任保険においては支払備金の推定が難しく、かつ保険成績が優良な場合に保険料を返還する制度(これを優良戻し制度という)を有していることから、会計年度統計は重大な問題点を抱えている。

一方、火災保険分野においては、ロスの決済が早く、支払備金も少ないのでかなり正確に支払備金を推定することができる。したがって、会計年度統計は、火災保険分野では相当正確な料率算定を行うことができると考えられる。また、火災保険分野では優良戻し制度を有していないことから、会計年度統計に基づくアーンドプレミアムは、かなり実態を反映したものとなっていると考えられる。

(2) 契約年度統計

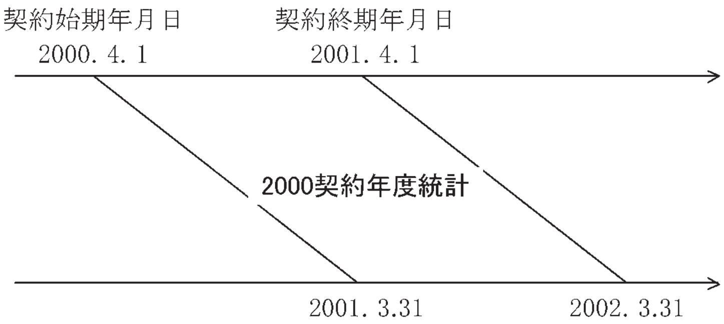
会計年度統計は、前述したように料率算定上の正確性に問題があることから、その正確性の問題を解消するのが契約年度ベースによる統計データの集計である。契約年度の統計データとは、当該年度内に保険契約が開始した全契約から成り立っている。

たとえば、2000契約年度の統計データは、2000年4月1日から2001年3月31日までの間に保険契約が開始した全契約により構成されている。したがって、すべての保険契約が保険期間1年であるとすれば、契約年度は2年間にまたがることになる。たとえば、2000契約年度の最終日である2001年3月31日に保険

2　1.3.1節(3)参照。

契約が開始するものは、2002年3月31日まで保険契約が有効であり、これは2000年4月1日から数えて2年間を経過していることになる。

図1-1



このことから、当該契約年度に入れるかどうかを契約始期年月日ではなく、契約終期年月日で確認することも行われることがある。たとえば、2000契約年度を、当該年度の最終契約が満了となる年月日である“2002年3月31日までに終結する契約年度”と呼ぶこともある。

契約年度の主な利点は、ロスがそのロスをカバーするためにあらかじめ徴した保険料に対応していることである。保険金、保険料、返還・追徴保険料、優良戻し保険料、その他契約および支払いにかかわる金銭の入出は、すべて同一保険集団単位に処理されることになるので、ロスと保険料の関係が正確に保たれることになる。したがって、料率算定を正確に行うことができる。

しかしながら、契約年度統計がすべて把握できるまでに遅れが生じるという問題がある。上述したように、個々の契約年度は2年間にまたがることになる。つまり、2年度末においても支払うべきクレームがあり、返還・追徴保険料、優良戻し保険料が残存している可能性がある。最終数値が判明する前に契約年度統計を推定してしまうことも考えられようが、このような推定を行うことは明らかに契約年度統計の正確性を歪めることになる。

(3) 会計年度－事故年度統計

会計年度統計にしても、契約年度統計にしてもそれぞれ欠点があることから、会計年度－事故年度統計は、両者の折衷として考案されたものである。つまり、この統計は契約年度統計に伴うデータ集計の遅延やコスト増を極力回避しながら、契約年度統計のもつ正確性を最大限採り入れようとするものである。会計年度－事故年度統計で用いられるアーンドプレミアムは、会計年度方式と全く同じ方法および算式に基づき計算される。したがって、この両者の違いはインカードロスの計算方法にある。

会計年度－事故年度統計におけるインカードロスは、当該会計年度に発生した保険事故に起因して生じたクレームのすべてから構成されている。クレーム額については、当該年度に実際に支払われるものがある一方で、そのうちの一部分は年度末にまだ未払いであり、準備金として計上されることになる。当該会計年度中発生した事故に基づくロスについては、会計年度－事故年度統計においても当該会計年度に含まれることになるが、支払備金の見積もり誤差は、ロスの発生した年度にさかのぼって修正されることになる。このような方法でインカードロスが計算されることにより、会計年度統計のように前年度の発生ロスに対する支払備金の見積もり誤差がインカードロス計算に影響を与えることがないので、正確性が高まることになる。しかしながら、会計年度－事故年度統計は、契約年度のようにインカードロスがそれに見合うべく保険料と必ずしも正確に対応しているわけではないので、料率算定上はやや精度が落ちる。しかしながら、会計年度－事故年度統計は比較的早く判明する集計方法である。

(4) 各種統計データ集計方法の比較

具体例を示すことにより、上述した三つの統計データ集計方法の差異を明らかにすることにする。

A保険会社が2000年4月1日に80,000千円の未経過保険料を計上し、同時に下表に示す賠償責任クレームから成る合計100,000千円の支払備金を抱えているものとする。

クレーム No.	事故発生日	支払備金 (2000.4. 1時点)
1	1995. 4. 3	30,000千円
2	1996. 6. 8	50,000千円
3	1998. 9. 3	20,000千円

また、2000年度中にA保険会社は、以下のような保険料内訳を記録した。

○ 新契約保険料　180,000千円

○ 2000年4月1日以前に保険期間が満了した契約に関する追徴保険料　20,000千円

○ 2000年4月1日以前に保険期間が満了した契約に関する優良戻し保険料　10,000千円

合　計　190,000千円

いま、A保険会社の保険契約はすべて保険期間が1年のみで、かつその年央の2000年10月1日に危険開始であるものとすると、2000年度末の未経過保険料準備金は、全新契約保険料のちょうど半分になるから90,000千円となる。追徴保険料や優良戻し保険料は、2000年4月1日以前に保険期間が満了した契約に対するものであるから、それらは既経過のものであり、年度末未経過保険料準備金の計算には影響を与えない。

上記の仮定の数字に基づき、A保険会社の会計年度統計もしくは会計年度－事故年度統計による2000年度のアーンドプレミアムを計算すると、以下のとおりである。

アーンドプレミアム ＝ 80,000＋190,000－90,000

＝180,000千円

追徴保険料や優良戻し保険料は、本来は当該年度以前の年度にそれぞれアーンドプレミアムとして算入されるべきものであるが、この算式を用いてアーンドプレミアムが計算される場合には、それらはあたかも2000年度中にアーンドとなったような取り扱われ方をしているところに、留意すべきである。

ところで、比較の意味でA保険会社の実際のアーンドプレミアムを計算してみると、保険期間がすべて1年間であるから、①年度初めの未経過保険料80,000千円と、②当年中の新契約保険料の半分である90,000千円の合計である170,000千円となる。

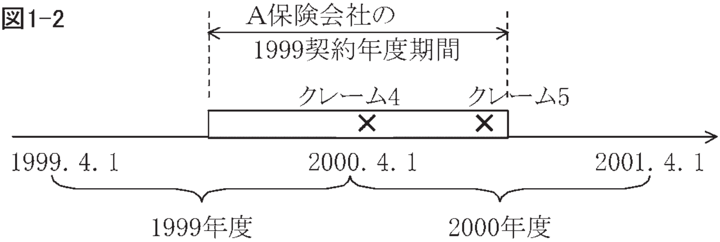
実際の保険会社のアーンドプレミアムの推定においては、このような極端な例に比べれば見積もり誤差は少ないものと考えられ、したがって、料率算定上容認できないほどの見積もり誤差が生ずる恐れはないものと考えられる。しかしながら、会計年度統計によりインカードロスを推定するとなると、時として重大な見積もり誤差が生ずることがある。

具体例を示すと、A保険会社がクレーム1について2000年7月25日に60,000千円の支払いで解決したものとし、クレーム2とクレーム3は当年度内も解決をみず、とくにクレーム3については新たな情報の入手により、支払備金が30,000千円に上昇したことが判明したものとする。さらに2000年および2001年には、以下に示すクレームが発生したものとする。

クレーム No.	事故発生日	2000年度中の支払保険金	2000年度末の支払備金
4	2000. 5.28	10,000千円	0
5	2000. 9.16	0	20,000千円
6	2000.11.28	15,000千円	0
7	2001. 1.10	0	80,000千円
8	2001. 4. 8	0	(注)
9	2001. 8.14	0	(注)

(注) クレーム8,9は、2001年度中に発生したものであり、2000年度末時点ではまだ支払備金計上があり得ない。両クレームとも2001年には解決しており、クレーム8の支払保険金が10,000千円、クレーム9の支払保険金が50,000千円であった。

図1-2



クレーム5およびクレーム7は、それぞれ上記に示す支払備金の額のとおりに2001年に支払われたものとする。A保険会社の契約がすべて10月1日に危険開始であるとすれば、クレーム4およびクレーム5は、2000年度に発生した事故に基づくものであるが、1999年度契約によりカバーされていることになる。

また、同様にクレーム8とクレーム9についても、その事故は2001年度に発生したものであるが、2000年度契約によりカバーされていることになる。

以上のことから、クレーム2、3、5および7の支払備金を合計することにより、2000年度末のA保険会社の支払備金の総額は、

50,000＋30,000＋20,000＋80,000＝180,000千円

また、A保険会社の2000年度中のペイドロスの総額は、クレーム1、4および6

の合計であるから、

60,000＋10,000＋15000＝85,000千円

となる。

会計年度統計の算式を用いて、A保険会社の2000年度インカードロスを計算すると以下のとおりである。

インカードロス

＝当年度末支払備金＋当年度ペイドロス－前年度末支払備金

＝180,000＋85,000－100,000

＝165,000千円

しかしながら、この推定においては、①クレーム1について、実際のペイドロスは支払備金よりも30,000千円高かった、②クレーム3については、10,000千円の支払備金の追加が必要となった、ことにより重大な影響を受けている。これらのクレームは、いずれも2000年度以前に発生した事故に基づくものであるのにもかかわらず、2000年度の支払備金を40,000千円も押し上げる働きをしているのである。会計年度－事故年度統計に基づく2000年度のA保険会社のインカードロスは、2000年度中に発生した事故に基づくペイドロスと支払備金を合計したものであるから、クレーム4、5、6および7のペイドロスと支払備金の合計125,000千円となる。推定アーンドプレミアムは、会計年度統計と会計年度－事故年度統計とも同じ180, 000千円となるから、会計年度統計および会計年度－事故年度統計に基づく損害率はそれぞれ以下のとおりとなり、相当な違いが生じていることがわかる。

会計年度統計ベース損害率$=\dfrac{165,000}{180,000}=0.9167$

会計年度－事故年度統計ベース損害率$=\dfrac{125,000}{180,000}=0.6944$

1.2.5 トレンドファクター

トレンドファクター(trend factor)は、新料率が適用される時期までに進展すると思われるロス事情の変化をより正確に反映するため、過去の統計を調整する手法として活用されるものである。従来より考案されてきたトレンドファクターとしては、直近年度におけるクレーム頻度や損傷率のトレンドは、予見可能な将来においてもそのまま継続するという前提に立つものであった。

たとえば、直近年度において平均クレーム額が年間平均159千円増加するとすれば、トレンドファクターとしては平均クレーム額は今後も年間平均159千円の増加をみるであろうと予測するのである。

また、クレーム頻度について過去において、1,000件につき2件の割合で増加してきた場合には、トレンドファクターとしては、クレーム頻度は将来も1,000件につき2件の割合で増加するであろうと予測する。

上記のトレンドファクターのように、時の経過とともに平均クレーム額やクレーム頻度が単調増加または減少するとき、そのトレンドは、線型トレンドファクター(linear trend factor)と呼ばれている。

このとき、将来の平均クレーム額またはクレーム頻度は次式により推定される。

$$Y_t = a + b \cdot t$$

ここで、a および b は一定で、Y は平均クレーム額またはクレーム頻度、t は将来の予測年度とする。a および b は、線型回帰分析により求められる。

また、平均クレーム額やクレーム頻度が毎年一定割合で増加するときには、指数トレンドファクター(exponential trend factor)が一般的に用いられる。

したがって、平均クレーム額に対する変化額(または1,000件に対する事故件数の増加)は、線型トレンドファクターのときは一定であったが、指数トレンドファクターのときは時間とともに逓増することとなる。

このとき、将来の平均クレーム額またはクレーム頻度は、次式により推定され

る。

$$Y_t = a \cdot b^t$$

ここで、a および b は一定で、Y と t は線型トレンドファクターのときと同じである。上式の両辺の対数をとると、

$$\log Y_t = \log a + \log b \cdot t$$

となり、a および b は線型回帰分析により推定できることになる。

線型または指数のどちらのトレンド曲線を選択すべきかは実際のデータのトレンドによって決定される。また、別のトレンド曲線を用いることも考えられる。

保険種目によっては、平均クレーム額ではなく、物価指数をトレンドファクターとして用いる方がよい場合もある。このように、物価指数を用いるにしろ平均クレーム額を用いるにしても、過去のトレンドに大きな変化が生じた場合には、発見が相当遅れ、その手当てが後追いになってしまう。トレンド変化の発見の遅れをできるだけ短縮し、クレーム頻度や平均クレーム額の将来変化をより適正に予測するためには、単純なトレンド曲線ではなく、計量経済モデルの活用の可能性についても研究する必要がある。

1.2.6 ロス・ディベロプメント・ファクター

料率算定に用いられるロスには、当該年度に発生し、報告されているがまだ支払いが行われていないロスに対する、いわゆる支払備金も含まれるべきである。また、発生はしているがまだ報告されていないロス(IBNR)も存在している。既報告未払いロスに対する準備金の計算は、クレーム決済のために実際に支払われる保険金の推定に基づき行われ、こうした準備金の推定は、見積もり誤差を伴うものである。そして、準備金が過大であったか不十分であったかによって、料率が高すぎるものになったり、あるいは低すぎるものになったりする。

ロス・ディベロプメント・ファクター（loss development factor）[3]は、既報告未払いロスの準備金の見積もり誤差を補正し、さらにIBNR備金を見積もるために用いられるものである。ロス・ディベロプメント・ファクターは、過去のロスの実際の出現傾向の分析を行い、将来においても同様の出現傾向が存続するという仮定の下で算出されている。簡単な例を示す。

表1-4　ロス出現傾向(2001年度末現在)

契約年度	経　過　年　数　(単位:千円)			
	1年以内	2年以内	3年以内	4年以内
1998	16,134	16,618	16,784	16,449
1999	16,413	17,070	17,241	
2000	15,879	16,197		

表1-4で、ある保険種目におけるロス統計では、4か年経過以内にすべてのロスが判明することになっているものとする。つまり、たとえば1998契約年度の発生ロスの把握において、1か年経過時点である1999年3月31日末で16,134千円と推定されたが、2か年経過時点の2000年3月31日末では16,618千円と再推定され、さらに3か年経過時点である2001年3月31日末では16,784千円、そして4か年経過時点の2002年3月31日末での最終確定額が16,449千円となったことを示している。

表1-5は、表1-4の結果に基づき計算されたロス出現修正係数である。たとえば、1998契約年度の発生ロスについて2か年経過時点で1年前のロス推定額に比べて3%増加したことを意味している。さらに、3か年経過時点では前年度のロス推定額に比べて1%増加し、逆に3か年経過時点のロス推定額より最終

3　第5章参照。

確定ロス額は2%減少したことを示している。

表1-5 ロス出現修正係数

契約年度	経　過　年　数		
	1か年→2か年	2か年→3か年	3か年→4か年
1998	1.03	1.01	0.98
1999	1.04	1.01	
2000	1.02		
平均	1.03	1.01	0.98

実際のロス・ディベロプメント・ファクターとして用いられるロス出現修正係数としては、係数年度を通算した平均値が用いられている。すなわち、料率算定の際、1か年経過時点で把握されているロスに対しては、これにロス出現係数1.02＝1.03×1.01×0.98を乗じたものが、インカードロスとして用いられている。同様に、2か年経過時点で把握されているロスに対しては、これにロス出現修正係数0.99＝1.01×0.98を乗じて料率算定上のインカードロスが求められる。また、3か年経過時点で把握されているロスに対しては、係数0.98を乗じてインカードロスが推定される。

ロス・ディベロプメント・ファクターとトレンドファクターは、要素的に重複しているのではないかという指摘がされることがある。しかしながら、この指摘は正しくない。というのは、ロス・ディベロプメント・ファクターは、単に既報告のインカードロスにIBNR備金[4]を加え、さらに既報告未払保険金に対する支払備金の見積もり誤差を是正するために用いられるものである。一方、トレンドファクターは、過去のロスが発生した当時のインフレーションおよびその他の原因による変化を反映するため、一件当りの平均クレーム額とクレーム頻度を修正することによ

4 第5章参照。

り、過去のロスを用いて将来のロスを推定するものであるからである。

　前述したとおり、ロス・ディベロプメント・ファクターは、過去の支払備金の推定において犯した見積もり誤りを、現在の支払備金推定の際にも同じ見積もり誤りを繰り返すという前提に立っている。表1-4および表1-5に示したとおり、見積もり誤差が比較的小さいときには、こうした前提を入れることはきわめて有益である。しかしながら、その見積もり誤差が大きい場合には、こうした前提をおくことにはやや問題がある。

1.3　保険料率算定法

1.3.1　保険料率の分類

損害保険において用いられる料率を、保険会社が引き受けるリスクに対する考え方や料率の適用方法に従って分類すると、「クラス料率またはマニュアル料率」、「個別料率」および「メリット料率」に分けることができる。

(1)　クラス料率またはマニュアル料率

クラス料率とは、同一の危険集団に対して広く適用される料率のことをいう[5]。個々の料率区分は、そのクレームの発生頻度や損害の程度(たとえば損害額)に固有の特色をもっていることが必要である。そして、そのような特色は明確かつ客観的に判明しており、契約者の恣意性により変えたり隠したりできないものであることが要請される。

たとえば、住宅火災保険では、建物の構造(コンクリート造、鉄骨造、木造等)や地区に基づき分類されている。また自動車保険では、自動車の車種・用途、運転者の年齢および運転者の過去の事故歴などにより、区分されている。

一方、**マニュアル料率**とは、マニュアル書あるいは料率書に料率が単に羅列されているものをいう。したがって、マニュアル料率は実質的にはクラス料率のことである。このクラス料率は、企業保険種目においても使われているが、家計保険分野の保険種目において広く使われている。これに対して後述する個別料率やメリット料率は、企業保険種目において使われるものである。

5　クラス料率の意義や算定方法については、第4章を参照。

(2) 個別料率

クラス料率を適用するためには、多数の同質危険集団が存在しなければならない。しかしながら、企業保険分野においては、このような条件が得られないのが一般である。たとえば、構造が同じで、全く同じ積荷で、全く同じ航路をたどる船舶は、ほとんどあり得ない。また、大規模な工場やビルは用途に合った独自の設計・施工が行われるため、構造や防火設備の面で同様の建物が多数存在するとは考えられない。多数の同質リスク集団が存在しないときの次善の方法は、個々の保険目的に対して個別料率を適用することである。

あるリスク集団の中には、クレームの発生頻度や損傷率に影響を及ぼす要因が判明しており、相当の正確性をもって結果が予測できるものもある。このような場合には、個々の危険に対して料率を算定するために、料率算定スケジュール(rating schedule)といったものを用意することも可能である。さらに、料率算定スケジュールを適用するに際して、海上・貨物保険によく見られるようにロスが余りにもばらつくような危険に対しては、**判断料率**(judgment rate)が用いられることになる。判断料率は、限られたデータを参考とするものの、主にアンダーライターの判断に基づき料率が決められる。

(3) メリット料率

メリット料率とは、当初クラス料率からスタートし、その後個別のロス(あるいは経費)実績に基づき、クラス料率の引き下げ・引き上げを行い、料率調整を行うものであるため、ある意味ではクラス料率と個別料率の中間に位置するものである。メリット料率の算定法としては、**スケジュール料率**算定法(schedule rating)、**経験料率**算定法(experience rating)、および**遡及料率**算定法(retrospective rating)の3種類がある。

スケジュール料率算定法では、たとえば火災保険工場物件において、当該事業所の防災管理等の条件が同一の料率区分に属する他の平均的事業所

のそれよりも優れているとみられるとき、アンダーライターが料率割引を行うものである。一方、逆にそれらの条件が平均的事業所のそれよりも劣っている場合には、割増料率が課せられる。

経験料率算定法[6]は、スケジュール料率算定法よりも明確な基準をもっており、割増・割引は通常所定の公式に基づき計算される。経験料率算定法の下では、契約者に課すべき料率は、過去の所定期間のロス成績に基づき決定される。スケジュール料率算定法と同様に、経験料率算定法も初年度はマニュアル料率からスタートし、経験料率の公式に基づき料率の引き上げ、引き下げ調整が行われる。

遡及料率算定法は、割増・割引が所定の公式により計算され、その割合は実績ロスにより決められるという点で、経験料率算定法と類似している。経験料率算定法では、過去の実績ロスに基づいてその後の年度における料率調整が行われるのに対し、遡及料率算定法は、当該期間におけるロス実績に基づき、その期間内の最終保険料調整が行われるという点で異なっている。

1.3.2 料率算定の方法

損害保険料率を算定するための基本的な方法は、大別すると、判断法(judgment method)、損害率法(loss ratio method)、および純保険料法(pure premium method)の3種類がある。

これらの算定法は、あたかも全く別個のような取り扱われ方をすることが多いが、これらの手法の料率算定過程をたどってみると、非常に似かよっていることが分かる。後述するように、判断法がすべての保険種目を通じて料率算定の基本をなしている。

---

6 詳細については、第3章参照。

(1) 判断法

料率算定法の中で最も歴史が古く、かつ説明が簡単なのが判断法である。判断法によって料率を算定する場合、保険会社の損害率は料率の十分性を見るための大まかな目安として用いられることはあるものの、おおむね統計データに基づかずに行われる。つまり、判断料率はその名が示すとおり、主に料率算定者の判断に基づき算定される方法である。

現在、判断法はほとんどの場合、信頼性が確保できるほど十分な同質の危険集団が形成されていない保険種目に限定して用いられている。主な例としては、海上・貨物保険などの分野に見られる。

(2) 損害率法

損害率法は、料率算定法の中で判断法に次いで古いものである。しかし、料率の算定が、それ以前は専ら料率算定者の判断に基づいていたものから統計データに基づき行われるようになったという意味で、損害率法は科学的な料率算定法としては最初のものである。

損害率法の基本的考え方は、料率改定が求められるとき、料率の引き下げあるいは引き上げおよびその改定幅を決定するために、予定損害率[7]と実績損

---

[7] 予定損害率は、保険料のうち保険金の支払いに見込まれている割合をいう。

損害率法による場合には、料率算定時あるいは料率改定後の料率水準を決定する際に用いた採用損害率がそのまま予定損害率になるのが通常である。

予定損害率は、保険会社の損害率成績や料率の妥当性を評価する際の一つの目安となるものである。実績損害率が予定損害率を上回る場合には、保険会社は料率に見込んでいた当初の利潤を確保できていないことになり、料率引き上げが必要となる。逆に、実績損害率が予定損害率を下回る場合には、保険会社はあらかじめ料率に見込んでいた以上の利潤を享受していることになるので、料率引き下げが求められる。

害率を対比することである。もちろん、実績損害率を算出するに際しては、分子にくるロスはロス・ディベロップメント・ファクターおよびトレンドファクターによって修正が加えられ、一方分母の保険料についても現行料率水準への調整が行われることになる[8]。

損害率法で用いられている公式は、

$$料率改定率 = \frac{A' - E}{E} = \frac{\{AZ + E(1-Z)\} - E}{E} = \frac{A - E}{E} \times Z$$

ここで、A は実績損害率、A' は実績修正損害率、E は予定損害率、Z は信頼度[9]である。たとえば、実績損害率が48%、予定損害率が60%、クレディビリティ係数が80%のとき、料率改定率は、

$$料率改定率 = \frac{0.48 - 0.60}{0.60} \times 0.80 = -0.16$$

ここで負の値は料率引き下げを意味し、新料率は旧料率の84%の値となる。

以上の説明からも分かるとおり、損害率法は新料率を算出する方法というよりもむしろ、従前の旧料率を調整する方法というのが正しいと考えられる。次に述べる純保険料法と対比すれば、その違いがいっそう明らかになる。

(3) 純保険料法

損害率法が、従来の保険料率を料率構成割合の変化に応じて調整する方法であるのに対し、純保険料法は、従来からの料率のあるなしにかかわらず、純保険料率を新たに算出する方法である。この純保険料法は、クレームの発

8　ここでは、アーンド・ベーシス損害率の場合を例として取り上げている。

9　信頼度(クレディビリティ係数ともいう)は、料率算定者が得られる統計データを用いて将来予測をする際に、その統計データにどれだけの信頼をおくかという尺度を示す値である。詳しい内容については、第3章で述べる。

生頻度(frequency)と平均損傷率(damageability)との乗算によって純保険料を決定するところから、それぞれの頭文字をとってFD方式とも呼ばれている。信頼度を考慮せずに最も簡単な形で営業保険料を示すと、①純保険料の算出、②経費ローディング、の2段階からなっている。

純保険料は、インカードロスを契約件数[10]で除して求められる。もちろん、この場合のインカードロスは、ロス・ディベロップメント・ファクターおよびトレンドファクターにより修正されたものが用いられる。

たとえば、ある保険種目の観察期間中のインカードロス(ロスディベロップメントおよびトレンド修正後)が20億円、契約件数が100万件、保険金支払件数が2,000件であったとすると、純保険料は、

$$\begin{aligned}\text{純保険料} &= F \times D = \text{クレーム頻度} \times \text{平均クレーム額} \\ &= \frac{\text{保険金支払件数}}{\text{契約件数}} \times \frac{\text{総支払保険金}}{\text{保険金支払件数}} \\ &= \frac{2\text{、}000\text{件}}{1\text{、}000\text{、}000\text{件}} \times \frac{2\text{、}000\text{、}000\text{千円}}{2\text{、}000\text{件}} \\ &= 2‰ \times 1{,}000\text{千円} = 2{,}000\text{円}\end{aligned}$$

ここで、もし信頼度がこの計算式に導入されることになると、上式はやや複雑な式になり、それは下式によって示される。

$$\text{純保険料} = \text{実績純保険料} \times Z + \text{予定純保険料} \times (1 - Z) \tag{1.1}$$

ここで、実績純保険料とは観察期間中の統計データから求められる純保険料、予定純保険料とは改定前料率における純保険料であり、改定前営業保険料に予定損害率を乗じて求めることができる。また、Zは信頼度である。

---

[10] 同一の物件について複数のポリシーを発行しているケースもあるので、厳密な意味では契約件数は正しくない。本来の意味からすれば、エクスポージャユニット数が正しい。

少し観点を変えてみると、上記の式は総体としての純保険料水準を抑えとして、個々の料率区分のデータ量にばらつきがあるので、そのままの実績値は採用しないものの、ある程度個々の実績を反映した形で料率算定を行いたい場合にも適用可能である。この場合の個々の料率区分ごとの純保険料 r_i' は、

$$r_i' = r_i \times Z_i + r \times (1 - Z_i) \tag{1.2}$$

ここで、

r_i ： 料率区分 i の実績純保険料

r ： 総体（加重平均値）の純保険料

Z_i ： 料率区分 i の信頼度

と表すことができる。

ところで、(1.1)式は次式のように変形して表すことができる。

純保険料＝予定純保険料

＋（実績純保険料－予定純保険料）× Z (1.3)

上式を見てもわかるとおり、これは純保険料の変化が抑えられる働きがある。つまり、現行の純保険料からの改定額は、（実績純保険料－予定純保険料）× Z で示されており、とくにこの信頼度 Z によって改定額を抑制する機能を有している。たとえば、実績純保険料が2,000円で、予定純保険料が1,600円であるとすれば、信頼度適用前は、改定額が400円(2,000円－1,600円)である。しかしながら、信頼度が0.6であるとすれば、改定額は、400円の60％に減少し240円となる。もし十分なデータ量から全信頼度（フルクレディビリティともいう）であるときには予定純保険料は無視され、求める純保険料は実績純保険料そのものになる。逆に信頼度がゼロであるときには、実績純保険料が一切無視され、求める純保険料は予定純保険料と一致する。

次に、同じ統計データに基づき料率算定が行われる限りにおいては、純保険料法も損害率法も結果が一致することを示す。

たとえば、ある保険種目について次の値が判明しているとする。

L：　ロスディベロップメントおよびトレンド修正後のインカードロス

N：　契約件数

P：　現行料率水準におけるアーンドプレミアム

p：　1件あたりの現行保険料

$\hat{\lambda}$：　予定損害率

このとき、実績純保険料、予定純保険料はそれぞれ、

$$実績純保険料＝インカードロス÷契約件数＝\frac{L}{N}$$

$$予定純保険料＝p\times\hat{\lambda}=\frac{P}{N}\times\hat{\lambda}$$

となる。もし十分なデータ量のため全信頼度である場合には、求める純保険料は実績純保険料そのものになるので、新保険料は、

$$実績純保険料÷予定損害率＝\frac{L/N}{\hat{\lambda}}=\frac{L}{N\times\hat{\lambda}} \tag{1.4}$$

となる。

上記の純保険料法で算定された新保険料を、今度は損害率法を使って求めてみる。

実績損害率は、

$$インカードロス÷アーンドプレミアム＝\frac{L}{P}$$

となり、料率改定率は、

$$\begin{aligned}料率改定率 &=\frac{実績損害率－予定損害率}{予定損害率}\times信頼度\\ &=\frac{L/P-\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}}\times 1=\frac{L}{P\times\hat{\lambda}}-1\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}新保険料 &=現行保険料\times(1＋料率改定率)\\ &=p\times\left(1+\frac{L}{P\times\hat{\lambda}}-1\right)=\frac{P}{N}\times\frac{L}{P\times\hat{\lambda}}\end{aligned}$$

$$= \frac{L}{N \times \hat{\lambda}} \tag{1.5}$$

となる。これは、純保険料法で算定された新保険料(1.4)と一致している。

1.3.3 営業保険料の算出方法

1.1節で述べたように、保険契約者に支払いを求める営業保険料は、純保険料に付加保険料を加えたものとなっている。わが国において実務上一般的に用いられている付加保険料の算出方法には、前述の純保険料の算出方法と同様に、損害率法と純保険料法がある。ただし、付加保険料については、その種類や営業保険料への織り込み方も含めていろいろな考え方が採られており、国によりあるいは保険の種類により、それぞれ実状に合わせた対応が行われていることに留意する必要がある。

(1) 損害率法による算出

損害率法は、1.3.2節で説明したとおり、既存の保険について料率改定率αを求め、現行保険料に$1+\alpha$を乗じることによって新保険料を求めるという方式である。ここでは、1.3.2節で前提としていた収支相等[11]とは異なる次の式で表される収支相等を前提とする場合について説明する。

$$P = r + e + (\theta + \delta)P$$

ここで、Pは営業保険料、rは予定純保険料、eは予定社費、θは予定代理店手数料率（対営業保険料）、そしてδを利潤率（対営業保険料）とする。

さて、この式は次のように変形することができる。

---

[11] 保険事業において、危険集団の構成員が支払う保険料の総額は、支払われる保険金の総額に等しくなければならないという大原則であり、保険団体自足の原理とも呼ばれる。

$$P=\frac{r+e}{1-(\theta+\delta)}$$

そして、さらに両辺をPで除すと次のようになる。

$$1=\frac{\lambda+\varepsilon}{1-(\theta+\delta)}$$

ここで、λを予定損害率、εを予定社費率を意味している。

さて、実績損害率をλ'、実績社費率をε'、実績代理店手数料率をθ'そして利潤率をδとしたときに、新営業保険料P'は、次の式で表される。

$$P'=\frac{\lambda'+\varepsilon'}{1-(\theta'+\delta)}P=(1+\alpha)P$$

ここで、$\alpha=\dfrac{\lambda'+\varepsilon'}{1-(\theta'+\delta)}-1$は、料率改定率である。この式を変形すると、

$$P'=\lambda'P+\varepsilon'P+\theta'P'+\delta P'$$

となる。したがって、損害率法による付加保険料は、

$$\varepsilon'P+\theta'P'+\delta P'$$

であり、新営業保険料における付加率（付加保険料割合）は、

$$\frac{\varepsilon'P+\theta'P'+\delta P'}{P'}=\frac{\varepsilon'}{1+\alpha}+\theta'+\delta$$

となることがわかる。新営業保険料中の予定社費率については、実績の損害率および社費率によって調整されるのに対して、予定代理店手数料率および利潤率については、それぞれ実績および従前の率がそのまま適用されていることになる。

1.3.2節で述べたように損害率法は、料率算定方法としては、新料率を算出する方法というよりもむしろ、従前の料率を調整する方法ということができる。

(2) 純保険料法による算出

純保険料算出における純保険料法は、クレディビリティ係数を1とすれば、現行の保険料率にかかわらず、実績純保険料（すなわち、[クレーム頻度]×[平

均クレーム額])をもとに新保険料を決定する方式であった。付加保険料の場合もこれと同じで、社費部分については現行料率における予定社費率等を用いずに、社費の実額をもとにして、そのつど新保険料率に織り込むべき実績社費を算出する方法である。なお、新規の保険商品については、あらかじめ社費が判明していない場合が多いため、既存の保険における実績社費を参考にして決められる場合もある。

損害率法と同じ収支相等を前提とする場合、実績純保険料をr'、実績社費をe'、実績代理店手数料率をθ'、利潤率をδとしたときに、新営業保険料P'は、

$$P' = \frac{r' + e'}{1 - (\theta' + \delta)}$$

で表される。右辺を変形すると、

$$P' = r' + e' + (r' + e') \cdot \frac{\theta' + \delta}{1 - (\theta' + \delta)}$$

となる。したがって、純保険料法による付加保険料は、

$$e' + (r' + e') \cdot \frac{\theta' + \delta}{1 - (\theta' + \delta)}$$

であり、新営業保険料中の付加率は、

$$\frac{e'}{P'} + \theta' + \delta$$

となることがわかる。

1.3.4 契約条件による営業保険料の調整

(1) 分割払契約

保険料の払込みは、通常保険期間が1年の場合、契約時に一括して払い込む年払いが基本であるが、年払いによる保険料の一時的負担を軽減し、保険の普及と契約者の利便を図るため月ごとなどに分割して払い込む方法がある。

この払込方法を分割払いといい、分割された1回ごとの保険料を分割払保険料という。分割払保険料は通常一括払（年払）保険料に一定の割増が付加されたものを分割回数で除することによって得られる。

一括払（年払）保険料に一定の割増が付加されるのは次の理由による。

① 分割払いにすることによって一括払い（年払い）に比較して保険料払込みが遅れることによる利息の損失分

② 集金回数（払込回数）が増加することによる手数の増加分

③ 集金回数（払込回数）が増加することによる会社事務費分

(2) 長期契約

a. 長期契約保険料

前述のように、保険料率は、通常保険期間1年の保険契約に対して適用するものとして算出される。ここでとりあげる長期契約は、保険期間が1年超の長期で、かつ保険料を契約時に一括して前受け収受するものをいう。

このような保険契約にあっては、

① 1年ごとに契約を更改する必要がないので、契約締結時（新契約）に要するコストを節減できる

② 数年分の保険料が一括前払いされるので、保険会社は運用利息による利益を受けることができる

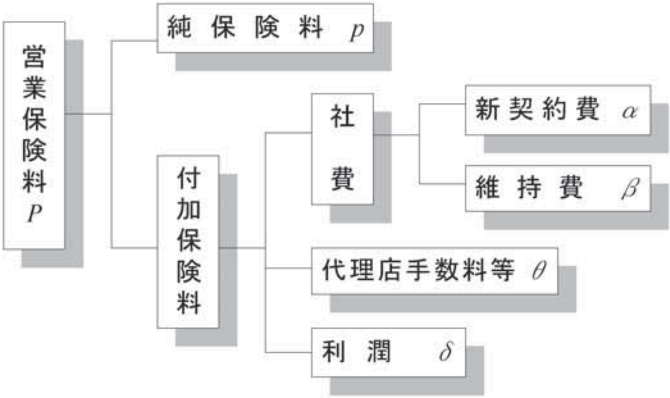
ことから、

（長期契約の保険料率）＝（1年契約の保険料率）×（保険期間年数）

とするのではなく、保険料率を割り引く余地が生れる。

b. 長期契約保険料算出の考え方

既述のように、1年契約の営業保険料の構成は、以下のとおりである。



上記において、社費を新契約費と維持費に分けたが、これはおおむね次の考え方によっている。

① 新契約費は、新契約獲得に直接要する費用であり、申込書、領収証、募集文書、保険証券の作成、コンピュータ処理、送付や代理店指導などに要する費用である。

② 維持費は、新契約費以外の費用をいい、異動処理、損害査定に代表され、契約締結後その契約を満期まで維持管理していくのに要する費用である。

上記によって、前記 a.の①について見てみると、初年度のみの支出にとどまる社費は、翌年度以降付加しないこととなる。これは新契約費に相当するが、一般的な代理店指導に要する経費などは翌年度以降も必要となるほか、契約を長期間保全するために新たに必要となる経費があることなどにより、1年契約におけるα, βを必要に応じ修正する。修正後の新契約費を新たにα、修正後の維持費を初年度、翌年度以降分を平準化したものをもって新たにβと定義することとする。

以上の考え方に基づき、保険期間をn年としたとき、n年分の保険料は1年契約保険料の何倍とすればよいかを、各年度の支出の契約時現価を合算することにより求めることとなる。

c. 長期契約保険料の算出

$P, p, \alpha, \beta, \theta, \delta$ を、それぞれ営業保険料、純保険料率、新契約費率、維持費率、代理店手数料等の率、そして利潤率とし、現価率 v を $v=\dfrac{1}{1+i}$（i は利率）とする。このうち α は、契約初年度のみ支出されるので、次年度以降毎年支出されるのは、β+p となる。長期契約の営業保険料を P' とし、$K=\dfrac{P'}{P}$ とすると、収支相等の原則により、

$$P'=P\alpha+P(\beta+p)\ddot{a}_{\overline{n|}}+P'(\theta+\delta)$$

ただし、$\ddot{a}_{\overline{n|}}=\dfrac{1-v^n}{1-v}$ とする。

これにより、

$$K=\frac{\alpha+(\beta+p)\ddot{a}_{\overline{n|}}}{1-(\theta+\delta)}$$

が得られる。K は、長期係数と呼ばれる。

d. 未経過料率係数

長期契約の期間中途の異動による未経過期間に対する保険料の返還あるいは請求は、未経過料率係数による。未経過料率係数は、未経過保険料の契約時保険料に対する割合をもって示される。

経過期間 t における未経過料率係数を U_t とすれば

$$未経過保険料=P\times\frac{(\beta+p)\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{1-(\theta+\delta)}$$

$$契約時保険料=P\times\frac{\alpha+(\beta+p)\ddot{a}_{\overline{n|}}}{1-(\theta+\delta)}$$

であるから、

$$U_t=\frac{(\beta+p)\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\alpha+(\beta+p)\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

となる。

(3) 短期契約

短期契約とは、保険期間が1年に満たない保険契約をいう。保険料は、危険度測定の標準となる一定の期間（これを保険料期間という）を単位として、その間における平均的な危険率をもとに算定されている。すなわち、この期間内の保険料は一体不可分なものとして取り扱われ、期間の中途で契約が消滅しても、保険者はその単位期間に対する保険料の全部について請求する権利を有するものとされている（保険料不可分の原則）。通常、この保険料期間は1年を基本としているので、保険期間が1年に満たない契約を短期契約というのである。

短期契約においては、保険料は日割計算によらず、以下の観点から割増しを行うのが一般的である。この割増料率は年料率に対する割合で示され、短期料率と呼ばれる。

① 保険期間が保険料期間に満たない契約については、保険技術上、安全度を見込む必要がある（たとえば、火災危険は冬期に高い）。

② 道徳的な危険など、逆選択に対する安全度を見込む必要がある。

③ 固定費分は期間に按分することができないので、割増が必要である。

この短期料率は保険期間が1年に満たない保険契約について適用されるばかりでなく、契約者からの申し出などによる解約の場合にも適用される。解約の場合には、保険会社が領収した保険料から解約までの既経過期間について領収すべき保険料を控除し、その残額を解約返れい金として返還する。この場合において、中途解約により当該契約は結果として短期契約になるのであるから、既収の1年契約保険料から既経過期間について短期料率により算出した保険料を控除することとなる。

(4) 免責金額

多数の小口の支払いを排除して保険の管理コストを引き下げたり、損害防止

に関する意識を高めて損害率を安定させたりすることを目的として、損害の一部を被保険者に自己負担させる引き受けがよく行われる。この自己負担の方法には、損害額に対してあらかじめ約定した一定割合に相当する額を保険金として支払う縮小てん補方式や、あらかじめ免責金額を設定しておき、その金額以下の小損害についてはこれを免責とする方式などがある。さらに、この免責金額を設定する方式の中にも、損害のうち免責金額を超える部分についてのみ支払いの対象とするエクセス方式や、免責金額を超えた場合に損害額全部を支払うフランチャイズ方式などがある。とくにエクセスについては、賠償責任保険において一般的に行わていることもあり、以下ではエクセスを中心にして説明することにする。

損害額Xの分布関数を$F(x)$、確率密度関数を$f(x)$、また免責金額をaとする。このとき、次式が成立する[12]。

① 被保険者の自己負担額

$$\min(X, a)$$

② 保険会社の支払対象となる割合

$$\begin{aligned} P(X > a) &= 1 - P(X \leq a) \\ &= 1 - F(a) \end{aligned}$$

③ 保険会社の支払額

$$X - \min(X, a)$$

④ 被保険者の平均自己負担額

$$E(\min(X, a)) = \int_0^\infty \min(x, a) f(x) dx$$

---

[12] ここでの考え方は、被保険者を元受保険会社に、免責金額を保有額に、保険会社を再保険会社に置き換えることによって、超過損害額再保険(第9章参照)にそのまま応用することができる。

$$= \int_0^a xf(x)dx + \int_a^\infty af(x)dx$$

$$= \int_0^a xf(x)dx + a(1-F(a))$$

⑤ 保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する保険会社の平均支払額

$$E(X-\min(X,a)) = \int_0^\infty (x-\min(x,a))f(x)dx$$

$$= \int_a^\infty (x-a)f(x)dx$$

$$= \int_a^\infty xf(x)dx - a(1-F(a))$$

⑥ 保険会社の平均支払額

$$E(X-\min(X,a) \mid X>a)$$

$$= \frac{1}{1-F(a)}\int_a^\infty (x-\min(x,a))f(x)dx$$

$$= \frac{1}{1-F(a)}\left\{\int_a^\infty x f(x)dx - a(1-F(a))\right\}$$

$$= \frac{1}{1-F(a)}\int_a^\infty x f(x)dx - a$$

なお、フランチャイズの場合の保険会社の平均支払額は、

$$E(X \mid X>a) = \frac{1}{1-F(a)}\int_a^\infty x f(x)dx$$

となり、また、縮小割合bの縮小てん補の場合の平均支払額は、

$$E(bX) = bE(X) = b\int_0^\infty x f(x)dx$$

となる。また、これらの組み合わせについても同様に計算することができる。

次に、免責金額(エクセス)設定による純保険料の割引率を求める。免責金額aの設定によりクレームの発生頻度は影響を受けないものと仮定すると、純保険料pは、$(1-d)p$になる。ただし、dは、

$$d = 1 - \frac{E(X - \min(X, a))}{E(X)} = \frac{E(\min(X, a))}{E(X)}$$

である。さて、この保険の付加保険料が、定額でα、純保険料に対してβ倍、および営業保険料に対してγ倍と設定されているとすると、営業保険料は免責金額設定によって、

$$\frac{\alpha + (1+\beta)p}{1-\gamma}$$

から、

$$\frac{\alpha + (1+\beta)p(1-d)}{1-\gamma}$$

に変わる。したがって、営業保険料の割引率Dは、次のように表される。

$$D = 1 - \frac{\dfrac{\alpha + (1+\beta)p(1-d)}{1-\gamma}}{\dfrac{\alpha + (1+\beta)p}{1-\gamma}}$$

$$= \frac{(1+\beta)p}{\alpha + (1+\beta)p} d$$

なお、付加保険料の体系がこれと異なる場合にも、同様の考え方で計算することができる。

例1-1 損害額Xの分布関数が近似的に指数関数

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{x}{100}\right) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で表されるとき、全損害に対する保険会社の平均支払額を、免責金額なし、免責金額10、および100の場合で求める。

確率密度関数$f(x)$は、

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}\exp\left(-\dfrac{x}{100}\right) & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

であるから、

$$E(X-\min(X,a))=\int_a^\infty (x-a)\frac{1}{100}\exp\left(-\frac{x}{100}\right)dx$$
$$=100\exp\left(-\frac{a}{100}\right)$$

となる。これより、

免責金額なしの場合　　100

免責金額10の場合　　$100e^{-\frac{10}{100}}\fallingdotseq 90.5$　(9.5%引)

免責金額100の場合　　$100e^{-\frac{100}{100}}\fallingdotseq 36.8$　(63.2%引)

となる。すなわち、免責金額なしの場合の平均損害額を免責金額として設定したとしても、純保険料は、63.2%引にしかならないことが分かる。

1.4 練習問題

1．　A保険会社で扱っているある保険種目において、その予定料率構成割合および直近年度の実績値は、それぞれ(表1)、(表2)のとおりであった。この実績に基づいて、損害率法により料率改定率を求めよ。ただし、クレディビリティ係数として0.431を用い、また社費率および代理店手数料率については、直近年度の実績値をもとに算出することとする。

(表1)現行の予定料率構成割合

料率構成	割　合
損　害　率	60%
社　費　率	20%
代理店手数料率	15%
利　潤　率	5%
合　計	100%

(表2)直近年度の実績値

項　目	実績値
契約件数	17,803件
元受正味保険料	112,400万円
アーンド保険料	100,600万円
支払保険金	52,800万円
インカード保険金	53,300万円
社　費	20,500万円
代理店手数料	16,700万円

2．　純保険料を算出するうえでの平均損害額を求める際に、「ある年度に支払われた額の事故1件あたりの平均値」を基準とする場合、適正な純保険料とするためには、どれくらいの割り増しがさらに必要となるか。次の条件をもとに計算せよ。

- 契約の始期　　　　すべて4月1日
- 契約の増加率　　　年12%
- 事故頻度の増加率　年10%
- 保険金支払パターン　事故発生年度内50%、翌年度内50%。ただし、

単価(インフレーション分を除く)は、当年度:翌年度＝1:3

・ インフレーション率　　年10%

３． ある保険において、クレーム額 X (万円)が平均47.8万円の指数分布($f(x)=\dfrac{1}{47.8}e^{-\frac{x}{47.8}}\quad x\geq 0$)に従うことがわかっているものとする。このとき、この保険に免責金額10万円を導入した場合の営業保険料の割引率を求めよ。ただし、この保険の付加保険料は、営業保険料の15%および純保険料の20%の割合で設定されているものとする。

[参考文献]

1. 東京海上火災保険株式会社編集『新損害保険実務講座』(有斐閣)
2. 嶋倉征雄著『損害保険料率算定の基礎知識』(損害保険企画)
3. Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, “ACTUARIAL MATHEMATICS”, The Society of Actuaries

練習問題解答

1．　クレディビリティ係数を$z=0.431$とすると、

$$\text{損害率}=\frac{\text{インカードロス}}{\text{アーンド保険料}}\times z+\text{予定損害率}\times(1-z)$$

$$=\frac{53{,}300}{100{,}600}\times 0.431+0.6\times(1-0.431)=0.5698$$

$$\text{社費率}=\frac{\text{社費}}{\text{元受正味保険料}}=\frac{20{,}500}{112{,}400}=0.1824$$

$$\text{代理店手数料率}=\frac{\text{代理店手数料}}{\text{元受正味保険料}}=\frac{16{,}700}{112{,}400}=0.1486$$

となる。したがって、求める料率改定率は、次のとおりとなる。

$$\frac{0.5698+0.1824}{1-(0.1486+0.05)}-1=-0.0614\ \Rightarrow\ \underline{\underline{-0.061}}$$

2．　適正な保険料とするためには、「当年度契約に係る平均支払額」を平均損害額とすべきであるから、これと「当年度の平均支払額」との比を取って割増率を求める。

F.Y. ＼ P.Y.	前年度	当年度	次年度	合　計	平均損害額
前年度	l_1件 L_1円	l_2件 L_2円			
当年度		l_3 L_3	l_4 L_4	l_3+l_4 L_3+L_4	$\frac{L_3+L_4}{l_3+l_4}$
合　計		l_2+l_3 L_2+L_3			
平　均 損害額		$\frac{L_2+L_3}{l_2+l_3}$			

（注）P.Y.：契約年度、F.Y.：会計年度、l：支払件数、L：支払保険金

設定されている条件により、

$$\begin{cases} l_2 = l_1 \\ l_3(= l_4) = l_1 \times 1.1 \times 1.12 = 1.1232 l_1 \end{cases}$$

$$L_2 = L_1 \times 3 \times 1.1 = 3.3 L_1$$

$$L_3 = L_1 \times 1.12 \times 1.1 \times 1.1 = 1.3552 L_1$$

$$L_4 = L_3 \times 3 \times 1.1 = 1.3552 \times 3.3 L_1 = 4.47216 L_1$$

これにより、当年度の平均支払額D_1は、

$$D_1 = \frac{L_2 + L_3}{l_2 + l_3} = \frac{3.3 + 1.3552}{1 + 1.232} \cdot \frac{L_1}{l_1} \fallingdotseq 2.086 \frac{L_1}{l_1}$$

また、当年度契約の平均損害額D_2は、

$$D_2 = \frac{L_3 + L_4}{l_3 + l_4} = \frac{1.3552 + 4.47216}{1.232 \times 2} \cdot \frac{L_1}{l_1} \fallingdotseq 2.365 \frac{L_1}{l_1}$$

よって、

$$\frac{D_2}{D_1} - 1 \fallingdotseq 0.134$$

となり、必要となる割増率は、13.4％である。

3.　免責金額を導入する前の純保険料をpとすると、導入前の営業保険料は、$\dfrac{(1+0.2)p}{1-0.15}$と表すことができる。

次に、これに免責金額を導入した場合を考える。免責金額の設定によっても理論的にはクレーム頻度は影響を受けないので、クレーム額分布をそのまま用いることができる。そこで、免責金額導入後の純保険料を$p' = (1-d)p$とおくと、営業保険料は、$\dfrac{(1+0.2)(1-d)p}{1-0.15}$となる。

したがって、免責金額導入による営業保険料の割引率Dは、

$$D = 1 - \frac{(1+0.2)((1-d)p)}{1-0.15} \Big/ \frac{(1+0.2)p}{1-0.15}$$
$$= d$$

となり、結局純保険料の割引率と一致することがわかる。

ここで、純保険料の割引率dについて考える。損害額を表す確率変数をX、

その確率密度関数を$f(x)$とおく。免責金額導入前の保険会社の平均支払額は

$$E(X)=\int_0^{\infty} xf(x)dx$$

となる。ここに免責金額としてaを導入することによって、損害額がa未満のものについては支払いの対象とはならなくなるので、これら支払いの対象とならない事故も含んだすべての損害に対する保険会社の平均支払額は、

$$E(X-\min(X,a))=E(X)-E(\min(X,a))$$

となる。免責金額導入によって純保険料が$1-d$の割合だけ縮小されることから、

$$d=1-\frac{E(X-\min(X,a))}{E(X)}$$
$$=\frac{E(\min(X,a))}{E(X)}$$

によってdを求めることができる。そこで、実際の数値を代入してこれを求めると、以下のようになる。

$$E(X)=\int_0^{\infty}\frac{x}{47.8}e^{-\frac{x}{47.8}}dx$$
$$=\left[-xe^{-\frac{x}{47.8}}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{47.8}}dx$$
$$=\left[-47.8e^{-\frac{x}{47.8}}\right]_0^{\infty}$$
$$=47.8$$

$$E(\min(X,10))=\int_0^{10}\frac{x}{47.8}e^{-\frac{x}{47.8}}dx+\int_{10}^{\infty}\frac{10}{47.8}e^{-\frac{x}{47.8}}dx$$
$$=\left[-xe^{-\frac{x}{47.8}}\right]_0^{10}+\int_0^{10}e^{-\frac{x}{47.8}}dx+\left[-10e^{-\frac{x}{47.8}}\right]_{10}^{\infty}$$

$$= -10e^{-\frac{10}{47.8}} + \left[-47.8e^{-\frac{x}{47.8}}\right]_0^{10} + 10e^{-\frac{10}{47.8}}$$

$$= 47.8\left(1 - e^{\frac{10}{47.8}}\right)$$

$$\therefore \quad d = \frac{47.8\left(1 - e^{-\frac{10}{47.8}}\right)}{47.8} = 1 - e^{-\frac{10}{47.8}}$$

$$= 1 - \left\{1 - \frac{1}{1!}\frac{10}{47.8} + \frac{1}{2!}\left(\frac{10}{47.8}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{10}{47.8}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$\fallingdotseq 1 - 0.81115$$

$$\fallingdotseq 0.189$$

よって、求める営業保険料の割引率は、18.9%である。

第２章

クレームの分析

第2章　クレームの分析

2.1 クレームの分析方法

前述のとおり、保険料の構成要素のうち純保険料は、将来の保険金支払いに充当する支払期待額であり、クレーム頻度とクレーム額に分けて算出するのが一般的である。ここで二つに分けて算出するのは、それぞれに影響を与える要因が異なることや、被保険者が自己負担する免責金額や保険者の支払限度額の検討をクレーム額分布を用いて行うなどのためである。クレーム頻度を f 、平均クレーム額を d とすれば、純保険料は $f \cdot d$ となる。

そこで、まずクレーム額とクレーム頻度について、それぞれ別々に分析・推計等の方法を説明したうえで、次節においてそれらを合わせたクレーム総額の分析方法等について説明することとする。

2.1.1 クレーム額分布

(1) 経験推定

経験推定は後述するパラメトリック推定に比べ単純な手法であるが、観測数が非常に大きいときは十分な精度が得られるものである。

n 個の観測値に確率 $1/n$ を置くことによって標本から得られる確率分布のことを経験分布と呼び、分布関数 $F(x)$ および確率関数 $f(x)$ を数式で表すと次のとおりである。

$$F(x) = \frac{x_j \leq x\text{を満たす}x_j\text{の数}}{n}, \quad f(x) = \frac{x_j = x\text{を満たす}x_j\text{の数}}{n}$$

(2) パラメトリック推定

パラメトリック推定は、母集団分布が一定のパラメータを有する確率分布に属するのであれば、パラメータの値を得ることにより確率分布が特定されるという

考え方に基づいている。パラメトリック推定の利点は、たとえば免責金額を変更したときや将来のインフレ率を加味したときのクレーム額期待値の変化などを容易に分析することができる応用性、少数のパラメータで確率分布を特定することができる簡明性などである。

パラメータを推定する方法には2種類ある。ひとつはパラメータの数と同数の方程式を準備する方法である。方程式は真であってほしい事実が実際に成り立つように構成する。もうひとつは、目的に関連する基準の最適化を行う方法である。前者のカテゴリーにはモーメント法[1]があり、後者には最尤法[2]がある。

(3) 最尤推定量の分散

最尤推定量の漸近分布は統計学の基本的事項であるので、証明は参考文献3を参照していただくこととし、定理として示す。

定理2-1 データ$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$(記号 $'$ は転置を表す。)がk次元の母数$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)'$によって定められる密度関数$f_\theta(\mathbf{x})$に従っているとする。いま、尤度を$L(\boldsymbol{\theta})$として、データ$\mathbf{x}$に対するフィッシャー情報行列を次のように表すと、

$$I(\boldsymbol{\theta})=-E\left\{\frac{\partial^2\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right\}=-E\left\{\frac{\partial^2\log f_\theta(\mathbf{x})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'}\right\}$$
$$=E\left[\left\{\frac{\partial\log f_\theta(\mathbf{x})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial\log f_\theta(\mathbf{x})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right\}'\right]$$

最尤推定量$\hat{\boldsymbol{\theta}}$の漸近分布は、$\boldsymbol{\theta}$の真の値が$\boldsymbol{\theta}_0$であるとき、多($k$)次元正規分布$N_k(\boldsymbol{\theta}_0,(I(\boldsymbol{\theta}_0))^{-1})$となる。($^{-1}$は逆行列を表す。)ここで、$\partial/\partial\boldsymbol{\theta}$は$f$に

1 序章参照。

2 序章参照。

対して$\partial f/\partial\theta_i$を配置した列ベクトル、また、$\partial^2/\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}'$は同じく$\partial^2 f/\partial\theta_i\,\partial\theta_j$を配置した行列を表す。期待値の操作$E$は要素ごとに行う。

$\boldsymbol{\theta}$は未知であるため実際の計算では、最尤推定値$\hat{\boldsymbol{\theta}}$で評価したフィッシャー情報量$I(\hat{\boldsymbol{\theta}})$を利用して最尤推定量$\hat{\boldsymbol{\theta}}$の分散の近似値を求める。また、フィッシャー情報行列を求めるために必要な期待値を得ることが出来ない場合は、期待値を外して最尤推定値$\hat{\boldsymbol{\theta}}$で評価したHessian推定量もよく利用される。

例2-1 対数正規分布のパラメータμ，σの最尤推定量の分散の近似値を求めよ。

対数正規分布の密度関数は、$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\,x}\exp\left\{-\dfrac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$であり、

フィッシャー情報行列は、

$$I(\theta)=E\left[\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\mu)/\sigma^2\\ -n/\sigma+\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\mu)^2/\sigma^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\mu)/\sigma^2 & -n/\sigma+\sum_{i=1}^{n}(\log x_i-\mu)^2/\sigma^3\end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}n/\sigma^2 & 0\\ 0 & 2n/\sigma^2\end{pmatrix}$$

となる。逆行列は$\begin{pmatrix}\sigma^2/n & 0\\ 0 & \sigma^2/2n\end{pmatrix}$となる。よって、分散は、$\sigma^2/n$および$\sigma^2/2n$となる。$\sigma$は未知であるため実際の計算では、$\sigma$に最尤推定量を代入して近似値を求めることとなる。

(4) 最尤推定量の関数の分散

実務ではパラメータそのものよりその関数に関心がある場合が多い。そこで、パラメータの関数の漸近分布について定理として示す。

なお、これはデルタ（δ）法と呼ばれるものであり、定理の証明は参考文献3を参照していただきたい。

定理2-2　$\mathbf{X_n}=(X_{1n},X_{2n},\cdots,X_{kn})'$を$k$次元多変量確率変数とする。$\mathbf{X_n}$は漸近的に平均$\boldsymbol{\theta}$と分散・共分散行列$\Sigma/n$の正規分布に従い、$\boldsymbol{\theta}$と$\Sigma$はいずれも$n$に依存しないものと仮定する。$g$を全微分可能な$k$変数関数であるものとする。$G_n=g(X_{1n},X_{2n},\cdots,X_{kn})$とすると、$G_n$は漸近的に平均$g(\boldsymbol{\theta})$、分散$(\partial\mathbf{g})'\Sigma(\partial\mathbf{g})/n$の正規分布に従う。ここで、$\partial\mathbf{g}$は1次導関数のベクトルで$\partial\mathbf{g}=(\partial g/\partial\theta_1,\partial g/\partial\theta_2,\cdots,\partial g/\partial\theta_k)'$である。

最尤推定量の関数については、パラメータの最尤推定量ベクトルを$\mathbf{X_n}$とし、真のパラメータ$\boldsymbol{\theta}$に推定値を代入することにより近似する。

例2-2　対数正規分布の平均の最尤推定量の分散を近似せよ。

対数正規分布のパラメータμ，σの最尤推定量ベクトルを$\mathbf{X_n}$とすると、その漸近分散は$\begin{pmatrix}\sigma^2/n & 0\\ 0 & \sigma^2/2n\end{pmatrix}$である。対数正規分布の平均は$\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$であるから、$g(\mu,\sigma)=\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$であり、一次導関数は、

$\partial\mathbf{g}=\left(\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\ \ \sigma\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)'$である。したがって、分散は

$$
\begin{aligned}
&(\partial\mathbf{g})'\Sigma(\partial\mathbf{g})/n\\
&=\left(\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\ \ \sigma\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)\begin{pmatrix}\sigma^2/n & 0\\ 0 & \sigma^2/2n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\\ \sigma\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\end{pmatrix}\\
&=\frac{\sigma^2(2+\sigma^2)}{2n}\exp(2\mu+\sigma^2)
\end{aligned}
$$

となる。

(5) モデルの選択と感度分析

a. モデル選択の検定

① 適合度検定

一般的に使われている検定はχ^2適合度検定である。この検定はデータがグループ化されている必要がある。n_jをj番目のグループの観測数、E_jを期待観測数とすると、検定統計量は$Q=\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-E_j)^2}{E_j}$であり、自由度$d$の$\chi^2$分布の上側$\alpha$点を$\chi_d^2(\alpha)$（ここで、$d=k-r-1$、$k$はグループの数、$r$はパラメータの数、$\alpha$は有意水準）とすると、$Q$が$\chi_d^2(\alpha)$を超えれば帰無仮説は棄却される。検定が有効（すなわち、第一種の誤りを犯す確率がα）であるための条件としてよく使われるものは、すべてのグループで$E_j \geq 5$であることであり、これが満たされない場合は、区分条件を変更するか隣接したグループを結合するなどの必要があると考えられている。

② 比較基準

複数のモデルの中から母集団を十分に表しているといえるモデルを選択する場面では、共通の比較基準で候補のモデルを比較する方法が簡明である。比較基準は、モデルの複雑さと適合度とのバランスを評価できるものであることが望ましいと考えられている。たとえば、χ^2適合度検定統計量よりは同検定におけるp値（$\Pr(\chi^2>Q)$）の方が望ましい。それは、p値はモデルの複雑さが増すことを、自由度を減らすことで自動的に修正するからである。同様に、最大尤度より、赤池情報量基準（AIC）やベイズ情報量基準（BIC）などのほうが望ましいと考えられている。

- $\mathrm{AIC}=-2\ln(L)+2k$　ここで、Lは最大尤度、kは自由パラメータの数である。
- $\mathrm{BIC}=-2\ln(L)+k\ln(n)$　ここで、Lは最大尤度、kは自由パラメータの数、nは標本の大きさである。

b. 感度分析

前述の適合度検定や比較基準において優れた数値のモデルが最もよく母集団を表すとは限らない。特に巨大損害の予測に関心があるにもかかわらず、裾の厚い母集団から限られた数のデータしか得られず、データの適合が比較的低い値のところで重点的に行われる場合などである。このような場合、次善のモデルによる感度やパラメータ信頼区間の両端での感度などを分析することが重要である。

(6) 不完全なデータによる推定

保険契約には様々な支払条件があることから、たとえば、免責金額のある契約からは免責金額以下の事故は観測されない。また、支払限度額のある契約からは限度額超の事故は観測されるもののクレーム額は限度額で打ち切られている。このようなデータから支払条件のない場合に支払われるべきクレーム額(損害額)の分布を推定することは、支払条件を変更した場合の影響の評価などのために重要である。

免責金額がd、支払限度額がuの保険契約から得られたクレーム額を確率変数Yとおき、免責金額および支払限度額がない場合に支払われるべきクレーム額(損害額)をXとおくと、YとXの関係は次のとおりである。

Yは$X \geq d$という条件付の確率変数であり、

$$Y = \begin{cases} X-d, & d < X \leq u+d \\ u, & X > u+d \end{cases}$$

Yの分布関数$F_Y(y)$は次のとおりであり、

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \dfrac{F_X(y+d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}, & 0 < y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

$y=u$ 以外において密度関数 $f_Y(y)$ は次のとおりである。

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X(y+d)}{1-F_X(d)}, & 0\le y<u\\[2ex] 0, & y\ge u\end{cases}$$

これらの関係を念頭におき、Y のデータを用いて最尤法かモーメント法により、X の密度関数 $f_X(x)$ のパラメータを求めればよい。

(7) スプライシング（接合）

たとえば自然災害リスクのように、ある値以下のデータは大量にあるが、それ以外については情報量が限られている場合がある。その場合は、その値までは経験分布を用い、それを超えた部分についてはパラメトリックなモデルを用いるのも有効な方法である。

n 構成要素の接合モデルは次の算式で表される密度関数をもつ。

$$f_X(x)=\begin{cases}a_1 f_1(x), & b_1<x<c_1\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ a_n f_n(x), & b_n<x<c_n\end{cases}$$

$f_j(x)\ \ (j=1,\cdots,n)$ は、区間 $(b_j,\ c_j)$ において全確率をもつ正当な密度関数でなければならない。また、$a_1+\cdots+a_n=1$ である。

2.1.2 クレーム頻度分布

クレーム頻度を考察するうえで通常用いられる分布は、ポアソン分布である。また、危険度の異なる契約が混ざり合った集団に対しては、負の二項分布の方がよく適合することもある。このことは、いずれも以下の論理から裏付けることができる。

1年間のクレーム件数の期待値が λ であるとき、1年を n 微小期間に分割し

て、1期間に発生するクレーム件数を1件以内にすることができるものとすれば、クレーム件数 X は、二項分布[3]

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

に従う。右辺を変形し n を無限大に近づけると、

$$(\text{右辺})=\frac{\lambda^{x}}{x!}\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^{n}\prod_{i=1}^{x-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$
$$\to\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}\quad(n\to\infty)$$

となり、クレーム件数 X は、ポアソン分布 $P(X=x)=\dfrac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}$ で近似することができることがわかる。また、「ポアソン分布のパラメータ λ がガンマ分布に従う」といったように、危険度の異なる契約の混ざり合った契約集団を考える。ガンマ分布の母数を α および β としたときに、次の式が成り立つ。

$$\begin{cases} P(u<\lambda<u+du)=\dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta u}(\beta u)^{\alpha-1}du \\ P(X=x\mid u<\lambda<u+du)=\dfrac{u^{x}}{x!}e^{-u} \end{cases}$$

したがって、

$$P(X=x)=\int_0^\infty\left(\frac{u^{x}}{x!}e^{-u}\right)\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}e^{-\beta u}(\beta u)^{\alpha-1}du$$
$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)x!}\int_0^\infty e^{-(\beta+1)u}u^{x+\alpha-1}du$$
$$=\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)x!}\frac{\beta^{\alpha}}{(1+\beta)^{x+\alpha}}$$

3　序章参照。

$$=\binom{\alpha+x-1}{x}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{x}$$

となる。すなわち、クレーム件数Xは、母数$k=\alpha,\ p=\dfrac{\beta}{1+\beta}$の負の二項分布に従うといえる。

2.1.1で述べた事項は、クレーム頻度分布にも同様に適用できる。

2.2 クレーム総額の分析

2.2.1 個別的リスクモデルと集合的リスクモデル

保険契約のポートフォリオ全体のクレーム総額を考える場合、二つの考え方がある。一つは、クレーム総額はポートフォリオを構成する個々の契約を合計することにより得られるとする考え方であり、**個別的リスクモデル**(individual risk model)と呼ばれる。もう一つは、**集合的リスクモデル**(collective risk model)と呼ばれるものであり、ポートフォリオ全体のクレーム総額が確率変動によりもたらされると考え、何らかの確率分布を仮定し分析を行おうとするものである。

個別的リスクモデルは、個々の契約においてある特定の期間に発生するクレームを確率変数として捉え、この確率変数が従う分布について分析を行うものである。この場合には、ポートフォリオ全体のクレーム総額は、そこに含まれる個々の保険契約に対応する確率変数の総和によって表されることになる。したがって、この総和は、契約件数が大きければ中心極限定理により近似的に正規分布に従うことがわかるため、個々の契約すべての種類と保険金額について適当なデータを当てはめることができれば、特定の条件下におけるポートフォリオ全体の近似値を求めることができるのである。

一方の集合的リスクモデルは、個々の契約にはあまり関心が払われずに、ポートフォリオ全体として偶然事象である「クレーム」が発生するということを前提に、この偶然事象に対して確率論的分析を加えようとするものである。たとえば、ある特定の期間内に発生するクレーム総額を確率変数とし、ある種の単純化のための仮定を置くことによって、この確率変数の従う分布を調べることが可能となる。

集合的リスクモデルの考え方は、1930年以降に急速に進展したものであり、

現代のアクチュアリーにとっては欠かすことのできない「(集合的)危険理論」にまで発展している。以降においては、この集合的リスクモデルに絞って述べることとする。

2.2.2 クレーム総額分布

(1) クレーム総額の分布関数

ある保険契約のポートフォリオの中で、一定期間内(たとえば1年間)に発生するクレーム件数を確率変数 N 、i 番目のクレーム額を確率変数 X_i $(i=1,2,\cdots,N)$ で表すと、X_i により定められる確率変数

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N \tag{2.1}$$

はポートフォリオ全体のクレーム総額を表すことになる。

ただし、ここでは確率論的なアプローチを容易にするために、扱うリスクモデルについて次の仮定を設けることにする。

① $X_1, X_2, \cdots$ は、同一の分布に従う確率変数である。

② 確率変数 $N, X_1, X_2, \cdots$ は、互いに独立である。

さて、クレーム総額を表す確率変数 S の分布を調べるために、まず S の平均を求める。S の期待値と S の条件付き期待値との関係[4]、および仮定①から、

$$E(S) = E_N(E(S \mid N)) = E_N(N \cdot E(X)) = E(X)E(N) \tag{2.2}$$

となる。分散も同様に、

$$\begin{aligned} V(S) &= E_N(V(S \mid N)) + V_N(E(S \mid N)) \\ &= E_N(N \cdot V(X)) + V_N(N \cdot E(X)) \end{aligned}$$

4　序章参照。

$$= V(X)E(N) + E(X)^2 V(N) \tag{2.3}$$

となる。また、積率母関数は、

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E(e^{tS}) = E_N(E(e^{tS} \mid N)) \\ &= E_N(M_X(t)^N) = E_N(\exp(N \cdot \log M_X(t))) \\ &= M_N(\log M_X(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

である。次に、S の分布関数 $F(x)$ については、クレームが何件起きるかを区別し、それらを合計することによって求めることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} F(x) &= \Pr(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S \le x \mid N = n) \Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) \Pr(N = n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。ここで、互いに独立な確率変数の和の分布関数については、畳み込みによって表される[5]ので、

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{n*}(x) \Pr(N = n) \tag{2.6}$$

となる。なお、ここにおいて $P^{0*}(x) = 1$ とする。

また、もし個々のクレーム額分布が確率分布 $p(x) = \Pr(X = x)$ をもつ離散分布であれば、S の分布もまた離散分布となり、その確率関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n*}(x) \Pr(N = n) \tag{2.7}$$

によって表される。なお、この場合も上の場合と同様に $p^{0*}(x) = 1$ とする。

(2) クレーム件数分布を特定した場合のクレーム総額分布

前述のとおり、クレーム頻度を考えるうえで通常用いられる分布は、ポアソン分布および負の二項分布である。そこで、ここではクレーム件数分布をそれぞ

---

5 序章参照。

れの理論的分布に特定した場合に、クレーム総額分布がどのようになるかについて述べる。

クレーム件数Nがパラメータλのポアソン分布[6]に従うものと仮定すると、(2.6)式よりクレーム総額Sの分布関数は、

$$F(x)=\Pr(S\le x)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{n*}(x)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{2.8}$$

となる。一般に、(2.8)式によって表される分布を、**複合ポアソン分布**という。

クレーム総額Sがパラメータλの複合ポアソン分布に従う場合には、(2.2)～(2.4)式およびポアソン分布の性質により、Sの平均、分散および積率母関数は、以下のとおりとなる。

$$E(S)=\lambda E(X)$$
$$V(S)=\lambda\{V(X)+E(X)^2\}=\lambda E(X^2)$$
$$M_S(t)=\exp\{\lambda\cdot(M_X(t)-1)\} \tag{2.9}$$

次に、クレーム件数Nが負の二項分布に従う場合を考える。危険度の異なる契約が混ざり合った集団、すなわちクレーム件数の分散がその平均よりも大きいようなケースでは、負の二項分布の方がよく適合することがあることは、既述のとおりである。

負の二項分布の分布関数を(2.6)式に代入すると、クレーム総額Sの分布関数は、

$$F(x)=\Pr(S\le x)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{n*}(x)\binom{r+n-1}{n}p^r(1-p)^n \tag{2.10}$$

となる。一般に、(2.10)式によって表される分布を、**複合負の二項分布**という。

複合ポアソン分布の場合と同様に、複合負の二項分布に従う場合のクレー

---

6 序章参照。

ム総額Sの平均、分散および積率母関数を求めると、以下のとおりとなる。

$$E(S)=\frac{r(1-p)}{p}E(X)$$

$$V(S)=\frac{r(1-p)}{p}E(X^2)+\frac{r(1-p)^2}{p^2}E(X)^2$$

$$M_S(t)=\left(\frac{p}{1-(1-p)M_X(t)}\right)^r$$

(3) クレーム額分布を特定した場合のクレーム総額分布

たとえば、クレーム額が平均μ、分散σ^2の正規分布に従う場合には、n次の畳み込みによって得られる分布は、正規分布の再生性[7]により平均$n\mu$、分散$n\sigma^2$の正規分布に従うことがわかる。このように、クレーム額の分布として、その畳み込みが容易に求められる分布を選択することができると非常に便利である。

現実においては、多くの保険種類においてクレーム額は正の値のみに限られており、しかも右側（正の方向）が歪んでいるのが一般的である。このような場合には、正規分布よりはたとえばガンマ分布の方が適当である。そこで、パラメータがα,βであるガンマ分布を想定すると、このn次の畳み込みによって得られる分布は、やはりガンマ分布の再生性によりパラメータが$n\alpha,\beta$のガンマ分布となることがわかる。

また、たとえばクレーム額がパラメータ1の指数分布に従うものと仮定すれば、この分布が$\alpha=\beta=1$のガンマ分布でもあることから、n次の畳み込みによって得られる分布は、パラメータが$\alpha=n$，$\beta=1$であるガンマ分布となることがわかる。すなわち、この分布の確率密度関数は、

7　序章参照。

$$p^{n*}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} \quad x > 0$$

となる。分布関数を求めるために、n回の部分積分を実行すると、

$$\begin{aligned}1 - P^{n*}(x) &= \int_x^\infty \frac{y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!}dy \\ &= \left[-\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}e^{-y}\right]_x^\infty + \int_x^\infty \frac{y^{n-2}e^{-y}}{(n-2)!}dy \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x} + [1 - P^{(n-1)*}(x)] \\ &= e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}\end{aligned}$$

となる。したがって、これを(2.6)式に代入することにより、

$$1 - F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(N = n)e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!} \quad x > 0$$

を得ることができる。

この指数分布のケースからわかるように、クレーム額分布にたとえ単純な分布を仮定できたとしても、クレーム総額分布を単純な形で求めることはできない。したがって、実務的には、クレーム額分布には離散分布を選ぶことによって、畳み込みを数値的に計算する方法が採られることが多い。

2.2.3 クレーム総額分布の計算

(1) 複合ポアソン分布の特性

クレーム総額が複合ポアソン分布に従う場合には、その特性を利用して、分布関数を計算するための別の方法が確立されているので、これを紹介する。

定理2.1 $S_1, S_2, \cdots, S_m$が互いに独立な確率変数で、S_iがパラメータλ_iおよびクレーム額の分布関数$P_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$の複合ポアソン分布に従うとき、$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_m$は、次のパラメータの複合ポアソン分布に従う。

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \tag{2.11}$$

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x) \tag{2.12}$$

証明　$M_i(t)$を$P_i(x)$の積率母関数とすると、(2.9)式からS_iの積率母関数は、

$$M_{S_i}(t) = \exp\left\{\lambda_i (M_i(t) - 1)\right\}$$

である。確率変数$S_1, S_2, \cdots, S_m$の独立性から、Sの積率母関数は、

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \prod_{i=1}^{m} M_{S_i}(t) \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (M_i(t) - 1)\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} M_i(t) - 1\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる。ただし、ここで$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$とする。

(2.13)式は、複合ポアソン分布の積率母関数であり、積率母関数の一意性によって(2.11)および(2.12)式によって特定される複合ポアソン分布に従うことがわかる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

この定理を損害保険実務に当てはめてみると、m個のポートフォリオを一つのポートフォリオとして結合させた場合に、それぞれのポートフォリオが互いに独立で複合ポアソン分布に従う場合には、結合させたポートフォリオのクレーム総額もやはり複合ポアソン分布に従うということを意味している。たとえばこれを、ある一つのポートフォリオのm年間分を合わせて考えた場合においても、毎年のポートフォリオが互いに独立で、かつそれぞれが複合ポアソン分布に従うことが仮定できれば、m年間のクレーム総額も複合ポアソン分布に従うということができる。

定理2.2　$x_1, x_2, \cdots, x_m$ を各クレームが取り得るクレーム額とし、N_i を(2.1)式の $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ においてクレーム額が x_i に等しいクレームの数とすると、

$$S = x_1 N_1 + x_2 N_2 + \cdots + x_m N_m \tag{2.14}$$

と表すことができる。この S が、パラメータ λ およびクレーム額の確率分布として

$$\pi_i = p(x_i) \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{2.15}$$

をもつ複合ポアソン分布に従うとき、

① $N_1, N_2, \cdots, N_m$ は互いに独立である。

② N_i はパラメータ $\lambda_i = \lambda \pi_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ のポアソン分布に従う。

証明　それぞれのクレームは独立で m 個のクレーム額のうちのどれか一つをとることから、クレーム数 $N_1, N_2, \cdots, N_m$ が、$n = \sum_{i=1}^{m} N_i$ とおいたときにパラメータ $n, \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m$ の多項分布に従うことに利用することにより、$N_1, N_2, \cdots, N_m$ の結合分布の積率母関数を、期待値と条件付き期待値との関係を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned}
E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right\}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right\} \Big| N = n\right) \Pr(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right\} \Big| N = n\right) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
&E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right\} \Big| N = n\right) \\
&\quad = \sum_{\sum n_i = n} \Pr(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \cdots, N_m = n_m) \exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i n_i\right) \\
&\quad = \sum_{\sum n_i = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} (\pi_1^{n_1} \pi_2^{n_2} \cdots \pi_m^{n_m}) \exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i n_i\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\sum n_i = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} (\pi_1 e^{t_1})^{n_1} (\pi_2 e^{t_2})^{n_2} \cdots (\pi_m e^{t_m})^{n_m}$$

$$= (\pi_1 e^{t_1} + \pi_2 e^{t_2} \cdots + \pi_m e^{t_m})^n$$

となることから、(2.16)式は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right\} \middle| N = n\right) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (\pi_1 e^{t_1} + \pi_2 e^{t_2} + \cdots \pi_m e^{t_m})^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\pi_1 e^{t_1} + \lambda\pi_2 e^{t_2} + \cdots \lambda\pi_m e^{t_m})^n}{n!} \tag{2.17}$$

となる。ここで、指数関数の Taylor 展開を用いて(2.17)式を書き直すと、次のようになる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} E\left(\exp\left\{\sum_{i=1}^{m} t_i N_i\right\} \middle| N = n\right) \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \exp(-\lambda)\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{m} \pi_i e^{t_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \exp\left\{\lambda\pi_i (e^{t_i} - 1)\right\} \tag{2.18}$$

(2.18)式の右辺は、変数がt_iただ一つの関数がm個掛け合わされたことを意味しているので、N_iが互いに独立であることを示している。

次に、(2.18)式において、$t_i = t$, $t_j = 0$, $j \neq i$とすると、

$$E(\exp(tN_i)) = \exp\left\{\lambda\pi_i (e^t - 1)\right\}$$

となり、これはパラメータ$\lambda\pi_i$のポアソン分布の積率母関数を表している。したがって、N_iはパラメータ$\lambda\pi_i$のポアソン分布に従うことがわかる。　　（証明終）

(2) クレーム総額の分布関数の計算

ここでは、簡単な具体例に基づいて、クレーム総額の分布関数を求めることにする。

設定例　個別のクレーム額が1，2，3の3種類しかなく、それぞれのクレーム額が発生する確率が、0.25，0.375，0.375であるとし、しかもそれらを合計したク

レーム総額Sがパラメータ$\lambda=0.8$の複合ポアソン分布に従うものと仮定する。

このとき、クレーム総額Sが0, 1,…, 6の値をとる場合のそれぞれの確率分布を求めることにする。

a. **直接計算する方法**

この場合のクレーム総額Sの確率関数は、(2.8)および(2.7)式により、

$$f(x)=\Pr(S=x)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{n*}(x)\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{2.19}$$

となる。(2.19)式における畳み込みを、

$$\begin{aligned}p^{n*}(x)&=\Pr(X_1+X_2+\cdots+X_n=x)\\&=\sum_y \Pr(X_n=y)\Pr(X_1+X_2+\cdots+X_{n-1}=x-y)\\&=\sum_y p(y)\,p^{(n-1)*}(x-y)\end{aligned}$$

の再帰式を用いて順次求めていくのが、最初の方法である。

まず、$p^{0*}(x)=1$、$p(1)=0.25$、$p(2)=p(3)=0.375$を用いて、具体的に畳み込みを計算していくと、

$$\begin{aligned}&p^{2*}(2)=p(1)p(1)=0.25\times0.25=0.0625\\&p^{2*}(3)=p(1)p(2)+p(2)p(1)=2\times0.25\times0.375=0.1875\\&p^{2*}(4)=p(1)p(3)+p(2)p(2)+p(3)p(1)=0.328125\\&p^{2*}(5)=p(2)p(3)+p(3)p(2)=0.28125\\&p^{2*}(6)=p(3)p(3)=0.375\times0.375=0.140625\\&p^{3*}(3)=p(1)p^{2*}(2)=0.25\times0.0625=0.015625\\&p^{3*}(4)=p(1)p^{2*}(3)+p(2)p^{2*}(2)=0.0703125\\&\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\&p^{6*}(6)=p(1)p^{5*}(5)=0.000244\end{aligned}$$

となる。したがって、求める確率関数は、これらの値と$\dfrac{0.8^n\cdot e^{-0.8}}{n!}$により計算さ

れる値を(2.19)式に代入することによって求めることができる。

計算結果を、下表に示す。

x	$p^{0*}(x)$	$p(x)$	$p^{2*}(x)$	$p^{3*}(x)$	$p^{4*}(x)$	$p^{5*}(x)$	$p^{6*}(x)$
0	1	—	—	—	—	—	—
1	—	0.250	—	—	—	—	—
2	—	0.375	0.062500	—	—	—	—
3	—	0.375	0.187500	0.015625	—	—	—
4	—	—	0.328125	0.070313	0.003906	—	—
5	—	—	0.281250	0.175781	0.023438	0.000977	—
6	—	—	0.140625	0.263672	0.076172	0.007324	0.000244

n	$\dfrac{0.8^n \cdot e^{-0.8}}{n!}$
0	0.449329
1	0.359463
2	0.143785
3	0.038343
4	0.007669
5	0.001227
6	0.000164

x	$f(x)$
0	0.449329
1	0.089866
2	0.143785
3	0.162357
4	0.049905
5	0.047360
6	0.030923

b. 複合ポアソン分布の特性を利用した計算方法

定理2.2より、$S = x_1N_1 + \cdots + x_mN_m$ において、各 x_iN_i（$i = 1, 2, \cdots, m$）は、パラメータ λ_i、および確率1で値 x_i をとるクレーム額分布を持つ複合ポアソン分布に従う互いに独立な確率変数であることがわかり、さらに定理2.1より S は、その和としての複合ポアソン分布に従うものと見なすことができる。

したがって、S の確率関数 $f(x)$ は、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \Pr(S = x) \\
&= \Pr(x_1N_1 + x_2N_2 + \cdots + x_mN_m = x)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=x} \Pr(x_1N_1 = k_1)\Pr(x_2N_2 = k_2)\cdots\Pr(x_mN_m = k_m)$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=x} \Pr(N_1 = \frac{k_1}{x_1})\Pr(N_2 = \frac{k_2}{x_2})\cdots\Pr(N_m = \frac{k_m}{x_m})$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=x} \frac{\lambda_1^{k_1/x_1}e^{-\lambda_1}}{(k_1/x_1)!}\cdot\frac{\lambda_2^{k_2/x_2}e^{-\lambda_2}}{(k_2/x_2)!}\cdots\frac{\lambda_m^{k_m/x_m}e^{-\lambda_m}}{(k_m/x_m)!}$$

によって求めることができる.

a.で示した具体例を定理2.1および定理2.2に当てはめると、$m=3$、$x_1=1$、$x_2=2$、$x_3=3$、$\lambda_1=\lambda p(1)=0.2$、$\lambda_2=\lambda p(2)=0.3$、$\lambda_3=\lambda p(3)=0.3$となる。

計算結果を、下表に示す。

x	$\Pr(N_1=x)=\frac{0.2^x e^{-0.2}}{x!}$	$\Pr(2N_2=x)=\frac{0.3^{x/2}e^{-0.3}}{(x/2)!}$	$\Pr(3N_3=x)=\frac{0.3^{x/3}e^{-0.3}}{(x/3)!}$	$\Pr(N_1+2N_2=x)$	$f(x)=\Pr(N_1+2N_2+3N_3=x)$
0	0.818731	0.740818	0.740818	0.606531	0.449329
1	0.163746	—	—	0.121306	0.089866
2	0.016375	0.222245	—	0.194090	0.143785
3	0.001092	—	0.222245	0.037201	0.162358
4	0.000055	0.033337	—	0.030974	0.049906
5	0.000002	—	—	0.005703	0.047360
6	0.000000	0.003334	0.033337	0.003288	0.030923

なお、この計算方法は、mすなわち異なるクレーム額の数が少ない場合に便利である。また、クレーム額について連続分布が選択されたとしても、この別の計算方法を使って比較的よい近似を得ることができることがわかっている。

ところで、この場合の平均および分散は、$E(N_i)=V(N_i)=\lambda_i$およびN_iの独立性により、

$$E(S)=E\left(\sum_{i=1}^{m}x_iN_i\right)=\sum_{i=1}^{m}x_iE(N_i)=\sum_{i=1}^{m}x_i\lambda_i \tag{2.20}$$

$$V(S)=V\left(\sum_{i=1}^{m}x_iN_i\right)=\sum_{i=1}^{m}x_i^2V(N_i)=\sum_{i=1}^{m}x_i^2\lambda_i \tag{2.21}$$

であり、(2.20)は(2.9)から、

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\lambda_i=\lambda\sum_{i=1}^{m}x_i\pi_i=\lambda E(X)=E(S)$$

であることが確認できる。また、(2.21)についても同様に、

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^2\lambda_i=\lambda\sum_{i=1}^{m}x_i^2\pi_i=\lambda E(X^2)=V(S)$$

であることがわかる。

c. 帰納的手法

クレーム件数がポアソン分布に従う場合は帰納的手法を用いることができる。この方法は、クレーム額は正の整数であると仮定し、$\lambda_i=\lambda p(i)$, $i=1,2,\cdots$ とおいて、次の級数式、

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}\lambda_i f(x-i) \quad x=1,2,\cdots \tag{2.22}$$

により、$f(0)=\Pr(N=0)=e^{-\lambda}$ から始め、$f(1),f(2),\cdots$ と順に計算していく方法である。

(2.22)式は、$i>x$ のとき $f(x-i)=0$ なので、ゼロでない項は有限個である。さらに、予想可能最高クレーム額があり、たとえばそれを m とすると、$i>m$ のとき $\lambda_i=0$ であるから、和の上限は、x と m との小さい方となる。

ところで、(2.22)式は $i=1,2,\cdots,n+1$ に対する条件付期待値 $E(X_k \mid X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}=x)$ を考えることにより得られる。これらの値は、対称性からすべての k について同じである。さらに、これらの合計は x である。したがって、それぞれは $x/(n+1)$ 、すなわち、$E(X_1 \mid X_1+X_2+\cdots+X_{n+1}=x)$ $=x/(n+1)$ などとなる。この条件付期待値を x_k の通常の確率分布で表現すると、次の式を得る。

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} i\,p(i)\,p^{n*}(x-i)}{p^{(n+1)*}(x)} = \frac{x}{n+1} \tag{2.23}$$

すると、(2.22)式の右辺は、次のとおりとなる。

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}\lambda_i f(x-i) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}\lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}p^{*n}(x-i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{x}p(i)\,p^{n*}(x-i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\quad p^{(n+1)*}(x) = f(x)\end{aligned}$$

これを利用して、設定例における $f(x)=\Pr(S=x)$ を計算する。(2.22)式の $\lambda_i,\ i=1,2,3$ に、前出の b. において計算した数値を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\{\lambda_1 f(x-1) + 2\lambda_2 f(x-2) + 3\lambda_3 f(x-3)\} \\ &= \frac{1}{x}\{0.2f(x-1) + 0.6f(x-2) + 0.9f(x-3)\} \qquad x=1,2,\cdots \end{aligned}$$

となる。

ここで、$f(x)=0 \quad (x<0)$ であること、および $f(0)=e^{-\lambda}=0.449329$ を用いて $f(x)$ を容易に得ることができる。

$$\begin{aligned} f(0) &= 0.449329 \\ f(1) &= 0.2f(0) = 0.089866 \\ f(2) &= \frac{1}{2}\{0.2f(1)+0.6f(0)\} \\ &= \frac{1}{2}\{0.2\times 0.089866 + 0.6\times 0.449329\} \\ &= 0.143785 \\ \vdots &\qquad \vdots \end{aligned}$$

2.2.4 クレーム総額の分布関数の計算手法

前述のとおり、クレーム総額の分布関数を求めるためには、畳み込みの計算を実行しなければならない。現在ではコンピュータの性能も飛躍的に向上しているため、時間さえ掛ければコンピュータを利用して容易に計算を行うことはできる。しかしながら、実務の世界では想定するクレーム件数も相当な水準に上る場合も少なくなく、多大な時間を掛けて畳み込みの計算を実行することは現実的ではない。

そこで、畳み込み計算による負担を軽減するための手法が幾つか考え出されているので、主なものを紹介する。

(1) 再帰法

定理2.3 クレーム額分布 $f_X(x)$ が $0,1,2,\cdots,r$ で定義され（r は ∞ でも可）、クレーム頻度分布 p_k が $p_k=\left(a+\dfrac{b}{k}\right)p_{k-1}\quad k=1,2,3,\cdots$ を満たす場合、クレーム総額 S の確率関数 $f_S(x)$ は次式となる。

$$f_S(x)=\frac{\displaystyle\sum_{y=1}^{\min(x,r)}\left(a+\frac{by}{x}\right)f_X(y)f_S(x-y)}{1-af_X(0)}\qquad x=1,2,3,\cdots$$

$$f_S(0)=P_N\left[f_X(0)\right]$$

ここで、$P_N(z)$ は確率母関数といい、離散型確率変数 N に対して、$P_N(z)=E(z^N)$ で定義される。

証明　$p_k=\left(a+\dfrac{b}{k}\right)p_{k-1}\quad k=1,2,3,\cdots$ より、$rp_r=a(r-1)p_{r-1}+(a+b)p_{r-1}$

両辺に $\left[P_X(z)\right]^{r-1}P_X'(z)$ を乗じ、r について総和をとると、

$$\sum_{r=1}^{\infty}rp_r\left[P_X(z)\right]^{r-1}P_X'(z)$$

$$=a\sum_{r=1}^{\infty}(r-1)p_{r-1}\left[P_X(z)\right]^{r-1}P_X'(z)+(a+b)\sum_{r=1}^{\infty}p_{r-1}\left[P_X(z)\right]^{r-1}P_X'(z)$$

となる。S の確率母関数は $P_S(z)=\sum_{r=0}^{\infty} p_r\left[P_X(z)\right]^r$ であるから、前式は、

$$P_S'(z)=a\sum_{r=0}^{\infty} rp_r\left[P_X(z)\right]^r P_X'(z)+(a+b)\sum_{r=0}^{\infty} p_r\left[P_X(z)\right]^r P_X'(z)$$

となる。したがって、$P_S'(z)=aP_S'(z)P_X(z)+(a+b)P_S(z)P_X'(z)$ と表せる。両辺とも z のべき級数に展開される。このような展開における z^{x-1} の係数は等式の両辺において同じでなくてはならない。それ故、$x=1,2,\cdots$ に対して、

$$\begin{aligned}
xf_S(x)&=a\sum_{y=0}^{\min(x,r)}(x-y)f_X(y)f_S(x-y)+(a+b)\sum_{y=0}^{\min(x,r)}yf_X(y)f_S(x-y)\\
&=axf_X(0)f_S(x)+a\sum_{y=1}^{\min(x,r)}(x-y)f_X(y)f_S(x-y)\\
&\qquad+(a+b)\sum_{y=1}^{\min(x,r)}yf_X(y)f_S(x-y)\\
&=axf_X(0)f_S(x)+ax\sum_{y=1}^{\min(x,r)}f_X(y)f_S(x-y)+b\sum_{y=1}^{\min(x,r)}yf_X(y)f_S(x-y)
\end{aligned}$$

となる。したがって、$f_S(x)=af_X(0)f_S(x)+\sum_{y=1}^{\min(x,r)}\left(a+\frac{by}{x}\right)f_X(y)f_S(x-y)$ となり、$f_S(x)=\frac{\sum_{y=1}^{\min(x,r)}\left(a+\frac{by}{x}\right)f_X(y)f_S(x-y)}{1-af_X(0)}$ が証明された。なお、再帰式の初期値が $f_S(0)=P_N\left[f_X(0)\right]$ であることの証明は、次のとおりである。

$$\begin{aligned}
f_S(0)&=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(X_1+\cdots+X_n=0)\Pr(N=k)\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[f_X(0)\right]^k\Pr(N=k)=P_N\left[f_X(0)\right]
\end{aligned}$$

(証明終)

この再帰式により、$f_S(1)$ から $f_S(2)$ 、…と順次クレーム総額分布を求める手法が再帰法である。特に、クレーム頻度分布がパラメータが λ のポアソン分布の場合は、

$$f_S(x)=\frac{\lambda}{x}\sum_{y=1}^{\min(x,r)} yf_X(y)f_S(x-y)\quad x=1,2,3,\cdots\quad f_S(0)=e^{-\lambda[1-f_X(0)]}$$

となり、前述2.2.3(2)c．の内容と一致する。

クレーム額分布が連続型の場合は何らかの方法で離散化を行えば再帰法を利用することができ、ラウンド法（連続分布における離散値の前後一定区間の確率を当該離散値の確率とするその方法）や局所的モーメントマッチング法（所定の連立方程式の解から、離散化の区間と確率を求め、p 個のモーメントが真の損害規模分布のものに等しい算術的分布を構築する方法）などが提案されている。詳細は参考文献2を参照していただきたい。

(2) 逆変換法

特性関数は必ず存在し、一意的に定まる。逆に言えば、特性関数が与えられると、一意的に定まる分布が存在することになる。これを利用し、特性関数から数値的に分布を得る手法が逆変換法である。すなわち、クレーム額 X の特性関数を $\varphi_X(z)$、クレーム件数 N の確率母関数を $P_N(z)$ とすると、クレーム総額 S の特性関数 $\varphi_S(z)$ は、

$$\varphi_S(z)=E\left[e^{izS}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)E\left[e^{iz(X_1+\cdots+X_n)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)\left(E\left[e^{izX}\right]\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)(\varphi_X(z))^n=E\left[(\varphi_X(z))^n\right]=P_N\left[\varphi_X(z)\right]$$

となることを利用し、特性関数 $\varphi_S(z)$ から数値的にクレーム総額 S の分布を求める手法が逆変換法である。

a. 高速フーリエ変換

任意の連続型関数 $f(x)$ に対し、$\tilde{f}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{izx}dx$ を $f(x)$ のフーリエ変換といい、$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(z)e^{-izx}dz$ を逆フーリエ変換という。したがって、$f(x)$ が確率密度関数であるとき、特性関数はフーリエ変換にほかならない。

そこで、クレーム額分布を離散化したうえで、離散型フーリエ変換およびそ

の逆変換を数値計算すれば、確率関数が求められるが、計算量が膨大となる。高速フーリエ変換とは、離散型フーリエ変換の乗算の回数をn^2のオーダーから$n\log_2 n$のオーダーへと大幅に減少させて計算を高速化する手法である。ただし、クレーム額分布のデータは等間隔でデータ数は2のべき乗でなければならないという制約がある。

大まかな手順は次のとおりであるが、具体的なアルゴリズムや高速化の仕組み等に興味のある読者は、参考文献2を参照していただきたい。

1. クレーム額分布を離散化する。$f_X(0), f_X(1), \cdots, f_X(n-1)$　ここで、$n=2^r$ でrは整数、nはクレーム総額分布$f_S(x)$において値を求めたい点の数である。
2. このベクトル値に高速フーリエ変換を適用し、特性関数$\varphi_X(z)$を得る。
3. 頻度の母関数で複合させて、$\varphi_S(z)=P_N\left[\varphi_X(z)\right]$を得る。これはクレーム総額分布の特性関数すなわち離散型フーリエ変換である。
4. 逆高速フーリエ変換を適用する。これにより、クレーム総額分布を表す長さ$n=2^r$のベクトル値が得られる。

b. 直接的数値逆変換

クレーム頻度分布がポアソン分布、二項分布および負の二項分布で、クレーム額分布が連続型の場合、クレーム額分布を区分的に線形な分布で近似することにより、フーリエ変換と類似の次の反転公式を用いて、分布関数を数値積分法により直接的に計算する手法である。なお、導出に興味のある読者は、参考文献2を参照していただきたい。

$F_S(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{r(z/\sigma)}{z}\sin\left[\frac{zx}{\sigma}-\theta(z/\sigma)\right]dz$　ここで、$r(z)$および$\theta(z)$は、$\varphi_S(z)=P_N\left[\varphi_X(z)\right]$を$\varphi_S(z)=r(z)e^{i\theta(z)}$と書き直したときの$r(z)$および$\theta(z)$

(3) シミュレーション

再帰法と逆変換法には共通する二つの特徴がある。第一は、クレーム額分

布の離散型分布への置き換えや数値積分などに伴い誤差が生じることであるが、これらは小さくすることが可能である。第二は、クレーム総額Sは$S = X_1 + \cdots + X_N$と表し、Nおよび$X_1, X_2, \cdots$は独立で、X_jは同一分布に従うものと仮定するため、モデルが実態を反映するのを阻害するおそれがある。

そこで、これらの仮定を必要としない手法としてシミュレーションがある。そのプロセスは、次のように三段階に要約することができる。

1．確率変数でクレーム総額Sのモデルを作る。

2．擬似乱数を生成し、1．のモデルを用いて、s_iを計算する。

3．Sの分布関数は擬似無作為標本$s_1, \ldots, s_n$に基づく経験分布関数である$F_{\hat{S}}(s)$によって近似できる。

(4) 漸近分布

a. 正規分布

個別的リスクモデルにおいて、ポートフォリオが十分大きい場合には中心極限定理により、そのクレーム総額は近似的に正規分布に従うことを利用することができるが、集合的リスクモデルにおいても同様に、近似的に正規分布に従うことを利用する方法がある。クレーム総額Sが複合ポアソン分布あるいは複合負の二項分布に従う場合には、次の定理を用いて正規分布近似を行うことができる。

定理2.4

① Sがパラメータλおよび$P(x)$の複合ポアソン分布に従うとき、確率変数

$$Z = \frac{S - \lambda E(X)}{\sqrt{\lambda E(X^2)}} \tag{2.24}$$

の分布は、$\lambda \to \infty$のとき標準正規分布に近づく。

② Sがパラメータr，pおよび$P(x)$の複合負の二項分布に従うとき、確率

変数

$$Z=\frac{S-r(q/p)E(X)}{\sqrt{r(q/p)E(X^2)+r(q^2/p^2)E(X)^2}} \tag{2.25}$$

の分布は、$r\to\infty$のとき標準正規分布に近づく。

証明 ①は、積率母関数を用いて次のように証明できる。(2.24)より、

$$M_Z(t)=M_S\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right)\exp\left(-\frac{\lambda E(X)t}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right)$$

$$=\exp\left\{\lambda\left[M_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right)-1\right]-\frac{\lambda E(X)t}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right\} \qquad (\because (2.9))$$

となる。一方、

$$M_X(t)=1+\frac{E(X)t}{1!}+\frac{E(X^2)t^2}{2!}+\cdots$$

において、tを$t\big/\sqrt{\lambda E(X^2)}$で置き換えて上式の右辺を整理すると、

$$M_Z(t)=\exp\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{E(X^3)}{E(X^2)^{3/2}}t^3+\cdots\right)$$

となる。したがって、上式において$\lambda\to\infty$のときに、$M_Z(t)$は$e^{t^2/2}$に近づくことから、積率母関数の一意性により標準正規分布に近づくことがわかる。

(証明終)

②についても同様に証明することができる。

b. 移動ガンマ分布

a. で用いた標準正規分布は左右対称であり、しかも平均値がゼロであるため、現実のポートフォリオをこれに当てはめることが必ずしも相応しくない場合も多い。ポートフォリオ全体のクレーム総額Sが従う分布は、一般的に平均値が正の値でしかも歪んでおり場合が多いため、より一般的な方法としてガンマ分布に近似させる方法が考えられる。

$G(x:\alpha,\beta)$をパラメータαおよびβを持つガンマ分布の分布関数とする。す

なわち、

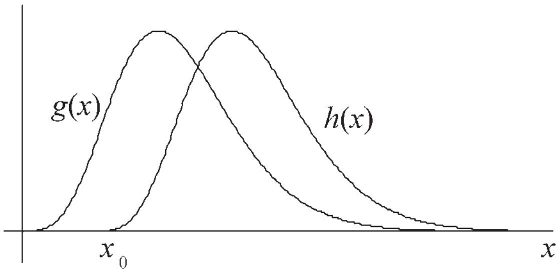
$$G(x:\alpha,\beta)=\int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt$$

そして、パラメータx_0を加えた分布関数$H(x:\alpha,\beta,x_0)$を次のように定める。

$$H(x:\alpha,\beta,x_0)=G(x-x_0:\alpha,\beta)$$

これは、図2-1で示されるように、ガンマ分布$G(x:\alpha,\beta)$をx_0の分だけ正の方向に移動させたものであり、**移動ガンマ分布**と呼んでいる。

図2-1　移動ガンマ分布



Sの分布を移動ガンマ分布によって近似するには、分布を特徴付ける基本的指標として原点周りの1次積率（すなわち平均）、平均値周りの2次積率（すなわち分散）および平均値周りの3次積率（歪度を計算するための要素）を選び、Sの分布および移動ガンマ分布についてこの三つの積率が等しいものと仮定することから開始する。

Sの原点周りの1次積率$E(S)$、平均値周りの2次積率$V(S)$、および平均値周りの3次積率$E((S-E(S))^3)$をまず求め、それらが移動ガンマ分布のものと等しいとする。なお、移動ガンマ分布の各次の積率は、ガンマ分布のそれと等しいので、次のとおりとなる。

$$E(S)=x_0+\frac{\alpha}{\beta}$$

$$V(S)=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$E((S-E(S))^3)=\frac{2\alpha}{\beta^3} \qquad ^{8}$$

これらをα, β, x_0について解くことにより、近似すべきガンマ分布のパラメータを求めることができる[9]。

$$\alpha=4\frac{V(S)^3}{E((S-E(S))^3)^2}$$

$$\beta=2\frac{V(S)}{E((S-E(S))^3)}$$

$$x_0=E(S)-2\frac{V(S)^2}{E((S-E(S))^3)}$$

8 一般に3次積率が3次のキュムラントに等しい(序章参照)ことを利用して、ガンマ分布についての3次積率も求めることができる。

9 $x_0+\frac{\alpha}{\beta}=\mu$ (定数)、$\frac{\alpha}{\beta^2}=\sigma^2$ (定数)として、$\alpha\to\infty$, $\beta\to\infty$, $x_0\to-\infty$とすると、分布$H(x:\alpha,\beta,x_0)$は$N(\mu,\sigma^2)$に近づくことから、この近似は正規近似を一般化したものであるといえる。

2.3 練習問題

1．次の問いに答えよ。

(1) ある保険において、下表のように損害額区分別の支払件数統計が得られているものとする。損害額の分布が指数分布に従うものとして、この分布の確率密度関数を最尤法を用いて求めよ。

損害額区分	支払件数
20万円以下	32件
20～40万円	22
40～60	16
60～80	11
80～100	7
100～120	5

損害額区分	支払件数
120～140万円	3件
140～160	2
160～180	1
180～200	1
200万円超	0
合　計	100

(2) (1)のように、実際の統計をもとにして、これに当てはまる確率分布を求める際に、いかなる点に留意すべきかを述べよ。　（1992年保険1（損害保険）改）

2．クレーム件数Nが$\Pr(N=n)=p(1-p)^n, n=0,1,2,\cdots\ (0<p<1)$の幾何分布に従うものとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) クレーム額Xの積率母関数が$M_X(t)$であるとして、Sの積率母関数$M_S(t)$を求めよ。

(2) クレーム額Xが平均1の指数分布$P(x)=1-e^{-x}$，$x>0$に従うとしたときにSの積率母関数$M_S(t)$および分布関数$F(x)$を求めよ。

3．ある保険契約のポートフォリオは、一定期間内に0，1，2，3件のクレームがそれぞれ0.1，0.3，0.4，0.2の頻度で発生し、クレーム1件当たりの金額は1，2，3でそれぞれ0.5，0.4，0.1の確率とする。このときに、クレーム総額の確率分布お

よび累積分布を計算せよ。

4． $x_1, \cdots, x_n$を分布関数$F(x) = x^p$, $0 < x < 1$の母集団からの無作為標本とする。

(1) モーメント法および最尤法によりpの推定値を求めよ。

(2) pの最尤推定量の漸近分散を求めよ。

(3) (1)の最尤推定量および、(2)で求めた解を用いてpの95%信頼区間の一般式を求めよ。

(4) $E(X)$の最尤推定量を求め、その漸近分散と95％信頼区間の一般式を求めよ。

5． ある保険契約の損害額の分布は、パレート分布$f(x) = qx^{-(q+1)}$, $x > 1$に従うことが分かっている。免責金額が2のときの15件のクレーム額が、次のとおり記録されている。

2　4　7　5　13　17　12　29　7　9　21　56　15　109　4

(1) パレート分布のパラメータqをモーメント法により推定せよ。（小数点第2位以下四捨五入）

(2) 免責金額を4に変更するともに支払限度額として100を新設した場合、保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する保険会社の平均支払額は、何％減少するか求めよ。（％単位で、小数点第1位以下四捨五入）

［参考文献］

1．　Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, "ACTUARIAL MATHEMATICS", The Society of Actuaries

2．Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot 著、日本アクチュアリー会損保数理モデル研究会訳『統計データの数理モデルへの適用』

3．　Rao,C.著、奥野忠一訳『統計的推測とその応用』(東京図書)

練習問題解答

1.(1) 指数分布に従うと考えられる母集団の分布を表す確率密度関数を、

$$f(x;\mu)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

とおく。母集団から大きさnの標本$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$を抽出するとしたとき、これに対応する標本変量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$の確率密度関数は、

$$\prod_{i=1}^{\mathrm{n}} f(x_i;\mu)=\frac{1}{\mu^n}\exp\left(-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\qquad (x_i\geq 0)$$

となる。これを尤度関数と考え$l(\mu)$で表せば、最尤推定値は次の方程式をμに関して解いたものである。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log l(\mu)=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-n\log\mu-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

を解けば、

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

となる。すなわち、μの最尤推定量$\hat{\mu}$は$\hat{\mu}=\overline{x}$である。

ところで、与えられている統計表において、各損害額区分の中央値をその区分の代表値として平均損害額を求めると。

(10×32+30×22+50×16+70×11+90×7+110×5

+130×3+150×2+170×1+190×1+300×0)÷100=47.8

となるから、この指数分布におけるμの最尤推定値は、47.8となる。

したがって、求める確率密度関数は、

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{47.8}e^{-\frac{x}{47.8}} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

である。

(2) 実際の統計に対して既知の確率分布を当てはめることによって、統計分析を行いやすくすることができるが、ただ闇雲に当てはめを行っても全く意味のない結果を引き出し、かえって現状認識を誤る危険性もあるので、以下の事項に留意するとともに、常に常識を働かせて判断することが必要である。

- 分析の対象としている統計データの持つ意味や性質を把握し、種々ある既知の確率分布の性質と突き合わせていくことによって、それに最も相応しい既知の確率分布を選び出すことが必要である。
- 現実の統計データには誤データ値や異常値などが含まれているのが普通である。それぞれの状況において、このようなデータをどのように処理すべきかを判断する必要がある。
- 統計分析の結果を使用する目的によって、分布全体の形を把握する必要がある場合や、特定の範囲内だけ重点的に分かればよい場合、あるいは特定の範囲だけ当てはめの精度を上げたい場合などがある。したがって、目的に応じて統計データのうちどの部分を実際に使用するのか、あるいは全データ範囲のうちどの部分を重点において当てはめを行うのかを吟味することが必要である。
- 分析の結果求められた分布が、実際の統計データの特徴等をうまく継承していない場合には、その理論的分布を使用することは全くの無意味になってしまう。したがって、当てはめの結果に対しては、決定係数等の吟味や適合度の検定などを行って、その有効性を適宜確かめる必要がある。

2. (1) Nの積率母関数は、

$$M_N(t) = E(e^{tN}) = \sum_{n=0}^{\infty} p\{(1-p)e^t\}^n = \frac{p}{1-(1-p)e^t}$$

であるので、これを(2.4)式に代入すれば、

$$M_S(t) = \frac{p}{1-(1-p)M_X(t)}$$

となる。

(2) さらに、X がパラメータが1の指数分布に従うことから、X の積率母関数 $M_X(t)=\dfrac{1}{1-t}$ を(1)の結果に代入すればよい。

$$M_S(t)=\frac{p}{1-\dfrac{1-p}{1-t}}=\frac{p(1-t)}{p-t}$$

次に、この式を変形すると、

$$M_S(t)=p\cdot 1+(1-p)\frac{p}{p-t}$$

となる。この式の第1項において1は定数0の積率母関数であり、第2項の $p/(p-t)$ はパラメータが p の指数分布の積率母関数であることから、S は定数0と指数分布とをそれぞれ重み p および $1-p$ による加重平均と見なすことができる。したがって、S の分布関数は、

$$F(x)=p\cdot 1+(1-p)(1-e^{-px})=1-(1-p)e^{-px}\ ,\ x\geq 0$$

となることがわかる。

3．　クレーム件数の最大は3であり、クレーム額の最大が3であることから、$x=0,1,2,\cdots,9$ について計算すればよい。$p(1)=0.5$ 、$p(2)=0.4$ 、$p(3)=0.1$ を用いて、

$$p^{2*}(2)=p(1)p(1)=0.25$$
$$p^{2*}(3)=p(1)p(2)+p(2)p(1)=0.40$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

と順次計算を行っていき、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{3}p^{n*}(x)\Pr(N=n)$$
$$F(x)=\sum_{y=0}^{x}f(y)$$

によって、数値を求めればよい。

x	$p^{0*}(x)$	$p(x)$	$p^{2*}(x)$	$p^{3*}(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	1.0	—	—	—	0.1000	0.1000
1	—	0.5	—	—	0.1500	0.2500
2	—	0.4	0.25	—	0.2200	0.4700
3	—	0.1	0.40	0.125	0.2150	0.6850
4	—	—	0.26	0.300	0.1640	0.8490
5	—	—	0.08	0.315	0.0950	0.9440
6	—	—	0.01	0.184	0.0408	0.9848
7	—	—	—	0.063	0.0126	0.9974
8	—	—	—	0.012	0.0024	0.9998
9	—	—	—	0.001	0.0002	1.0000

4.

(1)

a. モーメント法： $E(X)=\int_0^1 xpx^{p-1}dx = p/(1+p)=\bar{x}$ より、$\hat{p}=\bar{x}/(1-\bar{x})$。

b. 最尤法： $f(x)=px^{p-1}$ より、尤度関数は $L=p^n\left(\prod x_j\right)^{p-1}$

したがって対数尤度は、$l=n\log p+(p-1)\sum \log x_j$

$l'=np^{-1}+\sum \log x_j=0$ より、$\hat{p}=-n/\sum \log x_j$

(2) $\log f(x)=\log p+(p-1)\log x$, $\partial^2 \log f(x)/\partial p^2=-p^{-2}$

よって、$I(p)=nE(p^{-2})=np^{-2}$ であり、$\mathrm{Var}(\hat{p})=[I(p)]^{-1}=p^2/n$

(3) (1) b. より、$\hat{p}=-n/\sum \log x_j$

信頼区間は、この $\hat{p}$ を(2)の結果に代入して、$\hat{p}\pm 1.96\hat{p}/\sqrt{n}$

(4) $\mu=E(X)=p/(1+p)$ であるから、この最尤推定量は $\hat{\mu}=\hat{p}/(1+\hat{p})$

また、$\partial\mu/\partial p=(1+p)^{-2}$ より、$\mathrm{Var}(\hat{\mu})=(\partial u/\partial p)^2\,\mathrm{Var}(\hat{p})=(1+p)^{-4}p^2/n$

信頼区間は $\hat{u}\pm 1.96\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{u})}$ 、すなわち $\hat{p}(1+\hat{p})^{-1}\pm 1.96\hat{p}(1+\hat{p})^{-2}/\sqrt{n}$

5.

(1) 損害額をX、その確率密度関数を$f(x)$、そして免責金額がaの場合のクレーム額をYであらわすと、Yの期待値$E(Y)$は、

$$E(Y)=\frac{\int_0^\infty yf(y+a)dy}{\int_0^\infty f(y+a)dy}=\frac{\int_0^\infty (y+a)f(y+a)dy-\int_0^\infty af(y+a)dy}{\int_0^\infty f(y+a)dy}$$

$$=\frac{\int_0^\infty q(y+a)^{-(q+1)}(y+a)dy}{\int_0^\infty q(y+a)^{-(q+1)}dy}-a=\frac{\left[-\frac{q}{q-1}(y+a)^{-(q-1)}\right]_0^\infty}{\left[-(y+a)^{-q}\right]_0^\infty}-a$$

$$=\frac{\frac{q}{q-1}a^{-(q-1)}}{a^{-q}}-a=\frac{q}{q-1}a-a=\frac{a}{q-1}$$

となる。題意より、$a=2$, $\sum_{i=1}^{15}y_i/n=21$を代入して$q=1.1$を得る。

(2) 保険金支払いとならない事故も含んだすべての契約に対する保険会社の平均支払額について、免責金額2の場合は、

$$E(X)=\int_2^\infty (x-2)f(x)dx=\int_2^\infty xf(x)dx-2\int_2^\infty f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{q}{q-1}x^{-(q-1)}\right]_2^\infty-2\left[-x^{-q}\right]_2^\infty$$

$$=\frac{q}{q-1}2^{-(q-1)}-2\cdot 2^{-q}=9.3$$

一方、免責金額4、支払限度額100の場合は、

$$E(X)=\int_4^{104}(x-4)f(x)dx+\int_{104}^\infty (104-4)f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{q}{q-1}x^{-(q-1)}\right]_4^{104}-4\left[-x^{-q}\right]_4^{104}+100\left[-x^{-q}\right]_{104}^\infty$$

$$=-\frac{q}{q-1}\left[104^{-(q-1)}-4^{-(q-1)}\right]-4\cdot\left[-104^{-q}+4^{-q}\right]+100\cdot 104^{-q}$$

$$=2.4$$

したがって、減少率は、$2.4\div 9.3-1=-74\%$

第３章

経　験　料　率

第3章　経験料率

3.1 経験料率算定法

3.1.1 経験料率の意義

損害保険では、保険契約集団の内でリスクが不均質に存在している(「リスクの不均質性」という)場合があり、保険料率がリスクの混成割合の変化に十分に対応できなくなることがある。こうした場合、契約者間の公平性を保つために、リスクに応じて各リスクをグループ分けし、各グループ毎にクレーム頻度やクレーム単価から算出した同一の保険料率を適用する対応が一般的といえる。

しかしながら、グループ分けがなされていても、場合によっては、グループ内においてリスクの不均質性が残り、同一グループの中の一部のリスクにとっては、グループ内共通の料率が妥当でないことがありえる。そこで、新たなリスク要因を追加する、あるいは既存の要因に中間的水準を増設することによって、グループをさらに細かく分けることが考えられるが、この方法では、グループを細分化したことにより、グループ内のデータ量が十分でなくなり、分析に耐えられなくなる恐れがある。こうした状況に対処する解決法の一つとして用いられるのが経験料率法である。

経験料率法には、無事故割引制度を初めとして、信頼性理論やベイズの定理を用いての料率算定法や料率見直し法があり、いずれも現在使用している料率の基礎となるデータだけでは充分な料率算定ができない場合に、それ以外のデータ(たとえば、新しく得られたデータやリスクをより細分化したデータあるいは類似リスクのデータ等)を何らかの方法で料率に反映することにより、個々のリスクに応じたより相応しい料率を算定しようとするものである。

また経験料率法は、その性質から遡及的なものと将来的なものに分類できる。たとえば、保険期間終了時にクレーム経験が優良なリスクに対して保険料の一

部払戻しが行われる場合、この経験料率法は遡及的である。また自動車保険における無事故割引は次年度の保険料が運転者自身の経験に依存して決められるので将来的な経験料率法といえる。

3.1.2 無事故割引

(1) 個々の事故経験の導入

経験料率のシステムを現実に導入している典型例としては、自動車保険における無事故割引制度(no claim discount)がある。個々の事故経験をリスク要素として取り入れることは、このリスク要素が他の料率算定要素と全く異質である点で、非常に重要なものである。

料率体系に関し、車両の重量、車両の価格、地域および運転者の年齢といった多くの測定可能で、信頼でき、しかも適用可能な料率算定要素が定義されてきた。これらの要素により比較的同一の構造を有するリスクグループの料率算定を事前に行うという意味において、これらの要素は事前的な性質を持っている。

しかし、各リスクグループにおいて、個々のリスクには差異が残存している。それは、場合によって料率算定の過程で商業上、心理学上あるいは別の理由により説明力の高いリスク要素が使用できず、比較的低い要素を用いていることによる。これらの要素は比較的、運転者の人格に影響を受けるところが大きい。この問題の解決方法の一つとして、「個々の事故経験」というリスク要素を導入することが挙げられる。すなわち、事前に推計し得ない、あるいは無視したリスク要素について事故経験に適当なウエイトを置くという方法で、前もって行ったリスク区分をより一層良いものとすることができるのである。

個々のリスクは、毎年変化するクレーム頻度の分布を持った確率変数と考えることができ、その過去の事故経験のパターンを将来のクレーム頻度の分布状

態の推計、すなわち将来のクレーム頻度の期待値として使用することにより、「個々の事故経験」にリスク要素としての事前的性質を与えることができる。

このように、「個々の事故経験」を料率算定要素として取り入れたものが無事故割引制度である。

(2) 無事故割引制度の背景

無事故割引の概念は、自動車保険創設当初、優良契約を自社(同じ保険会社)で更改させる一手段として考案され、発展してきた。この意味合いは、損害調査部門のサービスを必要としなかったことに対する見返りであり、わが国で割引制度が初めて導入された1951年から65年頃までは、割引率も10%～15%と非常に小さなものであった。

しかし、自動車の普及に伴う自動車保険の発展とともに、最高割引率も1965年に50%、83年には60%まで拡大されたが、割引の適用面において、他の保険会社からの切り替え契約についても割引率を継承する制度が広まったため、同じ保険会社と契約を更改した契約者の割引面での特典はなくなってしまった。

(3) 無事故割引制度を採用する理由

無事故割引制度を用いる第一の理由は、レーティング(料率算定)のカテゴリー内におけるリスクの不均質性を減らすことにある。これは、(1)で既述した内容にほかならない。

もし、ポートフォリオが無事故割引のカテゴリーに従って区分することができれば、それ以外のレーティングの要素の影響を大幅に除去して、各の区分に対して経過台数あたりのクレームコストを計算することができる。これにより、保険金の支払を適切に考慮した上で、各区分において理論的に認められるべき割引率が示されることになる。

ここで数値例を挙げる。下表はある保険会社の数年以上にわたる経験統計

で、クレーム頻度と平均コストを示すものである。

表3-1

無事故割引カテゴリー	経過台数1000あたりの頻度	平均クレーム額	経過台数あたりのクレーム額
0	210	131	27.5
1	180	128	23.0
2	160	125	20.0
3	150	123	18.5
4	140	118	16.5
5	135	115	15.5
6	132	114	15.0
7	127	114	14.5
8	120	117	14.0
9	110	114	12.5

（注）各数字は、他の要因に関して無事故割引のカテゴリーのみの効果を表すよう、すなわち無事故割引と関連している他の要因（たとえば契約者年齢）によって影響を受けないように調整してある。

もし、カテゴリー0のグループが基本保険料（割引率0%）を支払っているのであれば、クレームコストに比例する正味保険料を与える割引の水準は、上記表よりおよそ次のようになる。

表3-2

無事故割引カテゴリー	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
割引率（%）	0	16	27	33	40	44	45	47	49	55

無事故割引制度を用いる第二の理由は、小損害請求を減少させ、クレームコストと諸費用の支出をこの制度を使わない場合よりも低い水準に抑えることにある。クレーム請求をするかどうかをよく考える契約者は、それをすることが将来の割引を失うことから、小損害請求は結果としてペナルティーになってしまうこ

とをよく知っている。この契約者の心理を利用し、クレームの大小にかかわらず必要となる損害査定費用を軽減しようとするのが目的である。なお、ペナルティーについては後で詳述する。

第三は、個人リスクの適正な評価である。すなわち、保険会社が、個人のリスクをもたらす要因に対して、より厳密に保険料を賦課することができることである。

そして、第四として、第二のペナルティーの副次的効果としての、契約者の安全運転の促進の期待が挙げられる。

(4) クレーム請求に対するペナルティー

クレーム請求をすると、まず翌年度の保険料がクレーム請求しなかった場合よりも高くなるという影響が出てくる。たとえば、60%の割引を予定しているときに割引をすべて失うことは、結果的に予定していたものよりも2.5倍の保険料になってしまう。これにより出費がかなり増加したことになり、さらに契約者は最高の割引率に到達するまでは毎年ペナルティーを被ることになってしまう。一般に最高の割引率に到達する期間が長ければ長いほど、ペナルティーは大きいといえる。

割引率が異なり、割引率の下がり方も違うときに、クレーム請求をする場合としない場合とで、今後支払う保険料を比較することは興味深い問題であり、とくに契約者にとっては重要なポイントになる。以下に述べる例では、将来のペナルティーは現価に直さず、保険料率のアップや今後クレームが発生する可能性もないと仮定している。

例3-1　1，2，3，4年とクレームがない場合、割引率はそれぞれ30，40，50，60%となり、1回クレームがあると割引率が2カテゴリー下がってしまう無事故割引制度（下表参照）において、現在の割引率が40%および50%である契約者が、クレーム請求した場合としない場合の割引率を比較したものが表3-3であ

る。

各カテゴリーの割引率

カテゴリー名	割引率
カテゴリー0	0%
カテゴリー1	30%
カテゴリー2	40%
カテゴリー3	50%
カテゴリー4	60%

表3-3

<table>
<tr><th rowspan="3">事故後の経過年数</th><th colspan="6">現在の割引率</th></tr>
<tr><th colspan="3">40%</th><th colspan="3">50%</th></tr>
<tr><th>事故後の割引率</th><th>無事故時の割引率</th><th>差引</th><th>事故後の割引率</th><th>無事故時の割引率</th><th>差引</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>50</td><td>50</td><td>30</td><td>60</td><td>30</td></tr>
<tr><td>2</td><td>30</td><td>60</td><td>30</td><td>40</td><td>60</td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td>40</td><td>60</td><td>20</td><td>50</td><td>60</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>50</td><td>60</td><td>10</td><td>60</td><td>60</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>60</td><td>60</td><td>0</td><td>60</td><td>60</td><td>0</td></tr>
<tr><td>差引計</td><td></td><td></td><td>110</td><td></td><td></td><td>60</td></tr>
</table>

割引率40%の場合のペナルティーの合計は割引率50%の場合の2倍近くなっていることがわかる。割引のない契約者に対するペナルティーは、30＋10＋10＋10＝60%となっており、同様に割引率30%の場合は40＋20＋20＋10＝90%、割引率60%の場合は、20＋10＝30%である。このように、現在適用されている割引率のカテゴリーによってペナルティーの大きさが大幅に異なることがわかる。

例3-2　新しく保険に加入する契約者は、基本保険料の100%で加入し、保険料は1回事故を起こすと20%上がり、事故がないと20%下がる。割引率は最

高60％で、基本保険料を100としたときのペナルティーの二つの例を示したのが表3-4である。

表から、この制度は極端に大きなペナルテイーと小さなペナルティーとをもたらすことがわかる。これはボーナスマラス制度(bonus-malus system)として知られ、不良契約者から割増保険料を徴する制度を組み入れた無事故割引制度の応用である。

表3-4

<table>
<tr><th rowspan="3">事故後の
経過年数</th><th colspan="6">現在の保険料</th></tr>
<tr><th colspan="3">160</th><th colspan="3">40</th></tr>
<tr><th>事故後の
保険料</th><th>無事故時
の保険料</th><th>差引</th><th>事故後の
保険料</th><th>無事故時
の保険料</th><th>差引</th></tr>
<tr><td>1</td><td>180</td><td>140</td><td>40</td><td>60</td><td>40</td><td>20</td></tr>
<tr><td>2</td><td>160</td><td>120</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>140</td><td>100</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>120</td><td>80</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>5</td><td>100</td><td>60</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>80</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>60</td><td>40</td><td>20</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>8</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td><td>40</td><td>40</td><td>0</td></tr>
<tr><td>差引計</td><td></td><td></td><td>260</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
</table>

(5) 無事故割引の規定変更による影響

新しい無事故割引制度(それが割引率を上下させる規定の変更にせよ、割引率自体の変更にせよ)を導入する前に、その変更が保険料収入面において短期的かつ長期的にどんな影響を及ぼすのか推定することは重要である。

そこで、制度変更の影響を測るために、クレーム件数がポアソン分布に従うと仮定したモデルを用いて、ある無事故割引制度における各々の無事故割引のカテゴリーの構成比の推移、そして最終的な状態(契約者分布の増減のない

状態を指し、以下、「定常状態」と呼ぶ）の平均無事故割引率を試算してみる。

以下、具体的に前記例3-1の無事故割引制度を使用し、その計算を説明する。

例3-1の制度下では、契約者があるカテゴリーから別のカテゴリーに移る確率は、次のような行列（以下、「推移行列」と呼ぶ）の形で表現できる（なお、中途での脱落はないものとする）。

移動後の無事故割引のカテゴリー

移動前の無事故割引のカテゴリー

$$
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \quad\quad\quad 0 & \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\
1-p_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 \\
1-p_0 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\
1-p_0-p_1 & p_1 & 0 & 0 & p_0 \\
1-p_0-p_1 & 0 & p_1 & 0 & p_0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

p_0 : 無事故の確率、　p_1 : 事故が1回起こる確率

仮にクレーム件数がポアソン分布に従い、全体のクレーム頻度が0.1と仮定すると、p_0=0.90484、p_1=0.09048[1] と計算される。このときカテゴリー0に10,000件の加入があったとすると、各カテゴリーの件数は以下のようにして求まる。

上記の推移行列を X とし、y_i を第 i 年度におけるカテゴリー j（j=0,1,2,3,4）の契約件数 $y_{i,j}$ を要素に持つベクトル $y_i = (y_{i,0} \quad y_{i,1} \quad y_{i,2} \quad y_{i,3} \quad y_{i,4})$ と

---

1 ポアソン分布 $P\{X=k\} = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$（$\lambda = 0.1$）に従うことから、$p_0 = e^{-0.1}$ ＝0.90484、p_1 ＝0.1 $e^{-0.1}$ ＝0.09048となる。

する。

この場合、初年度の状態 y_1 は、$y_1 = (10{,}000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$、2年度目の状態 y_2 は $y_2 = y_1 X = (952 \quad 9{,}048 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$、以下同様に、3年度目の状態 y_3 は $y_3 = y_2 X = y_1 X^2$、4年度目の状態 y_4 は $y_4 = y_3 X = y_1 X^3$ として求めることができる。

また、最終的な状態 y_∞ は、(増減のない状態(定常状態)なので)

$$y_\infty = y_\infty X$$

$$y_{\infty,0} + y_{\infty,1} + y_{\infty,2} + y_{\infty,3} + y_{\infty,4} = 10{,}000$$

を解くことにより求められる。各カテゴリーの年度別件数は、表3-5のとおりである。

表3-5

年 度	無事故割引カテゴリー				
	0	1	2	3	4
1	10,000				
2	952	9,048			
3	952	861	8,187		
4	952	861	779	7,408	
5	281	1,532	779	705	6,703
6	281	318	1,993	705	6,703
7	281	318	895	1,803	6,703
8	182	418	895	809	7,696
9	182	238	1,075	809	7,696
10	182	238	912	972	7,696
…	…	…	…	…	…
最終的	165	224	915	827	7,869

また、各年度の平均無事故割引率は、次のようになる[2]。

表3-6

年度	1	2	3	4	5	
平均無事故割引率(%)	0.0	27.1	35.3	42.7	51.5	
	6	7	8	9	10	最終的な状態
	52.7	53.8	55.1	55.2	55.4	55.7

実際には、ポートフォリオの動きやクレーム頻度の変化によって、契約者分布の推移の仕組みはより複雑になる。また、無事故割引のカテゴリーの構成割合は、最終的な状態に対応したものになるとは限らない。それは、新規加入者があるため無事故割引率のより低い層の割合が、いつも最終的な状態の割合よりもいくぶん高めになっているからである。

無事故割引率の変更が与える影響を計算するときは、新旧割引率の年度ごとの比較をすればよい。たとえば、もし現在の割引率を使い続けるケースと、新しい割引率を導入するケースとがあり、ポートフォリオ全体でともに初年度はそれぞれの基本保険料は収入保険料が同じになるように決められているとする。二つの割引率のどちらを選ぶかというときに、そのポートフォリオで翌年度どちらの割引率を使えば、より多くの保険料収入を得ることができるかを知ることは価値のあることであり、とくに保険料率を上げるかどうかを決定する際には、極めて重要である。

2　例3-1において1,2,3,4年とクレームがない場合の割引率がそれぞれ30,40,50,60%なので、カテゴリー0,1,2,3,4の割引率がそれぞれ0,30,40,50,60%となる。このことから、たとえば第3年度の平均無事故割引率は以下のとおり求まる。

(0%×952＋30%×861＋40%×8,187)/10,000＝35.3%

さらに付け加えると、無事故割引を変更する場合それがクレーム頻度に影響を与える可能性も十分に考えられるので、クレーム頻度のパターンに関して仮定をいくつか変えてその影響を確認しておく必要がある。

3.1.3 グループ経験料率

(1) グループ経験料率とは

損害保険の料率算定では、保険契約者の持つ危険度の差異を料率に反映するため一定の料率算定要素に基づき料率を区分する必要があるが、さらに料率算定要素の種類を増やすことが客観性、社会性ないしは合理性等の面から困難であったり、また既存の料率算定要素の下での区分数を増やすことがデータ量の面から困難となる状況が考えられる。また、このようなクラス料率算定法では、本来的に同一リスクグループの平均値を適用することとなるため、個々の契約者のリスク特性を厳密には反映し得ていないものとも考えられる。このような問題点への対応策として前述のとおり、事前的な料率算定要素に加え事故経験といういわば事後的要素の導入が行われているが、この場合、自動車保険における無事故割引制度のように車両1台単位で契約が行われている下で個々の事故経験を料率に反映させていく方法のほか、企業のように多数の車両を保有している契約者について、その車両の集団にかかわる事故経験の総体を料率に反映していく方法が採られている。後者のような料率は自動車保険では通常フリート契約者料率と呼ばれているが、このように通常リスク単位として扱っているもの（自動車保険では車両1台）の集団をその属性等から判断して一つのリスク単位と位置づけたうえで、集団としての事故経験を料率に反映させるのがグループ経験料率である。

(2) グループ経験料率の具体例

グループ経験料率は自動車保険に限らず傷害保険の団体契約等において

も行われているが、一つの典型例として上記自動車保険のフリート契約者料率を中心にその具体例を見てみることとする。

例3-3 1,000台以上の大規模フリート契約を対象として、有限変動信頼性理論[3]に基づく料率計算式に沿った形で次のような保険料の算定を行う。すなわち、フリート契約者の直近1ヵ年のクレーム統計に基づくクレームコストに対し、必要な付加保険料を加えて算出した営業保険料をY_1、前年度の適用営業保険料をY_0として、当年度の営業保険料Yを

$$Y = Z \cdot Y_1 + (1 - Z)\,Y_0$$

として算出している。

Zは当該フリート契約者の規模により定められる$0 \leq Z \leq 1$の数値であり、信頼度を確保する観点から

$$P\,(|Y - Y_0| \geq 0.1 \times Y_0) \leq 0.05$$

という基準を満たすように決定されている。

このような形で大規模フリート契約者の保険料を算出することにより、クレームコストについてのランダムな変動が予想される中、長期にわたり適正な料率が適用され、また契約者に対し事故抑止の意識も喚起しうるといったメリットが期待される。

例3-4 一定規模以上のフリート契約者を対象として、過年度のクレーム統計を参考として以下のような保険料の算定を行う。

ある契約者のクレーム統計を表3-7のとおりとする。

[3] 詳細は、「3.2信頼性理論」参照。

表3-7

	既経過台数	契約者の 合計保険金	台数1台あたりの クレームコスト
前々々年度	a_1	b_1	b_1/a_1
前々年度	a_2	b_2	b_2/a_2
前年度	a_3	b_3	b_3/a_3
3ヵ年通算	$a_1+a_2+a_3$	$b_1+b_2+b_3$	$\dfrac{b_1+b_2+b_3}{a_1+a_2+a_3}$
2ヵ年（前、 前々年)通算	a_2+a_3	b_2+b_3	$\dfrac{b_2+b_3}{a_2+a_3}$

このような形でのフリート契約者保険料の算出は、統計理論的側面よりも、むしろ市場環境にウエイトを置いた経験料率としての色彩が強い。

例3-5　基本的に250台以上の大規模フリート契約者を対象として、

① 過年度のクレーム統計

② 運転者の運転習熟度合

③ 過去の事故歴を運転者の給与に反映するといった事故抑止効果

④ 交通事故の防止活動の実施状況

⑤ 他種目の付保状況

等の点を調査のうえ保険料の算定を行い、市場環境に加え当該契約者の定性面からのリスク評価を織り込んだ経験料率を採用する。

例3-6　保険契約者を契約量の大きさでノンフリート契約者とフリート契約者に区分する、すなわち総付保台数が9台以下の契約者をノンフリート契約者として前述の無事故割引と保険数理上同様の考え方に基づくノンフリート等級別料率を適用する一方、総付保台数が10台以上の契約者をフリート契約者として、契約者単位に算出した所定の期間の損害率に基づき割引率ないしは割増率を決定する。

また、フリート契約者の割引率・割増率は実務上の便宜性を踏まえ次のようにテーブル化する。

① 契約者単位の損害率は、契約者単位の実績クレームコストを用途・車種別の基本保険料との対比でいわば率表示したものであり、このような実績損害率に基づき当年度の適用割引率・割増率を決定するにあたっては、当該契約者のデータ量に応じて契約者個別のロス経験を反映する観点から、モデルは総付保台数によって区分して設定する。

② 自動車保険の損害率は、1件当たりの支払額が高額となる傾向がある対人賠償保険の保険金等が反映される結果、比較的小規模なフリート契約者を中心に、実態として損害率が大きく変動する可能性がある。このため総付保台数に基づく格差に加え、保険料の激変を避ける観点より、割引率、割増率の加減率には一定の限度を設ける。

例3-7（傷害保険の団体契約） 傷害保険においては被保険者の災害危険を担保することとしており、被保険者を料率上のリスク単位として、当該被保険者の従事する職業職種によって生じる就業中の危険度の格差等を反映する形で料率の算定が行われている。また傷害保険においてはいわゆる団体契約が行われているが、このうち一定の性格を備えた団体が相当の契約規模に達した場合、いわば団体を一つのリスク単位とした上でその団体の実績損害率に基づく割引を実施している。なお、この種の割引は、日本の普通傷害保険等で実施されているが、実務上は団体の保険料規模が概ねその団体のデータ量に比例する点を踏まえ、当該保険料規模に応じて、団体個別の事故経験を反映する観点から割引率の適用がなされている。

以上のようにグループ経験料率の具体例を見た場合、保険種目におけるリスク区分の差異や国における料率規制のあり方、市場環境といったことから種々の形態をとっているが、基本的にはデータ量に応じた事故経験の評価と

いったアクチュアリアルな観点がその基礎にあるものと考えられる。なおグループ経験料率において、信頼性理論でいうところの全信頼度が得られるとするためには、n_0 ＝1,082のクレーム件数[4]をもとに必要なクレーム件数を算出する方法がしばしば採用されている。仮にこのような規模でのクレーム件数がデータとして得られることをもって全信頼度が確保されるとする場合、当然これをさらに上回る付保台数や被保険者数が必要となるため、契約実態としてフリート契約や団体契約においては、通常その個別クレームデータの信頼度はかなり制限的とならざるを得ない傾向にある。また、グループ経験料率として位置づけたフリート契約者料率においても、一つの契約者という限定されたグループの中ではなく、むしろ複数のフリート契約者の集団というより広いグループの中で、適用する割引率や割増率の妥当性を確保していく手法も採られている。具体的には過年度における契約者単位の損害率に基づき当年度の割引率・割増率を決定するが、当該割増引の妥当性は、契約者の集団でこれを検証していく形を採っており、無事故割引が過年度の無事故実績をいくつかのカテゴリーに区分して割引を行うのと同様、契約者の損害率実績をいくつかのカテゴリーに区分して割増引を行うものとなっている。なお、このような割増引制度を採ることで、ノンフリート契約者に対する無事故割引（ないしは等級制度）やフリート契約者に対する割増引を、同一の視野に入れて契約者間の料率の公平を図っていくことが可能となっている。

4　3.2.2(3)表3-8参照。

3.2 信頼性理論

3.2.1 信頼性理論の概要

(1) はじめに

信頼性理論は、クレーム実績データに基づき料率算定を行う際に、その統計量の正確さ(真の値を反映するという意味での正確さ)に対する「信頼の度合い」に応じて一定の調整を行う手法であり、データ数の不足により適当な料率算定が行えない場合の対応の必要性から生まれてきたものである。信頼性理論は統計的知識と実務家判断とをバランスよくあわせて利用している点から、損保アクチュアリーにとって、最も重要かつ基本的な技術といえる。

(2) 信頼性理論とは

冒頭述べた通り、実績データから保険料を算出する際に解決すべき問題の一つとしてデータの信頼性が挙げられる。

たとえば、直近の実績データのデータ量が十分でなかった場合、標本分散は大きくなる。すなわち、データとしての「ブレ」が多く含まれるといえる。そうした不安定なデータから、料率算出を行うことは、アクチュアリアルな観点から妥当ではない。

そこで、信頼性理論では、直近の実績データ(T)に加えて、別途利用可能なデータ(M)を用意し、その上で重み Z ($0 \le Z \le 1$)で加重平均した加重データC

$$C = Z \cdot T + (1 - Z) \cdot M \tag{3.1}$$

を保険料算出に使用するようにしている(ちなみにTとMの組み合わせには、たとえば「自社実績データ」と「一般統計データ」、「商品Aのデータ」と「類似商品Bのデータ」、「分析対象ポートフォリオのみのデータ(小分類)」と「分析対象

ポートフォリオを包含するより多数のデータ(大分類)」、「直近年度のデータ」と「中長期間のデータ」等、さまざまなものが考えられる。一般的に、T はデータ数が少ないが分析対象ポートフォリオの特性を表したデータを、M は分析対象ポートフォリオの特性よりも統計的な安定性に重点をおいたデータが採用される)。

信頼性理論では、$Z=1$ のとき、すなわち「手元にあるデータ」が十分信頼しうる、それのみで推定が可能と判断される状態を全信頼(full credibility)とよび、一方で、$0 \le Z < 1$ のとき、すなわち「補助データ」が必要と考えられる状態を「部分信頼」(partial credibility)と呼んでいる。

さて、信頼性理論の大きな流れは上の通りであるが、同理論の中心となるのは、重み Z (信頼度:credibility factor)の算出(あるいは算出方法)である。

信頼度 Z の算出には、種々の手法が存在するが、本書では①有限変動信頼性理論、②ベイズ方法論と③Bühlmann 理論の三つの手法を紹介する。有限変動信頼性理論は、信頼度の問題を定量化しようとした試みであり、一連の信頼性理論の原型となっているものである。ベイズ方法論はベイズ統計学を用いた理論であり、Bühlmann 理論は、それを応用した統計的枠組みである。

3.2.2 有限変動信頼性理論

有限変動信頼性理論(limited fluctuation credibility theory)は、20世紀の前半においてMorbrayやWhitney、Bailey等によって信頼性に関して初めて研究された内容であり、本章の後半にて紹介する「Bühlmannモデル」等の後の信頼性理論につながる基盤を築いている。今日では有限変動信頼性理論は時に「古典的な信頼性理論」と称されるものの、区間推定法を取り入れた、その平明な考え方は、初学者が損保数理の信頼性理論の学習を進めるための入門編として有用なものとなっている。

以下では、まず、有限変動信頼性理論の前提となる考え方を簡単に整理し

た後、信頼性理論の重要な道具にあたる、クレーム総額のモデル概要を説明する。そのうえで、「全信頼度」、「部分信頼度」について紹介する。

(1) 有限変動信頼性理論の前提

仮に、ある保険会社が、クレームデータ(例:クレーム件数、クレーム額)に関して、一定の制約条件の下(自社の契約のみに関するデータ、過去n年のデータ等々)で収集された実績データ$X_1, X_2, \cdots, X_n$(ここでは同一の分布$\Pi(\mu, \sigma^2)$に従うとする)から算出された実績平均値$\overline{X}$を保有する一方で、類似のデータ(例:同様の条件であるが海外のデータ、他社・算定会等の外部データ等)から得られた値Mをも保有しているとする。$\overline{X}$はμの不偏推定量であるが、分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$の確率変数であるため、μからずれる可能性(すなわちランダム性)を保有している。

ここで、保険会社が料率算定をする上で採ることのできる選択肢としては、大きく三つ

① 「分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$は小さく、$\overline{X}$は安定したデータであり、μの推定量に足る」と考え、$\overline{X}$のみを利用する。

② 「分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$は大きく、$\overline{X}$は不安定なデータであり、μを推定する上ではMの方が信頼性が高い」と考え、Mのみを利用する。

③ ①、②を選択する程、極端な判断はできない結果として、$\overline{X}$、Mを組み合わせた値Cを利用する。

が考えられる。(有限変動信頼性理論では、①の選択を「全信頼」、③の選択を「部分信頼」と呼んでいる。)

問題は、これらの選択肢を選ぶための方法である。

有限変動信頼性理論では、たとえば、①の選択に関すれば、「$\overline{X}$が真の値μの上下k%の中にある確率がp以上のとき、$\overline{X}$に全信頼をおく」という区間

推定法の考え方を取り入れている。さらに、この考え方を基に全信頼に必要なクレームデータの条件（例：必要最低限のデータ数）や、あるいは、手元にあるデータ数から判断できる、データの信頼度合いを求めている（なお、この中でのk, pの水準は、アクチュアリーの定性的な判断や経験に負うことが多く有限変動信頼性理論の課題といえる。ただ、一方でこうした「自由度」は柔軟な料率算定を行うことができるという意味で強みともいえる）。

上の考え方の詳細については、後記の(3)全信頼度、(4)部分信頼度において説明する。

(2) クレーム総額の分布

(1)でも触れたが、信頼性理論の議論では、クレーム件数とクレーム額の要素に分解されたクレーム総額（T）のモデルを立て、それら要素のモーメントからTのモーメントとパーセント点（percentiles）を計算することが多い。この一連の操作は信頼性理論の議論の中で最も基本となる部分なので、以下簡単に説明する。

ある期間のクレーム総額Tの定義を、次のとおりとする。

$$T = X_1 + \cdots + X_N$$

ここで、Nはこの期間におけるクレーム数であり、X_iはi番目のクレーム額である。X_iは互いに独立、またNとも独立であり、全てのクレームは同じ分布に従うと仮定する。

なお、この場合、Tの平均$E(T)$、分散$V(T)$、歪度$Skw(T)$は以下の式により与えられる。

$$E(T) = E(N) \cdot E(X) \qquad (3.2)$$ [5]

---

5 $E(T) = E_N(E_X(T \mid N)) = E_N(N \cdot E_X(X)) = E_N(N) \cdot E_X(X)$

$$V(T)=E(N)\cdot V(X)+V(N)\cdot\{E(X)\}^2 \qquad (3.3)^{6}$$

$$Skw(T)=\frac{Skw(X)\cdot CV^3+3n_2\cdot CV^2+n_3}{\sqrt{E(N)(CV^2+n_2)^3}} \qquad (3.4)^{7}$$

ここで、CV、n_iは

$$CV=\frac{\sqrt{V(X)}}{E(X)} \qquad (3.5)^{8}$$

$$n_i=E[(N-E(N))^i]/E(N) \qquad (3.6)$$

である。

(3) 全信頼度

ある保険会社が引き受けている契約のポートフォリオの中で、一定期間内(たとえば1年間)に発生するクレーム件数を確率変数Nで表し、その平均値をnとする。ここでNはポアソン分布に従うと仮定すると、Nの分散は$V(N)=n$となる。

次にi番目のクレーム額を確率変数$X_i(i=1,2,\cdots,N)$で表し(平均および分散はそれぞれ$E(X_i)=m$、$V(X_i)=\sigma^2$)、さらにNおよび$X_1,X_2,\cdots,X_N$は互いに独立とする。このとき、クレーム総額T、およびその平均と分散は(3.2)、(3.3)より、次のように表される。

---

6 $V(T)=E_N[V_X(T\mid N)]+V_N[E_X(T\mid N)]$

$=E_N[N\cdot V_X(X)]+V_N[N\cdot E_X(X)]$

$=E_N[N]\cdot V_X(X)+V_N[N]\cdot\{E_X(X)\}^2$

7 $Skw(X)$はXの歪度で$Skw(X)=E((X-E(X))^3)/V(X)^{1.5}$で計算される。歪度は確率分布の非対称性の指標で、歪度＞0ならば右の裾が長く、歪度＜0ならば左の裾が長いと判断できる。

8 標準偏差と平均の比$CV=\sqrt{V(X)}/E(X)$は、変動係数と呼ばれることがある。

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$
$$E(T) = nm$$
$$V(T) = n(\sigma^2 + m^2)$$

さて、保険会社は年初においては、ポートフォリオのリスクとクレーム額の主観的な評価、あるいは、他の類似のポートフォリオにおける統計に基づき決定した期待値Mが使用できた。ところが年度末においては、クレームコストの総額Tが実績値として既知のものとなる。そこで翌年からは、次のCが純保険料の期待値の修正版として使用されることになる。

$$C = (1 - Z) \cdot M + Z \cdot T$$

Zは実績値Tに対する信頼度である。

さて、どの程度のボリュームの実績データTを入手すれば、期待値Mを無視し、Tのみに基づく純保険料の算定が可能になるのか、すなわち、全信頼度（$Z = 1$）が得られるのかが問題となる。有限変動信頼性理論では、たとえば「Tが95％の確率で、真のクレームコストの上下10％以内に収まれば、Tに全信頼度を与える」という制約条件を設定することによって、全信頼度を与えるのに最低必要となるクレーム件数を求めることができる。

この制約条件は、

$$P\big(0.90E(T) < T < 1.10E(T)\big) = 0.95$$

と表され、さらに

$$P\left(\frac{-0.1E(T)}{\sqrt{V(T)}} < \frac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}} < \frac{0.1E(T)}{\sqrt{V(T)}}\right) = 0.95$$

と書き直せる。

仮に、$\dfrac{T - E(T)}{\sqrt{V(T)}}$が標準正規分布$N(0,1)$に近似[9]できる場合であれば、左辺

9　$X_i\,(i = 1,2,\cdots,N)$は互いに独立な確率変数であり、平均・分散が共通であることか

は、

$$P\left(\frac{|T-E(T)|}{\sqrt{V(T)}}<\frac{0.1E(T)}{\sqrt{V(T)}}\right)=2\int_0^{\frac{0.1E(T)}{\sqrt{V(T)}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

となる。そこで(右辺)= 0.95となる $\dfrac{0.1E(T)}{\sqrt{V(T)}}$ の値は1.96であることから、

$$\frac{0.1E(T)}{\sqrt{V(T)}}=1.96$$

という等式を得ることができる。

上式に、先に求めた $E(T)=nm$、$V(T)=n(\sigma^2+m^2)$ を代入し、n について整理することによって、

$$n=384\left\{1+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right\}$$

と、「95%の確率で±10%の範囲内」とした場合の T に全信頼度を与える条件(最低限のクレーム件数)が得られる。

これを一般的な条件「$100p$%の確率で±$100k$%の範囲内」の場合に書き改めると、次のようになる。

$$n_F=n_0\left\{1+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right\} \qquad (3.7)$$

ただし、$n_0=\dfrac{y^2}{k^2}$。ここで、yは $2\displaystyle\int_0^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=p$ なる点である。また、n_F は全信頼度に必要なクレーム件数を表す。

一般的に使用される p と k の組み合わせによる n_0 の値は、表3-8のとおりである。$p=0.9, k=0.05$ から求められる $n_0=1{,}082$ は、n_F (全信頼度に必要な

ら、N が大きくなると、中心極限定理により $\dfrac{T-E(T)}{\sqrt{V(T)}}$ は $N(0,1)$ に収束する。

クレーム件数)を求めるための件数として頻繁に使用されている。

表3-8 n_0 (クレーム件数)

p \ k	0.3	0.2	0.1	0.05	0.01
0.90	30	68	271	1,082	27,060
0.95	43	96	384	1,537	38,416
0.99	74	166	663	2,654	66,358
0.999	120	271	1,083	4,331	108,274

例3-8　表3-9は、ある保険会社が有するある保険種目の100件のクレームの額別分布である。クレーム頻度は、0.015である。この経験統計に全信頼度($p=0.9, k=0.05$)が与えられるための、最小限のポートフォリオの大きさを求める。

表3-9

クレーム額	クレーム数
0 ～ 400	2
400 ～ 800	24
800 ～ 1,200	32
1,200 ～ 1,600	21
1,600 ～ 2,000	10
2,000 ～ 2,400	6
2,400 ～ 2,800	3
2,800 ～ 3,200	1
3,200 ～ 3,600	1
3,600 ～	0
合　　計	100

表3-9より、クレーム額の平均値 m (=1,216)と分散 σ^2 (=362,944)が計算できるので、これより σ/m (=0.50)が得られる。また、表3-8より、 $p=0.9, k=0.05$

に対応するn_0（=1,082）が得られる。これらの数値を（3.7）式に代入すると、全信頼度に必要な最低のクレーム数の期待値n_F（=1,353）が求まる。クレーム頻度は0.015であるから、全信頼度に必要な最小のポートフォリオ、すなわち契約件数は、約90,000件となる。

（4） 部分信頼度

実務の局面においては、経験統計量が小さいために、全信頼度を与えることができないことが多い。そうしたケースでは部分信頼度（partial credibility）Zを算出し、推定量Cを決定する必要がある。（3.1）式においてMは、実績値を得る前に別のデータにより計算された固定値（定数）であり、クレーム総額Tは実績値に基づく確率変数である。したがって、仮に推定量Cの変動幅が、確率pで全信頼度の変動幅$2kE(T)$よりも狭い範囲に限定されているとすると、ZTも確率pで$ZE(T) \pm kE(T)$の範囲になければならない。言い換えると、

$$P(ZE(T)-kE(T) < ZT < ZE(T)+kE(T)) = p \tag{3.8}$$

すなわち、

$$P\left(\frac{-kE(T)}{Z\sqrt{V(T)}} < \frac{T-E(T)}{\sqrt{V(T)}} < \frac{kE(T)}{Z\sqrt{V(T)}}\right) = p$$

と表せる。

$\dfrac{T-E(T)}{\sqrt{V(T)}}$が標準正規分布で近似できる場合、前と同様の手法により次式を得る。

$$\frac{kE(T)}{Z\sqrt{V(T)}} = y \qquad \text{（}y\text{は、}2\int_0^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = p\ \text{なる点）}$$

ここで、$E(T) = nm$、$V(T) = n(\sigma^2 + m^2)$、$\dfrac{y}{k} = \sqrt{n_0}$を代入し、$Z$について解けば、

$$Z=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n_0\left\{1+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right\}}}$$

となり、さらに$n_F=n_0\left\{1+\left(\frac{\sigma}{m}\right)^2\right\}$より、

$$Z=\sqrt{\frac{n}{n_F}} \tag{3.9}$$

を得る。

例3-9　例3-8の保険会社が実際に有する契約件数は19,307件である。前年度の合計純保険料は366,833、クレーム総額は340,575であった。信頼性理論に基づけば、今年度、各契約の純保険料をいくらにすればよいか検討する。

例3-8より、全信頼度に最低必要なクレーム数の期待値n_Fは、1,353件である。また、クレーム頻度は0.015であるから、このポートフォリオにおけるクレーム数の期待値nは、290件である。したがって、(3.9)式により(部分)信頼度Z(=0.46)が求まる。

次に、(3.1)式により今年度得べき合計純保険料Cを求めると、$M=366{,}833$、$T=340{,}575$、$Z=0.46$を代入して$C=354{,}754$となる。よって、今年度の各契約ごとの純保険料は、

$$\frac{354{,}754}{19{,}307}=18.37$$

となる。

(5) 正規近似とNP近似

a. 正規近似とNP近似

Tのパーセント点を推定する方法の一つに、たとえばTを正規分布あるいはガンマ分布とするなど、特別な確率分布を仮定する方法がある(いうまでもなく、前節までの議論では正規分布を仮定している)。すなわちXとNのモーメ

ントが既知のとき、それらを基にして(3.2)～(3.6)から、T の分布モーメントを推定した上で、T のパーセント点を推定することができる。

特に T が複合ポアソン分布(「2.2.2 クレーム総額分布」参照)の場合には、そのパーセント点の算出に種々の方法が用いられている。それらの内、代表的な方法である、正規近似(normal approximation)、NP近似(normal power approximation)[10]について、結論だけ紹介する。

T の p パーセント点 t_p は、

正規近似

$$t_p = E(T) + \sigma_T y_P \tag{3.10}$$

NP近似

$$\begin{aligned} t_p &= E(T) + \sigma_T y_p + \sigma_T Skw(T)({y_p}^2 - 1)/6 \\ &= E(T) + \sqrt{V(T)}\left(y_p + Skw(T)({y_p}^2 - 1)/6\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

(σ_T : T の標準偏差、y_p : 標準正規分布の p パーセント点)

前者の正規近似は歪度 $Skw(T)$ が十分小さいときにのみ使用可能であり、後者のNP近似は $Skw(T)$ がおおよそ2を超えない場合に使用可能といわれている。ちなみに(3.10)は(3.11)式において $Skw(T)=0$ とした特殊なケースといえる。

b. 近似の信頼性理論への応用

前項で紹介した複合ポアソン分布の正規近似、NP近似の信頼性理論への

---

10 複合ポアソン分布に従う確率変数 X の期待値、標準偏差、歪度がそれぞれ μ_X, σ_X, γ_X であるとき、$P(X \le x) = \Phi(y)$ ($\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数)となる値 x は、y との間で $\dfrac{x-\mu_X}{\sigma_X} = y + \dfrac{1}{6}\gamma_X(y^2 - 1)$ という近似をとることができる。この近似をNP近似と呼ぶ。なお、NP近似については、参考文献の5に詳しい。

応用を以下紹介する。

① 信頼度Zの算出

(3.8)式は、T が左右対称な分布(すなわち $Skw(T)=0$)ならば、

$$P(T > E(T) + kE(T)/Z) = q/2$$

と変形できることから、

$$t_{q/2} = E(T) + kE(T)/Z \qquad (3.12)$$

(ここで、$q = 1 - p$ とする)となる。

正規近似を使う場合、(3.12)式に(3.10)式を代入することによって、Z は近似的に求められることができる。

$$Z = \left(k / y_{q/2}\right)\sqrt{E(N)/m_2} \qquad (3.13)$$

と求められることができる。

また、NP近似の場合、(3.12)式に(3.11)式を代入し、整理することによって、Z は

$$Z = k \Big/ \{y_{q/2}\sqrt{m_2/E(N)} + (m_3/m_2)({y_{q/2}}^2 - 1)\Big/ 6E(N)\} \qquad (3.14)$$

(なお、$m_2 = n_2 + CV^2$ 、$m_3 = CV^3 Skw(X) + 3n_2 CV^2 + n_3$)と近似的に求めることができる[11]。

② 全信頼に必要なクレーム件数 n_F の算出

$E(N) = n$ を Z の関数とみて n_z とおき、(3. 13)式を解くと、

$$n_Z = (Z^2/k^2)(y_{q/2}\sqrt{m_2})^2 = m_2(Zy_{q/2}/k)^2$$

[11] (3.13) (3.14)式は、(3.2)～(3.6)式より求めた

$$E(T) = E(N)E(X)$$

$$\sigma_T^2 = V(T) = E(N)V(X) + E(X)^2 V(N)$$

$$= E(N)E(X)^2 m_2$$

$$Skw(T) = m_3 \Big/ \sqrt{E(N){m_2}^3}$$

を用いることによって定まる。

(3.14)式を$\sqrt{E(N)}$の2次方程式として解くと、

$$n_Z = (Z^2/4k^2)\left(y_{q/2}\sqrt{m_2} + \sqrt{{y_{q/2}}^2 m_2 + 2(k/Z)({y_{q/2}}^2 - 1)m_3/3m_2}\right)^2$$

となる。

n_zの式において$Z=1$とすることによって、全信頼に必要なクレーム件数n_Fを近似的に求めることができる。

正規近似の場合には、

$$n_F = m_2(y_{q/2}/k)^2$$

となり、NP近似の場合には、

$$n_F = \left(y_{q/2}\sqrt{m_2} + \sqrt{{y_{q/2}}^2 m_2 + 2k({y_{q/2}}^2 - 1)m_3/3m_2}\right)^2 \Big/ 4k^2$$

となる。

例3-10　ある国の火災保険の1年間のクレームについて、

・ クレーム件数Nは平均120,000のポアソン分布に従う。

・ 個別クレームの額Xは平均100、標準偏差1,000、歪度300である。

ことがわかっている。

この場合に、年間クレーム総額Tに全信頼を与えるのに必要なクレーム件数を求めたい。

計算に必要なパラメータは(3.5)、(3.6)より

$$n_2 = 1.000$$

$$n_3 = 1.000$$ [12]

$$CV = 10.000$$

---

[12] 平均λのポアソン分布の場合、
平均値周りの2次モーメント(分散)：　λ
平均値周りの3次モーメント：　λ
である。

(3.2)～(3.4)より

$$E(T) = 12{,}000{,}000$$

$$\sqrt{V(T)} = 348{,}138$$

$$Skw(T) = 0.8541$$

と求められる。

さらに、これらを用いて、①の m_2 、m_3 は、

$$m_2 = 101.000$$

$$m_3 = 300{,}301$$

となる。

ここで、「真の期待値から90%の確率で±5%の範囲内にあるとき、T に全信頼を与える」こととすると、$y_{5\%} = 1.645$ 、$k = 0.05$ となる。

②に m_2 、m_3 、$y_{5\%}$ 、k を用いることによって、

正規近似の場合: $n_F = 109{,}323$

NP近似の場合: $n_F = 141{,}114$

となる。

3.2.3 ベイズ方法論

有限変動信頼性理論では、「変動幅 k 」や「変動幅の範囲内になる確率 p 」といった重要なパラメータを指針のない中で選択しなければならないという問題がある。ここでは、そのような問題を解決する統計的手法として、ベイズ方法論を取り上げる。

(1) ベイズ方法論の枠組み

条件 θ の下で、実現値 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)'$ (記号 $'$ は転置を表す。)は独立で、同一の確率密度関数 $f_{X_i|\Theta}(x_i \mid \theta)$ に従うものとし、パラメータ θ は確率密度関数 $\pi(\theta)$ をもつ確率変数 Θ の実現値とする。確率密度関数 $\pi(\theta)$ は未知のパラ

メータに対する主観的な事前評価を表すものであり、事前分布と呼ばれることがある。一般的なベイズ解析では、Θが計測できない確率変数であり、$\pi(\theta)$と$\mathbf{x}$を用いて、θを推定することが目的となる。自動車運転者を例に上記内容をまとめると以下のようになる。各々の運転者は、搭乗車種・年齢・年間走行距離・運転歴等により、それぞれ異なる事故発生傾向θを有していると考えられる。しかし、各運転者の事故発生傾向θは直接的には計測できず、事故歴$\mathbf{x}$しか観測できない。また、運転者の集団を考えると、事故発生傾向θはある一定の分布$\pi(\theta)$に従っていると考えられる。ベイズ方法論は、「事故歴$\mathbf{x}$」と「全体的傾向$\pi(\theta)$」から各運転者の事故発生傾向θを推定する手法である。

ベイズ方法論の定式化は以下のとおりである。$\mathbf{X}$とΘの結合分布は、$\Theta=\theta$の下での条件付確率と、$\Theta=\theta$の発生確率$\pi(\theta)$によって求められ、下式によって表される。

$$f_{\mathbf{X},\Theta}(\mathbf{x},\theta)=\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f_{X_i|\Theta}(x_i\mid\theta)$$

また、$\mathbf{X}$の周辺分布は、θについて積分することによって得られ、下式のようになる。

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\int\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f_{X_i|\Theta}(x_i\mid\theta)\,d\theta$$

次に、$\mathbf{X}=\mathbf{x}$と観測された場合に$\Theta=\theta$となる条件付確率を$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\mid\mathbf{x})$とすると、ベイズの定理より、以下の関係が導かれる（$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\mid\mathbf{x})$は事後分布と呼ばれることがある）。

$$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\mid\mathbf{x})=\frac{\pi(\theta)\prod_{i=1}^{n}f_{X_i|\Theta}(x_i\mid\theta)}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}$$

この$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\mid\mathbf{x})$は、実務的な観点からは$\theta$の関数として重要であり、$\theta$に無関係な分母は単に規格化の効果しかない。また、$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta\mid\mathbf{x})$が決まるということは、$\theta\mid\mathbf{x}$に関する情報は過不足なく取り込まれたことになる。$\theta\mid\mathbf{x}$の点推定値

として期待値を求めると、以下のようになる。

$$E(\Theta \mid \mathbf{X}=\mathbf{x}) = \int \theta \pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x})\, d\theta$$

(2) 実例への適用

自動車事故における年間事故件数を考える。1契約者の年間事故件数は平均θのポアソン分布に従うものとする。また、集団全体でθを計測すると、θはパラメータα,βのガンマ分布に従うことが分かっているものとする。ある契約者のn年間の年間事故件数が$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)'$であるとき、この契約者のポアソンパラメータ$\theta'$が従う分布および$\theta'$の期待値は以下のとおりとなる。

$f_{X_i|\Theta}(x_i \mid \theta)$および$\theta$が従う確率密度関数$\pi(\theta)$は、

$$f_{X_i|\Theta}(x_i \mid \theta) = \frac{\theta^{x_i}\exp(-\theta)}{x_i!}$$

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)$$

となる。したがって、事後分布$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x})$は、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x}) &\propto \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{x_i}\exp(-\theta)}{x_i!} \\
&\propto \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\exp(-\beta\theta)\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\exp(-n\theta)}{\prod_{i=1}^{n}x_i!} \\
&\propto \theta^{\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i-1}\exp\{-(\beta+n)\theta\}
\end{aligned}$$

ここで、$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x})$は確率密度関数であるため、

$$\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta \mid \mathbf{x}) = \Gamma(\alpha+\sum x_i, \beta+n)$$

となる。したがって、θ'の期待値は$\dfrac{\alpha+\sum x_i}{\beta+n}$であり、$\bar{x}=\sum x_i / n$，$Z=n/(\beta+n)$とすれば以下のとおり表せることから、事前分布の期待値$\dfrac{\alpha}{\beta}$と観測値の平均$\bar{x}$の加重平均となっていることが分かる。

$$\frac{\alpha}{\beta}(1-Z)+\bar{x}\,Z$$

ベイズ方法論の問題点

ベイズ方法論は、応用範囲の広い優れた統計手法であるものの、実務的には、以下のような問題がある。なお、次に取り上げる Bühlmann モデルは、この問題を緩和した方法となっている。

① ベイズ方法論を展開するためには、事前分布を決定する必要があること

② 簡易な事例を除き、解析的な計算が困難な場合が多いこと

3.2.4 Bühlmann 理論

個別のリスク（例：自動車保険でいえばドライバー）の経験値（例：過去の実績ロスデータ）は、その個別リスク内での経験値の安定性に依存する一方で、個別リスクとリスク集団全体の平均との関係にも依存している。これは、集団の中での個別リスクの個有性（例：運転技術）のバラツキ（分散）によって表現される。

この分散が大きい程、個別リスクの水準は多様化し、全体平均は個別のリスクにとって十分な情報を持っていないといえる。すなわち、個別リスクの料率算定においては、個別リスク固有の経験値の方がより信頼できるといえる。

以下では、これらの現象を数学的に（主に条件付き確率の考え方を応用し）モデル化した、①Bühlmann モデルと、②エクスポージャの変化を勘案して Bühlmann モデルを発展させた Bühlmann-Straub モデルの二つの手法を説明する。

(1) Bühlmann モデル

Bühlmann モデルについて、議論する上で、まず、次のような条件を前提とする。

① あるリスクに関する n 年間の各年のロスコスト(ないしは事故件数)を確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。(エクスポージャは同一)

② 確率変数 X_i はあるパラメータ(例:個人の運転技術の水準)に負っており、$\Theta=\theta$ の条件付きの期待値および分散を、それぞれ $E[X_i \mid \Theta=\theta]=\mu(\theta)$ 、$V[X_i \mid \Theta=\theta]=\sigma^2(\theta)$ とする[13]。また、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は θ の条件付きの下では互いに独立である

③ Θ はある分布 U に従い、$\mu(\Theta)$ の期待値は μ (これは集団全体の全平均になる)である。

このような条件の下で、$\mu(\theta)$ の「良い推定量」である、すなわち個別リスクについて妥当な水準の $n+1$ 年目の純保険料 $\hat{P}_{n+1}$ を求めたい。さらには、集団の平均のロスコスト μ と過去の実績データ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ から $\mu(\theta)$ を推定(= $\hat{P}_{n+1}$ を求率)したい。

まず、結論から先に述べると、Bühlmann モデルの下では、

Bühlmann の定理[14]

$Z=\dfrac{V[\mu(\Theta)]}{V[\bar{X}]}$ のとき $Z\bar{X}+(1-Z)\mu$ は、$E[\{\mu(\Theta)-(Z\bar{X}+(1-Z)\mu)\}^2]$ を最小とする。

を用いて、集団の平均のロスデータと過去の実績データとを案分した $Z\bar{X}+(1-Z)\mu$ を $\hat{P}_{n+1}$ とすればよい。(上の $Z=\dfrac{V[\mu(\Theta)]}{V[\bar{X}]}$ が、Bühlmann モデルの信頼度になる)

---

13 $\mu(\theta)$ は hypothetical mean、$\sigma^2(\theta)$ は process variance と呼ばれる。

14 スイスの H.Bühlmann が示した。

このBühlmannモデルの信頼度Zの意味は、

> ① 集団の中での個別リスクのバラツキが小さければ――$V[\mu(\Theta)]$が小さければ、Zは小さくなり、純保険料は集団の平均ロスコストμに近づく。
>
> ② 個別リスクのバラツキが大きければ――$V[\mu(\Theta)]$が大きければ、Zは1に近くなり、純保険料は個別リスクの過去の実績ロスコストを適用することが望ましくなる。

と直感的に理解できる。

以上の直感的な理解を補完するために、Bühlmann の定理の証明を以下に挙げる。

証明 過去のn年の実績データ(例:ロスコスト)$X_1, X_2, \cdots, X_n$を用いて、$\mu(\Theta)$の推定量$\hat{P}_{n+1} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$を求めたい。ここで、良い推定量は、$\mu(\Theta)$との間の誤差を最小とする―$E\left[\left\{\mu(\Theta) - \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right\}^2\right]$を最小にする―とする。

さて、$\mu(\Theta)$の良い推定量を求めるとは、将来のX_{n+1}を予測すること同義といえるので、

$$E\left[\left\{X_{n+1} - \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right\}^2\right] \tag{3.15}$$

を最小化する$a_0, a_1, \cdots, a_n$を求めればよい。具体的には、(3.15)を$a_0, a_j\ (j = 1, \cdots, n)$で偏微分した式をゼロ[15]にとることによって得た、方程式

---

15 $E\left[\left\{X_{n+1} - \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right\}^2\right]$は$a_0, a_1, \cdots, a_n$に関して正の二次式(下に凸)なの

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] = E[X_{n+1}] \tag{3.16}$$

$$a_0 \cdot E[X_j] + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E[X_i X_j] = E[X_j X_{n+1}] \tag{3.17}$$

を$a_0, a_j (j=1,\cdots,n)$について解けばよい。以下その計算を示す。

まず、(3.16)に$E[X_j]$を乗じて、(3.17)を差し引くことで、

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot Cov[X_i, X_j] = Cov[X_j, X_{n+1}] \tag{3.18}$$

が得られ（∵[16]）、さらに右辺は条件付きモーメントの関係（∵[17]）から

$$\begin{aligned} Cov[X_i, X_j] &= Cov[E(X_i \mid \Theta), E(X_i \mid \Theta)] + E[Cov(X_i, X_j \mid \Theta)] \\ &= Cov[\mu(\Theta), \mu(\Theta)] + 0 \\ &= V[\mu(\Theta)] \end{aligned}$$

となる。

また、$V[X_j] = w + v$（以下、$E[\sigma^2(\Theta)] = v$、$Cov[X_i, X_j] = V[\mu(\Theta)] = w$ とする）なので[18]、(3.18)は行列形式で次のように書き換えることができる。

$$\begin{pmatrix} w+v & w & w & w & \cdots & w \\ w & w+v & w & w & \cdots & w \\ w & w & w+v & w & \cdots & w \\ w & w & w & w+v & \cdots & w \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & . & \cdots & . \\ w & w & w & w & \cdots & w+v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w \\ w \\ w \\ . \\ . \\ . \\ w \end{pmatrix}$$

で、$a_0, a_1, \cdots, a_n$の極値が最小値となる。

16 $E[X_i X_j] - E[X_i] \cdot E[X_j] = Cov[X_i, X_j]$

17 $Cov[X, Y] = Cov_Z[E(X \mid Z), E(Y \mid Z)] + E_Z[Cov(X, Y \mid Z)]$

18 $V(X_j) = E[V(X_j \mid \Theta)] + V[E(X_j \mid \Theta)] = w + v$

この連立方程式を解くことによって、

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

かつ

$$a_i = \frac{w}{(w+v)+w+w+\cdots+w} = \frac{w}{nw+v} \tag{3.19}$$

であることがわかる。

v, wの表記を戻すと(3.19)は、

$$a_i = \frac{V[\mu(\Theta)]}{nV[\mu(\Theta)]+E[\sigma^2(\Theta)]} \tag{3.20}$$

となり、さらに両辺にnを乗じると、

$$\begin{aligned} na_i &= \frac{nV[\mu(\Theta)]}{nV[\mu(\Theta)]+E[\sigma^2(\Theta)]} \\ &= \frac{nV[\mu(\Theta)]}{nV[E(\overline{X}\mid\Theta)]+nE[V(\overline{X}\mid\Theta)]} = \frac{V[\mu(\Theta)]}{V[\overline{X}]} = Z \end{aligned} \tag{3.21}$$

となる。なお、

$$Z = \frac{n}{n+\dfrac{E[\sigma^2(\Theta)]}{V[\mu(\Theta)]}} = \frac{n}{n+\dfrac{E[V(X_i\mid\Theta)]}{V[E(X_i\mid\Theta)]}} = \frac{n}{n+k} \tag{3.22}$$

と表現することもある。

さらに、(3.16)から、

$$a_0 = E[X_{n+1}] - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E[X_i] = \mu - \sum_{i=1}^{n} a_i\mu = \mu - \sum_{i=1}^{n}\frac{Z}{n}\cdot\mu = (1-Z)\mu$$

($\because$ [19])

以上より、

$$\hat{P}_{n+1}\,(= X_{n+1}\text{の推定量}) = (1-Z)\,\mu + \sum_{i=1}^{n}\frac{Z}{n}X_i$$

---

19 $E[X_i] = E[E(X_i\mid\Theta)] = E[\mu(\Theta)] = \mu$

$$= (1 - Z)\mu + Z\overline{X} \tag{3.23}$$

（証明終）

（2） Bühlmann-Straub モデル

期間ごとのエクスポージャが異なる複数期間の実績データを基にする場合、Bühlmann モデルは直接的に使用できないという欠点を持っている。そこで、その欠点を克服し、同モデルを発展させたのが Bühlmann-Straub モデルである。

Bühlmann-Straub モデルでは、以下の前提の下議論が進められる。

① 各年のエクスポージャを $m_1, m_2, \cdots, m_n$ とする。(例:ある契約の j 年度における経過月数 m_j [月]、ある団体契約の j 年度における団体加入者数 m_j [人・年]等)

② 各年の平均ロスコスト(ないしは平均クレーム件数、平均クレーム額)を確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。また、確率変数 X_i は θ の条件付きの下で互いに独立で、

$$E[X_i \mid \Theta = \theta] = \mu(\theta)$$

$$V[X_i \mid \Theta = \theta] = \frac{\sigma^2(\theta)}{m_i}$$

の期待値、分散を持つ[20]。

③ Θ はある分布 U に従い、$\mu(\Theta)$, $\sigma^2(\Theta)$ の期待値はそれぞれ μ (これは集団全体の全平均になる), v となる。

このとき、Bühlmann-Straub モデルにおいて、過去 n 年のロスデータ

---

20 X_j は、m_j 個の独立な確率変数 Y_{jl} $(l = 1, \cdots, m_j)$ の平均、すなわち $X_j = \frac{1}{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} Y_{jl}$ と考えれば理解しやすい。

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ から $n+1$ 年目のロスデータを予測すると、信頼度が

$$Z = \frac{m}{m + \dfrac{E[\sigma^2(\Theta)]}{V[\mu(\Theta)]}} = \frac{m}{m+k} \tag{3.24}$$

$\left(ただし、m = \sum_{i=1}^{n} m_i\right)$ である、推定量

$$Z\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i}{m} + (1-Z)\mu = Z\bar{X} + (1-Z)\mu \tag{3.25}$$

が $X_1, \cdots, X_n$ の線形（結合）式で表現される推定量の中で最良となる。

証明　Bühlmann モデルと同様に、$\mu(\Theta)$ の推定量を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の線形式

$$a_0 + a_1X_1 + a_2X_2, \cdots + a_nX_n \tag{3.26}$$

の形で求めるため、

$$E[\{\mu(\Theta) - (a_0 + a_1X_1 + a_2X_2, \cdots + a_nX_n)\}^2] \tag{3.27}$$

を最小化する $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ を算出する。算出においても、Bühlmann モデルと同様に(3.27)を $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$ のそれぞれに関して偏微分した式をゼロにとる方程式を立てればよい。途中計算の詳細を省略するが、結果は

$$a_0 = (1 - \frac{m}{m + v/w}) \cdot \mu$$

$$a_j = \frac{m_j}{m + v/w}$$

となる。

これらを(3.26)に代入し、整理すると、 Bühlmann-Straub モデルでの推定量は、

$$Z \cdot \bar{X} + (1-Z) \cdot \mu \qquad （ここで、Z = \frac{m}{m + v/w}、\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j X_j）$$

と、(3.25)が得られる。　　(証明終)

(3) パラメータの推定

ここまでは、$V[\mu(\Theta)]$、$E[\sigma^2(\Theta)]$ はともに既知の定数であるものとして取り扱ってきたが、実務においてはこれらを何らかの方法で推定しなければならない。そこで、ノンパラメトリックな方法と、ポアソン分布を前提としたパラメトリックな推定方法の二つの例をあげる。

a. ノンパラメトリックな推定

モデルとなる分布によらない、ノンパラメトリックな方法によるパラメータの推定を Bühlmann モデルを用いて紹介する。

契約者$i(i=1,\cdots,r)$に関する過去n年のロスデータを$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in}$とする（$n$年間の各年のエクスポージャは同一である）。$\Theta_i=\theta_i$ 条件付きの X_{i1} はある分布 $\Pi(\mu(\theta_i),\sigma^2(\theta_i))$ に従うとする。$\Theta_i=\theta_i$ の条件付きの下で、$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{in}$ は互いに独立で、また、異なる契約者間のロスデータは互いに独立であるとする。

以上の前提のとき、契約集団の期待値（μ）、条件付きの分散の期待値（$v=E[V(X_i\mid\Theta)]$）、条件付き期待値の分散（$w=V[E(X_i\mid\Theta)]$）の不偏推定量はそれぞれ、

$$\hat{\mu}=\overline{X}$$

$$\hat{v}=\frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$$

$$\hat{w}=\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}_i-\overline{X})^2-\frac{\hat{v}}{n}$$

となり、信頼度は

$$Z=\frac{n}{n+\dfrac{\hat{v}}{\hat{w}}}$$

となる。

証明　実績データの平均 $\overline{X}$ は、

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} E(X_{ij}) = \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} E(E(X_{ij} \mid \Theta_i))$$
$$= \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} E(\mu(\Theta_i)) = \frac{1}{rn}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \mu = \mu$$

から、全体平均μの不偏推定量$\hat{\mu}$といえる。

$v_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ という統計量を想定したとき（$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$）、この統計量は$\Theta_i = \theta_i$の条件付きの下で$\sigma^2(\theta_i)$の不偏推定量となるので[21]、

$$E(v_i) = E(E(v_i \mid \Theta_i)) = E(\sigma^2(\Theta_i)) = v$$

ゆえに、vの不偏推定量$\hat{v}$は、

$$\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} v_i = \frac{1}{r(n-1)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}(X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

とおける。

一方、$\bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$ も$\Theta_i = \theta_i$の条件付きの下で$\mu(\theta_i)$の不偏推定量となるので、$\bar{X}_i$の期待値、分散はそれぞれ

$$E(\bar{X}_i) = E(E(\bar{X}_i \mid \Theta_i)) = E(\mu(\Theta_i)) = \mu$$
$$V(\bar{X}_i) = V(E(\bar{X}_i \mid \Theta_i)) + E(V(\bar{X}_i \mid \Theta_i))$$
$$= V(\mu(\Theta_i)) + E(\sigma^2(\Theta_i)/n) = w + v/n$$

となる。よって$\bar{X}_i$（$i = 1,2,\cdots,r$）は互いに独立で、かつ、同一の期待値μ、分散$w + v/n$を持つ分布に従うことから、$\bar{X}_i$の標本不偏分散$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_i - \bar{X})^2$は、母数$w + v/n$の不偏推定量といえる。したがって、$w$の不偏推定量は、

$$\hat{w} = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\hat{v}}{n}$$

---

21 iを固定して考えれば、$X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in}$は互いに独立であることから、$v_i$は不偏分散であることがわかる。

によって与えられる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

なお、ここではBühlmannモデルについてのみ議論を行ったが、章末の練習問題にBühlmann-Straubモデルでのパラメータ推定を取り挙げたので、各人にて証明を試みられたい。

b. ポアソン分布を前提としたパラメトリックな推定方法

ポアソン分布をモデルとする場合、期待値と分散が等しい性質を用いて、条件付きの分散の期待値(v)、条件付き期待値(w)の分散を簡単に推定することができる。以下では、例を用いて、その方法を説明する。

例3-11　ある地域における300人の車の保有者が過去1年間に被った車両に対するイタズラ事故の件数が以下のとおりであるとする。

事故件数	0件	1件	2件	3件	4件	5件
保有者	123人	97人	49人	21人	8人	2人

保有者ごとのイタズラ事故件数 $X_{i|\theta}$ は期待値 $\mu(\theta)$ のポアソン分布に従い、期待値 $\mu(\theta)$ は保有者ごとに互いに異なるものとする。

このとき、過去1年の事故件数が2件の保有者の来年の事故件数を推定したい。

上の実績データの標本平均 $\overline{X}$ 、不偏分散 $V=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i1}-\overline{X})^2$ は、集団の全平均(μ)、全分散(σ^2)の不偏推定量[22]であることから、それらをそれぞれ

22　$E(V)=E\left(\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{i1}-\overline{X})^2\right)=E\left(\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\{(X_{i1}-\mu)-(\overline{X}-\mu)\}^2\right)$

の推定量として利用する。

保有者iの過去1年の事故件数をX_{i1}として、さらに、$\Theta_i=\theta_i$の条件付きの$X_{i1|\Theta_i=\theta_i}$はポアソン分布（期待値$\mu(\theta_i)$、分散$\sigma^2(\theta_i)$）に従うとする。このとき、ポアソン分布の性質から$\mu(\theta_i)=\sigma^2(\theta_i)$である。

さて、過去の実績から、集団全体の期待値μ、分散σ^2は

$$\hat{\mu}=\bar{x}=\frac{0\times 123+1\times 97+2\times 49+3\times 21+4\times 8+5\times 2}{300}=1$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2&=V\\&=\{(0-1)^2\cdot 123+(1-1)^2\cdot 97+(2-1)^2\cdot 49+(3-1)^2\cdot 21\\&\qquad+(4-1)^2\cdot 8+(5-1)^2\cdot 2\}\div(300-1)\\&=1.20\end{aligned}$$

と推定される。

一方、条件付きモーメントの関係から、

$$E(\sigma^2(\theta_i))=E(\mu(\theta_i))=\mu$$

$$\begin{aligned}V(\mu(\theta_i))&=V(E(X_{i1}\mid\Theta_i=\theta_i))\\&=V(X_{i1})-E(V(X_{i1}\mid\Theta_i=\theta_i))\\&=V(X_{i1})-E(\sigma^2(\theta_i))\\&=V(X_{i1})-E(\mu(\theta_i))\\&=\sigma^2-\mu\end{aligned}$$

なので、$\hat{v}$、$\hat{w}$は

$$\hat{v}=\hat{\mu}=1$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_{i1}-\mu)^2-n(\bar{X}-\mu)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}(n\sigma^2-nV(\bar{X}))\qquad(\because V(\bar{X})=E((\bar{X}-\mu)^2))$$

$$=\sigma^2\qquad(\because V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n})$$

$$\hat{w} = \hat{\sigma}^2 - \hat{\mu} = 1.2 - 1 = 0.2$$

となる。

したがって、信頼度は、

$$Z = \frac{1}{1 + \frac{\hat{v}}{\hat{w}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0.2}} = \frac{1}{6}$$

ゆえに、過去1年の事故件数が2件の保有者の来年の事故件数は、(3.25)より、

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= Z\overline{x}_{i1} + (1 - Z) \times \hat{\mu} \\ &= \frac{1}{6} \times 2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times 1 \\ &= \frac{7}{6} \text{件} \end{aligned}$$

と推定される。

3.3　練習問題

1．　ある保険会社では、割引率0%（等級0）、20%（等級1）、40%（等級2）、60%（等級3）の無事故割引制度を実施している。1年間に少なくとも1件の保険金請求をした場合は、翌年度の割引等級を1つ下げる（0等級が下限）。逆に、1年間に1件も保険金請求をしなかった場合は、その契約者は割引等級を1つ上げる（3等級が上限）。また、事故のクレーム頻度は平均0.3のポアソン分布に従うものとする。このとき、

(1)　この無事故割引制度下での契約者の等級分布の推移行列を求めよ。

(2)　保険会社が保有する契約者数は10,000人であり、その数は常に一定である（すなわち、新規契約の流入、流出は一切ない）と仮定する。将来的に、この契約ポートフォリオが定常状態に達した際の各等級の契約者数（答えは整数で）を求めよ。

2．　ある保険会社は団体ごとの個別実績ロスデータを用いた、団体別料率の算出準備として、団体ごとのデータに全信頼度を与える基準の導入を検討している。

導入の前提として、

- 年間クレーム件数 N はポアソン分布に従う。
- 各クレーム額 X は、$\alpha=10,\ \beta=0.5$ のガンマ分布（密度関数は $f(x)=\dfrac{0.5^{10}}{\Gamma(10)}x^9e^{-0.5x},\ x>0$）に従う。
- 団体ごとの年間クレーム総額 T が90%の確率で真の期待値の±5%の範囲内にあれば全信頼を与える。

を想定している。

このとき、保険会社は料率算定に使用する団体ごとの年間クレーム総額 T

に全信頼を与えるための基準として、団体毎の年間クレーム件数は何件以上と設定すればよいか、有限変動信頼性理論によって求めよ。

（ヒント）　T は正規近似できるとしてよい。

3．　無作為に抽出した契約者のクレーム件数は期待値 Θ のポアソン分布に従い、さらに、Θ は契約者ごとにばらつきがあり、確率密度関数が $f(\theta)=3\theta^{-4}$ $(\theta>1)$ である分布に従う。契約者単位の時系列で観察した場合、同一の契約者の Θ は同一であるとする。

　このとき、1年目、2年目の2年間で計20件のクレームを起こしたある契約者について、Bühlmann モデルを用いて、3年目のクレーム件数を推定せよ。

4．

（1）　次の前提

　① 　契約者数は r（人）

　② 　各契約者は過去 n_i 年のロス実績を持ち、各年のロスコスト（各年のロス総額をその年のエクスポージャ m_{ij} で除した値）は、X_{ij}（$i=1,2,\cdots,r$；$j=1,2,\cdots,n_i$）

の場合、契約集団全体のロスコスト期待値（μ）、条件付きのロスコストの分散の期待値（v）、条件付きのロスコストの期待値の分散（w）の不偏推定量はそれぞれ

$$\hat{\mu}=\overline{X}$$

$$\hat{v}=\frac{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}m_{ij}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2}{\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)}$$

$$\hat{w}=\frac{\sum_{i=1}^{r}m_i(\overline{X}_i-\overline{X})^2-\hat{v}(r-1)}{m-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r}m_i{}^2}$$

（ここでは、$m_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$ 、$m = \sum_{i=1}^{r} m_i$ 、$\overline{X}_i = \dfrac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}X_{ij}$ 、$\overline{X} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{r} m_i \overline{X}_i$ ）

となることを示せ。

(2) ある保険会社は、次のような実績を持つ団体契約を4年目に引き受けることになった。

		1年目	2年目	3年目
団体A	各年のクレーム額計	−	12,000	15,000
	加 入 者 数	−	50人	60人
団体B	各年のクレーム額計	19,000	23,000	16,000
	加 入 者 数	100人	150人	160人

4年目の団体A、団体Bの加入者がそれぞれ80人、180人であるとする。このとき、(1)の結果を利用して、保険会社が4年目に領収すべき総純保険料(Bühlmann-Straub モデルにより推定)を計算せよ。

［参考文献］

1. “FOUNDATIONS OF CASUALTY ACTUARIAL SCIENCE (2nd edition)”, Casualty Actuarial Society

2. Stuart A.Klugman, Harry H.Panjer, Gordon E.Willmot, “Loss Models From Data to Decisions”, Wiley-Interscience Publication

3. Thomas N. Herzog “Introduction to CREDIBITY THEORY (2nd edition)”, ACTEX Publications

4. 損保アクチュアリー学調査研究会訳『損害保険における統計学とその応用』（日本アクチュアリー会会報別冊 第142号）

5. ASTIN関連研究会訳『アクチュアリーのための実用的危険理論』（日本アクチュアリー会会報別冊 第188号）

6. Stuart A.Klugman, Harry H.Panjer, Gordan E.Willmot 著『統計データの数理モデルへの適用（Loss Models From Data to Decisions）』（社団法人 日本アクチュアリー会 日本語版編集）

7. 中妻照雄著『入門ベイズ統計学』（朝倉書店）

練習問題解答

1．

(1)　1年間に事故が0件である確率を p とすると、

$$p = P(x=0) = e^{-0.3}\frac{0.3^0}{0!} = 0.7408$$

　したがって、推移行列は

$$\begin{array}{cc} & \text{翌年の等級} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{現在の等級} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0.2592 & 0.7408 & 0 & 0 \\ 0.2592 & 0 & 0.7408 & 0 \\ 0 & 0.2592 & 0 & 0.7408 \\ 0 & 0 & 0.2592 & 0.7408 \end{pmatrix}$$

(2)　定常状態では契約者の推移は均衡するので、最終的な各等級の契約者数を x_0, x_1, x_2, x_3 とした場合、

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 10{,}000$$

$$x_0 = 0.2592x_0 + 0.2592x_1$$

$$x_1 = 0.7408x_0 + 0.2592x_2$$

$$x_2 = 0.7408x_1 + 0.2592x_3$$

$$x_3 = 0.7408x_2 + 0.7408x_3$$

という方程式を立てることができる。

　これを解くと、

$$x_0 = 283, x_1 = 808, x_3 = 2{,}309, x_3 = 6{,}600$$

と求められる。

2．　年間クレーム件数を N 件としたとき、N はポアソン分布に従うことから、

$$n_2 = V(N)/E(N) = 1$$

また、クレーム額の変動係数は、

$$CV = \sqrt{V(X)} / E(X) = \sqrt{\frac{10}{0.5^2}} \Big/ \frac{10}{0.5} = 0.316$$

となる。

ゆえに、

$$m_2 = n_2 + CV^2 = 1.10$$

ここで標準正規分布の95%点は $y_{5\%} = 1.645$ なので、全信頼を与えるクレーム件数 n_F は、

$$n_F = m_2 (y_{5\%} / 0.05)^2 = 1{,}190$$

となる。

3．　ある契約者（すなわち）の i 年目のクレーム件数 X_i はポアソン分布（$P(X_i = x \mid \Theta) = e^{-\Theta} \dfrac{\Theta^x}{x!}$）に従うことから、その期待値、分散はそれぞれ

$$E(X_i \mid \Theta) = \Theta$$

$$V(X_i \mid \Theta) = \Theta$$

となり、その結果、

$$E[V(X_i \mid \Theta)] = E(\Theta) = \int_1^\infty \theta \cdot 3\theta^{-4} d\theta = \left[-1.5\theta^{-2}\right]_1^\infty = 1.5$$

$$\begin{aligned} V[E(X_i \mid \Theta)] = V(\Theta) &= E(\Theta^2) - \{E(\Theta)\}^2 \\ &= \int_1^\infty \theta^2 \cdot 3\theta^{-4} d\theta - 1.5^2 = 0.75 \end{aligned}$$

となる。

ゆえに Bühlmann モデルの信頼度は、

$$Z = \frac{n}{n + \dfrac{E[V(X_i \mid \Theta)]}{V[E(X_i \mid \Theta)]}} = \frac{2}{2 + \dfrac{1.5}{0.75}} = 0.5$$

であることから、この契約者の次年度のクレーム件数は、

$$\hat{x}_3 = Z \cdot \bar{x} + (1-Z) \cdot \hat{\mu} = 0.5 \cdot \frac{20}{2} + 0.5 \cdot 1.5 = 5.75$$ [23]

と推定される。

4.

（1）（略）

（2）過去3年の実績データより、

$\bar{X} = 163.46$ 、 $\bar{X}_A = 245.45$ 、 $\bar{X}_B = 141.46$ 、 $\hat{v} = 178{,}168.01$ 、

$\hat{w} = 4{,}379.83$

と推定される。

ゆえに、団体A、団体Bのそれぞれの実績データに対する信頼度は、

$$\hat{Z}_A = \frac{110}{110 + \dfrac{178{,}168.01}{4{,}379.83}} = 0.73 \text{ 、} \hat{Z}_B = \frac{410}{410 + \dfrac{178{,}168.01}{4{,}379.83}} = 0.91$$

となり、一人あたりの純保険料は、

$$p_A = 0.73 \times 245.45 + (1-0.73) \times 163.46 = 223$$

$$p_B = 0.91 \times 141.46 + (1-0.91) \times 163.46 = 143$$

以上より、4年目に領収すべき純保険料は、

$$223 \times 80 + 143 \times 180 = 43{,}580$$

となる。

---

[23] $\hat{\mu} = E[E(X_{i.} \mid \Theta)] = E[\Theta] = 1.5$

第４章

クラス料率

第４章　クラス料率

4.1 クラス料率算定法

4.1.1 クラス料率の意義

(1) クラス料率の意義

クラス料率は、同一の危険集団に対して広く適用される料率の一形態であり、当然のことながら、個々の料率区分すなわちリスクグループにおいては、クレームの発生頻度やクレーム額等に固有の特色を有している必要があることは、すでに説明したとおりである。

したがって、クラス料率が合理的かつ契約者間で不公平のないものであるためには、料率区分が合理的な方法により明確かつ客観性をもった形に設定される必要がある。このために、リスクを分類するための要素の検討、リスク格差の算出といった手順を経て、具体的なリスクの分類およびそのタリフ(料率書)化が行われる必要がある。この一連の分析・検討作業にあたっては、主として火災保険、自動車保険および傷害保険の分野において統計分析手法を用いて行われており、タリフ理論(Tariff Theory)とも呼ばれている。

(2) リスクの分類とタリフ化

保険料率が契約者の負担の公平性を図った合理的なものであるためには、一般に次の2条件が満たされることが必要であると考えられる。

① 危険度を左右するさまざまなリスク分類要素の中から、主要な要因が選択されていること。

② 選択されたリスク分類要素の有効かつ簡潔な組み合わせ(タリフ構造ともいう)が考案され、その組み合わせに対する保険料率が危険度の実態を反映していること。

上記①のリスク分類要素の選択は、通常極めて難しい問題である。というの

も、対象とする危険の構造が工学的に分析されるものでない限り、危険度の測定は、経験的な勘に支えられた大量データの統計分析に頼らざるを得ないからである。しかも、その測定結果については、他のリスク分類要素が影響を及ぼしていることが多く、統計上の格差をそのままリスク格差として使用することができず、またリスク分類要素を選択する際には、社会的容認性、実務上の取り扱いやすさといった点も考慮されなければならない。

実際に選択されたリスク分類要素については、その危険度に応じて数ランクに分けられることになる。このランク間の格差を示す指数を料率係数(relativities)というが、上記②のリスク分類要素の組み合わせ方に応じて料率係数が組み合わされ、適用される料率が決定される。ただし、危険度を正確に反映させるためには、この組み合わせが通常相当複雑になる場合が多く、実務上はこれをタリフ化することはかなりの困難を伴うことになる。

そこで、実務上の取り扱いやすさを考慮したタリフ構造を考え、これから計算された料率が実際の危険度とほぼ同じとなるように料率係数を定めることが必要となる。次節以降においては、このようなタリフ構造に対して適切な料率係数を算出するために考え出された方法について説明する。

(3) クラス料率における合理的な料率細分化

販売競争上の理由などから、料率の細分化を行うことが要請される場合がある。このためには、危険度と相関関係の高い適宜の、かつ適当な数の危険標識を選び、これらの危険標識によってリスクをできるだけ同質のグループに分割し、その各リスクグループごとにクレームコストの実績値を算出し、これらの実績値を基礎として、各リスクグループごとのクレームコストの期待値に合致する保険料を算出しうるような料率表の作成が必要となる。ところが、各種の危険標識によって複合的に分類された個々のリスクグループは、通常必ずしも十分なデータ量を備えていないから、その各グループだけの実績値をもって直ちに当

該グループのクレームコストの期待値を求めることはできない。また、各危険標識は、それぞれ固有の危険等級とそれに応じた危険度の格差を持っており、それらが複合的に作用した結果が個々のリスクグループごとのクレームコストの格差となって現れるのである。したがって、統計データの観察にあたっては、多数のリスクグループについての実績値を総合的に分析することによって、このような各危険標識の相互作用を解きほぐし、そのうえで各危険標識に固有の等級格差を求め、また、これらの各危険標識ごとの等級格差を多数の危険標識につき、どのような組み合わせを計算すれば個々のリスクグループごとのクレームコストの格差に合致するかを考えなければならない。

4.1.2 複合分類リスクの料率算定手法

(1) 複合分類リスクの定義

実務において扱うリスクの集団は、通常その危険標識が二つもしくはそれ以上の場合が多いが、仮に危険標識の数が二つであるとしても一般性を失うものではないので、以下においては簡単のために、危険標識の数が二つの場合について説明する。選択された危険標識を A, B の2種類とし、さらにその危険度に応じてAの危険等級を$a_1, a_2, \cdots, a_k$、Bの危険等級を$b_1, b_2, \cdots, b_l$に分けるものとする(このとき A、B 二つの危険標識によって分類される リスク空間を複合分類リスクと呼ぶ)。a_iとb_jとで定められる部分リスク(複合等級リスクと呼ぶ)を(a_i, b_j)で表すことにし、このグループの標本数(エクスポージャ数)をn_{ij}、1エクスポージャあたりのクレームコストを確率変数と考えてR_{ij}で表す。また、全体の平均クレームコストを1としたときのR_{ij}に対応する相対クレームコスト指数をr_{ij}で表すことにし、さらにR_{ij}, r_{ij}の推定値をそれぞれ$\hat{R}_{ij}$, $\hat{r}_{ij}$とする。危険等級間の格差を示す指数を料率係数(relativities)というが、a_iに対応する料率係数をx_i ($i = 1, 2, \cdots, k$)、b_jに対応する料率係数をy_j ($j = 1, 2, \cdots, l$)とする。同

様にして、x_i，y_j の推定値をそれぞれ $\hat{x}_i$，$\hat{y}_j$ で表すことにする。（下表参照）

危険標識		B				
	危険等級	b_1	b_2	$\cdots$	b_l	計
A	a_1	n_{11}, r_{11}	n_{12}, r_{12}	$\cdots$	n_{1l}, r_{1l}	$n_{1\bullet}, r_{1\bullet}$
	a_2	n_{21}, r_{21}	n_{22}, r_{22}	$\cdots$	n_{2l}, r_{2l}	$n_{2\bullet}, r_{2\bullet}$
	:	:	:		:	:
	a_k	n_{k1}, r_{k1}	n_{k2}, r_{k2}	$\cdots$	n_{kl}, r_{kl}	$n_{k\bullet}, r_{k\bullet}$
	計	$n_{\bullet 1}, r_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}, r_{\bullet 2}$	$\cdots$	$n_{\bullet l}, r_{\bullet l}$	$n_{\bullet\bullet}, r_{\bullet\bullet}$

また、ここではタリフ構造を乗法型、すなわち $r_{ij} = x_i \cdot y_j$ を想定して説明を行うが、加法型 $r_{ij} = x_i + y_j$ への修正は容易に行うことができる。

(2) 伝統的な料率算定方法

前項で定義した記号を用いて伝統的な複合分類リスクの料率算定方法を表現すると以下のようになる。

まず、複合分類リスクも複合等級リスクの集合であるから、複合等級リスクごとに料率を算出するという最も原始的な方法がある。すなわち、

$$\hat{r}_{ij} = r_{ij}$$

$$\hat{R}_{ij} = R_{\bullet\bullet}\,\hat{r}_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, k;\ j = 1, 2, \cdots, l)$$

ここで、$R_{\bullet\bullet} = \dfrac{\sum_{i,j} R_{ij} n_{ij}}{\sum_{i,j} n_{ij}}$ である。

ただしこの方法は、次のような問題点がありよい方法とはいえない。

① 複合等級リスクごとのデータ量のばらつきがあり、リスクによっては信頼性が低いために料率算定できない場合がある。

② 求められた料率について複合等級リスク相互間の論理的整合性が保証されない。

③ 料率算定作業が膨大なものとなる。

次に、複合分類リスクの料率算定で最もよく利用されてきている方法は、次のように表現することができる。

$$\hat{r}_{ij} = r_{i\cdot}\, r_{\cdot j}$$
$$\hat{R}_{ij} = R_{\cdot\cdot}\, \hat{r}_{ij} \qquad (i = 1, 2, \cdots, k;\ j = 1, 2, \cdots, l)$$

ここで、

$$r_{i\cdot} = \frac{R_{i\cdot}}{R_{\cdot\cdot}},\ \ R_{i\cdot} = \frac{\sum_j R_{ij}\ n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$$

$$r_{\cdot j} = \frac{R_{\cdot j}}{R_{\cdot\cdot}},\ \ R_{\cdot j} = \frac{\sum_i R_{ij} n_{ij}}{\sum_i n_{ij}}$$

である。

この方法は、計算方法が比較的簡単なのでよく利用されているが、次のような問題点があるために必ずしも最良の方法とはいえない。

① リスク全体での収支のバランスが保証されない。すなわち、
$\sum_{i,j} \hat{R}_{ij} n_{ij} \neq \sum_{i,j} R_{ij} n_{ij}$ である。

② 複合等級リスクの料率は、必ずしもその危険の実態に近いものとはならない。
すなわち、$\hat{R}_{ij} \neq R_{ij}$ である。

これを、簡単な例によって示すことにする。ある複合分類リスクにおける複合等級リスクごとのクレーム頻度およびリスク格差が次表のとおりであったとする。

クレーム頻度

	b_1	b_2
a_1	0.1	0.2
a_2	0.3	0.6

リスク格差

	b_1	b_2
a_1	1	2
a_2	3	6

まず、各複合等級リスクごとのエクスポージャ数が均等である場合を考える。各エクスポージャ数を100とした場合の各複合等級リスクごとのクレーム頻度は、

下表左のとおりとなるので、これより各危険標識ごとのクレーム頻度の格差、すなわち総計欄を1とした場合の格差を求めると、下表右のとおりとなる。

	b_1	b_2	計
a_1	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{200}$
a_2	$\frac{30}{100}$	$\frac{60}{100}$	$\frac{90}{200}$
計	$\frac{40}{200}$	$\frac{80}{200}$	$\frac{120}{400}$

→

	b_1	b_2	計
a_1			0.500
a_2			1.500
計	0.667	1.333	1.000

このタリフ構造が乗法型であると仮定して、各複合等級リスクごとの相対料率を求めると下表左のとおりとなり、すなわちこの場合には、算出された料率が、元々のリスク格差を反映したものとなっていることがわかる。

	b_1	b_2	計
a_1	0.334	0.667	
a_2	1.001	2.000	
計			1.000

→

	b_1	b_2	計
a_1	1	2	
a_2	3	6	
計			

次に、各複合等級リスクごとのエクスポージャ数が均等でない場合を考える。この場合も、前と同様の方法により計算を行うと下表のようになる。

	b_1	b_2	計
a_1	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{200}$
a_2	$\frac{300}{1000}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{306}{1010}$
計	$\frac{310}{1100}$	$\frac{26}{110}$	$\frac{336}{1210}$

→

	b_1	b_2	計
a_1			0.540
a_2			1.091
計	1.015	0.851	1.000

	b_1	b_2	計
a_1	0.548	0.460	
a_2	1.107	0.928	
計			1.000

→

	b_1	b_2	計
a_1	1	0.839	
a_2	2.020	1.693	
計			

この例でわかるように、各複合等級リスクごとのエクスポージャ数が異なる場合には、この方法により算出された料率は、リスクの実態とはかけ離れたものとなってしまう。現実の世界においては、各複合等級リスクごとのエクスポージャ数が異なっていることの方が普通であるため、この問題点を解決することが重要となる。

(3) 複合分類リスクの料率算定と一般的手順

前項で説明した複合分類リスクの伝統的料率算出方法の第一の欠点は、単一の等級リスクの相対クレームコスト$r_{i\cdot}, r_{\cdot j}$によってそれぞれの危険等級の相対的な危険度を求めていることに由来する。ここで求めなければならないのは、危険等級相互間の相対的な危険度であるが、単一等級リスクの相対クレームコスト$r_{i\cdot}, r_{\cdot j}$は、危険等級固有の危険度だけでなく、これを構成する各複合等級リスク(a_i, b_j)の標本数の構成比によっても影響を受けるので、$r_{i\cdot}, r_{\cdot j}$は危険等級の危険度を表す指標としては適当ではない。すなわち、$r_{i\cdot}, r_{\cdot j}$はそれぞれ料率係数の推定値$\hat{x}_i, \hat{y}_j$の一つと考えられるが、必ずしも最良のものとはいえない。したがって、何らかの方法で最良の推定値$\hat{x}_i, \hat{y}_j$を求める必要がある。

第二の欠点は、$\hat{x}_i, \hat{y}_j$から$\hat{r}_{ij}$を求める算式をやや硬直的に設定している点である。危険等級a_i, b_jを確率事象と見たとき、a_i, b_jがすべてのi, jに関して互いに独立であれば、$\hat{r}_{ij} = \hat{x}_{i\cdot} \cdot \hat{y}_{\cdot j}$が成立する。しかしながら実際は、互いに独立な危険等級が得られることはまれであり、無条件に乗法を採用することはできない。したがって、そのつど$\hat{x}_i, \hat{y}_j$を結びつける適当な算式を求めなければ

ばならない。たとえば、乗法が適合するのは、複合等級リスク(a_i, b_j)が互いに独立な危険等級a_i, b_jの積事象となっている場合であり、加法が適合するのは、複合等級リスク(a_i, b_j)が互いに素な危険等級a_i, b_jの和事象となっている場合である。ただ、算式はあくまでも与えられた危険標識によって決定されるものであるから、単に漫然と乗法や加法を適用すればよいものではないことは言うまでもない。

以上のことから、複合分類リスクの料率算定の一般的手順を示すと次のようになる。

① 適当なr_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, l)$の関数$f, g$を見つけて、

$$\hat{x}_i = f_i(r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{kl})$$

$$\hat{y}_j = g_j(r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{kl})$$

とおく。

② 適当な2変数関数hを見つけて

$$\hat{r}_{ij} = h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$$

とおく。

③ $\hat{R}_{ij} = \hat{R}_{..}\,\hat{r}_{ij}$

を計算する。

上記②における2変数関数hを見つけること、すなわち、複合料率区分における各グループ間の相互依存関係を求めるためには、それを測定する何らかの数理的手法の開発が必要となる。これら数理的手法の代表例としては、Bailey-Simon 法、Jung 法、Minimum Bias 法などが開発されており、これらについて次節で概説する。

4.2 複合分類リスクの数理的料率算定方法

4.2.1 Bailey-Simon 法

R. Bailey とL. Simon は、1960年に発表した論文において複合分類リスクの新しい料率算出方法を示し、その後この手法は一般に Bailey-Simon 法と呼ばれている。Bailey と Simon が発表した論文の中では、料率の満たすべき基準として次の4条件を挙げている。ただし、これらの条件は、絶対的なものではなく、また数学的にも独立でもなく、十分性も必ずしも明らかではないものの、一般的には妥当なものとして受け入れられやすいものと考えられる。

① 単一の等級リスクおよびリスク全体での収支のバランスがとれること。

② 複合等級リスクのデータの信頼性を反映したものであること。

③ 実際のデータとの誤差の総計が最小になること。

④ 複合等級リスクの料率は十分経験値に近く、その誤差は偶然に起因するにすぎないものであること。

この4条件をそれぞれ数学的に表現すると以下のようになる。

①’ $$\frac{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\hat{r}_{ij}}{\sum_{j=1}^{l} n_{ij} r_{ij}} \approx 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^{k} n_{ij} r_{ij}} \approx 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\hat{r}_{ij}}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij} r_{ij}} \approx 1$$

②'　$$\frac{\sqrt{n_{ij}}\,(r_{ij}-\hat{r}_{ij})}{\hat{r}_{ij}} \approx 0 \quad (i=1,2,\ldots,k;\ j=1,2,\ldots,l)$$

③'　$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\left|r_{ij}-\hat{r}_{ij}\right|}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\ r_{ij}} \approx 0$$

④'　$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{n_{ij}(r_{ij}-\hat{r}_{ij})^2}{K\,\hat{r}_{ij}} \approx 0$$（Kは定数で、i, jによらない）

ここで、①'および③'については、基準①および③を直接的に表現したものである。

基準④については、$\sum_{i,j}\left(\frac{r_{ij}-\hat{r}_{ij}}{\hat{\sigma}_{r_{ij}}}\right)^2 \approx 0$となることが求められることである。そこで、$\frac{r_{ij}-\hat{r}_{ij}}{\hat{\sigma}_{r_{ij}}}$が近似的に正規分布に従い、$\hat{\sigma}_{r_{ij}}^2$が近似的に$\frac{K}{n_{ij}}\hat{r}_{ij}$（$K$は定数で、$i, j$によらない）で表されるものと仮定すると、$\sum_{i,j}\xi_{ij}^2$（ただし、$\xi_{ij}=\frac{r_{ij}-\hat{r}_{ij}}{\sqrt{\frac{K}{n_{ij}}\hat{r}_{ij}}}$とする）が近似的に$\chi^2$−分布に従うことにより、$\chi^2$−検定によって評価するものである[1]。④'の式はχ^2で表されるのが通常である。

次に基準②については、複合等級リスクR_{ij}のデータの信頼度をα_{ij}とし、R_{ij}の実態相対クレームコストを$\alpha_{ij}r_{ij}+(1-\alpha_{ij})\hat{r}_{ij}$と見なしたときに、推定値$\hat{r}_{ij}$ができるだけこれに近くなること、すなわち$\frac{\alpha_{ij}r_{ij}+(1-\alpha_{ij})\hat{r}_{ij}}{\hat{r}_{ij}} \approx 1$が求められることである。そこで、これを変形すると$\frac{\alpha_{ij}(r_{ij}-\hat{r}_{ij})}{\hat{r}_{ij}} \approx 0$となり、一方において信頼度

1　4.2.5節参照。

はクレーム数の平方根に比例する[2]ことから、②'の$\dfrac{\sqrt{n_{ij}}\,(r_{ij}-\hat{r}_{ij})}{\hat{r}_{ij}}\approx 0$となる。しかしながら、この式を2乗したうえですべてのi, jについて合計すると、④'と本質的に一致することになるため、基準②の数学的表現については④のものと一致することがわかる。

上述のように、四つの基準は独立ではなく、たとえば、④が近似的に満たされれば①～③も近似的に満たされることがわかる。そこで④に注目することにする。④式の左辺をχ^2とおくことにすれば④の条件は、χ^2ができるだけ0に近くなることを要求しているから、$\hat{x}_i, \hat{y}_j$は与えられた危険標識、危険等級、および$h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$の下でχ^2の値を最小にするものであることが必要である。そのような$\hat{x}_i$, $\hat{y}_j$を求めるためには、χ^2を$\hat{x}_i, \hat{y}_j$でそれぞれ偏微分したものを0とおいて得られる連立方程式を解けばよい。具体的にタリフ構造$h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$が乗法型の場合には、この連立方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi^2}{\partial \hat{x}_i} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{j=1}^{l} n_{ij}\hat{y}_j - \dfrac{1}{K}\sum_{j=1}^{l}\dfrac{n_{ij} r_{ij}^2}{\hat{x}_i^2\,\hat{y}_j} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \\ \dfrac{\partial \chi^2}{\partial \hat{y}_j} = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_{ij}\hat{x}_i - \dfrac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}\dfrac{n_{ij} r_{ij}^2}{\hat{x}_i\,\hat{y}_j^2} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, l) \end{cases}$$

となる。また、$h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$が加法型の場合、あるいはさらに一般的な場合でも、同様に連立方程式を求めることができる。ただし、この連立方程式を数学的に解くことは困難であり、実務上はコンピュータによって近似解を求めなければならない。

このようにして求められた$\hat{x}_i, \hat{y}_j$が、基準④を十分満たすか否かは、χ^2の値が十分0に近いか否かによっている。前述のとおり、適当な仮定のもとで統計量

2　3.2節参照。

χ^2は、近似的にχ^2-分布に従うことがわかっているので、χ^2-検定を適用することができる。χ^2-検定によって仮説が棄却された場合には、たとえば乗法型を加法型に置き直して再度同じ手順を踏んで検定をやり直してみるなど、まず$h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$の見直しを行い、それでも適当な解が得られない場合には、さらに危険標識の選択について見直す必要がある。

4.2.2 Minimum Bias 法

Bailey-Simonの論文が発表された後、Baileyは1963年に上記の4基準のうち①のみに着目した料率算定方法を発表している。すなわち、Bailey-Simon 法のように統計的手法であるχ^2-検定によらず、保険集団での収支を第一義において、次の連立方程式を解くことにより料率係数$\hat{x}_i, \hat{y}_j$を求めるという方法である。

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{l} n_{ij}(r_{ij} - \hat{r}_{ij}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_{ij}(r_{ij} - \hat{r}_{ij}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, l) \end{cases}$$

この手法は、伝統的な算定方法においては収支のバランスが全く保証されず、また Bailey-Simon 法では近似的に保証されるにすぎなかった点を考慮した方法ということができる。ただし、この方式において第一義としている条件は、Bailey-Simon 法のものとは異質のものであるものの、実際のデータに対して両手法を適用すると、得られる結果は通常ほぼ同じであるがわかっている。この手法は、Minimum Bias 法または Marginal-Total 法と呼ばれている。

また、この方法は、計算が簡単であるという利点を持っており、現在のようにコンピュータが発達していなかった時代においては有用な方法であったといえる。

4.2.3 Jung 法

J. Jung は、Bailey-Simon の主張の本質的な部分を定式化し直し、その分析を行っている(1968年)。Bailey-Simon 法および Minimum Bias 法では、r_{ij} の分布を特定していなかったが、Jung は、複合分類リスクの構造が乗法型で、複合等級リスクが互いに独立でポアソン分布に従うとき、料率係数の決定方法として最尤法を用いることができることを示している。

上記の仮定のもとで尤度関数 L は、次のように表される。

$$L = \prod_{i,j} e^{-n_{ij}\hat{r}_{ij}} \frac{(n_{ij}\hat{r}_{ij})^{n_{ij} r_{ij}}}{(n_{ij}r_{ij})!}$$

この両辺の対数をとり、

$$\log L = \sum_{i,j} \left\{ -n_{ij}\,\hat{r}_{ij} + n_{ij}\,r_{ij} \log(n_{ij}\,\hat{r}_{ij}) - \log(n_{ij}\,r_{ij})! \right\}$$

を最大にする $\hat{r}_{ij}$ を求めればよい。具体的にタリフ構造 $h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$ が乗法型の場合には、この連立方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L}{\partial \hat{x}_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \left(-n_{ij}\hat{y}_j + \frac{n_{ij}r_{ij}}{\hat{x}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial \hat{y}_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(-n_{ij}\hat{x}_i + \frac{n_{ij}r_{ij}}{\hat{y}_j} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, l) \end{cases}$$

となる。

このようにして求めた料率係数 $\hat{x}_i, \hat{y}_j$ の採否の検定については、前述の基準④の χ^2 の値を求め、これに対して χ^2-検定を適用すればよい。

なお、Jung 法は乗法型に限られるのではなく、料率係数を結びつける算式 $h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$ がさらに一般的な場合にも拡張できることが示されている。また、乗法型に限っていえば、Jung 法を用いた結果と、上記 Minimum Bias 法を用いた結果とは一致することが示されている。

4.2.4 手法の選択

Jung 法が発表された後も、タリフ理論に関する研究が行われてきており、たとえば Direct 法などの手法が紹介されている。しかしながら、理論的側面を重視したものが多く、必ずしも実務的とはいえないという問題点がある。

実務的な手法という観点から Bailey-Simon 法について、再度問題点を洗い出してみると次のとおりとなる。

① リスク分類要素の選択基準がなく、タリフ構造の有効性についても統計的検討を行っていない。

② 部分リスク集団のウェイト n_{ij} が小さすぎると、相対クレームコスト指数 r_{ij} が大きく変動することがあり、この影響を大きく受けやすい。

③ Bailey-Simon 法による料率係数に従って料率を定めていくと、純率の予定損害率が100%とはならず、料率水準の検証を行いにくい。

このうち①の問題点については、Minimum Bias 法や Jung 法にも当てはまることであるが、生活環境等の変化に伴うリスクの構造変化を取り込むことが容易であり、実用性を重視するのであれば大きな障害とはなりえない。

②については、Bailey-Simon 法の非ロバスト[3]性（非安定性）を示すものであり、実務的見地からも問題となる。この原因は、Bailey-Simon 法が料率係数の決定方程式の中に、r_{ij} と $\hat{r}_{ij}$ との差の部分が2次項となっているためであり、他の手法においてはこの差の部分が1次項となっており、この点からはロバストな決定方程式となっている。

さらに③の問題点とを考え合わせると、料率係数の決定方法としては Minimum Bias 法が選択しやすいものと考えられる。しかしながら、一方におい

---

3 統計量が、データ中に極端に飛び離れた値の影響を受けにくいとき、ロバスト（robust）であるという。

ては与えられた危険標識、危険等級およびタリフ構造式$h(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$のもとでは、どの手法を用いても結果はあまり異ならないことも報告されており、むしろ危険標識や危険等級、構造式として最良のものにより構成することの方が重要である。

4.2.5 補足

4.2.1節における④'の左辺について、およびこれが近似的にχ^2−分布に従うことについて、以下補足説明する。

複合等級リスクの1エクスポージャあたりのクレームコストを確率変数と考え、これをR_{ij}で表す。また、n_{ij}個のエクスポージャから成る複合等級リスクの各標本値を$R_{ij\nu}$、その標本平均クレームコストを$\tilde{R}_{ij} = \dfrac{1}{n_{ij}} \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}$とすると、

$$E(\tilde{R}_{ij}) = E(R_{ij})$$

$$V(\tilde{R}_{ij}) = \frac{1}{n_{ij}} V(R_{ij})$$

である。n_{ij}が十分大きい場合には、中心極限定理により、

$$\xi_{ij} = \frac{\tilde{R}_{ij} - E(\tilde{R}_{ij})}{\sqrt{V(\tilde{R}_{ij})}} = \frac{\sqrt{n_{ij}}\,(\tilde{R}_{ij} - E(R_{ij}))}{\sqrt{V(R_{ij})}} \quad (i = 1, 2, \cdots, k; j = 1, 2, \cdots, l)$$

は、近似的に標準正規分布$N(0, 1)$に従い、また、

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \xi_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{n_{ij}(\tilde{R}_{ij} - E(R_{ij}))^2}{V(R_{ij})}$$

は、近似的に自由度$m = (k-1)(l-1)$のχ^2分布に従うことになる。

次に、n_{ij}個のエクスポージャから成る複合等級リスクの標本におけるクレーム数をn'_{ij}、標本クレーム頻度をf_{ij}とすると、$f_{ij} = \dfrac{n'_{ij}}{n_{ij}}$となる。また、この標本平均クレーム額を$\overline{c}_{ij}$、標本クレーム分散を$\overline{\tau}_{ij}^2$とすると、

$$\overline{c}_{ij} = \frac{1}{n'_{ij}} \sum_{\substack{\nu=1 \\ R_{ij\nu} \neq 0}}^{n_{ij}} R_{ij\nu} = \frac{1}{n'_{ij}} \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}$$

$$\overline{\tau}_{ij}^2 = \frac{1}{n'_{ij}} \sum_{\substack{\nu=1 \\ R_{ij\nu} \neq 0}}^{n_{ij}} (R_{ij\nu} - \overline{c}_{ij})^2 = \frac{1}{n'_{ij}} \sum_{\substack{\nu=1 \\ R_{ij\nu} \neq 0}}^{n_{ij}} R_{ij\nu}^2 - \overline{c}_{ij}^2 = \frac{1}{n'_{ij}} \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}^2 - \overline{c}_{ij}^2$$

となる。ところで、

$$\begin{aligned}
V(R_{ij}) &= \frac{1}{n_{ij}} \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} (R_{ij\nu} - E(R_{ij}))^2 \\
&= \frac{1}{n_{ij}} \sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}^2 - E(R_{ij})^2 \\
&= f_{ij}\left[\left(\frac{1}{f_{ij}}\frac{1}{n_{ij}}\sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}\right)^2 + \frac{1}{f_{ij}}\frac{1}{n_{ij}}\sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}^2 - \left(\frac{1}{f_{ij}}\frac{1}{n_{ij}}\sum_{\nu=1}^{n_{ij}} R_{ij\nu}\right)^2\right] - E(R_{ij})^2 \\
&= f_{ij}(\overline{c}_{ij}^2 + \overline{\tau}_{ij}^2) - f_{ij}^2\,\overline{c}_{ij}^2
\end{aligned}$$

と変形することができる。

さて、ここで $V(R_{ij}) = f_{ij}(\overline{c}_{ij}^2 + \overline{\tau}_{ij}^2) - f_{ij}^2\,\overline{c}_{ij}^2$ が、近似的に $f_{ij}(\overline{c}_{ij}^2 + \overline{\tau}_{ij}^2)$ に等しいものと仮定すると、

$$\begin{aligned}
V(R_{ij}) &= f_{ij}(\overline{c}_{ij}^2 + \overline{\tau}_{ij}^2) = \frac{f_{ij}^2\,\overline{c}_{ij}^2}{f_{ij}}\,\frac{\overline{c}_{ij}^2 + \overline{\tau}_{ij}^2}{\overline{c}_{ij}^2} \\
&= \frac{\overline{R}_{ij}^2}{f_{ij}}\left(1 + \frac{\overline{\tau}_{ij}^2}{\overline{c}_{ij}^2}\right)
\end{aligned}$$

$$V(\tilde{R}_{ij}) = \frac{1}{n_{ij}} V(R_{ij}) = \frac{E(R_{ij})^2}{n_{ij} f_{ij}}\left(1 + \frac{\overline{\tau}_{ij}^2}{\overline{c}_{ij}^2}\right)$$

となる。

さらに、複合分類リスク全体の標本クレームコストを $\overline{R}$ 、標本クレーム頻度を f 、標本平均クレーム金額を $\overline{c}$ とすると、相対標本クレームコスト $\tilde{r}_{ij}$ は、次のように表される。

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\tilde{R}_{ij}}{\overline{R}}$$

$$V(\tilde{r}_{ij}) = \frac{1}{\overline{R}^2} V(\tilde{R}_{ij}) = \frac{1}{\overline{R}^2} \frac{1}{n_{ij}} V(R_{ij})$$

$$= \frac{\overline{R}_{ij}^2}{\overline{R}^2 \, n_{ij} f_{ij}} \left(1 + \frac{\overline{\tau}_{ij}^2}{\overline{c}_{ij}^2} \right)$$

$$= \frac{1}{n_{ij}} \cdot \frac{\overline{R}_{ij}}{\overline{R}} \cdot \frac{\overline{c}_{ij} f_{ij}}{f \, \overline{c}} \cdot \frac{1}{f_{ij}} \left(1 + \frac{\overline{\tau}_{ij}^2}{\overline{c}_{ij}^2} \right)$$

となる。ここで、$\hat{r}_{ij} = \dfrac{\overline{R}_{ij}}{\overline{R}}$ を上式に代入するとともに、$\overline{c}_{ij} = \overline{c}$ およびすべての i, j について、$\tau_{ij} = \tau$（τ は定数）となることを仮定すると、

$$V(\tilde{r}_{ij}) = \frac{1}{n_{ij}} \hat{r}_{ij} \frac{1}{f} \left(1 + \frac{\tau^2}{\overline{c}^2} \right)$$

と表すことができる。さらに、$K = \dfrac{1}{f} \left(1 + \dfrac{\tau^2}{\overline{c}^2} \right)$ とおくことによって、

$$V(\tilde{r}_{ij}) = K \cdot \frac{\hat{r}_{ij}}{n_{ij}}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \xi_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{(\tilde{R}_{ij} - E(R_{ij}))^2}{V(\tilde{R}_{ij})}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{K} \cdot \frac{n_{ij} (\tilde{r}_{ij} - \hat{r}_{ij})^2}{\hat{r}_{ij}}$$

となり、④’の式が導き出される。

4.3　一般化線形モデル

4.3.1　線形モデルと一般化線形モデル

4.2で紹介したBailey-Simon法やMinimum Bias法では、パラメータの区間推定や検定などを確率的・統計的に行うことはできない。また、古典的な線形モデルでは、目的変数の期待値は説明変数の線形結合で表され、誤差項の分布は正規分布に従い、その分散は一定といった仮定があり、損害保険で取り扱うリスクを分析するには大きな制約となる。

これに対し、1972年にNelderとWedderburnによって考案された一般化線形モデル(Generalized Linear Model)では、目的変数の期待値は説明変数の線形結合を要素としたリンク関数(link function)と呼ばれる関数で表され、目的変数は指数型分布族に従い、その分散は平均の関数で表せる。このため、一般化線形モデルでは損害保険で取り扱うクレーム頻度やクレーム額の分布といった正規分布がなじみにくい目的変数に対してもモデル化が可能となる。

4.3.2　指数型分布族

説明変数Xをそれぞれp個持つ、目的変数Y(互いに独立)がn組あるモデルを考える。

目的変数	説明変数			
Y_i	X_{i1}	X_{i2}	$\cdots$	X_{ip}
y_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1p}
y_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
y_n	x_{n1}	x_{n2}	$\cdots$	x_{np}

一般化線形モデルにおいては、目的変数Yは指数型分布族に従うものと仮定する。

指数型分布族は以下の式で一般的に表せ、代表的な分布としては正規分布やポアソン分布、ガンマ分布等がある。

$$f(y_i;\theta_i,\phi)=\exp\left\{\frac{y_i\theta_i-b(\theta_i)}{a(\phi)}+c(y_i,\phi)\right\}$$

代表的な分布の$a(\phi)$, $b(\theta_i)$, $c(y_i,\theta)$は、次のとおりである。

	$a(\phi)$	$b(\theta_i)$	$c(y_i,\phi)$
正規分布	$\dfrac{\phi}{\omega_i}$	$\dfrac{\theta_i^2}{2}$	$-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\omega_i y_i^2}{\phi}+\log\left(\dfrac{2\pi\phi}{\omega_i}\right)\right\}$
ポアソン分布	$\dfrac{\phi}{\omega_i}$	e^{θ_i}	$-\log(y_i!)$
ガンマ分布	$\dfrac{\phi}{\omega_i}$	$-\log(-\theta_i)$	$\dfrac{\omega_i}{\phi}\log\left(\dfrac{\omega_i y_i}{\phi}\right)-\log(y_i)-\log\left(\Gamma\left(\dfrac{\omega_i}{\phi}\right)\right)$

ここで、ωはウェイトを表し、クレーム件数のモデリングの際は1、クレーム頻度の際はエクスポージャー数、クレーム単価の際は総事故件数などが用いられる。

また、θ_i, ϕはそれぞれ平均、分散に関連付けられるパラメータであり、

$$\mu_i=E(Y_i)=b'(\theta_i)$$

$$\mathrm{Var}(Y_i)=b''(\theta_i)\cdot a(\phi)$$

の関係にある。

指数型分布族の要件としては、

- 平均と分散を用いてその分布を表現できる。
- 分散は平均の関数として表現できる。

がある。一つ目の要件は、指数型分布族の確率密度関数$f(y_i;\theta_i,\phi)$から分かるように、その分布を二つのパラメータを用いて表せることを意味する。一方、

二つ目の要件について式で表すと、

$$\mathrm{Var}(Y_i) = \phi \frac{V(\mu_i)}{\omega_i}$$

と書けることを意味する。ここで ω は任意であるので、たとえば1とした場合、V は以下のようになる。

	μ_i	$V(\mu_i)$	ϕ
正規分布　$N(\mu_i, \sigma^2)$	μ_i	1	σ^2
ポアソン分布　$Po(\lambda_i)$	λ_i	λ_i	1
ガンマ分布　$G(\alpha, \beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha^2}{\beta^2}$	$\frac{1}{\alpha}$

4.3.3 リンク関数

通常の線形モデルでは、

$$\mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}$$

と表せるのに対し、一般化線形モデルでは、

$$\mu_i = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip})$$

と表す。g はリンク関数（link function）と呼ばれ、微分可能であり単調増加もしくは単調減少の関数である。リンク関数の例としては、x，$\log x$，$\log\left(\frac{x}{1-x}\right)$，$\frac{1}{x}$ といったものが挙げられる。

4.3.4 一般化線形モデル

一般化線形モデルを解く方法としては、最尤法を用いる方法が一般的である。具体的には、前記の条件の下において、尤度関数 L

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta_i, \phi) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{ \frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} + c(y_i, \phi) \right\}$$

を最大にする θ_i（実質的には $\mu_i = b'(\theta_i)$ より $\mu_i = g^{-1}(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots$

$+\beta_p x_{ip}$)に対応するパラメータ$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_p)$)を求めることにより、$Y_i$の期待値である$\mu_i$を推定することができる。

4.3.5 一般化線形モデルの計算例

自動車保険の実績クレーム単価が使用目的(レジャー使用か業務使用か)と免許証の色(ゴールドかゴールド以外か)で以下のようになっている場合に、区分ごとのクレーム単価の期待値を一般化線形モデルを用いて計算してみる。

	ゴールド以外	ゴールド
業　務	1,000	800
レジャー	600	500

一般的に一般化線形モデルを解くステップとしては、

(1)　説明変数Xとパラメータβを設定する。

(2)　使用する指数型分布族およびリンク関数を選ぶ。

(3)　尤度関数Lを計算し、対数尤度が最大となるβを求める。

(4)　Yの期待値であるμを求める。

のようになる。

(1)　目的変数Y_iを使用目的別・免許証の色別のクレーム単価とし、

$y_1 = 1{,}000$(業務使用のゴールド以外), $y_2 = 800$(業務使用のゴールド),

$y_3 = 600$(レジャー使用のゴールド以外), $y_4 = 500$(レジャー使用のゴールド)

とする。一方、説明変数x_{ij}を以下のように定義する。

$$x_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{(業務使用の場合)} \\ 0 & \text{(レジャー使用の場合)} \end{cases}, \quad x_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{(レジャー使用の場合)} \\ 0 & \text{(業務使用の場合)} \end{cases},$$

$$x_{i3} = \begin{cases} 1 & \text{(ゴールド以外の場合)} \\ 0 & \text{(ゴールドの場合)} \end{cases}$$

(2)　指数型分布族として正規分布、リンク関数として$g(x) = x$を選んだ場合を

考える。ωを1とした場合、

$$\mu_i = E(Y_i) = g^{-1}(\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3})$$

$$= \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} = \begin{cases} \beta_1 + \beta_3 & (i=1) \\ \beta_1 & (i=2) \\ \beta_2 + \beta_3 & (i=3) \\ \beta_2 & (i=4) \end{cases}$$

$$f\left(y_i;\mu_i,\sigma^2\right) = \exp\left\{-\frac{\left(y_i - \mu_i\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right)\right\}$$

となる。

(3) この場合、尤度関数Lおよび対数尤度lは、

$$L = \prod_{i=1}^{4} f(y_i;\mu_i,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{4} \exp\left\{-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{4} \exp\left\{-\frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^{3}\beta_j \cdot x_{ij}\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right\}$$

$$l = \log L = \sum_{i=1}^{4}\left\{-\frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^{3}\beta_j \cdot x_{ij}\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)\right\}$$

となる。対数尤度lが最大となるβを求めるために方程式$\dfrac{\partial l}{\partial \beta_i} = 0$を解き、

$\beta_1 = 825$，$\beta_2 = 475$，$\beta_3 = 150$を得る。

(4) これにより、区分ごとのクレーム単価の期待値μ_iは、以下のようになる。

	ゴールド以外	ゴールド
業　務	975	825
レジャー	625	475

4.3.6 Minimum Bias 法と一般化線形モデル

複合分類リスク(a_i, b_j)の係数(α_i, β_j)について、使用する指数型分布族として正規分布、リンク関数として$g(x) = x$を選び、$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j$を仮定して一般化線形モデルを用いて計算すると、

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}(r_{ij} - \beta_j)}{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}}, \quad \beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}(r_{ij} - \alpha_i)}{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}}$$

が得られる。

一方、Minimum Bias 法で加法型を仮定した場合（$\hat{r}_{ij} = \alpha_i + \beta_j$）の解は、

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}(r_{ij} - \alpha_i - \beta_j) = 0 \\ \sum_{i=1}^{k} n_{ij}(r_{ij} - \alpha_i - \beta_j) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}(r_{ij} - \beta_j)}{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}}, \quad \beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}(r_{ij} - \alpha_i)}{\sum_{i=1}^{k} n_{ij}}$$

となり、一般化線形モデルによる解と一致していることが分かる。

4.4　練習問題

1.　ある保険会社の自家用乗用車に対する自動車保険の料率は、単純に車種（ファミリーカーかスポーツカーか）と運転者の年齢（25歳未満か25歳以上か）の二つの危険標識のみによって複合的に区分されている。この保険にかかるある年度の実績統計は次表のとおりであり、この統計に基づいてクレームコスト（ここでは純率の意味）の分析を行うことにする。このとき、以下の各問いに答えよ。

［エクスポージャ（E_{ij}）］

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$E_{11}=2{,}900$	$E_{12}=5{,}100$	$E_{1\bullet}=8{,}000$
スポーツカー	$E_{21}=1{,}100$	$E_{22}=900$	$E_{2\bullet}=2{,}000$
計	$E_{\bullet 1}=4{,}000$	$E_{\bullet 2}=6{,}000$	$E_{\bullet\bullet}=10{,}000$

［クレーム総額（C_{ij}）］

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$C_{11}=196$	$C_{12}=240$	$C_{1\bullet}=436$
スポーツカー	$C_{21}=124$	$C_{22}=91$	$C_{2\bullet}=215$
計	$C_{\bullet 1}=320$	$C_{\bullet 2}=331$	$C_{\bullet\bullet}=651$

(1)　各リスク区分ごとの相対クレームコスト指数（r_{ij}）を計算し、下表を埋めよ（小数点以下第4位四捨五入で第3位まで）。

［相対クレームコスト指数（r_{ij}）］

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$r_{11}=$	$r_{12}=$	$r_{1\bullet}=$
スポーツカー	$r_{21}=$	$r_{22}=$	$r_{2\bullet}=$
計	$r_{\bullet 1}=$	$r_{\bullet 2}=$	$r_{\bullet\bullet}=$

(2) (1)の各相対クレームコスト指数の推定値$(\hat{r}_{ij})$を Minimum Bias 法を用いて求めるとしたとき、各指数の推定値が満たすべき基準式を示せ。

(3) この複合分類リスクの構造が加法型であるものと仮定して、二つの危険標識それぞれについての料率係数(x_i, y_j)を Minimum Bias 法により求めよ。なお、車種区分のうち「ファミリーカー」に対応する料率係数x_1は、それに対応する実績の相対クレーム$r_{1.}$に等しいものと仮定することにする。また、併せて相対クレームコスト指数の推定値$(\hat{r}_{ij})$を計算し、下表を埋めよ。なお、解答する数値は小数点以下第4位を四捨五入して第3位まで求めることとする。

[相対クレームコスト指数の推定値$(\hat{r}_{ij})$および料率係数]

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$\hat{r}_{11}=$	$\hat{r}_{12}=$	$x_1=$
スポーツカー	$\hat{r}_{21}=$	$\hat{r}_{22}=$	$x_2=$
料 率 係 数	$y_1=$	$y_2=$	—

(保険1(損保)1993年改)

2. 4.3.5の計算例において、指数型分布族としてポアソン分布、リンク関数として$g(x)=\log x$を選んだ場合の区分ごとのクレーム単価の期待値(小数点以下第2位を四捨五入して小数第1位まで)を計算せよ。

［参考文献］

1. 嶋倉征雄著『損害保険料率算定の基礎知識』（損害保険企画）

2. 松原稔・藤田憲司著『統計的推定のレートメーキングへの応用について』（日本アクチュアリー会会報　第34号第2分冊）

3. 損保アクチュアリー調査研究会中間報告“Tariff Theory”について（日本アクチュアリー会会報　第36号第2分冊）

4. Duncan Anderson, Sholom Feldblum, Claudine Modlin, Doris Schirmacher, Ernesto Schirmacher and Neeza Thandi, “A Practitioner's Guide to Generalized Linear Models, A CAS Study Note, Third Edition”, Casualty Actuarial Society

5. Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene and Michel Denuit, “Modern Actuarial Risk Theory: Using R (2nd edition)”, Springer

6. Annette J. Dobson, “An Introduction to Generalized Linear Models, Second Edition”, Chapman & Hall/CRC

練習問題解答

1.

(1)まず、各リスク区分ごとのクレームコスト(R_{ij})を、

$$R_{ij} = \frac{C_{ij}}{E_{ij}} \qquad (i=1,2;\ j=1,2)$$

によって計算すると、次表のとおりとなる。

[クレームコスト(R_{ij})]

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$R_{11}=0.06759$	$R_{12}=0.04706$	$R_{1\cdot}=0.05450$
スポーツカー	$R_{21}=0.11273$	$R_{22}=0.10111$	$R_{2\cdot}=0.10750$
計	$R_{\cdot 1}=0.08000$	$R_{\cdot 2}=0.05517$	$R_{\cdot\cdot}=0.06510$

相対クレームコスト指数(r_{ij})は、

$$r_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{\cdot\cdot}} \qquad (i=1,2,\cdot;\ j=1,2,\cdot)$$

によって計算できるので、求める表は次表のとおりとなる。

[相対クレームコスト指数(r_{ij})]

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$r_{11}=1.038$	$r_{12}=0.723$	$r_{1\cdot}=0.837$
スポーツカー	$r_{21}=1.732$	$r_{22}=1.553$	$r_{2\cdot}=1.651$
計	$r_{\cdot 1}=1.229$	$r_{\cdot 2}=0.847$	$r_{\cdot\cdot}=1.000$

(2) Minimum Bias 法における満たすべき基準を、本問に当てはめて変数を用い表すと次のようになる。

$$\begin{cases} E_{11}\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)+E_{12}\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)=0 \\ E_{21}\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)+E_{22}\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=0 \\ E_{11}\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)+E_{21}\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)=0 \\ E_{12}\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)+E_{22}\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=0 \end{cases}$$

(3) (2)の連立方程式において、$E_{ij}\left(r_{ij}-\hat{r}_{ij}\right)$をそれぞれ変数と見なして求めると、

$$\begin{cases} E_{11}\left(r_{11}-\hat{r}_{11}\right)=E_{22}\left(r_{22}-\hat{r}_{22}\right)=C \\ E_{12}\left(r_{12}-\hat{r}_{12}\right)=E_{21}\left(r_{21}-\hat{r}_{21}\right)=-C \end{cases}$$

となることが分かる。ここでCは定数で、後で求めることにする。

さて、この複合分類リスクの構造が加法型であることから、各相対クレームコスト指数の推定値は料率係数を用いて、

$$\hat{r}_{ij}=x_i+y_j \qquad (i=1,2;\, j=1,2)$$

と表させるので、これを上の連立方程式に代入して整理すると、

$$\begin{cases} x_1+y_1=r_{11}-C/E_{11} & \text{(a)} \\ x_2+y_2=r_{22}-C/E_{22} & \text{(b)} \\ x_1+y_2=r_{12}+C/E_{12} & \text{(c)} \\ x_2+y_1=r_{21}+C/E_{21} & \text{(d)} \end{cases}$$

となる。ここで、(a)+(b)−(c)−(d)を両辺について計算すると、

$$0=r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22}-C\left(\frac{1}{E_{11}}+\frac{1}{E_{12}}+\frac{1}{E_{21}}+\frac{1}{E_{22}}\right)$$

となるから、

$$C=\left(r_{11}-r_{12}-r_{21}+r_{22}\right)\Big/\left(\frac{1}{E_{11}}+\frac{1}{E_{12}}+\frac{1}{E_{21}}+\frac{1}{E_{22}}\right)$$

によりCを求めることができる。

次に、題意より$x_1=r_{1\cdot}$であることに注意すれば、上記(a),(c),(b)式より順次料率係数を求めることができる。

以上により、料率係数および相対クレームコスト指数の推定値を具体的に求めると、次表のとおりとなる。

［相対クレームコスト指数の推定値$(\hat{r}_{ij})$および料率係数］

	25歳未満	25歳以上	計
ファミリーカー	$\hat{r}_{11}=1.020$	$\hat{r}_{12}=0.733$	$x_1=0.837$
スポーツカー	$\hat{r}_{21}=1.781$	$\hat{r}_{22}=1.494$	$x_2=1.598$
料　率　係　数	$y_1=0.183$	$y_2=-0.104$	—

2．

(1)　$y_1,\cdots,y_4,x_{i1},x_{i2},x_{i3}$は、4.3.5の計算例と同じ。

(2)　$\mu_i=E(Y_i)=g^{-1}(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})$

$$=\exp(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})=\begin{cases}\exp(\beta_1+\beta_3) & (i=1)\\ \exp(\beta_1) & (i=2)\\ \exp(\beta_2+\beta_3) & (i=3)\\ \exp(\beta_2) & (i=4)\end{cases}$$

$$f(y_i;\mu_i)=e^{-\mu_i}\frac{\mu_i^{y_i}}{y_i!}$$

(3)

$$l=\sum_{i=1}^{4}\left(-\mu_i+y_i\log\mu_i-\log y_i!\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\left\{-\exp(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})+y_i(\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3})-\log y_i!\right\}$$

$$\therefore\frac{\partial l}{\partial\beta_i}=0\Leftrightarrow\begin{matrix}e^{\beta_1}\cdot(e^{\beta_3}+1)=1800\\ e^{\beta_2}\cdot(e^{\beta_3}+1)=1100\\ e^{\beta_3}\cdot(e^{\beta_1}+e^{\beta_2})=1600\end{matrix}$$

$\therefore\ \beta_1=6.6932,\ \beta_2=6.2007,\ \beta_3=0.2076$

(4)　区分ごとのクレーム単価の期待値は、以下のようになる。

	ゴールド以外	ゴールド
業　務	993.1	806.9
レジャー	606.9	493.1

第５章

支　払　備　金

第5章　支払備金

5.1　支払備金とは

損害保険の保険事故が発生した場合、通常、それらすべてが即時に保険会社に通知されることはなく、また、通知があった後においても損害額の確定までに相当の日数を要することから、保険会社は常に既発生の保険金債務を有している。

このような既発生の保険金債務を**支払備金**という。

支払備金の重要性を認識するためには、会計上の意義を理解する必要がある。数理的な議論に入る前に、この点について簡単に説明しておく。

損害保険会社では、通常、期中における保険金の計上は、現金主義（収入・支出を実際に収入・支出した期間に認識するもの）で行なわれている（以下、単に「**保険金**」という場合は、常にこの意味で用いるものとする）。しかし、この方法では、保険金支出とそれに対応する保険料収入が対応した期間に認識されないため、期間損益計算上は適当でない。

期中において現金主義として認識されている保険金を、発生主義（収入・支出を債権・債務が発生した期間に認識するもの）に変換するために必要となる概念が、支払備金である。

支払備金という概念を用いると、ある期間の発生主義に基づく保険金（以下、「**発生保険金**」という）は、下式のように計算される。

（当該期間保険金）＋（当該期末支払備金）－（当該期首支払備金）

この式は次のように解釈することにより、発生主義として認識された損害額（当期にクレームが発生した損害額）であることが明確となる。

まず、当期から売り始めた保険種目に対して上式の値を考えてみる。こ

のとき、第3項はゼロであるので、上式は、第1項と第2項のみとなる。この二つの項の合計が、当期にクレームが発生した損害額であることは、支払備金の定義から明らかであろう。

次に、前期以前から販売を始めた保険種目に対して上式の値を考えてみる。このとき、上式の第1項と第2項の合計は、当期にクレームが発生した損害額を完全に含んではいるが、前期以前に発生したもの（前期末に支払備金が認識されたもの）も含んでしまっている。よって、第3項として前期末（当期期首）に認識された支払備金を控除している上式は、当期にクレームが発生した損害額のみを表すものとなる。

上述のように、支払備金は発生主義での期間損益を計算するうえで必要不可欠な概念であるが、この会計上の目的以外にも、会社財政状況の正確な評価、また、収支状況を正しく把握し迅速に料率算定（改定）を行うためにも極めて重要なものである。

支払備金の見積もりは、損害保険会社に属するアクチュアリーにとっての主要な課題の一つであり、見積手法としても、さまざまなものが提案されている。以降では、支払備金の種類等について概略を説明した後、いくつかの見積手法を紹介する。

5.2 支払備金の種類

支払備金は保険会社への事故報告の有無によって次の2種類に分けて考えることができる。

① 既報告未払損害に対する見積額（**普通支払備金**という）

② 既発生未報告損害に対する見積額（**IBNR備金**（Incurred But Not Reported Reserve）という）

IBNR備金に関しては、二つの考え方がある。

一つめの考え方は、文字どおり既発生未報告損害に対する支払備金を表すもので、正しくこれを表現する場合には、Incurred But Not Yet Reported Reserve（IBNYR Reserve もしくは真性IBNR備金）と呼んでいる。IBNYRを把握するためには、報告年度別の統計データにより見積もることが必要である。

二つめの考え方は、既発生未報告損害に対する支払備金だけでなく、既報告損害に関する要素も含んでいる場合である。例えば、既発生未払損害全体に対する支払備金を見積もり、これから既報告損害に対して積み立てた支払備金を控除したものをIBNR備金とする場合などはこれに相当する。この基準によるIBNR備金を Incurred But Not Enough Recorded Reserve（IBNER Reserve）という。

単にIBNRと呼ぶ場合は上記のいずれを指すものか明らかではないが、実務上は両者を厳格に区分する必要性はあまりないので、通常はIBNRという用語が用いられることが多い。

5.3　見積手法の種類

支払備金の算出方法には非常に多くの種類があり、これを分類する方法も何を基準とするかによっていろいろ考えられる。

まず、見積もりの対象によって分類する方法が考えられる。支払備金の見積もりといっても、その対象としては既報告未払損害、既発生未報告損害あるいは既発生未払損害全体などがあり、また、総発生保険金を見積もって支払備金を間接的に算出する方法も考えられる。

また、見積手法によって分類すれば、大きく次の四つに分けて考えることができる。

①　個別見積法

既報告損害に係る個々の支払見込額を積算する方法であり、既報告未払損害の見積もりに用いる。

②　算式見積法

一定の算出式（たとえば発生保険金の一定割合など）を用いて算出する方法であり、既発生未報告損害の見積もりに用いる。

③　統計的見積法

過去の統計データを用いて算出する方法である。

④　予定損害率または予測損害率による見積法

実績が全くない新しい保険などの総発生保険金を見積もる際に用いる方法である。

いずれの方法を用いる場合でも、支払備金の見積もりを行ううえで重要なことは、当該方法が過去においていかに適合しているかではなく、現在の

支払備金を見積もるうえで適正であるか否かである。

過去における適合度を検証するとともに、直近の諸条件の変化などを把握し、当該方法適用の妥当性の検証または見直しを行っていく必要がある。

以降では算式見積法および統計的見積法について概要を説明し、具体的な見積手法をいくつか紹介する。

5.4 算式見積法

5.4.1 パーセンテージ法

この方法は、IBNR損害がある基準となる値に比例するものを考えて、その基準値に比例定数を乗じてIBNR備金を算出する方法である。この基準値と比例定数は過去の経験値を分析することにより得られるものである。

この基準となる値としては、次のようなものが考えられる。

計上保険料、既経過保険料、支払保険金、
発生保険金、普通支払備金 など

5.4.2 前年度IBNRを基準とする方法

この方法は前年のIBNRを把握し、これをもとに当年度のIBNRを推定する方法である。算式で表すと次のようになる。

$$\text{当年度IBNR備金} = \text{前年度IBNR損害} \times \text{当年度エクスポージャー増率}$$

前年度のIBNR損害は、当年度に判明した支払実績により、かなりの確度で実績として把握できるものである。

この方法は、単位エクスポージャーあたりのIBNR損害平均値が変わらないものとして、当年度IBNR損害合計を算出するものであり、パーセンテージ法の比例定数をIBNR損害平均値、基準値をエクスポージャーとしたものと考えることもできる。

なお、前年度だけではなく、過去数年間のIBNR損害を用いる場合もある。

例5-1 （前年度IBNR損害を基準とする方法の算出例）

この方法の基本的な考え方は、できるだけ近い過去の経験値をもとに、これに最近の状況の変化を反映させるように修正するというものである。

経験統計の分析の結果、IBNR損害に影響を与える要因としては、

① エクスポージャー数

② 事故頻度

③ 事故報告あたりの平均単価

が挙げられる。

ここで、①および②は事故報告の件数で、クレーム額の傾向は③によって把握することができる。この考え方を算式の形で表すと次のようになる。

$$\text{IBNR備金} = \frac{N_y}{N_{y-1}} \times \frac{C_y}{C_{y-1}} \times I_{y-1}$$

y　当年事業年度

N_y　y年度末3ヶ月間の事故報告件数

C_y　y年度末3ヶ月間の事故報告あたりの平均単価

I_y　y年度IBNR損害の額

上記算式において $N_y \times C_y = y$年度末3ヶ月間の発生保険金 であるから、次のように簡素化することも可能である。

$$\text{IBNR備金} = \frac{A_y}{A_{y-1}} \times I_{y-1}$$

A_y　y年度末3ヶ月間の発生保険金

5.5 統計的見積法

5.5.1 基本的な考え方

統計的見積法は、保険事故の経験統計の分析を行い、その中に現れた一定の規則性に着目し、将来もこの規則性に変化がないものとして統計の未知の部分について推定を行う方法である。この方法は支払備金の見積もりだけでなく、過去の支払備金積立状況の分析、料率算定におけるロスコストの見積もりなどにも用いられる重要な方法である。

統計的見積法を手法的に分類すると、

① 保険金統計のみを用いる方法

② 件数統計と保険金統計の両方を用いる方法

に大別される。①の例としては、チェインラダー法、最小2乗法など、②の例としては、発生保険金単価予測法、未払保険金単価予測法、分離法などがあり、またこれらのバリエーションも相当な数になる。しかしながら、実際の支払備金見積もりにおいて、これらの多数の方法をむやみに適用しても、得られた結果のどれが信頼するに足るかについては何も得るところがなく、単に労力を消耗するばかりであろう。むしろこれら多数の適用可能な方法のうち、各々の方法が前提としている諸条件が満たされているか否かによって当該見積もりに適さないものをまず排除し、残った数個の方法により見積もりを行うことがよいと思われる。

5.5.2 ロスディベロップメント

5.5.3以降で統計的見積法の具体例をいくつか説明するが、いずれの方法においても、基礎データとしては次のようなフォーマットのデータを用い

る。

事故年度	経過年数					
	1	2	3		k−1	k
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	$C_{1,3}$	‥	$C_{1,k-1}$	$C_{1,k}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	$C_{2,3}$	‥	$C_{2,k-1}$	
3	$C_{3,1}$	$C_{3,2}$	$C_{3,3}$	‥		
	:	:	:			
k−1	$C_{k-1,1}$	$C_{k-1,2}$				
k	$C_{k,1}$					

ここで、$C_{i,j}$は事故年度i年のj年経過時点で認識された累計保険金などのデータであり、分析の目的に応じてさまざまなデータが用いられる。

現時点をk年度末とすると、

　　事故年度1年のデータは経過年数k年まで、

　　事故年度2年のデータは経過年数$k-1$年まで、

　　　　　　　：

　　事故年度k年のデータは経過年数1年まで、

のデータが判明していることになる。つまり、実績データは上表のように三角形上に得られるものとなる。

このような形の統計を**ランオフ三角形**、もしくは**ロスディベロップメント**という。

統計的見積法においては、このロスディベロップメントに見出される規則性に着目して事故年度別に最終累計発生保険金を見積もり、当該時点までに支払われた保険金を控除して支払備金を認識するものが多い。

ロスディベロップメントのデータ$C_{i,j}$として用いられる主なものは次のとおりである。

累計保険金、未払保険金（個別見積法による既報告未払損害額）、
累計発生保険金（累計保険金＋未払保険金）、当該年度保険金、
当該年度発生損害額、累計報告クレーム数、累計支払完了クレーム数、
未払クレーム数、平均未払保険金

他にも累計保険金の累計発生保険金に対する割合、累計支払完了クレーム数の累計報告クレーム数に対する割合なども用いられることがある。

支払備金推定の際には、将来予測を行う前に、まず実績データの分析をすることが重要であるが、その際には次のような要因によって規則性が撹乱されていることに留意する必要がある。

① インフレーション

保険金額に制限があるか、特別な支払算出基準がある場合を除けば、保険金は支払時の通貨価値で支払われるので、インフレ率に変動があると、ランオフパターンに影響を与える。

② 支払完了までに要する時間

会社の損害調査体制の強化などによって、支払いに要する期間が変化した場合もランオフパターンに影響を与える。

③ 危険の構造

ランオフパターンは保険種目によって異なっており、同一種目でも危険グループごとに異なっている場合もある。保険の引き受け条件の変更や、特定の危険グループの保険金のみが増加した場合などもランオフパターンに影響を与える。これを防ぐには、ランオフパターンが異なる危険グループごとに分けて統計を作成することが必要であろう。

④ 引受契約集団の規模

引受契約集団が小さいほど、扱う観測値に固有の統計上のぶれが大きくなる。再保険によってこれらの変動幅を制限することはできるが、保有限度

額の水準の変化によって、ランオフパターンに新たな差異が生じてしまう。また、引受契約集団の規模が急激に変化している場合にも、ランオフパターンは大幅に歪められる。

⑤ 損害に係る社会の動向

この要因は通貨価値の変動に加え、補償の程度がその都度変化するような賠償請求に係る保険や医療費請求に係る保険等おいて特に顕著である。

⑥ 個別見積額

個別見積額に不規則な誤差が生じている場合もランオフパターンに影響を与える。

5.5.3 決定論的アプローチ

(1) チェインラダー法

この方法は、ロスディベロップメントにおいて、保険金が経過年数とともに規則的に変化する場合に、その規則性を利用して最終累計発生保険金の推定を行う手法である。

この方法の代表的なものとしては、累計保険金のロスディベロップメントによる Paid Loss Extrapolation Method、累計発生保険金のロスディベロップメントによる Incurred Loss Extrapolation Method、累計保険金のロスディベロップメントを報告年度別に作成したものを用いる Extrapolation from Accumulated Paid Losses、累計発生保険金のロスディベロップメントを報告年度別に作成したものを用いる Extrapolation from Accumulated Incurred Losses などがある。

この方法においては、ロスディベロップメントの隣り合った経過年数の

$C_{i,j-1}$と$C_{i,j}$の比率（**ロスディベロップメントファクター**）をb_jとおき、$C_{i,j-1}$が既知で、$C_{i,j}$が未知の場合のb_jの推定値を次の式で与える。

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{k-j+1} C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{k-j+1} C_{i,j-1}} \left(j = 2,3,\cdots k \right)$$

i年度発生事故の最新の累計支払保険金$C_{i,k-i+1}$に対する最終累計発生保険金$C_{i,\infty}$の比率をB_j $(j = k - i + 1)$とすると、B_jは次の式で表される。

$$B_j = \frac{C_{i,\infty}}{C_{i,j}} = b_{k+} \prod_{\alpha=j+1}^{k} b_\alpha \left(j = 1,2,\cdots k-1 \right)$$

$$B_k = b_{k+}$$

ここで、b_{k+}は既経過年数k年末での普通支払備金（または累計発生保険金）から求められる推定値である。このことから、i年度発生事故の最終累計発生保険金および既経過年数$k - i + 1$年末における支払備金（またはIBNR備金）はそれぞれ、

$$C_{i,k-i+1} \cdot B_{k-i+1}$$

$$C_{i,k-i+1} \cdot \left(B_{k-i+1} - 1 \right)$$

で与えられる。

ところで、b_jの推定値としては、上記のものに限られるわけではなく、たとえば、

$$b_j = \frac{1}{k - j + 1} \sum_{i=1}^{k-j+1} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \left(j = 2,3,\cdots,k \right)$$

$$b_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k-j+1} \omega_i} \sum_{i=1}^{k-j+1} \omega_i \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \left(\omega_i > 0, j = 2,3,\cdots,k \right)$$

などがよく用いられる。また、次のようにしてインフレの要素を分離して推定

を行う場合もある（累計保険金のロスディベロップメントによる場合）。

まず、l 年（基準年度を起点にして）における年間インフレ率を $f(l)$ とおき、次の式により修正ロスディベロップメントを作る。

$$C'_{1,1} = C_{1,1}$$

$$C'_{i,1} = \frac{C_{i,1}}{\prod_{l=1}^{i-1} f(l)} \quad (i = 2,3,\cdots,k)$$

$$C'_{i,j} = \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\prod_{l=1}^{i+j-2} f(l)} + C'_{i,j-1} \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,k-1 \\ j = 2,3,\cdots,k-i+1 \end{pmatrix}$$

次に、この修正ロスディベロップメントに対し、上記方法により推定を行い、さらに、将来の年度別支払保険金（$C'_{i,j}$）も算出する。

最後に、将来のインフレ率の予測値により、次の算式により最終累計発生保険金を求める（k 年度末における支払備金がゼロの場合。）

$$C_{i,k-i+1} + \sum_{j=k-i+2}^{k} \left(C'_{i,j} - C'_{i,j-1}\right) \prod_{l=1}^{j} f(l)$$

具体的に、累計支払保険金、普通支払備金および累計発生保険金のロスディベロップメントが与えられたときの最終累計発生保険金の算出例を以下で示す。

なお、以下の例ではインフレ率の変動による影響は無視して考える。

次の三つのロスディベロップメントが与えられているものとする。(8年度末の支払備金はゼロであるものとする。)

累計支払保険金のロスディベロップメント

事故年度	経過年数 1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,491	5,015	7,198	8,678	9,578	10,094	10,181	10,181
2	1,902	6,210	8,912	10,624	11,720	12,410	12,597	
3	2,053	7,090	10,248	12,296	13,538	14,414		
4	2,338	8,216	11,975	14,442	15,833			
5	2,861	9,730	14,182	17,361				
6	3,123	10,851	15,404					
7	3,756	11,959						
8	4,181							

普通支払備金のロスディベロップメント

事故年度	経過年数 1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,120	4,603	2,768	1,314	390	83	0	0
2	7,808	5,404	3,359	1,663	874	174	0	
3	8,707	6,261	3,795	1,765	857	205		
4	10,182	7,480	4,856	2,723	1,424			
5	11,459	9,611	5,638	2,775				
6	13,717	10,640	7,381					
7	14,344	11,462						
8	15,984							

累計発生保険金のロスディベロップメント

事故年度	経過年数 1	2	3	4	5	6	7	8
1	7,611	9,618	9,966	9,992	9,968	10,177	10,181	10,181
2	9,710	11,614	12,271	12,287	12,594	12,584	12,597	
3	10,760	13,351	14,043	14,061	14,395	14,619		
4	12,520	15,696	16,831	17,165	17,257			
5	14,320	19,341	19,820	20,136				
6	16,840	21,491	22,785					
7	18,100	23,421						
8	20,165							

例5-2 （累計支払保険金のロスディベロップメントを用いた推定）

この算出式においては、ロスディベロップメントファクターの推定値として、事故年度別ロスディベロップメントファクターの加重平均値を用いている。

$$b_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k-j+1} i} \sum_{i=1}^{k-j+1} i \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} (j = 2,3,\cdots,8)$$

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター（bj）

事故年度	bj						
	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
1	3.3635	1.4353	1.2056	1.1037	1.0539	1.0086	1.0000
2	3.2650	1.4351	1.1921	1.1032	1.0589	1.0151	
3	3.4535	1.4454	1.1998	1.1010	1.0647		
4	3.5141	1.4575	1.2060	1.0963			
5	3.4009	1.4576	1.2242				
6	3.4745	1.4196					
7	3.1840						
8							

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター推定値（bj推定値）

事故年度	bj推定値						
	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
1							
2							1.0000
3						1.0129	1.0000
4					1.0610	1.0129	1.0000
5				1.0998	1.0610	1.0129	1.0000
6			1.2089	1.0998	1.0610	1.0129	1.0000
7		1.4418	1.2089	1.0998	1.0610	1.0129	1.0000
8	3.3732	1.4418	1.2089	1.0998	1.0610	1.0129	1.0000

支払備金推定値

事故年度	8年度末累計保険金		Bj			最終累計発生保険金	支払備金
1	10,181	×	1.0000	（8→8）	＝	10,181	0
2	12,597	×	1.0000	（7→8）	＝	12,597	0
3	14,414	×	1.0129	（6→8）	＝	14,600	186
4	15,833	×	1.0747	（5→8）	＝	17,015	1,182
5	17,361	×	1.1819	（4→8）	＝	20,520	3,159
6	15,404	×	1.4289	（3→8）	＝	22,011	6,607
7	11,959	×	2.0602	（2→8）	＝	24,637	12,678
8	4,181	×	6.9494	（1→8）	＝	29,055	24,874
合計	101,930					150,617	48,687

例5-3 （発生保険金のロスディベロップメントを用いた推定）

この算出例においては、ロスディベロップメントファクターの推定値として事故年度別ロスディベロップメントファクターの単純平均を用いている。

累計発生保険金のロスディベロップメントファクター（bj）

事故年度	bj						
	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
1	1.2637	1.0362	1.0026	0.9976	1.0210	1.0004	1.0000
2	1.1961	1.0566	1.0013	1.0250	0.9992	1.0010	
3	1.2408	1.0518	1.0013	1.0238	1.0156		
4	1.2537	1.0723	1.0198	1.0054			
5	1.3506	1.0248	1.0159				
6	1.2762	1.0602					
7	1.2940						
8							

累計発生保険金のロスディベロップメントファクター推定値（bj推定値）

事故年度	bj推定値						
	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8
1							
2							1.0000
3						1.0007	1.0000
4					1.0119	1.0007	1.0000
5				1.0129	1.0119	1.0007	1.0000
6			1.0082	1.0129	1.0119	1.0007	1.0000
7		1.0503	1.0082	1.0129	1.0119	1.0007	1.0000
8	1.2679	1.0503	1.0082	1.0129	1.0119	1.0007	1.0000

事故年度	8年度末累計発生保険金		Bj			最終累計発生保険金	8年度末累計保険金	支払備金
1	10,181	×	1.0000	（8→8）	＝	10,181	10,181	0
2	12,597	×	1.0000	（7→8）	＝	12,597	12,597	0
3	14,619	×	1.0007	（6→8）	＝	14,629	14,414	215
4	17,257	×	1.0126	（5→8）	＝	17,475	15,833	1,642
5	20,136	×	1.0257	（4→8）	＝	20,654	17,361	3,293
6	22,785	×	1.0341	（3→8）	＝	23,563	15,404	8,159
7	23,421	×	1.0862	（2→8）	＝	25,439	11,959	13,480
8	20,165	×	1.3771	（1→8）	＝	27,769	4,181	23,588
合計	141,161					152,307	101,930	50,377

例5-4 （報告年度別発生保険金のロスディベロップメントを用いた推定）

この方法は、ロスディベロップメントが、報告年度別に作成されている場合に、報告年度別の累計発生保険金ロスディベロップメントにより、報告年度別に推定を行う方法である。

累計発生保険金のロスディベロップメントの報告年度別内訳が次のように与えられているものとする（すべてを足し合わせると、累計発生保険金ロスディベロップメントとなる）。

累計発生保険金の報告年度別ロスディベロップメント（初年度報告）

事故年度	経過年数							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	7,611	7,975	8,054	7,923	7,770	7,998	7,838	7,838
2	9,710	9,731	10,165	10,014	10,093	10,074	10,108	
3	10,760	11,261	11,470	11,200	11,200	11,384		
4	12,520	13,012	13,627	13,655	13,403			
5	14,320	15,739	15,582	15,541				
6	16,840	17,110	17,761					
7	18,100	18,225						
8	20,165							

累計発生保険金の報告年度別ロスディベロップメント（第２年度報告）

事故年度	経過年数							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1,643	1,788	1,839	1,763	1,739	1,858	1,858
2	0	1,882	2,036	2,141	2,195	2,178	2,171	
3	0	2,090	2,466	2,648	2,712	2,715		
4	0	2,684	2,991	3,135	3,164			
5	0	3,602	3,825	3,968				
6	0	4,381	4,748					
7	0	5,196						
8	0							

累計発生保険金の報告年度別ロスディベロップメント（第３年度報告）

事故年度	経過年数							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	124	130	144	136	154	154
2	0	0	70	75	83	90	79	
3	0	0	107	120	127	141		
4	0	0	213	227	247			
5	0	0	412	463				
6	0	0	276					
7	0	0						
8	0							

累計発生保険金の報告年度別ロスディベロップメント（第4年度報告）

事故年度	経過 年数							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	100	119	103	114	114
2	0	0	0	57	56	59	49	
3	0	0	0	93	108	116		
4	0	0	0	148	176			
5	0	0	0	164				
6	0	0	0					
7	0	0						
8	0							

累計発生保険金の報告年度別ロスディベロップメント（第5年度以降報告）

事故年度	経過 年数							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	173	201	217	217
2	0	0	0	0	167	183	190	
3	0	0	0	0	248	263		
4	0	0	0	0	267			
5	0	0	0	0				
6	0	0	0					
7	0	0						
8	0							

これらのロスディベロップメントを用いて、まず、既報告損害に対する最終累計発生保険金を推定する。考え方は例5-3と同様である。

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター実績値および推定値（初年度報告）

事故年度	bjおよびbj推定値							Bj	8年度末累計	最終累計
	1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	j→8	発生保険金	発生保険金
1	1.0478	1.0099	0.9837	0.9807	1.0293	0.9800	1.0000	1.0000	7,838	7,838
2	1.0022	1.0446	0.9851	1.0079	0.9981	1.0034	1.0000	1.0000	10,108	10,108
3	1.0466	1.0186	0.9765	1.0000	1.0164	0.9917	1.0000	0.9917	11,384	11,289
4	1.0393	1.0473	1.0021	0.9815	1.0146	0.9917	1.0000	1.0062	13,403	13,486
5	1.0991	0.9900	0.9974	0.9925	1.0146	0.9917	1.0000	0.9987	15,541	15,520
6	1.0160	1.0380	0.9890	0.9925	1.0146	0.9917	1.0000	0.9876	17,761	17,542
7	1.0069	1.0247	0.9890	0.9925	1.0146	0.9917	1.0000	1.0121	18,225	18,445
8	1.0368	1.0247	0.9890	0.9925	1.0146	0.9917	1.0000	1.0494	20,165	21,160

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター実績値および推定値（第２年度報告）

事故年度	bjおよびbj推定値 1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	Bj j→8	8年度末累計発生保険金	最終累計発生保険金
1		1.0883	1.0285	0.9587	0.9864	1.0684	1.0000	1.0000	1,858	1,858
2		1.0818	1.0516	1.0252	0.9923	0.9968	1.0000	1.0000	2,171	2,171
3		1.1799	1.0738	1.0242	1.0011	1.0326	1.0000	1.0326	2,715	2,804
4		1.1144	1.0481	1.0093	0.9932	1.0326	1.0000	1.0256	3,164	3,245
5		1.0619	1.0374	1.0043	0.9932	1.0326	1.0000	1.0301	3,968	4,087
6		1.0838	1.0479	1.0043	0.9932	1.0326	1.0000	1.0794	4,748	5,125
7		1.1017	1.0479	1.0043	0.9932	1.0326	1.0000	1.1892	5,196	6,179
8										

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター実績値および推定値（第３年度報告）

事故年度	bjおよびbj推定値 1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	Bj j→8	8年度末累計発生損害額	最終累計発生損害額
1			1.0484	1.1077	0.9444	1.1324	1.0000	1.0000	154	154
2			1.0714	1.1067	1.0843	0.8778	1.0000	1.0000	79	79
3			1.1215	1.0583	1.1102	1.0051	1.0000	1.0051	141	142
4			1.0657	1.0881	1.0463	1.0051	1.0000	1.0516	247	260
5			1.1238	1.0902	1.0463	1.0051	1.0000	1.1465	463	531
6			1.0862	1.0902	1.0463	1.0051	1.0000	1.2453	276	344
7										
8										

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター実績値および推定値（第４年度報告）

事故年度	bjおよびbj推定値 1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	Bj j→8	8年度末累計発生損害額	最終累計発生損害額
1				1.1900	0.8655	1.1068	1.0000	1.0000	114	114
2				0.9825	1.0536	0.8305	1.0000	1.0000	49	49
3				1.1613	1.0741	0.9687	1.0000	0.9687	116	112
4				1.1892	0.9977	0.9687	1.0000	0.9665	176	170
5				1.1307	0.9977	0.9687	1.0000	1.0928	164	179
6										
7										
8										

累計支払保険金のロスディベロップメントファクター実績値および推定値（第５年度以降報告）

事故年度	bjおよびbj推定値 1→2	2→3	3→4	4→5	5→6	6→7	7→8	Bj j→8	8年度末累計発生損害額	最終累計発生損害額
1					1.1618	1.0796	1.0000	1.0000	217	217
2					1.0958	1.0383	1.0000	1.0000	190	190
3					1.0605	1.0589	1.0000	1.0589	263	278
4					1.1060	1.0589	1.0000	1.1712	267	313
5										
6										
7										
8										

これを一つの表にまとめると、次のようになる。

事故年度・報告年度別 最終累計発生保険金推定値

事故年度	報告年度					合計
	1	2	3	4	5～	
1	7,838	1,858	154	114	217	10,181
2	10,108	2,171	79	49	190	12,597
3	11,289	2,804	142	112	278	14,625
4	13,486	3,245	260	170	313	17,474
5	15,520	4,087	531	179		20,318
6	17,542	5,125	344			23,010
7	18,445	6,179				24,624
8	21,160					21,160

次にIBNR備金を推定する。

ある報告年度のクレームに係る最終累計発生保険金の、それ以前の報告年度のクレームに係る最終累計発生保険金に対する割合が一定である、という仮定のもとに推定するものとする。下表のIBNRファクターとは、この割合の実績値である。(たとえば、下表での事故年度1、報告年度3のIBNRファクター0.0159は、154÷(7,838+1,858)として算出される値である。)

IBNRファクター

事故年度	報告年度				
	1	2	3	4	5～
1		0.2371	0.0159	0.0116	0.0218
2		0.2148	0.0064	0.0040	0.0153
3		0.2483	0.0101	0.0079	0.0194
4		0.2406	0.0155	0.0100	0.0182
5		0.2634	0.0271	0.0089	
6		0.2922	0.0152		
7		0.3350			
8					

IBNRファクター推定値

事故年度	報告年度 1	2	3	4	5～
1					
2					
3					
4					
5					0.0187
6				0.0085	0.0187
7			0.0150	0.0085	0.0187
8		0.2616	0.0150	0.0085	0.0187

これらから、将来報告されるであろう損害額を次のように推定することができる。

IBNR損害推定値

事故年度	報告年度 1	2	3	4	5～	合計
1						0
2						0
3						0
4						0
5					380	380
6				195	434	628
7			370	212	471	1,052
8		5,536	401	229	511	6,677

よって、支払備金の推定値合計は、下表のとおりとなる。

支払備金推定値

事故年度	8年度末累計保険金	既報告損害最終累計発生保険金	既報告損害支払備金	IBNR備金	支払備金合計
1	10, 181	10, 181	0	0	0
2	12, 597	12, 597	0	0	0
3	14, 414	14, 625	211	0	211
4	15, 833	17, 474	1, 641	0	1, 641
5	17, 361	20, 318	2, 957	380	3, 336
6	15, 404	23, 010	7, 606	628	8, 235
7	11, 959	24, 624	12, 665	1, 052	13, 717
8	4, 181	21, 160	16, 979	6, 677	23, 656
合計	101, 930	143, 989	42, 059	8, 737	50, 797

(2) ボーンヒュッターファーガソン法

チェインラダー法が過去の既報告損害をもとに将来予測を行うのに対し、予定損害率などによる最終累計発生保険金の推計値を予測に用いる方法をボーンヒュッターファーガソン法という。

ボーンヒュッターファーガソン法による支払備金と最終累計支払保険金の推計値は、予定損害率などによる事故年度別の最終累計発生保険金の当初予測値をUL_iとおき、次の式で表される。ここで、$C_{i,j}$は事故年度iのj年経過時点で認識された累計支払保険金、B_jはチェインラダー法において定義したものと同じである。

$$\left(1-\frac{1}{B_j}\right)UL_i$$

$$C_{i,k-i+1}+\left(1-\frac{1}{B_j}\right)UL_i$$

チェインラダー法では直近の累計支払保険金$C_{i,k-i+1}$に全信頼度を置き、当初予測値UL_iを無視して支払備金の推計を行うのに対し、ボーンヒュッターファーガソン法では、当初予測値UL_iのみを用い累計支払保険金の実績は直接用いずに推計を行うことになる。

当初予測値UL_iの推定方法としては、既経過保険料に損害率を乗ずるものなどであるが、この損害率には、予定損害率を使用するほか、チェインラダー法による推定値も用いられる。

何らかの要因によりランオフパターンが大幅に歪められたにもかかわらずチェインラダー法を用いて推計を行った場合、最終累計発生保険金が過大または過小になることが想定されるが、このような場合にボーンヒュッターファーガソン法が有効となる場合があり、特に、実績データが少なく、信頼性が小さい最近の事故年度に用いることが有効であると考えられる。

例5-5 （ボーンヒュッターファーガソン法を用いた推定）

例5-2（累計支払保険金のロスディベロップメントを用いた推定）で求めた B_j の値をもとに、ボーンヒュッターファーガソン法を用いて、支払備金を推定する。

チェインラダー法の推定では必要としなかった最終累計発生保険金の当初予測値を算出するために、既経過保険料と予定損害率を用いて、前記の算式をもとに推定した支払備金は下記のとおり。

支払備金推定値

事故年度	既経過保険料	予定損害率	当初予測値	8年度末累計保険金	Bj	1/Bj	BF法最終累計発生保険金	支払備金
1	18,511	60%	11,107	10,181	1.0000	1.0000	10,181	0
2	22,100	60%	13,260	12,597	1.0000	1.0000	12,597	0
3	27,037	60%	16,222	14,414	1.0129	0.9872	14,621	207
4	29,336	60%	17,602	15,833	1.0747	0.9305	17,056	1,223
5	33,096	60%	19,858	17,361	1.1819	0.8461	20,418	3,057
6	34,938	60%	20,963	15,404	1.4289	0.6998	21,696	6,292
7	41,062	60%	24,637	11,959	2.0602	0.4854	24,637	12,678
8	44,700	60%	26,820	4,181	6.9494	0.1439	27,142	22,961
合計	250,782		150,469	101,930			148,348	46,418

(3) ベンクテンダー法

ベンクテンダー法による最終累計発生保険金 UL_{GB} は、チェインラダー法による最終累計発生保険金 UL_{CL} とボーンヒュッターファーガソン法による最終累計発生保険金 UL_{BF} を信頼性理論により基づき組み合わせた方法であり、最終累計発生保険金の推定値は、次のようになる。

$$UL_{GB} = Z \cdot UL_{CL} + (1 - Z)UL_{BF} \tag{5.1}$$

ここで $0 \leq Z \leq 1$ とする。つまり、実績保険金を用いて算出した予測値(チェインラダー法）と事前に想定した保険金から算出した予測値（ボーン

ヒュッターファーガソン法)を信頼度Zで加重平均したものである。

信頼係数Zは、事故発生から十分に経過していれば1に近く、経過していなければ0に近いことが望ましいので、例えば、保険金出現割合を採用することが考えられる。保険金出現割合はB_jの逆数$1/B_j$であり、$1/B_j$は経過年数kまでに保険金がどの程度完了しているかの割合である。

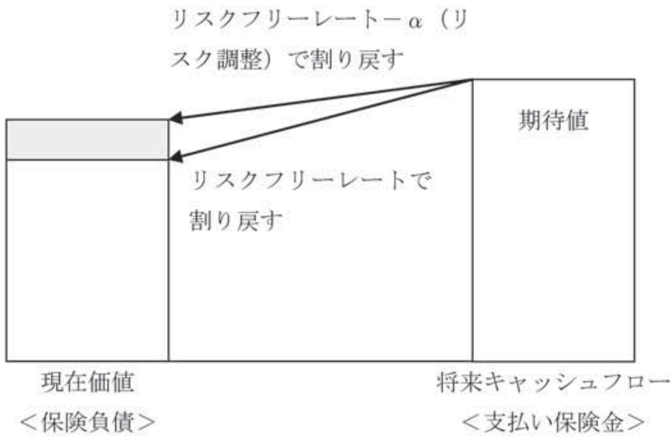
(4) リスクと不確実性に関する調整額

保険負債を「期待現在価値」のみで評価すると、期待値を超える保険金支払に対応できなくなるため、負債の評価にあたっては将来キャッシュフローに含まれるリスクと不確実性を考慮して「期待現在価値＋リスクと不確実性に関する調整額」で評価することが必要となる。一方、保険料を算定する際にも、純保険料を保険金の期待値で設定することは少なく、リスクと不確実性を担う対価として安全割増を上乗せするのが一般的である。このようなことから、保険負債の評価や純保険料の算定においては、リスクと不確実性に関する調整額をどのような考え方に基づいて合理的に算定するかがポイントとなる。なお、調整額の設定にあたっては理想的には市場のリスク選好を反映することが望ましいと考えられているが、現実的には保険負債が売買されるようなマーケットが少ないため、リスク選好の反映方法についても工夫が必要となる。

決定論的アプローチでは、将来キャッシュフローを一点(期待値)で予測する手法であるため、これをリスクフリーレートではなく、低めに調整した割引率(リスクフリーレート－α)で割り引くことで、リスクと不確実性に関する調整を行う。この手法は簡便であるが、αと市場のリスク選好の関係が判然とせず、透明性の点で後述する確率論的アプローチに劣るものと考えられる。ただし、リスクと不確実性に重要性がない場合には、決定論的アプローチ

でも十分に有用な結果が得られるものと考えられるため、実務上は、保険商品や群団のリスク特性ごとに確率論的アプローチと決定論的アプローチを使い分けるのが現実的である。

決定論的アプローチの概念図



5.5.4 確率論的アプローチ

(1) マックモデル

ここでは、事故発生からN年で支払が完了すると仮定し、事故年度i（$i=1,\cdots,N$）の、経過年数k（$k=1,\cdots,N$）における累計支払保険金$C_{i,k}$を確率変数と考え、$C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}$が得られているときに、最終累計支払保険金$C_{i,N}$を推定することを考える。

マックモデルは、確率変数$C_{i,k}$に対して次の前提を置いてモデル化したものである。

前提条件①　$E(C_{i,k+1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,k}) = b_k C_{i,k}$（$i=1,\cdots,N,\quad k=1,\cdots,N-1$）

前提条件② $V(C_{i,k+1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,k}) = \sigma_k^2 C_{i,k}$（$i=1,\cdots,N,\quad k=1,\cdots,N-1$）
前提条件③ 異なるi,jに対して$\{C_{i,1},\cdots,C_{i,N}\}$と$\{C_{j,1},\cdots,C_{j,N}\}$は独立

前提条件①は、事故年度iの、経過年数kまでの実績$C_{i,1},\cdots,C_{i,k}$が得られているとき、経過年数$k+1$の累計支払保険金$C_{i,k+1}$の期待値は、iによらない定数b_kによって$b_k C_{i,k}$として表される、というものである。左辺は$C_{i,k}$を含む確率変数による条件付期待値であるので、両辺を$C_{i,k}$で割れば、左辺の$C_{i,k}$は期待値演算の中に入れることができ、

$$E\left(\left.\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right| C_{i,1},\cdots,C_{i,k}\right) = b_k$$

となる。つまり、b_kは決定論的アプローチにおいて定義したロスディベロップメントファクターの期待値に他ならない。

前提条件②は、事故年度iの、経過年数kまでの実績$C_{i,1},\cdots,C_{i,k}$が得られているとき、経過年数$k+1$の累計支払保険金$C_{i,k+1}$の分散は、iによらない定数σ_k^2を係数として（分散係数という）、$C_{i,k}$に比例する、というものである。同様に、両辺を$C_{i,k}^2$で割れば、

$$V\left(\left.\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}\right| C_{i,1},\cdots,C_{i,k}\right) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}}$$

であり、ロスディベロップメントファクターの分散は、$C_{i,k}$が大きいほど小さくなることを示している。これはデータ数が多く、実績データが大きいほど、ロスディベロップメントファクターは安定するはずである、という直感に適ったものである。

前提条件③は、異なる事故年度i,jについては、どの経過年数kをとっても、累計支払保険金は独立であることを仮定するものである。

これらの前提条件の下で、最終累計支払保険金の変動性の評価を行う

ことが最終的な目標であるが、まず、これら前提条件の下での、現時点までの情報（$C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}$（$i=1,\cdots,N$））に基づく、いくつかの点推定を示しておく。

① ロスディベロップメントファクターの期待値b_kの点推定$\hat{b}_k$

$$\hat{b}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}} \quad (k=1,\cdots,N-1)$$

これは、b_kの不偏推定量であり、不偏性は、次のように確認することができる。

既知である$C_{i,j}$のうち、経過年数k年までのものすべてを、

$$B_k = \{C_{i,j} \mid i=1,\cdots,N-j+1,\ j=1,\cdots,k\} \quad (k=1,\cdots,N)$$

とする。このB_kを用いて、$\hat{b}_k$の条件付期待値を考えれば、

$$E(\hat{b}_k) = E(E(\hat{b}_k \mid B_k)) = E\left(\frac{E\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k+1} \middle| B_k\right)}{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{N-k} b_k C_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}}\right) = b_k$$

となり、不偏性を確認することができる。

さらに、異なる経過年数k,l（$k<l$とする）に対して、

$$E(\hat{b}_k\hat{b}_l) = E(E(\hat{b}_k\hat{b}_l \mid B_l)) = E(\hat{b}_k E(\hat{b}_l \mid B_l)) = E(\hat{b}_k b_l) = E(\hat{b}_k)b_l$$
$$= E(\hat{b}_k)E(\hat{b}_l)$$

であり、同様に、異なる経過年数$k,l,m,\cdots$（$k<l<m<\cdots$とする）に対して、

$$E(\hat{b}_k\hat{b}_l\hat{b}_m\cdots) = E(\hat{b}_k)E(\hat{b}_l)E(\hat{b}_m)\cdots$$

が成り立つ。

② 事故年度iの最終累計支払保険金$C_{i,N}$の点推定$\hat{C}_{i,N}$

$$\hat{C}_{i,N} = C_{i,N-i+1}\hat{b}_{N-i+1}\hat{b}_{N-i+2}\cdots\hat{b}_{N-1} \quad (i=1,\cdots,N)$$

これは、

$$E(C_{i,N} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) = C_{i,N-i+1} b_{N-i+1} b_{N-i+2} \cdots b_{N-1}$$

にb_kの推定量$\hat{b}_k$を代入することによって得られる式であり、この関係式は次のように確認することができる。

$$\begin{aligned} E(C_{i,N} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) &= E(E(C_{i,N} \mid C_{i,N-1}) \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) \\ &= E(C_{i,N-1} b_{N-1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) \\ &= E(E(C_{i,N-1} b_{N-1} \mid C_{i,N-2}) \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) \\ &= E(C_{i,N-2} b_{N-2} b_{N-1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) \\ &= \ \cdots \\ &= C_{i,N-i+1} b_{N-i+1} \cdots b_{N-1} \end{aligned}$$

また、①において導いた$E(\hat{b}_k \hat{b}_l \hat{b}_m \cdots) = E(\hat{b}_k)E(\hat{b}_l)E(\hat{b}_m)\cdots$を用いれば、

$$\begin{aligned} E(\hat{C}_{i,N} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) &= E(C_{i,N-i+1} \hat{b}_{N-i+1} \hat{b}_{N-i+2} \cdots \hat{b}_{N-1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) \\ &= C_{i,N-i+1} E(\hat{b}_{N-i+1} \hat{b}_{N-i+2} \cdots \hat{b}_{N-1} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}) \\ &= C_{i,N-i+1} E(\hat{b}_{N-i+1} \hat{b}_{N-i+2} \cdots \hat{b}_{N-1}) \\ &= C_{i,N-i+1} E(\hat{b}_{N-i+1}) E(\hat{b}_{N-i+2}) \cdots E(\hat{b}_{N-1}) \\ &= C_{i,N-i+1} b_{N-i+1} \cdots b_{N-1} \end{aligned}$$

が成り立つので、$C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}$が既知であるという条件の下で、$\hat{C}_{i,N}$は$E(C_{i,N} \mid C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1})$の不偏推定量となっていることがわかる。

③　経過年数kの分散係数σ_k^2の点推定$\hat{\sigma}_k^2$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N-k-1}\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{b}_k\right)^2\right) \quad (k = 1,\cdots,N-2)$$

これは、$\hat{\sigma}_k^2$の不偏推定量であり、不偏性は、B_kを用いた条件付期待値を考えることによって、次のように確認することができる。

まず、

$$E(\hat{\sigma}_k^2 \mid B_k) = \frac{1}{N-k-1}\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} E\left(\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{b}_k\right)^2 \middle| B_k\right)\right) \tag{5.2}$$

であり、

$$E\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{b}_k \middle| B_k\right) = b_k - b_k = 0$$

であるので、

$$(5.2)\text{式} = \frac{1}{N-k-1}\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{b}_k \middle| B_k\right)\right)$$

ここで、(5.2)式のカッコ内について考えると、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{b}_k \middle| B_k\right) &= \sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} \middle| B_k\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} V(\hat{b}_k \mid B_k) \\ &\quad - 2\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} Cov\left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}}, \hat{b}_k \middle| B_k\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

となり、(5.3)式右辺の3つの項をそれぞれ計算すると、

$$(\text{第1項}) = \sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k}} = (N-k)\sigma_k^2$$

$$(\text{第2項}) = \sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} \frac{V\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k+1} \middle| B_k\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}\right)^2} = \sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} \frac{\sum_{i=1}^{N-k} V(C_{i,k+1} \mid B_k)}{\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}\right)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k} \frac{\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}\sigma_k^2}{\left(\sum_{i=1}^{N-k} C_{i,k}\right)^2} = \sigma_k^2$$

$$（第3項）=-2\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{Cov\left(C_{i,k+1},\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k+1}\middle|B_k\right)}{C_{i,k}\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}$$

$$=-2\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{Cov(C_{i,k+1},C_{i,k+1}\mid B_k)}{C_{i,k}\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}=-2\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{V(C_{i,k+1}\mid B_k)}{C_{i,k}\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}$$

$$=-2\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}\frac{C_{i,k}\sigma_k^2}{C_{i,k}\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}=-2\sigma_k^2$$

よって、

$$(5.3)式=(N-k)\sigma_k^2+\sigma_k^2-2\sigma_k^2=(N-k-1)\sigma_k^2$$

$$(5.2)式=\frac{1}{N-k-1}(N-k-1)\sigma_k^2=\sigma_k^2$$

となり、不偏性を確認することができる。

次に、最終累計支払保険金$C_{i,N}$の変動性を評価するために、推定量$\hat{C}_{i,N}$の平均二乗誤差の推定を行う。$\hat{C}_{i,N}$の平均二乗誤差$mse(\hat{C}_{i,N})$は、

$$mse(\hat{C}_{i,N})=E((\hat{C}_{i,N}-C_{i,N})^2\mid B_N)$$

として定義される。

この平均二乗誤差は次のように推定することができる。

$$m\hat{s}e(\hat{C}_{i,N})=\hat{C}_{i,N}^2\sum_{k=N-i+1}^{N-1}\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{b}_k^2}\left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right)$$

また、この平均二乗誤差は事故年度別のものであるが、すべての事故年度を合わせた$C_N=\sum_{i=1}^{N}C_{i,N}$、$\hat{C}_N=\sum_{i=1}^{N}\hat{C}_{i,N}$の平均二乗誤差についても、

$$mse(\hat{C}_N)=E((\hat{C}_N-C_N)^2\mid B_N)$$

として定義され、

$$m\hat{s}e(\hat{C}_N)=\sum_{i=2}^{N}\left\{m\hat{s}e(\hat{C}_{i,N})+\hat{C}_{i,N}\left(\sum_{j=i+1}^{N}\hat{C}_{j,N}\right)\sum_{k=N-i+1}^{N-1}\frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{b}_k^2\sum_{i=1}^{N-k}C_{i,k}}\right\}$$

として推定することができる。

平均二乗誤差の推定値 $m\hat{s}e(\hat{C}_{i,N})$ 、$m\hat{s}e(\hat{C}_N)$ の導出については、参考文献12を参照いただきたい。

ここでは、最終累計支払保険金の変動性について考えたが、支払備金についても変動性は同じであり、これらを用いて、支払備金の区間推定等を行うことができる。

(2) ベイジアンメソッド

ここでは、ベイズの定理を用い、いくつかの前提条件の下で、最終累計支払保険金の確率分布を導く。

事故発生から N 年で支払が完了すると仮定し、事故年度 i（$i=1,\cdots,N$）の、経過年数 k（$k=1,\cdots,N$）における累計支払保険金 $C_{i,k}$ を確率変数と考え、$C_{i,1},\cdots,C_{i,N-i+1}$ が得られているときに、最終累計支払保険金 $C_{i,N}$ を推定することを考える。

確率変数 $C_{i,k}$ に対して次の前提を置く。

前提条件①　$C_{i,N}$（$i=1,\cdots,N$）は対数正規分布 $LN(\mu,\sigma^2)$ に従う。
前提条件②　$C_{i,k}\,|_{C_{i,N}=x}$（$i=1,\cdots,N,\ k=1,\cdots,N$）は対数正規分布 $LN(\mu_k(x),\sigma_k^2(x))$ に従う。
前提条件③　$E(C_{i,k}\,\vert\, C_{i,N}=x)=p_k x$（$i=1,\cdots,N,\ k=1,\cdots,N$）
前提条件④　$V(C_{i,k}\,\vert\, C_{i,N}=x)=\beta_k^2 x^2$（$i=1,\cdots,N,\ k=1,\cdots,N$）

前提条件①は、事故年度 i の最終累計支払保険金 $C_{i,N}$ は、事故年度 i

によらない対数正規分布に従う、というものである。

前提条件②は、事故年度iの最終累計支払保険金$C_{i,N}$による条件付の確率変数である$C_{i,k}|_{C_{i,N}=x}$は、事故年度iによらない対数正規分布に従う、というものである。

前提条件③は、両辺をxで割れば、

$$E\left(\frac{C_{i,k}}{x}\middle| C_{i,N}=x\right)=p_k$$

であり、経過年数kまでの累計支払保険金$C_{i,k}$の最終累計支払保険金$C_{i,N}=x$に対する割合は、期待値がp_kであることを述べているものである。

同様に、前提条件④は、両辺をx^2で割れば、

$$V\left(\frac{C_{i,k}}{x}\middle| C_{i,N}=x\right)=\beta_k^2$$

であり、経過年数kまでの累計支払保険金$C_{i,k}$の最終累計支払保険金$C_{i,N}=x$に対する割合は、分散がβ_k^2であることを述べているものである。

前提条件①より、

$$\begin{cases} E(C_{i,N})=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ V(C_{i,N})=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu=\log E(C_{i,N})-\dfrac{\sigma^2}{2} \\ \sigma^2=\log\left(1+\dfrac{V(C_{i,N})}{E(C_{i,N})^2}\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

であり、また、前提条件②,③,④より、

$$\begin{cases} E(C_{i,k}\mid C_{i,N}=x)=e^{\mu_k(x)+\frac{\sigma_k^2(x)}{2}} \\ V(C_{i,k}\mid C_{i,N}=x)=e^{2\mu_k(x)+\sigma_k^2(x)}\left(e^{\sigma_k^2(x)}-1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_k(x) = \log E(C_{i,k} \mid C_{i,N} = x) - \dfrac{\sigma_k^2(x)}{2} \\ \sigma_k^2(x) = \log\left(1 + \dfrac{V(C_{i,k} \mid C_{i,N} = x)}{E(C_{i,k} \mid C_{i,N} = x)^2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu_k(x) = \log p_k x - \dfrac{\sigma_k^2(x)}{2} \\ \sigma_k^2(x) = \log\left(1 + \dfrac{\beta_k^2}{p_k^2}\right) \end{cases} \tag{5.5}$$

が成り立つ。これらの関係式はパラメータ推定の際に用いる。(5.5)式から、$\sigma_k^2(x)$ は x に依存しない定数であることがわかるので、以下、$\sigma_k^2(x) = \sigma_k^2$ とする。

次に、前提条件①②の下で、経過年数 k までの情報に基づく最終累計支払保険金 $C_{i,N}|_{C_{i,k}=y}$ の確率分布を求める。

$C_{i,N}$、$C_{i,k}|_{C_{i,N}=x}$ の確率密度関数をそれぞれ、$f(x)$、$g(y \mid x)$ とすると、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\,x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (x > 0)$$

$$g(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}\,y} e^{-\frac{(\log y - \mu_k(x))^2}{2\sigma_k^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}\,y} e^{-\frac{\left\{\log y - \left(\log p_k x - \frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\}^2}{2\sigma_k^2}} \quad (x > 0, y > 0)$$

であるので、ベイズの定理より、$C_{i,N}|_{C_{i,k}=y}$ の確率密度関数 $h(x \mid y)$ は、

$$h(x \mid y) = \frac{f(x)g(y \mid x)}{\int f(x)g(y \mid x)dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau_k^2}\,x} e^{-\frac{\{\log x - \nu_k(y)\}^2}{2\tau_k^2}}$$

ここで、

$$\begin{cases} \nu_k(y) = \dfrac{\sigma_k^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\mu + \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\log\dfrac{y}{p_k}+\dfrac{\sigma_k^2}{2}\right) \\ \tau_k^2 = \dfrac{\sigma^2\sigma_k^2}{\sigma^2+\sigma_k^2} \end{cases} \tag{5.6}$$

である。つまり、$C_{i,N}|_{C_{i,k}=y}$ は、対数正規分布 $LN(\nu_k(y),\tau_k^2)$ に従うことがわかる。（ベイズの定理を用いた計算によって上記の結果が得られることは各自確認いただきたい。）

期待値について確認してみると、$C_{i,N}$ の期待値は、既述のとおり、

$$E(C_{i,N}) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$$

であり、$C_{i,N}|_{C_{i,k}=y}$ の期待値は、

$$\begin{aligned} E(C_{i,N} \mid C_{i,k}=y) &= e^{\nu_k(y)+\frac{\tau_k^2}{2}} \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\mu + \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\log\frac{y}{p_k}+\frac{\sigma_k^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2\sigma_k^2}{2(\sigma^2+\sigma_k^2)}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}\left(\log\frac{y}{p_k}+\frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{(1-Z)\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) + Z\left(\log\frac{y}{p_k}+\frac{\sigma_k^2}{2}\right)\right\} \end{aligned}$$

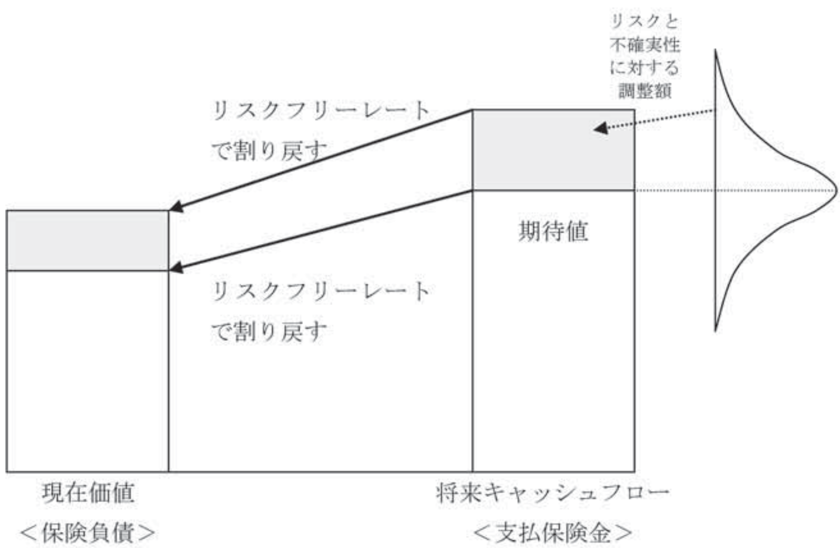
ここで、$Z = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\sigma_k^2}$ である。

通常、パラメータ $\mu,\sigma^2,\mu_k(x),\sigma_k^2,p_k,\beta_k^2$ は未知であるため、これらの点推定をまず行い、その推定値を(5.6)式に代入することによって $\nu_k(y),\tau_k^2$ の推定を行い、$C_{i,N}|_{C_{i,k}=y}$ の従う確率分布を定めることとなる。

ここでは、最終累計支払保険金の確率分布について考えたが、最終累計支払保険金から、現時点までの累計支払保険金を控除したものが支払備金であるため、この推定された確率分布を用いて、支払備金の区間推定等を行うことができる。

(3) リスクと不確実性に関する調整額

確率論的アプローチにおけるリスクと不確実性に関する調整額の算出においては、将来キャッシュフローの確率分布または複数シナリオを用いる。この手法では、高度の数理的手続きを必要とするが、将来キャッシュフローの確率分布を明示的に予測しているという点で、透明性の高い方法といえる。ただし、発売間もない商品や過去にほとんどクレームが発生していない商品については、データの制約上、確率論的アプローチをとれないケースもありうる。



5.6 練習問題

1．事故発生年度から4年間で支払が完了する契約について、1999年度末の累計支払保険金と個別見積もりによる支払備金のロスディベロップメントが次のように与えられているとき、次の問に答えよ。

なお、インフレによる影響は無視して考えること。

累計支払保険金のロスディベロップメント

事故年度	経過年数				
	1	2	3	4	5
1995	1,523	2,018	2,342	2,468	2,468
1996	1,455	1,932	2,273	2,537	
1997	1,273	1,675	2,098		
1998	1,339	1,807			
1999	1,508				

普通支払備金のロスディベロップメント

事故年度	経過年数				
	1	2	3	4	5
1995	429	203	50	0	0
1996	600	382	188	0	
1997	554	420	207		
1998	319	416			
1999	378				

(1) 特殊な大口のIBNR損害が発生している事故年度があるという。上記ロスディベロップメントから判断すると何年度か。また、そのように判断した理由も述べよ。

(2) 累計支払保険金のロスディベロップメントを用いて、事故年度別（1997事故年度から1999事故年度まで）の最終累計発生保険金の推定値を求めよ。

ただし、ロスディベロップメントファクターの予測値としては、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクター((1)の事故年度データを除く)の平均値を用いること。

(3) 累計発生保険金のロスディベロップメントを作り、それを用いて、事故年度別(1997事故年度から1999事故年度まで)の最終累計発生保険金の推定値を求めよ。

ただし、(2)と同様に、ロスディベロップメントファクターの予測値としては、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクター((1)の事故年度データを除く)の平均値を用いること。

2. 事故発生年度から翌々年度までに支払いが完了する保険契約について、事故年度・経過年度別支払保険金表およびインフレ率が下記のとおり与えられているとき、2002、2003事故年度の最終累計支払保険金に最も近いものは、それぞれ下の選択肢のうちのどれか。ただし、累計支払保険金のロスディベロップメントの予測値は、対応する事故年度の既知の値を単純平均したものを用いるものとする。

・事故年度・経過年度別支払保険金表

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終累計支払保険金
2001年度	5,000	2,000	1,500	8,500
2002年度	10,000	3,000		
2003年度	12,500			

・インフレ率:毎年10%(支払保険金は、その支払年度の貨幣価値によるものとする)

(a) 15,500 (b) 15,600 (c) 15,700 (d) 15,800

(e) 20,500 (f) 20,600 (g) 20,700 (h) 20,800

3. ある保険会社が販売しているある損害保険商品について、以下のようなデータを基に2005年度末 IBNR 備金を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もった場合、それに最も近いものは選択肢のうちのどれか。

単年度支払保険金

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2002年度	3,500	1,155	772	347
2003年度	3,990	1,323	926	
2004年度	3,528	1,158		
2005年度	3,936			

ただし、すべての保険事故は、発生年度から4年後には支払が完了しているものとし、累計支払保険金のロスディベロップメントの予測値には、対応する事故年度の既知の値を単純平均したものを用い、またインフレ率は過去実績・将来予測とも一律で年率5%を用いるものとする。なお、計算過程において端数が生じる場合には、そのつど、保険金については小数点以下第1位を四捨五入して整数に、係数については小数点以下第4位を四捨五入して小数点以下第3位に端数処理してから次の計算に移ることとする。

（選択肢） (A) 2,900 (B) 3,100 (C) 3,300 (D) 3,500
(E) 3,700 (F) 3,900 (G) 4,100 (H) 4,300

4. ある保険会社が販売しているある損害保険商品について、次の実績データを基に2008年度末の IBNR 備金（=（最終支払保険金累計予測値）－（2008年度末支払保険金累計））を累計支払保険金によるチェインラダー法で見積もることとする。このとき、次のⅠ、Ⅱの各問に答えなさい。

＜事故年度別　単年度支払保険金の推移＞

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006年度	3,628	1,333	1,080
2007年度	4,000	1,050	
2008年度	3,800		

ただし、すべての保険事故は年度末に起こり、その支払は事故発生時（経過年度1）、その翌年度（経過年度2）およびその翌々年度末（経過年度3）にのみ行われる。また、累計支払保険金のロスディベロップメントファクターの予測値には、既知の対応する事故年度別ロスディベロップメントファクターを単純平均した値を用い、また、インフレ率は過去実績・将来予測とも一律で年率5%を用いるものとする。

なお、計算の途中において、保険金については全て小数点以下第1位を四捨五入して整数値を用い、ロスディベロップメントファクターについては全て小数点以下第4位を四捨五入して小数点以下第3位までの数値を用いることとする。

Ⅰ. 経過年度1→2のロスディベロップメントファクター予測値に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

(A) 1.200　(B) 1.220　(C) 1.240　(D) 1.260　(E) 1.280

(F) 1.300　(G) 1.320　(H) 1.340　(I) 1.360　(J) 1.380

Ⅱ. 2008年度末のIBNR備金に最も近いものは、選択肢のうちのどれか。

(A) 2,800　(B) 2,900　(C) 3,000　(D) 3,100　(E) 3,200

(F) 3,300　(G) 3,400　(H) 3,500　(I) 3,600　(J) 3,700

[参考文献]

1.辻ヶ堂哲著『損害保険会計と決算 2004年度版』(損害保険事業総合研究所)

2.浜野雅章、森本祐司、田口茂共著『保険の国際会計基準と損害保険負債の時価評価』(日本アクチュアリー会アクチュアリージャーナル第48号)

3.東京海上社偏『損害保険実務講座 第2巻』(有斐閣)

4.荒巻淳著『米国の損保アクチュアリーについて』(日本アクチュアリー会会報第46号第1分冊)

5.『保険の国際会計基準』保険数理研究部会報告書

6. Robert W. Strain, "Property-Liability Insurance Accounting, Third Edition"(P54〜99), Insurance Accounting and Systems Association

7. Ruth Salzmann, "Estimated Liabilities for Losses and Loss Adjustment Expenses", Prentice-Hall Inc.

8. Timothy M. Peterson, "Loss Reserving-Property/Casualty Insurance", Ernst & Whinny, 1981

9. B.Benjamin, "General Insurance" (P234〜266), William Heinemann Ltd (邦訳:日本アクチュアリー会会報別冊 第107号『英国の損害保険』)

10. "Foundations of Casualty Actuarial Science, Fourth Edition", Casualty Actuarial Society

11. P. D. England and R. J. Verrall, "Stochastic Claims Reserving in General Insurance" (邦訳:日本アクチュアリー会会報別冊第207号『損害保険における確率論的クレームリザービング』

12. Stochastic claims reserving method in insurance, Mario V. Wüthrich, Michael Merz

練習問題解答

1.

(1) 1998年度（事故発生年度から1年経過後の発生保険金と2年経過後の発生保険金との差が2年経過時点で認識されたIBNR損害であるが、1998年度のみこの額が突出して大きい。）

(2) 累計支払保険金のロスディベロップメントファクターは下表のとおり。

	ロスディベロップメントファクター			
	1→2	2→3	3→4	4→5
1995	1.3250	1.1606	1.0538	1.0000
1996	1.3278	1.1765	1.1161	1.0000
1997	1.3158	1.2525	1.0850	1.0000
1998	1.3495	1.1965	1.0850	1.0000
1999	1.3229	1.1965	1.0850	1.0000

よって、事故年度別最終累計発生保険金推定値は次のようになる。

1997事故年度　　$2{,}098 \times 1.0850 = 2{,}276$

1998事故年度　　$1{,}807 \times 1.1965 \times 1.0850 = 2{,}346$

1999事故年度　　$1{,}508 \times 1.3229 \times 1.1965 \times 1.0850 = 2{,}590$

(3) 累計発生保険金のロスディベロップメントおよびロスディベロップメントファクターは、下表のとおり。

発生保険金のロスディベロップメント

事故年度	経過年数				
	1	2	3	4	5
1995	1,952	2,221	2,392	2,468	2,468
1996	2,055	2,314	2,461	2,537	
1997	1,827	2,095	2,305		
1998	1,658	2,223			
1999	1,886				

	ロスディベロップメントファクター			
	1→2	2→3	3→4	4→5
1995	1.1378	1.0770	1.0318	1.0000
1996	1.1260	1.0635	1.0309	1.0000
1997	1.1467	1.1002	1.0313	1.0000
1998	1.3408	1.0803	1.0313	1.0000
1999	1.1368	1.0803	1.0313	1.0000

よって、事故年度別最終累計発生保険金推定値は次のようになる。

1997事故年度　　2,305×1.0313＝2,377

1998事故年度　　2,223×1.0803×1.0313＝2,477

1999事故年度　　1,886×1.1368×1.0803×1.0313＝2,389

2.

2002事故年度:(d)、2003事故年度:(e)

保険金の水準を2003年度ベースにインフレ調整を行う。

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2001年度	6,050	2,200	1,500
2002年度	11,000	3,000	
2003年度	12,500		

次にロスディベロップメントファクターを計算する。

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2001年度	1.364	1.182
2002年度	1.273	1.182
2003年度	1.318	1.182

2003年度ベースの支払保険金を計算する。

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2001年度	6,050	2,200	1,500
2002年度	11,000	3,000	2,545
2003年度	12,500	3,977	2,996

最後に将来のインフレ率を反映する。

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終累計支払保険金
2001年度	5,000	2,000	1,500	8,500
2002年度	10,000	3,000	2,800	15,800
2003年度	12,500	4,375	3,625	20,500

3.

(G)

累計支払保険金(インフレ調整前)

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2002年度	3,500	4,655	5,427	5,774
2003年度	3,990	5,313	6,239	
2004年度	3,528	4,686		
2005年度	3,936			

累計支払保険金(インフレ調整後)

事故年度	経過年度			
	1	2	3	4
2002年度	3,500	4,600	5,300	5,600
2003年度	3,800	5,000	5,800	
2004年度	3,200	4,200		
2005年度	3,400			

$$C'_{1,1} = C_{1,1}$$

$$C'_{i,1} = \frac{C_{i,1}}{\prod_{l=1}^{i-1} 1.05} \left(i = 2,3,4\right)$$

$$C'_{i,j} = \frac{C_{i,j} - C_{i,j-1}}{\prod_{l=1}^{i+j-2} 1.05} + C'_{i,j-1} \begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ l = 2,3,4 \end{pmatrix}$$

ロスディベロップメントファクター

事故年度	経過年度			
	1→2	2→3	3→4	（※）
2002年度	1.314	1.152	1.057	1.000
2003年度	1.316	1.160	1.057	1.057
2004年度	1.313	1.156	1.057	1.222
2005年度	1.314	1.156	1.057	1.606

※2005年度末から最終支払完了まで

$$b_j = \frac{1}{4-j+1}\sum_{i=1}^{4-j+1}\frac{C'_{i,j}}{C'_{i,j-1}}\left(j=2,3,4\right)$$

累計保険金予想（インフレ調整後）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終
2002年度	3,500	4,600	5,300	5,600
2003年度	3,800	5,000	5,800	6,131
2004年度	3,200	4,200	4,855	5,132
2005年度	3,400	4,468	5,165	5,459

累計保険金予想（インフレ調整前）

事故年度	経過年度			
	1	2	3	最終
2002年度	3,500	4,655	5,427	5,774
2003年度	3,990	5,313	6,239	6,641
2004年度	3,528	4,686	5,482	5,836
2005年度	3,936	5,234	6,124	6,518

最終発生損害額予想

事故年度	最終累計 発生保険金	IBNR
2002年度	5,774	0
2003年度	6,641	402
2004年度	5,836	1,150
2005年度	6,518	2,582
		4,134

よって、正解は、(G)。

4.

Ⅰ.(F)　Ⅱ.(G)

単年度(インフレ調整前)

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006年度	3,628	1,333	1,080
2007年度	4,000	1,050	
2008年度	3,800		

単年度(インフレ調整後。基準は2008年度)

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006年度	4,000	1,400	1,080
2007年度	4,200	1,050	
2008年度	3,800		

例) 事故年度2006、経過年度2

=1,333×1.05

=1,400

累計(インフレ調整後。基準は2008年度)

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006年度	4,000	5,400	6,480
2007年度	4,200	5,250	
2008年度	3,800		

ロスディベロッペメントファクター

事故年度	経過年度	
	1→2	2→3
2006年度	1.350	1.200
2007年度	1.250	1.200
2008年度	1.300	1.200

経過年度1→2のロスディベロップメントファクター

=(1.350+1.250)÷2

=1.300

累計(インフレ調整後。基準は2008年度)

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006年度	4,000	5,400	6,480
2007年度	4,200	5,250	6,300
2008年度	3,800	4,940	5,928

単年度(インフレ調整後。基準は2008年度)

事故年度	経過年度		
	1	2	3
2006年度	4,000	1,400	1,080
2007年度	4,200	1,050	1,050
2008年度	3,800	1,140	988

単年度(インフレ調整前)

事故年度	経過年度			IBNR備金
	1	2	3	
2006年度	3,628	1,333	1,080	0
2007年度	4,000	1,050	1,103	1,103
2008年度	3,800	1,197	1,089	2,286

よって、IBNR 備金＝1,103＋2,286＝3,389

第６章

積　立　保　険

第6章　積立保険

6.1　積立保険の特徴と商品構成

積立保険は、補償型の保険（非積立型の主として保険期間1年の保険をいう。以下、同様とする。）と次の2点において仕組みを異にしている。

- 保険期間が長期間であること
- 満期まで契約が全損失効(保険金の支払いによって保険契約が終了すること)せずに存続した場合には、満期時に返れい金を支払うこと

また、これらのほかに積立保険には、中途返れい金の支払い、保険料の一部一時払、保険料の払込免除など、特有の諸機能がある（6.5節で詳述する）。

積立保険には、補償内容や満期返れい金の割合などによって種々の商品があるが、積立保険の数理を見るにあたっては、次の二種類の商品構成による相違を理解することが重要である。一つは、長期総合保険に代表される商品構成であり、それ一つで補償機能も積立機能も兼ね備えた**完結型**の商品構成である。もう一つは積立普通傷害保険に代表される商品構成であり、補償機能と積立機能を分離し、補償型の保険に積立特約（積立型基本特約）を付帯するという**積特型**の商品構成である。

6.2 営業保険料

6.2.1 営業保険料の構成要素

積立保険における営業保険料は、危険保険料、付加保険料、積立保険料の三つの部分から構成されている。このうち積立保険料は、満期返れい金充当分であり、補償型の保険にはない保険料の構成要素である。

(1) 危険保険料

将来の保険金の支払いに充てられる額を危険保険料（純保険料ということもある）という。危険保険料は担保別に主として単位保険金額あたりに定められている。積立保険の保険期間は長期であるため、一時払の危険保険料を求める場合には、予定利率が考慮される[1]。

(2) 付加保険料

いわゆる事業費に充てられる部分であり、これは次のように細分化される。

① 新契約社費

契約の獲得、申込書の受け付け、保険証券の発行等、新契約時にかかるコスト[2]に充てられる額を**新契約社費**という。新契約社費は料率構成上は契約締結時に一度だけ支出されるものとして、保険料に織り込まれている。新契約社費は主として主要担保項目の単位保険金額あたりに定められている。

② 維持費

---

[1] 積立保険の一時払保険料では、補償部分、積立部分ともに予定利率による金利の要素が考慮されている。

[2] 保険料の請求と領収等にかかわるコストは維持費として認識する。

保険料の請求と領収、保険金の支払い、その他契約保全にかかるコストに充てられる額を維持費という。

維持費は新契約社費とは異なり、保険期間中継続的に支出されるものとして保険料に織り込まれており、主として担保別に単位保険金額当たりに定められている。また、一時払など保険料が払い済みになった契約に対しては、次年度以降の保険料の請求、領収などのコストがかからないため、一定の割り引きがなされるとともに、後述の予定利率が考慮される。

③ 契約手数料（募集手数料）

代理店手数料の支払いに充てられる額の一部として、第1保険年度に領収する保険料に対する一定割合として、保険料に織り込まれている。

④ 集金手数料

代理店手数料の支払いに充てられる額の一部として、領収する総保険料に対する一定割合として、保険料に織り込まれている。

(3) 積立保険料

満期時に有効な契約に対して支払われる額を満期返れい金といい、その原資に充てられる額を積立保険料という。積立保険料を算出する要素として予定利率と予定契約消滅率がある[3]。

① 予定利率

積立保険料に対する約定金利を予定利率[4]という。積立保険では、積立保

3　一部の商品のように、保険事故が生じた場合、翌保険年度以降の保険料の払込免除を行う種目では、積立保険料を算出する要素として予定利率、予定契約消滅率の外に予定払込免除発生率を考慮する必要がある。

4　予定利率は、積立保険料を算出する際だけでなく、一時払の危険保険料、維持費を算出する場合や、回払の各回の保険料を均等にするために新契約社費、契約手

険料の運用利回りが予定利率を上回った場合には、その部分を契約者配当金として支払い、運用利回りが予定利率を下回った場合でも約定の満期返れい金は支払うため、予定利率には約定された最低保証金利という性格がある。

② 予定契約消滅率

1年あたりに保険金の支払いによって保険契約が終了する、すなわち満期返れい金を支払わない契約（全損失効）が発生する確率を、予定契約消滅率という。全損失効した契約の満期返れい金ファンドは、全損失効していない契約に割り当てられるため、予定契約消滅率は積立保険料の割引要素となる。

6.2.2 営業保険料の算出

(1) 記号の定義

本論に入る前に、次節以降で使用する記号を次のとおり定義しておく。

危険保険料		p
予定社費	新契約社費	α_1
	維持費	β
	〃（一時払）	β'
予定代理店手数料率	契約手数料率	α_2
	〃（一時払）	α_2'
	集金手数料率	γ
満期返れい金		W
保険期間（年）		n
予定利率		i
予定契約消滅率		q
予定払込免除発生率		d

数料を平準化する場合にも使用される。

<table>
<tr><td colspan="2">年払営業保険料</td><td>P</td></tr>
<tr><td colspan="2">一時払営業保険料</td><td>P'</td></tr>
<tr><td colspan="2">現価率</td><td>$v=\dfrac{1}{1+i}$</td></tr>
<tr><td></td><td>（予定契約消滅率を考慮したもの）</td><td>$\phi=(1-q)v$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">期始払年金現価率</td><td></td><td>$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}=\dfrac{1-v^n}{1-v}$</td></tr>
<tr><td>（予定契約消滅率を考慮したもの）</td><td>$\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}=\dfrac{1-\phi^n}{1-\phi}$</td></tr>
<tr><td>（予定払込免除発生率を考慮したもの）</td><td>$\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}\rceil}=\dfrac{1-(1-d)^n\phi^n}{1-(1-d)\phi}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">第t保険年度末払戻積立金</td><td></td><td>${}_tV$</td></tr>
<tr><td>（一時払）</td><td>${}_tV'$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">経過年数 $t-\frac{m-1}{12}$ 年以上 $t-\frac{m}{12}$ 年未満の</td><td>事業年度末払戻積立金</td><td>${}_tV_m$</td></tr>
<tr><td>（一時払）</td><td>${}_tV'_m$</td></tr>
</table>

(2) 完結型積立保険の営業保険料

a. 年払保険料の算出

① 年払保険料の算式

$$P=\frac{(p+\beta)\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}+\alpha_1+W\phi^n}{(1-\gamma)\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}-\alpha_2} \tag{6.1}$$

上式は、収支相等の原則から、次のように導き出される。

収入現価＝$P\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}$

$$\text{支出現価}=\underbrace{p\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}}_{\text{危険保険料}}+\underbrace{\alpha_1}_{\text{新契約社費}}+\underbrace{\alpha_2 P}_{\text{契約手数料}}$$

$$+\underbrace{\beta\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}}_{\text{維持費}}+\underbrace{\gamma P\ddot{a}_{(q)\overline{n}\rceil}}_{\text{集金手数料}}+\underbrace{W\phi^n}_{\text{満期返れい金}}$$

この両者を等しいと置いて、(6.1)式を得ることができる。

② 算式の解釈

(6.1)式を、

$$P=\frac{p+\beta+\dfrac{\alpha_1+W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}}{1-\left(\gamma+\dfrac{\alpha_2}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\right)}$$

と変形すると、次のように解釈することもできる。

$$\text{年払営業保険料}=\frac{\text{危険保険料}+\text{その他のコスト(1年あたり)}}{1-\text{(平均)代理店手数料}}$$

また、これを次のように構成要素ごとに分解することもできる。

$$P=p+\frac{\alpha_1}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}+\frac{\alpha_2 P}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}+\beta+\gamma P+\frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$$

危険保険料		p
付加保険料	新契約社費	$\dfrac{\alpha_1}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$
	維持費	β
	契約手数料	$\dfrac{\alpha_2 P}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$
	集金手数料	γP
平準式積立保険料		$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$

③ 年度別の内訳

上表における付加保険料のうち、新契約社費および契約手数料については、第1保険年度においてのみ支出される費用であるから、これらの費用相当額を第1保険年度の営業保険料から賄い（積立保険料で調整する）、次年度以降の営業保険料中のこれらの費用がゼロとなるように営業保険料構成を組み立て直すことを考える。

そこで、初年度の積立保険料をF_1、次年度以降の積立保険料をF_2とし[5]、第1保険年度においてのみ支出される費用相当額[6]$\alpha_1+\alpha_2 P$をαとおくと、

$$\begin{cases} \alpha + F_1 = F_2 \\ \alpha + F_1 + F_2 \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{(q)\overline{n-1|}} = \alpha + W\phi^n \end{cases}$$

が成り立つ。これよりF_1，F_2を解くと、

$$F_1 = \frac{(1-\ddot{a}_{(q)\overline{n|}})\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$$

$$F_2 = \frac{\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$$

となる。

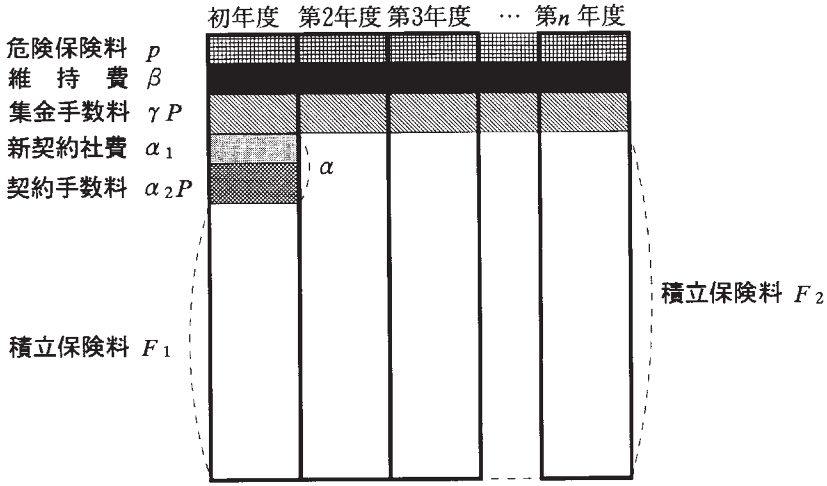
以上の関係をまとめると、次表のとおりとなる。また、これを図に表すと図6-1のようになる。

		初年度	次年度以降
危険保険料		p	p
付加保険料	新契約社費	α_1	―
	維持費	β	β
	契約手数料	$\alpha_2 P$	―
	集金手数料	γP	γP
チルメル式積立保険料		$\frac{(1-\ddot{a}_{(q)\overline{n|}})\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$	$\frac{\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$

5　これらをチルメル式積立保険料という。

6　これをチルメル割合という。

図6-1 年払営業保険料の構成図



b. 回払保険料の算出

回払（半年払、月払、団体扱）営業保険料は、年払営業保険料Pをもとに次のように定められる。

半年払営業保険料（2分割）

$$(1+\kappa_1)\times\frac{P}{2} \tag{6.2}$$

月払営業保険料（12分割）

$$(1+\kappa_2)\times\frac{P}{12} \tag{6.3}$$

団体扱営業保険料（12分割）

$$(1+\kappa_3)\times\frac{P}{12} \tag{6.4}$$

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$： 回払に係る割増

回払保険料は年払保険料に対して割増しを行っているが、この中身としては、保険料が分割して入金されることに対する利息の要素、および集金の機会が増すことに対する集金コストの増加要素などを挙げることができる。

c. 一時払保険料の算出

① 一時払保険料の算式

一時払契約では、契約締結時にのみ保険料が徴収されるため、付加保険料の体系およびその水準が年払契約のものとは多少異なっている。すなわち、第2保険年度以降の保険料の集金手数料は不要となる一方、社費についても、2回目以降の保険料の請求・領収などのコストが掛からないため維持費の一部がカットされている。また、契約手数料については、本来の契約手数料のほかに1回のみの保険料徴収に対する集金手数料を織り込むために、年払契約の場合のそれとは水準が異なっている。

そこで、一時払契約の維持費をβ'、契約手数料をα'_2とおいて、一時払営業保険料P'の算式を求めることにする。

$$\text{収入現価} = P'$$

$$\text{支出現価} = \overset{\text{危険保険料}}{p\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} + \overset{\text{新契約社費}}{\alpha_1} + \overset{\text{契約手数料}}{\alpha'_2 P'}$$

$$+ \overset{\text{維持費}}{\beta' \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} + \overset{\text{満期返れい金}}{W\phi^n}$$

これにより収支相等の原則に基づき得られるP'の値が、いわば本来の一時払営業保険料といえる。しかし、これによると危険保険料、維持費、積立保険料につき、単に利息分を割り引いているのみならず、消滅契約分（全損失効契約分）も割り引いていることになる。したがって、全損失効時には、保険金はもちろん支払われるが、危険保険料、維持費、積立保険料は、将来の分を含めて一切返還されないことになる。

一方、年払契約の場合であれば、全損失効の際にはすでに支払った積立保険料は返還されないものの、翌年度以降分の危険保険料、維持費、積立保険料を追徴されるということはない。一時払契約の場合で、しかも保険期間の早期に全損失効が生じた場合には、年払契約とのアンバランスはきわめて顕

著になる。

そこで、一時払契約の全損失効時には未経過年度の保険料を返れいすることとして、一時払営業保険料の計算にあたっては、危険保険料、維持費、積立保険料については1年分のそれを基礎とし、それを保険期間n年分につき、単に利息分のみを割り引く計算方式としている。

すなわち、支出現価は次の算式となる。

$$\text{支出現価} = \alpha_1 + \alpha_2' P' + \frac{p\ddot{a}_{(q)\overline{n|}} + \beta'\ddot{a}_{(q)\overline{n|}} + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

したがって、これより一時払営業保険料の算式は、

$$P' = \frac{\left(p + \beta' + \dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)\ddot{a}_{\overline{n|}} + \alpha_1}{1 - \alpha_2'} \qquad (6.5)$$

となる。

② 算式の解釈

年払の場合と同様に内訳を求めると、次表のとおりとなる。

危険保険料		$p\ddot{a}_{\overline{n|}}$
付加保険料	新契約社費	α_1
	維持費	$\beta'\ddot{a}_{\overline{n|}}$
	契約手数料	$\alpha_2' P'$
積立保険料		$\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\ddot{a}_{\overline{n|}}$

(3) 積特型積立保険の積立部分の保険料

a. 営業保険料の構成

積特型積立保険の積立部分の営業保険料、すなわち積立型基本特約保険

料においては、付加保険料の体系が以下の点で、完結型積立保険のものとは異なっている。

- 積立型基本特約は、補償型保険の特約であるという位置づけから、新契約社費は付加しない。
- 代理店手数料については、契約手数料と集金手数料というように分解せず一本にして、収入営業保険料に対して一定割合で支払う。

b. 営業保険料の算出

積立保険料に対して一定割合で付加される社費（維持費）、および代理店手数料率をそれぞれβ，δとしたとき保険期間n年の年払営業保険料Pは、次のように求められる。

$$\text{収入現価} = P\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}$$

$$\text{支出現価} = W\phi^n(1+\beta+\delta)$$

これより、

$$P = \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}(1+\beta+\delta) \tag{6.6}$$

となる。

また、回払契約の営業保険料については、完結型積立保険の場合と同様に算出される。

一方、一時払契約の営業保険料については、完結型積立保険の場合と考え方は同じで、1年分の営業保険料相当額を単に利息で割り引いたものをn年分加算することによって算出される。ただし、一時払契約における維持費と代理店手数料は、年払契約のものと水準が異なるので、それぞれβ'，δ'とおく。このとき一時払営業保険料P'は、

$$P' = \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}(1+\beta'+\delta')\ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{6.7}$$

となる。

(4) 積特型積立保険の補償部分の保険料

a. 一時払営業保険料の算出

補償部分の営業保険料は、各補償型保険の保険料を準用して算出されるが、補償型保険での算出方法と異なる点は、以下のとおりである。

① 現価換算： 翌年度以降の保険料構成要素を、契約締結時での現価に換算する必要があること。

② 社費の見直し： 新契約社費の支出は契約締結時のみであり、翌年度以降の営業保険料からは削除する必要があること。

そこで、保険期間n年の場合の一時払営業保険料P'を求めると、次のとおりとなる。

$$P' = \frac{p+\varepsilon}{1-(\theta+\delta)} + \frac{p+\beta}{1-(\theta+\delta)} \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1|}}$$

$$= \frac{p+\varepsilon}{1-(\theta+\delta)} \left\{ 1 + \frac{p+\beta}{p+\varepsilon} \cdot {}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1|}} \right\}$$ [7]

ここで、p：純保険料，ε：社費，θ：代理店手数料，δ：利潤率，β：維持費（前述の社費εのうち新契約社費部分を削除したもの）とし、それぞれ各補償型保険の保険料率を準用する。

b. 年払営業保険料の算出

一時払の場合と同様に、新契約社費の支出は契約締結時のみであるため、翌年度以降の営業保険料からは削除する必要がある。また、一方では翌年度以降も毎年保険料を集金しなければならず、これに伴う社費（維持費の部分）の増加分を見込む必要がある。

そこで、保険期間n年の場合の年払営業保険料P'を求めると、次のとおりと

---

[7] 中括弧{ }内の数値を一般的に長期係数と呼んでいる。

なる。

$$\text{収入現価}=P\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$\text{支出現価}=\frac{p+\varepsilon}{1-(\theta+\delta)}\left\{1+\frac{p+\beta'}{p+\varepsilon}\cdot{}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1}|}\right\}$$

ここで β' は、増加分を見込んで割増しした後の維持費とする。

収支相等の原則から両式を等しいと置き、さらにこれを P について解くと次式のとおりとなる。

$$P=\frac{p+\varepsilon}{1-(\theta+\delta)}\left\{\frac{1+\dfrac{p+\beta'}{p+\varepsilon}\cdot{}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\right\} \tag{6.8}$$

ここで上式において、{ }内は $\dfrac{1+\dfrac{p+\beta'}{p+\varepsilon}\cdot{}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1}|}}{1+1\cdot{}_{1|}\ddot{a}_{\overline{n-1}|}}$ と変形することができ、1より小さいことがわかるので、これを1-K と置き換えることにすると、K は長期契約であることによる年払営業保険料の割引係数となる。

6.3　満期返れい金と契約者配当

6.3.1　満期返れい金の性格

積立保険においては、保険期間が満了した契約に対して、保険料の払い込み済を条件に約定した金額が満期返れい金として支払われる。満期返れい金は、契約が保険期間中途において保険事故により消滅した場合には支払われないものであることから、単なる預り金ではなく保険料の無事故戻し的性格を持った返れい金と考えることができる。

また、満期返れい金は、契約上の責任の履行によって支払われるものであり、その原資たる積立保険料は、積立保険の営業保険料の構成要素として、それ以外の部分の保険料と一体のものと位置づけられている。

6.3.2　払戻積立金

満期返れい金の支払いに備えるための責任準備金を払戻積立金という。

保険料の算出においては、契約締結時点で収支相等の原則を適用したが、保険料算出の際の基礎率が予定どおり実現していれば、保険期間中途の任意の時点で、次の収支は相等する。

過去の収入の終価＋将来の収入の現価

＝過去の支出の終価＋将来の支出の現価

したがって、次の等式が成立する。

過去の収入の終価－過去の支出の終価

＝将来の支出の現価－将来の収入の現価

左辺は過去の収入から支出を控除した額（過去の残余）、右辺は将来の支出から収入を控除した額（将来の不足）であり、ともに現時点において積み立てるべき金額を表すものである。

左辺によって算出される責任準備金を**過去法による**責任準備金、右辺によって算出される責任準備金を**将来法による**責任準備金という。保険期間・満期返れい金があらかじめ定まっていない財形貯蓄傷害保険などを除き、損害保険会社の払戻積立金は、将来法によって計算するのが一般的である。

(1) 平準式とチルメル式

保険料を回払いする契約においては、各回の収入積立保険料を捉える際に、常に積立保険料が一定であるとする平準式積立保険料の考え方と、初年度経費を積立保険料の中で将来にわたって償却していくチルメル式積立保険料の考え方がある。

一般に回払いの営業保険料は、各回均等となるように算出されているところから、営業保険料の構成要素である積立保険料についても各回均等であるとして求めたものが、平準式積立保険料である。これに対して、 新契約社費・募集費といった初年度経費相当額を初年度積立保険料から控除し、全期間[8]に再配分することにより、期間損益計算上の収益と費用の対応を図ったのがチルメル式積立保険料である。

払戻積立金は、その計算に用いる積立保険料の種類に対応して、平準式払戻積立金、チルメル式払戻積立金と呼ばれる。保険設計上、支出経費の多くが平準化されている場合には平準式払戻積立金が採用されている。

---

8 全期間に配分する方式と、保険料払込期間より短い期間に配分する方式がある。前者を全期チルメル式、後者を短期チルメル式と呼ぶ。積立保険においては、保険期間が比較的短いため、全期チルメル式が採用されている。

(2) 保険年度末の払戻積立金

a. 回払契約の場合

第t保険年度末における保険期間n年の年払の払戻積立金 ${}_tV$ を将来法により算出すれば、

$$ {}_tV = \underbrace{W\phi^{n-t}}_{\text{将来の支出の現価}} - \underbrace{P_S\,\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}_{\text{将来の収入の現価}} \qquad (t = 1,2,\ldots,n) $$

となる。ここで、P_Sは積立保険料とする。積立保険料として平準式積立保険料を採用、すなわち、

$$ P_S = \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} $$

とすれば、

$$ \begin{aligned} {}_tV &= W\phi^{n-t} - W\phi^n \frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} \\ &= W\phi^{n-t} - W\phi^n \frac{1-\phi^{n-t}}{1-\phi^n} \\ &= W\frac{\phi^{n-t}-\phi^n}{1-\phi^n} \\ &= W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right) \end{aligned} $$

となる。

また、積立保険料としてチルメル式積立保険料を採用すれば、第2保険年度以降の積立保険料P_Sは、

$$ P_S = \frac{\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} $$

であるから、

$$ {}_tV = W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right) - \alpha\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} $$

となる。

次に、過去法により ${}_tV$ を求める。

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= (\text{過去の収入の終価}) - (\text{過去の支出の終価}) \\
&= P_S(\phi^{-t} + \phi^{-t+1} + \cdots + \phi^{-1}) - 0 \\
&= P_S \frac{\phi^{-1}(1-\phi^{-t})}{1-\phi^{-1}} \\
&= P_S \frac{\phi^{-t}-1}{1-\phi}
\end{aligned}
$$

積立保険料として平準式積立保険料を採用すれば、

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} \cdot \frac{\phi^{-t}-1}{1-\phi} \\
&= W\left(1 - \frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)
\end{aligned}
$$

となり、将来法の払戻積立金に一致することが分かる。

積立保険料としてチルメル式積立保険料を採用すれば、

$$
\begin{aligned}
(\text{第1保険年度の積立保険料}) &= \frac{(1-\ddot{a}_{(q)\overline{n|}})\alpha + W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} \\
&= P_S - \alpha
\end{aligned}
$$

である。ここで P_S は第2保険年度以降のチルメル式積立保険料である。

したがって、

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= P_S \frac{\phi^{-t}-1}{1-\phi} - \alpha\phi^{-t} \\
&= \left(\frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)\frac{\phi^{-t}-1}{1-\phi} - \alpha\phi^{-t}
\end{aligned}
$$

$$=W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)-\frac{\alpha}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\left(\phi^{-t}\frac{1-\phi^{n}}{1-\phi}-\frac{\phi^{-t}-1}{1-\phi}\right)$$

$$=W\left(1-\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}\right)-\alpha\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}}$$

となり、この場合も将来法の払戻積立金に一致する。

b. 一時払契約の場合

一時払契約の第t保険年度末の払戻積立金${}_tV'$は${}_tV'=W\phi^{n-t}$だけでなく、将来の支出として、全損失効の場合の未経過年度分の保険料返れいを考慮しなければならない。

全損失効が発生した場合に返れいする保険料は、P_Sを平準式積立保険料とするとき、

第$t+1$保険年度の全損失効の場合　$P_S\,q\sum_{k=1}^{n-t-1}v^{k}$

第$t+2$保険年度の全損失効の場合　$P_S\,q\phi\sum_{k=1}^{n-t-2}v^{k}$

⋮　　　　⋮

であるから、この部分の現価は、

$$P_S\,q\sum_{l=t+1}^{n-1}\phi^{l-t-1}\sum_{k=1}^{n-l}v^{k}=P_S\,q\sum_{l=t+1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-l}(1-q)^{l-t-1}v^{k+l-t-1}$$

$$=P_S\,q\sum_{l=t+1}^{n-1}\sum_{k=l-t}^{n-t-1}(1-q)^{l-t-1}v^{k}$$

$$=P_S\,q\sum_{k=1}^{n-t-1}v^{k}\sum_{l=t+1}^{k+t}(1-q)^{l-t-1}$$

$$=P_S\,q\sum_{k=1}^{n-t-1}v^{k}\sum_{l=0}^{k-1}(1-q)^{l}$$

$$=P_S\,q\sum_{k=1}^{n-t-1}v^{k}\frac{1-(1-q)^{k}}{q}$$

$$=P_S\left\{\sum_{k=1}^{n-t-1}v^{k}-\sum_{k=1}^{n-t-1}\phi^{k}\right\}$$

$$= P_S \left\{ \sum_{k=0}^{n-t-1} v^k - \sum_{k=0}^{n-t-1} \phi^k \right\}$$

$$= P_S \, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - P_S \, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}$$

となる。

　したがって、将来法により${}_tV'$を求めれば、

$${}_tV' = (\text{将来の支出の現価}) - (\text{将来の収入の現価})$$

$$= (W\phi^{n-t} + P_S \, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - P_S \, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}) - 0$$

$$= {}_tV + P_S \, \ddot{a}_{\overline{n-t|}}$$

となる。

　一方、第1保険年度に全損失効となった契約に支払った返れい金の終価は、

$$P_S \, q\phi^{-t} \sum_{k=1}^{n-1} v^k$$

となり、また第2保険年度の全損失効の場合は、

$$P_S \, q\phi^{-t}\phi \sum_{k=1}^{n-2} v^k$$

であるから、この部分の終価は、

$$P_S \, q\phi^{-t} \sum_{l=1}^{t} \phi^{l-1} \sum_{k=1}^{n-l} v^k$$

$$= P_S \, q\phi^{-t} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \phi^{l-1} \sum_{k=1}^{n-l} v^k - \sum_{l=t+1}^{n-1} \phi^{l-1} \sum_{k=1}^{n-l} v^k \right\}$$

$$= P_S \, q\phi^{-t} \left\{ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-l} (1-q)^{l-1} v^{k+l-1} - \phi^t \sum_{l=t+1}^{n-1} \phi^{l-t-1} \sum_{k=1}^{n-l} v^k \right\}$$

となる。

　ところで、${}_tV'$を将来法で求めた際に、

$$P_S \, q \sum_{l=t+1}^{n-1} \phi^{l-t-1} \sum_{k=1}^{n-l} v^k = P_S \, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - P_S \, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}}$$

であることもわかっており、また、

$$
\begin{aligned}
P_S\, q \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-l} (1-q)^{l-1} v^{k+l-1} &= P_S\, q \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{k=l}^{n-1} (1-q)^{l-1} v^{k} \\
&= P_S\, q \sum_{k=1}^{n-1} v^k \sum_{l=0}^{k-1} (1-q)^{l} \\
&= P_S\, q \sum_{k=1}^{n-1} v^k \frac{1-(1-q)^k}{q} \\
&= P_S \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} v^k - \sum_{k=1}^{n-1} \phi^k \right\} \\
&= P_S \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} v^k - \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k \right\} \\
&= P_S\, \ddot{a}_{\overline{n|}} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}
\end{aligned}
$$

である。

したがって、第1保険年度から第t保険年度の間に全損失効となった契約に支払った返れい金の終価は、

$$
\phi^{-t}(P_S\, \ddot{a}_{\overline{n|}} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}) - (P_S\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}})
$$

であることがわかる。

このことから、過去法により${}_tV'$を求めれば、

$$
\begin{aligned}
{}_tV' &= \text{(過去の収入の終価)} - \text{(過去の支出の終価)} \\
&= (P_S\, \ddot{a}_{\overline{n|}}\, \phi^{-t}) - \{\phi^{-t}(P_S\, \ddot{a}_{\overline{n|}} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}) - (P_S\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}})\} \\
&= P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n|}}\, \phi^{-t} + P_S\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}} \\
&= W\phi^{n-t} - P_S\, \ddot{a}_{(q)\overline{n-t|}} + P_S\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}} \\
&= {}_tV + P_S\, \ddot{a}_{\overline{n-t|}}
\end{aligned}
$$

となり、将来法の${}_tV'$と一致することがわかる。

(3) 事業年度末の払戻積立金

今までは、保険年度末の払戻積立金を考えてきたが、払戻積立金は毎事業年度末に積み立てられるものであるから、実際には事業年度末の払戻積立金が計算できなければならない。

以下では、保険契約はいずれの契約も各契約月の月央に契約がなされるものと仮定して、事業年度末の払戻積立金を計算することにしよう。また、平準式払戻積立金はチルメル式払戻積立金で新契約費$\alpha = 0$とした場合に一致するため、以下では、チルメル式払戻積立金を考えることとする。

a. 一時払・年払契約の場合

一時払、年払の場合は、事業年度末から保険年度末の間に保険料を収入することはない。したがって、事業年度末の払戻積立金は、保険年度末の払戻積立金を単に事業年度末まで引き戻せばよい。

第t事業年度末における経過年数が$t-\dfrac{m+1}{12}$年以上、$t-\dfrac{m}{12}$年未満の契約の第t事業年度末から第t保険年度末までの期間は、月央契約の仮定から$\dfrac{2m+1}{24}$年となる。

したがって、この契約の第t事業年度末の払戻積立金${}_tV_m$は、

年払の場合　　$${}_tV_m = {}_tV\phi^{\frac{2m\cdot 1}{24}}$$

一時払の場合　　$${}_tV'_m = {}_tV'\phi^{\frac{2m\cdot 1}{24}}$$

となる。

6.3.3 契約者配当

(1) 契約者配当の性格

積立保険の契約者配当は、保険期間中の運用利回りが 予定利率を上回った場合の利差配当である。

非積立保険の営業保険料算出に用いられる基礎率は、無配当保険の基礎率としてのもので、有配当保険の基礎率のような安全割増を織り込んでいない。また、定期的に料率検証を行うことで、基礎率は適正な水準に保たれていると言える。このため、株式会社形態の損害保険会社においては、非積立保険に

ついて契約者配当を行っていない。

積立保険においても、営業保険料のうち危険保険料および付加保険料については、非積立保険と同様の性質を持っており、契約者配当算出の対象とはしていない。

これに対して積立保険の営業保険料のうち積立保険料は、保険期間を通じて予定利率で運用された場合に保険期間満了時に満期返れい金に見合う額となっているが、一方で保険会社の資産運用は、その時々の金融情勢等の影響を受けるため、保険期間中の運用利回りと予定利率の間には差が生じてくる。満期返れい金は、あらかじめ金額が約定された給付であるから、積立保険料算出上の予定利率には、会社運用利回りの下限としての意味合いがあるが、運用成果が予定利率を上回った場合には、その差額部分は積立保険料の予定原価の精算として事後的に調整を図ることが必要となる。積立保険の契約者配当は、この保険期間中の運用利回りと予定利率との間に生じてくる差額部分を、事後的に調整する仕組みということができる。

(2) 契約者配当の計算方法

a. 契約者配当適用利回り

積立保険の契約者配当は利差益配当であるから、予定利率と実際の運用実績との差の部分が配当の源泉となっており、契約者配当算出に用いる利回り（契約者配当適用利回り）は、利回り算出対象期間中の積立保険料の運用実績をもとに投資経費を初めとする運用上のコスト等を考慮して決定される。

b. 契約者配当の支払い

積立保険の契約者配当は、保険期間中の各事業年度の契約者配当適用利回りを用いて算出するが、通常はこれに基づいて満期返れい金に対する割合で表した契約者配当率をあらかじめ求めておき、これによって個々の契約の契約者配当金を決定し支払っている。

契約者配当は、保険期間が満了した契約に対してのみ支払われるのが原則であるが、保険期間が10年を超える契約については、10年経過以後の解約・失効時にも支払われることとなっている。

6.3.4 契約者配当準備金

積立保険においては、契約者配当の支払いに充てるため、毎事業年度末において契約者配当準備金を積み立てている。

6.4 解約返れい金

保険契約の無効・失効の場合または保険契約が解除された場合には、保険契約者に対して返れい金が支払われる。

解約返れい金は、解約に際し契約者に返れいを約定している価格であり、解約時の払戻積立金および未経過保険料を基準に算出しているのが一般的である。また、解約自由が契約者の責めに帰すべき場合には一定の解約控除を行うこともある。

6.5 積立保険の諸機能

6.5.1 満期返れい金等の分割払等

満期返れい金・契約者配当金の支払方法の多様化として、これらを分割しまたは据え置いて支払う機能がある。これらの支払方法は、通常、特約により契約者が選択できるものとされている。

これらの場合の分割払いまたは据置払期間は、保険期間が満了した後、最終の分割金または据置金を支払うまでの期間であり、保険事故に対する補償は行われない(当然この期間に対応する危険保険料はない)。

(1) 分割払い

満期返れい金・契約者配当金を、所定の年数にわたり年1回から数回に分けて分割払する。満期から分割払開始までの間に、一定の期間据置を設定することも可能である。

具体的な仕組みは、次のようになっている。

契約者からの申し出により、所定の金額の範囲で、利息を付して分割支払いを行う。予定利率に基づき、分割期間、回数に応じて、あらかじめ各回の分割金が定まる。実際の運用利回りが予定利率を超えた場合には、最終の分割金に加えて分割払配当金を支払う。

(2) 据置払

満期返れい金・契約者配当金を、所定の期間据え置いたうえで支払うものである。

具体的な仕組みは、次のようになっている。

契約者からの申し出により、所定の金額の範囲で、利息を付して据置支払いを行う。予定利率に基づき、据置期間に応じて、あらかじめ据置金の額が定

まる。実際の運用利回りが予定利率を超えた場合には、据置金に加えて据置払配当金を支払う。

(3) 分割金の計算

a. 1回あたりの分割金

分割払原資をS、各回の**分割金**をa、分割回数をnとし、分割払基準日に第1回分割金を支払う場合を考える。このとき、

$$a=\frac{S}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

である。

次に、分割払基準日からlか月後に第1回分割金を支払う場合には、各回の分割金の支払いがそれぞれlか月遅れると考えられるから、lか月分の利息を上乗せすればよい。したがって、

$$a=\frac{S(1+i)^{\frac{l}{12}}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \tag{6.9}$$

となる。

b. 一括払される未払分割金

① 分割払基準日以降第1回分割金支払日まで

一括払金は、半年分の利息を割り引くものとし、分割払基準日からの経過期間$1-\frac{m+1}{12}$年以上、$1-\frac{m}{12}$年未満に対し、

$$S(1+i)v^{\frac{2m+1}{24}}v^{\frac{1}{2}}$$

となる。ただし、計算の結果がSを下回る場合にはSとする。

② 第1回分割金支払日以降

t年経過時(第$t+1$回目の分割金支払直前)の未払分割金の現価は、

$$a\ddot{a}_{\overline{n-t}|}=S(1+i)^{\frac{l}{12}}\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

であるから、したがって一括払金は、第1回分割金支払日からの経過期間$t-\dfrac{m+1}{12}$年以上$t-\dfrac{m}{12}$年未満に対し、

$$S(1+i)^{\frac{t}{12}}\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}v^{\frac{2m+1}{24}}v^{\frac{1}{2}}$$

となる。ただし、「既払分割金＋一括払金＜分割払原資」の場合には、一括払金＝分割払原資－既払分割金とする。

c. 分割払積立金の計算

分割払積立金は未払分割金現価であり、その額は「一括払される未払分割金」の半年分の利息の割引きを行う前の額に等しい。したがって、毎事業年度末における分割払積立金要積立額は、次のようになる。

① 分割払基準日以降第1回分割金支払日まで

分割払基準日からの経過期間が$1-\dfrac{m+1}{12}$年以上$1-\dfrac{m}{12}$年未満に対し、

$$S(1+i)v^{\frac{2m+1}{24}}$$

である。

② 第1回分割金支払日以降

第1回分割金支払日からの経過期間が$t-\dfrac{m+1}{12}$以上$t-\dfrac{m}{12}$未満に対して、

$$S(1+i)^{\frac{t}{12}}\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}v^{\frac{2m+1}{24}}$$

である。

6.5.2 中途返れい金

積立保険の一部には、満期返れい金と類似の保険料の返れいを、保険期間の中途で行うものがあるが、この返れい金を中途返れい金という。法律上中途返れい金は、満期返れい金と同様、保険料の無事故戻しの一形態であると考えられる。

中途返れい金の支払いは、保険期間の中途におけるあらかじめ定められた中途返れい金支払日おいて、保険契約が有効である(全損失効等をしていない)ことを条件に、所定の金額を支払うことによって行われる。中途返れい金の支払いは、保険期間中1回の場合と複数回の場合がある。なお、全損失効が生じたときは、満期返れい金の場合と同様、その時点で支払日が未到来である中途返れい金は支払われず、それに対応する積立保険料の残高(払戻積立金)相当額も返れいされない(すでに支払われた中途返れい金については、当然ながら回収されるといったようなことはない)。

数理上は、満期返れい金の支払いにかかるものと同様に、払込保険料中に中途返れい金支払いにかかる積立保険料を織り込んでおく。予定利率および予定契約消滅率により割り引くことも、満期返れい金の場合と同様である。

(1) 営業保険料の算出(積立型基本特約保険料)

a. 年払保険料

年払の積立型基本特約保険料をPとし、また第x保険年度末に支払われる中途返れい金をR_xとする。すると、

$$\text{収入現価} = P\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}$$

$$\text{支出現価} = \left(W\phi^n + \sum_{j=1}^{n-1} R_j \phi^j\right)(1+\beta+\delta)$$

となるから、収支相等の原則により年払営業保険料は、

$$P = \frac{\left(W\phi^n + \sum_{j=1}^{n-1} R_j \phi^j\right)(1+\beta+\delta)}{\ddot{a}_{(q)\overline{n|}}} \tag{6.10}$$

となる。

b. 半年払・月払・団体扱分割払の保険料

分割払いの営業保険料は、中途返れい金がない場合と同様に算出する。

c. 一時払保険料

一時払いの積立型基本特約保険料P'は、年払保険料をもとにして、以下のように求めることができる。

$$\text{収入合計} = P'$$

$$\text{支出合計} = \left(W\phi^{n}\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j \phi^{j}\frac{\ddot{a}_{\overline{j}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{j}|}} \right)(1+\beta'+\delta')$$

より、収支相等の原則から、

$$P = \left(W\phi^{n}\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j \phi^{j}\frac{\ddot{a}_{\overline{j}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{j}|}} \right)(1+\beta'+\delta') \qquad (6.11)$$

となる。

(2) 責任準備金の計算

a. 保険年度末払戻積立金

① 年払契約

年払契約の積立保険料をP_Sとすると、上記(1)より、

$$P_S = \frac{W\phi^{n} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j \phi^{j}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$$

である。このとき第t保険年度末払戻積立金${}_tV$を、過去法を用いて求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
{}_tV &= P_S(\phi^{-t} + \phi^{-t+1} + \cdots + \phi^{-1}) - (R_1\phi^{-t+1} + R_2\phi^{-t+2} + \cdots + R_t) \\
&= P_S\phi^{-t}\ddot{a}_{(q)\overline{t}|} - \sum_{j=1}^{t} R_j\phi^{j-t} \\
&= \left(W\phi^{n-t} + \sum_{j=1}^{n-1} R_j\phi^{j-t} \right)\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} - \sum_{j=1}^{t} R_j\phi^{j-t} \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

② 一時払契約

一時払契約に係る第t保険年度末払戻積立金${}_tV'$は、満期返れい金にか

かわる部分と中途返れい金にかかわる部分とを合計したものであるから、次のようになる。

$$
{}_tV' = \left\{ W\phi^{n-t}\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} + \frac{W\phi^{n}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{n-t}|} \right\}
+ \sum_{j=t+1}^{n-1} \left\{ R_j\phi^{j-t}\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{j}|}} + \frac{R_j\phi^{j}}{\ddot{a}_{(q)\overline{j}|}}\ddot{a}_{\overline{j-t}|} \right\} \qquad (6.13)
$$

b.　事業年度末払戻積立金

中途返れい金がない場合と同様に、前述の保険年度末払戻積立金を用いて導くが、第t保険年度末の払戻積立金は、第t保険年度末に支払われる中途返れい金が差し引かれているので、これを加えておく必要がある。

経過年数$t-\dfrac{m+1}{12}$年以上$t-\dfrac{m}{12}$年未満（mは0から11までの整数）に対する払戻積立金は、次のとおりとなる。

①　年払契約

$$({}_tV + R_t)\phi^{\frac{2m+1}{24}}$$

②　一時払契約

$$({}_tV' + R_t)\phi^{\frac{2m+1}{24}}$$

6.5.3　保険料の払込免除制度

積立保険の一部には、保険期間中、所定の事由の発生（扶養者の死亡、介護状態の発生など）を条件に、将来の保険料の払い込みを免除する制度を有するものがある。

この**払込免除制度**では、所定の事由の発生以後、将来の保険料の払い込みを免除する。なお、払込免除後の契約は、通常年払契約として取り扱われ、以後毎年始期応当日ごとに年払保険料の払い込みがあったものとして取り扱われる（解約返れい金等も、年払契約のものが用いられる）。

数理上は、払込免除事由の発生確率（予定払込免除発生率）等に基づき、払込免除のために必要となるファンドを、あらかじめ保険料中に織り込んでいる。

(1) 営業保険料の算出（積立型基本特約保険料）

① 年払保険料

年払の積立型基本特約保険料をPとし、また**予定払込免除発生率**をdとする。収入および支出をそれぞれ計算する場合に、収入の計算では予定払込免除発生率を織り込んだ年金現価率$\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}$を用いる必要があるが、支出の計算では満期返れい金の支払いには払込免除の有無は関係がないために、予定払込免除発生率を考慮する必要はない。すなわち、

収入現価$= P\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}$

支出現価$= W\phi^{n}(1+\beta+\delta)$

である。収支相等の原則により、求める年払営業保険料は、

$$P = \frac{W\phi^{n}(1+\beta+\delta)}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}}$$

となる。

② 一時払保険料

収入・支出とも、保険料払込免除特約を付帯しない契約の場合と全く同じであるから、一時払営業保険料P'は、

$$P' = W\phi^{n}(1+\beta'+\delta')\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}$$

である。

(2) 責任準備金の計算

a. 保険年度末払戻積立金

① 年払契約

年払契約の積立保険料をP_Sとすると、上記(1)より、

$$P_S = \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}}$$

である。このとき、第t保険年度末払戻積立金${}_tV$を将来法を用いて求める。ただし、この場合に留意しなければならないのは、保険料払込免除が毎年dの割合で発生しているので、t年経過時点において$(1-d)^t$人の契約者からしか保険料が収入されない点である。

$$\begin{aligned}
{}_tV &= W\phi^{n-t} - P_S(1-d)^t\ddot{a}_{(q,d)\overline{n-t}|} \in \\
&= W\phi^{n-t} - W\phi^n(1-d)^t\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}} \\
&= W\phi^{n-t}\left\{1-\phi^t(1-d)^t\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}}\right\} \\
&= W\phi^{n-t}\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{t}|}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n}|}}
\end{aligned}$$

② 一時払契約

一時払契約の場合は、保険料払込免除特約を付帯しない契約と全く同じであるから、第t保険年度末払戻積立金${}_tV'$は、次のようになる。

$${}_tV' = W\phi^{n-t}\frac{\ddot{a}_{(q)\overline{t}|}}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}} + \frac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q)\overline{n}|}}\ddot{a}_{\overline{n-t}|}$$

b. 事業年度末払戻積立金

保険料払込免除特約を付帯しない契約の事業年度末払戻積立金に準じて、前述の保険年度末払戻積立金を用いて求めることができる。

① 年払契約

経過年数$t-\dfrac{m+1}{12}$年以上$t-\dfrac{m}{12}$年未満（mは0から11までの整数）に対する事業年度末払戻積立金は、

$${}_tV\phi^{\frac{2m+1}{24}}$$

となる。ここにおいて、1年未満の割引率については、すでに保険年度始に年

間保険料を収入しているので、保険料払込免除発生率dを加味する必要はない。

② 一時払契約

一時払契約の場合は、年払契約と同じである。

$${}_{t}V'\phi^{\frac{2m+1}{24}}$$

6.5.4 約款貸付

財形保険等を除くほとんどすべての積立保険には、保険約款の規定に基づき契約者に対して金銭の貸付けを行う機能が備わっている。これを約款貸付と呼ぶが、約款貸付には次の2種類がある。

(1) 保険料の振替貸付

保険料不払いの場合の失効防止策として、保険料の振替貸付制度(いわゆる自振貸付)がある。積立保険では、補償部分のほかに通常かなりの積立保険料部分があるため、これをファンドとして不払失効防止のための貸付けを行うことが可能である。

具体的な仕組みは次のようになっている。

① 保険料払込猶予期間の末日までに保険料の払い込みがない場合、あらかじめ反対の申し出がない限り、自動的に契約者に保険料相当額(積立部分も含む)を貸し付け、保険料の払い込みに充当する(保険料の積立部分・補償部分がともに貸付けの対象となる)。

② 貸付けは、解約返れい金等を担保とし、満期・失効・解約時までに返済のないときは、貸付金の元利合計額を返れい金と相殺する。

③ 貸付けの可否の判断は、貸付け時点において、未払いである保険料が払い込まれていたとした場合の解約返れい金と、貸し付ける保険料の次回保険料払込期日までの元利合計とを比較することによって行う。貸し付ける保

険料の元利合計が解約返れい金を上回る場合には、貸付けは行われず、契約は失効する。

(2) 契約者貸付

保険料の振替貸付が、貸付金の使途を保険料払い込みへの充当に限っているのに対し、使途をとくに限定しない貸付けの制度として契約者貸付がある。契約者貸付は、契約者にとっての保険商品の利便性を向上させるとともに、急な資金需要が生じたときなどに、契約を解約せずに資金調達を可能とするものであるから、解約防止の機能をあわせ持っているといえる。

具体的な仕組みは、次のようになっている。

① 契約者からの申し出により、解約返れい金の一定割合を限度として会社の定める範囲内で所要の資金を貸し付ける。

② 貸付けは、解約返れい金等を担保とし、満期・失効・解約時までに返済のないときは、貸付金の元利合計額を返れい金と相殺する。

③ 貸付金の返済がない場合、貸し付けた保険料の元利合計が、保険期間中に解約返れい金を上回った場合には、契約はその時点で失効する。

6.6 練習問題

1.　積立保険の一時払保険料の算出にあたり、全損失効したときに保険料分割払契約との公平性を確保するためにある配慮がされているが、これについて説明せよ。

2.　積立特約付帯の積立保険において、満期返れい金W、保険期間n年で、保険料払込免除特約付帯の年払契約の積立保険料Pを$P=\dfrac{W\phi^n}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n|}}}$とするとき、これにかかる第$t$保険年度末払戻積立金${}_tV$を将来法および過去法を用いて求め、それらが一致することを示せ。なおここで、Wは満期返れい金、ϕは予定契約消滅率qを考慮した現価率、$\ddot{a}_{(q,d)\overline{n|}}$は$q$および予定払込免除発生率$d$を考慮した期始払年金現価率とする。

練習問題解答

1．（略）

2．　払戻積立金の定義は、将来法による払戻積立金＝将来の支出現価－将来の収入現価であるが、保険料免除が毎年dの割合で発生しているため、t年経過時点においては当初契約者のうち、$(1-d)^t$人からしか保険料が収入されないことに留意すれば、

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= W\phi^{n-t} - P(1-d)^t\,\ddot{a}_{(q,d)\overline{n-t|}} \\
&= W\phi^{n-t} - W\phi^{n}(1-d)^t\,\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n|}}} \\
&= W\phi^{n-t}\left\{1-\phi^t(1-d)^t\,\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n|}}}\right\} \\
&= W\phi^{n-t}\,\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{t|}}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n|}}}
\end{aligned}
$$

となる。一方、過去法による払戻積立金＝過去の収入終価－過去の支出終価であるから、

$$
\begin{aligned}
{}_tV &= P\left\{\phi^{-t}+\phi^{-t+1}(1-d)+\phi^{-t+2}(1-d)^2+\cdots+\phi^{-1}(1-d)^{t-1}\right\}-0 \\
&= P\phi^{-t}\left\{1+\phi(1-d)+\phi^2(1-d)^2+\cdots+\phi^{t-1}(1-d)^{t-1}\right\} \\
&= P\phi^{-t}\,\ddot{a}_{(q,d)\overline{t|}} \\
&= W\phi^{n-t}\,\frac{\ddot{a}_{(q,d)\overline{t|}}}{\ddot{a}_{(q,d)\overline{n|}}}
\end{aligned}
$$

となり、将来法と過去法による払戻積立金が一致することが確かめられた。

第７章

保険料算出原理

第7章　保険料算出原理

7.1　保険料算出原理とは

市場のある金融商品の価格付けは、「無裁定」(手元資金ゼロから確実に正の超過収益を獲得することはできないこと)という条件を置くことにより、合理的な算出を行うことができる[1]。しかし、市場がない場合は、この手法は適用できず、リスク選好などを踏まえた他の方法によらなければならない。

保険料算出原理とは、市場がない保険商品の価格付けにおいて、将来の保険金の分布とリスクプレミアム(保険金の期待値に対して上乗せされる額)との対応関係を定めるものである。数学的には、将来の保険金を X (確率変数)として、X に対応する保険料を与える関数 $P(X)$ [2]を定めることであり、いくつかの種類の保険料算出原理が提案されている[3]。

以下では、保険金 X は連続型とし、特に断らない限り、$F(x), f(x), M(x), \mu, \sigma$ は、添字に用いた確率変数の分布関数、確率密度関数、積率母関数、期待値、標準偏差を表すものとする。

①　期待値原理

$$P(X) = (1+h)\mu_X \quad h > 0$$

将来の保険金の期待値を基礎として保険料を決定する方法であり、リスクプレミアムは、$h\mu_X$ である。リスクとの関係が明確に定まっていないが、簡便な方法であり、広く用いられている。

1　正確には、完備市場における価格付け。詳細は、金融工学に関する文献を参照。

2　この章では P は保険料とし、確率は Pr を用いる。

3　この章では、予定事業費などの付加保険料は扱わず、将来の保険金に対応する保険料のみを扱う。

② **分散原理**

$$P(X)=\mu_X+h\sigma_X^2 \quad h>0$$

将来の保険金の分散の一定割合 $h\sigma_X^2$ をリスクプレミアムとする方法である。

期待値と分散との単位が一致しておらず、リスクの大きさに対して高い感応度でリスクプレミアムを付加することとなる。

③ **標準偏差原理**

$$P(X)=\mu_X+h\sigma_X \quad h>0$$

将来の保険金の標準偏差の一定割合 $h\sigma_X$ をリスクプレミアムとする方法である。リスクを標準偏差で測るものであり、ポートフォリオ理論の延長として理解しやすい方法である。

④ **指数原理**

$$P(X)=\frac{\log M_X(h)}{h} \quad h>0$$

指数原理は、保険会社の効用関数として指数効用を仮定した場合に導かれる方法である。以下、指数効用から上式が導かれることを示しておく。

保険会社の効用関数を $u(x)$ とし、現在保有している資本を c とする。

保険販売を前提とすれば、保険会社の期待効用は、$E(u(c+P(X)-X))$ であり、これが保険を販売していないときの効用 $u(c)$ よりも大きくなるように $P(X)$ を定めるべきである。保険販売を前提とした期待効用 $E(u(c+P(X)-X))$ は $P(X)$ の増加関数であるので、$E(u(c+P(X)-X))$ と $u(c)$ が一致するときの値が保険料の下限値となる。

保険会社の効用関数が指数効用 $u(x)=-e^{-hx}$（h は正のパラメータ）であると仮定する。このとき、

$$\begin{cases} u(c)=-e^{-hc} \\ E(u(c+P(X)-X))=E(-e^{-h(c+P(X)-X)})=-e^{-hc}e^{-hP(X)}M_X(h) \end{cases}$$

であるので、

$$u(c)=E(u(c+P(X)-X)) \Leftrightarrow \quad 1=e^{-hP(X)}M_X(h) \quad \Leftrightarrow \quad P(X)=\frac{\log M_X(h)}{h}$$

となり、指数原理が導かれる。

⑤ パーセンタイル原理

$$P(X)=\min\{p \mid F_X(p)\geq 1-h\} \quad h>0$$

たとえば、$h=1\%$とすると、$P(X)$はXの分布の上側1%点となり、上側1%点と期待値との差がリスクプレミアムとなる。他の方法と異なり、ダウンサイドリスクのみを見ていることが特徴であり、リスクに対する必要資本という観点で保険料を捉えれば、理解しやすい方法である。

⑥ エッシャー原理[4]

$$P(X)=\frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})} \quad h>0$$

エッシャー原理は、指数効用を持つ複数の主体が保険料を支払って（受け取って）リスクを移転（引き受け）することを想定した場合に、均衡価格式として導かれる方法である[5]。

上式を変形すると、

$$P(X)=\frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}=E\left(\frac{e^{hX}}{E(e^{hX})}\cdot X\right)=\int x\cdot\frac{e^{hx}}{E(e^{hX})}\cdot f_X(x)\,dx$$

となることから、$X=x$に対するウエイトを$\dfrac{e^{hx}}{E(e^{hX})}$として算出した期待値であることがわかる。

⑦ ワンの保険料算出原理[6]

---

4 エッシャー原理を十分理解するためには、測度変換の知識が必要となる。測度変換については、参考文献1などを参照。

5 均衡価格式としての導出は、7.3を参照。

6 エッシャー原理と同様に、ワンの保険料算出原理を十分理解するためには、測度変

$$P(X) = E^{Q}(X)$$

ここで、右辺は、X の分布関数を $F_X^Q(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h)$（ここで、$\Phi$ は $N(0,1)$ の分布関数、h は正のパラメータ）に置き換えて算出される X の期待値である。

後述するように、この期待値は、

$$E^{Q}(X) = \int x \cdot e^{h\Phi^{-1}(F_X(x)) - \frac{h^2}{2}} \cdot f_X(x)\, dx$$

となることから、$X = x$ に対するウエイトを $e^{h\Phi^{-1}(F_X(x)) - \frac{h^2}{2}}$ として算出した期待値であることがわかる。

換の知識が必要となる。測度変換については、参考文献1などを参照。

7.2 保険料算出原理に求められる性質

前節では保険料算出原理として提案されている主な方法を紹介した。

ここでは、保険料算出原理に対して求められる性質を述べ、前節で紹介した方法がこれらを満たすか否かについて整理しておく。

① リスクプレミアムは非負

$$P(X) \geq \mu_X$$

保険料は保険金の期待値以上であるべき、というものであり、これを満たさない場合、保険会社は必ず破産することが導かれる。

② 保険料は、保険金の上限額以下

$$P(X) \leq \min\{p \mid F_X(p) = 1\}$$

保険料が最大損失額を超える場合、リスクを保有する者にとって、リスクを移転するインセンティブは生じない。

③ 平行移動不変性

任意の定数cに対して、$P(X+c) = P(X) + c$

この性質は、「リスクXを移転する保険に対して、状況によらず一定額を支払う（もしくは受け取る）条件が付加された場合、その額がそのまま保険料に反映される」というものである。

④ 正の同次性

任意の非負の定数cに対して、$P(cX) = cP(X)$

この性質は、「c倍の保険金を支払うならば、保険料もc倍」というものである。

市場のある金融商品の価格付けであれば、当然満たされるべき性質であり、これが満たされない場合は裁定機会が存在してしまう。しかし、保険の価格付

けに関しては、例えば、保険会社からのリスク移転を想定せず、資本に比して巨大なリスクを引き受ける場合を考えると、2倍のリスクを2倍の保険料で引き受けることは難しいと考えられる。これが成り立つべき性質であるか否かは、個々に議論が必要であろう。

⑤　独立なリスクに対する加法性

互いに独立なX,Yに対して、$P(X+Y)=P(X)+P(Y)$

市場のある金融商品の価格付けであれば、当然満たされるべき性質であり、独立なX,Yに対してのみではなく、任意のX,Yに対して加法性が満たされなければ裁定機会が存在することになるが、保険の価格付けに関して成り立つべき性質であるか否かは、正の同次性と同様に、個々に議論が必要であろう。

前節で紹介した方法がこれらの性質を満たしているか整理すると下表のようになる。一部については本章において説明しているが、本章で示されていないものについても、各自確認していただきたい。

【保険料算出原理が満たす性質】

	リスクプレミアムは非負	保険料は保険金の上限額以下	平行移動不変性	正の同次性	独立なリスクに対する加法性
期待値原理	○	×	×	○	○
分散原理	○	×	○	×	○
標準偏差原理	○	×	○	○	×
指数原理	○	○	○	×	○
パーセンタイル原理	×	○	○	○	×
エッシャー原理	○	○	○	×	○
ワンの保険料算出原理	○	○	○	○	×

7.3 エッシャー原理の性質

前節で述べたように、エッシャー原理 $P(X)=\dfrac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})}$ は、期待効用原理に基づく均衡価格の考え方に、リスクの独立性に関するある種の仮定を加えることで導かれる[7]。ここでは、導出の概要について説明しておく[8]。

指数効用を持つ複数の主体を $j=1,2,\cdots$ とし、それぞれの効用関数を

$$u_j(x)=-e^{-\lambda_j x}\quad(\lambda_j>0)$$

とする。主体 j が期初に保有する富を w_j 、主体 j が保有するリスクを X_j 、主体 j が移転するリスクを Y_j とするとき、均衡は、「期初に富 w_j を保有する各主体 j について、リスク Y_j を保険料 $P(Y_j)$ で移転することが最適」であり、数学的には次のように定義される。なお、②は $j=1,2,\cdots$ の中でリスク移転が閉じていることを示すものである。

$\{\{Y_j\},P\}$ が均衡

$\Leftrightarrow$ ① $E(-e^{-\lambda_j(w_j-X_j+Y-P(Y))})$ は $Y=Y_j$ で最大値をとる

かつ

② $\sum_j Y_j=0$

ここで、$P(X)$ はある確率変数 W を用いて $P(X)=E(WX)$ と表されると仮定し、$\{\{Y_j\},P\}$ が均衡であるという条件の下で、W を導くことを考える。このとき、

$$P(X+Y)=E(W(X+Y))=E(WX)+E(WY)=P(X)+P(Y)$$

---

7 効用理論の詳細については、7.5を参照。

8 詳細は参考文献2を参照。

であるので、加法性を仮定していることがわかる[9]。

任意の実数ε、任意の事象Aに対して$Y = Y_j + \varepsilon 1_A$（$1_A$は事象$A$で値1、それ以外で値0をとる確率変数）として表される確率変数Yを①に代入すると、$\{\{Y_j\}, P\}$が均衡であるという仮定より、

$$E(-e^{-\lambda_j(w_j - X_j + Y_j - P(Y_j))}) \geq E(-e^{-\lambda_j(w_j - X_j + (Y_j + \varepsilon 1_A) - P(Y_j + \varepsilon 1_A))})$$

$$\Leftrightarrow \quad E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)}) \leq E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j + \varepsilon 1_A - \varepsilon E(W 1_A))})$$

であり、$\varepsilon = 0$で右辺は最小値$E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)})$をとるはずである。

よって、$\dfrac{d}{d\varepsilon} E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j + \varepsilon 1_A - \varepsilon E(W 1_A))})\Big|_{\varepsilon=0} = 0$となるはずであるので、これを計算すると、

$$\frac{d}{d\varepsilon} E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j + \varepsilon 1_A - \varepsilon E(W 1_A))})\Big|_{\varepsilon=0} = E(-\lambda_j(1_A - E(W 1_A))e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad E(1_A e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)}) = E(1_A W E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)}))$$

となる。

上式が任意の事象Aに対して成り立つためには、

$$e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)} = WE(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)})$$

となる必要がある[10]。この式の両辺の期待値をとることにより、$E(W) = 1$であることがわかる。

上式右辺の$E(e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)})$を$C_j$と置くと、

$$e^{-\lambda_j(-X_j + Y_j)} = WC_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_j(X_j - Y_j) = \log W + \log C_j$$

---

[9] 逆に、$P(X)$にある種の加法性を仮定すると、ある確率変数Wを用いて$P(X)$は$P(X) = E(WX)$として表される。詳細は測度論的確率論の文献を参照。

[10] 一般に、任意の事象Aに対して$E(1_A X) = E(1_A Y)$が成り立つとき、$X = Y$が成り立つ。詳細は測度論的確率論の文献を参照。

$$\Leftrightarrow \quad X_j - Y_j = \frac{1}{\lambda_j}\log W + D_j \quad \text{ここで、} D_j = \frac{1}{\lambda_j}\log C_j$$

ここで、上式の両辺を j について合計すると、$Z = \sum_j X_j$, $\frac{1}{\lambda} = \sum_j \frac{1}{\lambda_j}$ として、

$$Z - \sum_j Y_j = \frac{1}{\lambda}\log W + \sum_j D_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda Z = \log W + E \quad \text{ここで、} E = \lambda \sum_j D_j$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\lambda Z} = WF \quad \text{ここで、} F = e^E$$

上式の両辺の期待値をとれば、$E(W) = 1$より、

$$E(e^{\lambda Z}) = F$$

であることがわかるので、

$$W = \frac{e^{\lambda Z}}{F} = \frac{e^{\lambda Z}}{E(e^{\lambda Z})}$$

が導かれる。

以上から、指数効用を前提とする均衡価格式として、

$$P(X) = E\left(\frac{Xe^{\lambda Z}}{E(e^{\lambda Z})}\right) = \frac{E(Xe^{\lambda Z})}{E(e^{\lambda Z})}$$

が導かれた。

エッシャー原理は、さらに次の仮定を置くことにより導かれる。

X と $Z - X$ は独立

直感的には、全てのリスクの合計を表す Z に対して、X は十分小さい、というものである。

このとき、

$$\frac{E(Xe^{\lambda Z})}{E(e^{\lambda Z})} = \frac{E(Xe^{\lambda(X+(Z-X))})}{E(e^{\lambda(X+(Z-X))})} = \frac{E(Xe^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})}\frac{E(e^{\lambda(Z-X)})}{E(e^{\lambda(Z-X)})} = \frac{E(Xe^{\lambda X})}{E(e^{\lambda X})}$$

となり、エッシャー原理が導かれる。

次に、エッシャー原理のリスクプレミアムが正であることを確認しておく。

$$P(X) = \frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})} = \frac{E(X)E(e^{hX}) + Cov(X, e^{hX})}{E(e^{hX})} = E(X) + \frac{Cov(X, e^{hX})}{E(e^{hX})}$$

であるので、$\dfrac{Cov(X, e^{hX})}{E(e^{hX})}$ がリスクプレミアムであり、$h > 0$ より e^{hx} は x の単調増加関数であることから、この値は正値となることが確認できる。(練習問題4)

また、

$$P(X) = \frac{E(Xe^{hX})}{E(e^{hX})} = \frac{M'_X(h)}{M_X(h)} = (\log M_X(h))'$$

であることから、h が小さいときには、$P(X) \cong \dfrac{\log M_X(h)}{h}$ となり、指数原理で近似されることがわかる。

なお、X が対数正規分布に従う場合など、X の積率母関数が存在しない場合には、エッシャー原理による算出値は存在しない。対数正規分布は損害額分布として用いられることが多い確率分布であるため、対数正規分布のエッシャー原理が存在しないことは、エッシャー原理の弱点となっている。

7.4 ワンの保険料算出原理の性質

まず、ワンの保険料算出原理 $P(X)=E^Q(X)$（$F_X^Q(x)=\Phi(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)$）の積分表現、

$$E^Q(X)=\int x\cdot e^{h\Phi^{-1}(F_X(x))-\frac{h^2}{2}}\cdot f_X(x)\,dx$$

を導出しておく。

$F_X^Q(x)=\Phi(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)$ の両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned}
f_X^Q(x)&=\frac{d}{dx}\Phi(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)\\
&=\phi(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)\cdot\frac{d}{dx}(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)
\end{aligned}$$

ここで、ϕ は $N(0,1)$ の確率密度関数

$$\begin{aligned}
&=\phi(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)\cdot\left\{\frac{1}{\phi(\Phi^{-1}(F_X(x)))}\cdot f_X(x)\right\}\\
&=\frac{\phi(\Phi^{-1}(F_X(x))-h)}{\phi(\Phi^{-1}(F_X(x)))}\cdot f_X(x)\\
&=\frac{e^{-(k-h)^2/2}/\sqrt{2\pi}}{e^{-k^2/2}/\sqrt{2\pi}}\cdot f_X(x) \qquad \text{ここで、} k=\Phi^{-1}(F_X(x))\\
&=e^{kh-\frac{h^2}{2}}f_X(x)
\end{aligned}$$

となるので、この確率密度関数を用いれば、

$$P(X)=\int x\cdot e^{h\Phi^{-1}(F_X(x))-\frac{h^2}{2}}\cdot f_X(x)\,dx$$

が導かれる。

$e^{h\Phi^{-1}(F_X(x))-\frac{h^2}{2}}$ は x の単調増加関数であり、また、$E\left(e^{h\Phi^{-1}(F_X(X))-\frac{h^2}{2}}\right)=1$ であるので（練習問題5）、エッシャー原理と同様に、リスクプレミアムは正であることを確認することができる。

次に、ワンの保険料算出原理についても、指数効用を前提とする均衡価格として導くことができることを示しておく。

指数効用を前提とする均衡価格式を用いれば、

$$P(X)=\frac{E(Xe^{\lambda Z})}{E(e^{\lambda Z})}=\frac{E\left(Xe^{\lambda\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}\cdot\sigma_Z+\mu_Z\right)}\right)}{E\left(e^{\lambda\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}\cdot\sigma_Z+\mu_Z\right)}\right)}$$

$$=\frac{E\left(Xe^{\lambda\sigma_Z\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)}\right)}{E\left(e^{\lambda\sigma_Z\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)}\right)}=\frac{E(Xe^{\lambda_0 Z_0})}{E(e^{\lambda_0 Z_0})} \tag{7.1}$$

となる。ここで、$\lambda_0=\lambda\sigma_Z,\ Z_0=\dfrac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$（$Z_0$は、$Z$を正規化した平均0、分散1の確率変数）である。

Xの分布関数$F_X(x)$は逆関数を持つものと仮定し、$V=\Phi^{-1}(F_X(X))$とすると、

$$\Pr(V\le v)=\Pr(\Phi^{-1}(F_X(X))\le v)=\Pr(F_X(X)\le\Phi(v))=\Pr(X\le F_X{}^{-1}(\Phi(v)))$$
$$=F_X(F_X{}^{-1}(\Phi(v)))=\Phi(v)$$

であるので、Vは$N(0,1)$に従う。

ここで、VとZ_0は相関ρの2変量標準正規分布に従うと仮定する。

$Y=Z_0-\rho V$とすると、(V,Y)は2変量正規分布に従う確率変数であり、

$$Cov(V,Y)=E(V(Z_0-\rho V))=\rho-\rho=0$$

より、VとYは独立であることがわかる。また、XはVの関数$X=F_X{}^{-1}(\Phi(V))$であるので、VとYは独立であることより、XとYが独立であることもわかる。

よって、$Z_0=Y+\rho V$を(1)式に代入すれば、

$$\frac{E(Xe^{\lambda_0 Z_0})}{E(e^{\lambda_0 Z_0})}=\frac{E(Xe^{\lambda_0(Y+\rho V)})}{E(e^{\lambda_0(Y+\rho V)})}=\frac{E(Xe^{\lambda_0\rho V})}{E(e^{\lambda_0\rho V})}=\frac{E(Xe^{\theta V})}{E(e^{\theta V})}$$

となる。ここで、$\theta=\lambda_0\rho$である。

Vが$N(0,1)$に従うこと、および$X=F_X{}^{-1}(\Phi(V))$を用いると、

$$\frac{E(Xe^{\theta V})}{E(e^{\theta V})} = \frac{E(F_X{}^{-1}(\Phi(V)) \cdot e^{\theta V})}{e^{\theta^2/2}} = \int e^{-\theta^2/2} \cdot F_X{}^{-1}(\Phi(v)) \cdot e^{\theta v} \cdot \phi(v)\, dv$$

であり、$x = F_X{}^{-1}(\Phi(v))$ とおくと、$v = \Phi^{-1}(F_X(x))$ 、$f_X(x)dx = \phi(v)dv$ であるので、

$$\int e^{-\theta^2/2} \cdot F_X{}^{-1}(\Phi(v)) \cdot e^{\theta v} \cdot \phi(v)\, dv = \int x \cdot e^{\theta\Phi^{-1}(F_X(x)) - \theta^2/2} \cdot f_X(x)\, dx$$

となる。これは、ワンの保険料算出原理を確率密度関数で表現したものであるので、$P(X) = E^Q(X)$（$F_X^Q(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F_X(x)) - h)$）であることがわかる。

ワンの保険料算出原理のリスクプレミアムが正であることは、次のように確認することもできる。

$F_X^Q(x)$ の定義より、$\Phi^{-1}(F_X^Q(x)) = \Phi^{-1}(F_X(x)) - h < \Phi^{-1}(F_X(x))$ であるので、すべての x に対して $F_X^Q(x) < F_X(x)$ が成立する。

ここで、X の期待値 μ_X を分布関数を用いて表現した式、

$$\begin{aligned}\mu_X &= E(X_+) - E(X_-) \quad (X_+ = \max\{X,0\}, X_- = -\min\{X,0\}) \\ &= \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\, dx\end{aligned}$$

を用いて考えれば、

$$\begin{aligned}\mu_X &= \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\, dx \\ &< \int_0^\infty (1 - F_X^Q(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 F_X^Q(x)\, dx = E^Q(X)\end{aligned}$$

が導かれる。

X が $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ に従う場合、$F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)$ であるので、

$$F_X^Q(x) = \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)\right) - h\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} - h\right) = \Phi\left(\frac{x - (\mu_X + h\sigma_X)}{\sigma_X}\right)$$

よって、X が $N(\mu_X + h\sigma_X, \sigma_X^2)$ に従うと考えて期待値をとったものが保険料 $P(X)$ であるため、

$$P(X) = \mu_X + h\sigma_X$$

つまり、標準偏差原理と一致する。

X が $LN(\mu,\sigma^2)$ に従う場合、$F_X(x)=\Phi\left(\dfrac{\log x-\mu}{\sigma}\right)$ であるので、

$$F_X^Q(x)=\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)\right)-h\right)=\Phi\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}-h\right)=\Phi\left(\frac{\log x-(\mu+h\sigma)}{\sigma}\right)$$

よって、X が $LN(\mu+h\sigma,\sigma^2)$ に従うと考えて期待値をとったものが保険料 $P(X)$ であるため、

$$P(X)=e^{(\mu+h\sigma)+\frac{\sigma^2}{2}}=e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})+h\sigma}=\mu_X e^{h\sigma}$$

となる。

7.5 期待効用原理

期待効用原理とは、不確実性を持つ対象(確率変数)の選択に関して、期待値そのものの大小ではなく、「効用」の期待値の大小によって選好が定まると考えるものである。効用とは、保有する富 x に対して、選好の度合いを表すものとして設定される値 $u(x)$ (この $u(x)$ を効用関数という。)であり、つまり、確率変数 X の選択に関して、$E(X)$ の大小ではなく、$X=x$ に対する効用 $u(x)$ を用いて、$u(X)$ の期待値 $E(u(X))$ の大小によって選好が定まると考えるものである。

効用 $u(x)$ は、富 x が大きいほど大きいと考えられるので、

$$\text{任意の } x \text{ に対して、} \frac{du(x)}{dx} > 0$$

という仮定を置くことができる。(この節において、効用関数 $u(x)$ はすべてこの仮定を満たすものとする。)

効用が単に富 x に対する選好の序列を表現するだけのものであれば、$\dfrac{du(x)}{dx} > 0$ を満たす任意の関数 $u(x)$ が効用関数になりうるが、期待効用原理が妥当と考えられる効用関数が存在することは必ずしも自明ではない。

期待効用原理が妥当と考えられる効用関数 $u(x)$ が存在することは、いくつかの仮定を置くことによって導くことができる。ここでは4つの仮定を置いて考える。

なお、簡単のため、[0,1]上に値をとる確率変数の選好を考える。([0,1]上の実数も確率1でその値をとる確率変数として考える。)

X よりも Y を選好することを $X \prec Y$ で表し、X と Y が無差別(同等)であることを $X \sim Y$ で表すものとする。さらに、「$\prec$」および「$\sim$」は次の性質を満たすものとする。これは選好関係であることから明らかであろう。

任意のX,Yに対して、$X \prec Y$、$X \sim Y$、$Y \prec X$のいずれかが成り立つ。

$X \prec Y$かつ$Y \prec Z$ならば、$X \prec Z$が成り立つ。

$X \sim Y$かつ$Y \sim Z$ならば、$X \sim Z$が成り立つ。

仮定① 任意の実数$x, y \in [0,1]$に対して、$x < y$と$x \prec y$は同値である。

仮定② 任意の実数$x \in [0,1]$に対して、$\{0,1\}$に値をとる確率変数Xが存在して、$x \sim X$となる。

仮定③ $\{0,1\}$に値をとる任意の確率変数X,Yに対して、$X \prec Y$と$\Pr(X=1) < \Pr(Y=1)$は同値である。

仮定④ ある確率変数Zが存在し、任意の実数zに対して、$X|_{Z=z} \sim Y|_{Z=z}$であるならば、$X \sim Y$が成り立つ。

仮定④は、確率変数X,Yに対して状況を場合分けし、すべての状況においてXとYが同等であるならば、XとYは同等であることを示しているものである。

ここで、

$$u(x) = (\, x\text{と同等な}\{0,1\}\text{に値をとる確率変数}X\text{の}\Pr(X=1)\text{の値}\,)$$

として$u(x)$を定義する。

このようなXが存在することは②から、このようなXの1をとる確率が一意に定まることは③からわかる。また。①②③から、$u(x)$は単調増加関数であることがわかる。

$[0,1]$上に値をとる任意の確率変数Xに対して、$X = x$という条件の下で、

$$X_0|_{X=x} = \begin{cases} 0 & 1-u(x) \\ 1 & u(x) \end{cases}$$

となる確率変数X_0を定義すると、$u(x)$の定義および④より$X_0 \sim X$であり、

$$\Pr(X_0 = 1) = E(\Pr(X_0 = 1 \mid X)) = E(u(X))$$

また、X_0は$\{0,1\}$にのみ値をとるので、

$$\Pr(X_0 = 0) = 1 - E(u(X))$$

よって、

$$X_0 = \begin{cases} 0 & 1 - E(u(X)) \\ 1 & E(u(X)) \end{cases}$$

であるので③より

$$X \prec Y \quad \Leftrightarrow \quad X_0 \prec Y_0 \quad \Leftrightarrow \quad E(u(X)) < E(u(Y))$$

を満たしていることがわかる。

（このとき、明らかに、$X \sim Y \Leftrightarrow E(u(X)) = E(u(Y))$ である。）

つまり、4つの仮定を満たす選好に関しては、効用関数 $u(x)$ によって期待効用 $E(u(X))$ の大小から選好を評価できることがわかる。

なお、ここでは $u(x)$ を

$$u(x) = (\, x \text{と同等な} \{0,1\} \text{に値をとる確率変数} X \text{の} \Pr(X = 1) \text{の値}) \tag{7.2}$$

として与えて、

$$X \prec Y \Leftrightarrow E(u(X)) < E(u(Y)) \tag{7.3}$$

を導いたが、(7.3)を満たす効用関数は、(7.2)で与えられる $u(x)$ を用いて $au(x) + b$ と表せるものに限られる。

これは、$v(x)$ を(7.3)を満たす効用関数としたとき、$x \sim X_0 = \begin{cases} 0 & 1 - u(x) \\ 1 & u(x) \end{cases}$ より、

$$v(x) = E(v(X_0)) = (1 - u(x))v(0) + u(x)v(1) = (v(1) - v(0))u(x) + v(0)$$

となることから明らかである。

次にリスク選好によって効用関数がどのような形状となるかを考える。

まず、リスク回避的である場合、つまり、任意の確率変数 X に対して、X の効用 $E(u(X))$ が $E(X)$ の効用 $u(E(X))$ 以下である場合について考える。

このとき、任意の $x < y$ に対して、$X = \begin{cases} x & p \\ y & 1 - p \end{cases}$ として定義される確率変数 X を考えると、

$$E(u(X)) = pu(x) + (1-p)u(y)$$
$$u(E(X)) = u(px + (1-p)y)$$

であるので、

$$pu(x) + (1-p)u(y) \le u(px + (1-p)y)$$

つまり、$u(x)$は凹関数となる。

逆に、$u(x)$が凹関数の場合は、Jensen の不等式から$E(u(X)) \le u(E(X))$が成り立つため、リスク回避的であることと、$u(x)$が凹関数であることは同値であることがわかる。また、$u(x)$が凹関数であることと、$\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} \le 0$は同値であるので、

$$\text{リスク回避的} \;\Leftrightarrow\; u(x)\text{が凹関数} \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2u(x)}{dx^2} \le 0$$

となることがわかる

同様に、リスク愛好的であること、つまり、任意の確率変数Xに対して、$E(X)$の効用$u(E(X))$がXの効用$E(u(X))$以下であることと、$u(x)$が凸関数であることは同値となり、$u(x)$が凸関数であることと、$\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} \ge 0$は同値であるので、

$$\text{リスク愛好的} \;\Leftrightarrow\; u(x)\text{が凸関数} \;\Leftrightarrow\; \frac{d^2u(x)}{dx^2} \ge 0$$

となることがわかる

また、リスク中立的であること、つまり、任意の確率変数Xに対して、$E(X)$の効用$u(E(X))$とXの効用$E(u(X))$が同じであることと、$u(x)$が一次関数であることは同値となる。

例） 効用関数が$u(x)$である人が期初にwの富を持っている。保有しているリスクXに対し、リスクを他者に移転するためにいくらまでであれば保険料Pを支払うことができるかを考える。

保険を買わない場合の効用　　$E(u(w-X))$

保険を買う場合の効用　　$E(u(w-P))=u(w-P)$

上の2式が等しい場合が保険料の上限を与える。つまり次式を満たす P_0 を考えれば良い。

$$E(u(w-X))=u(w-P_0) \tag{7.4}$$

(7.4)式の左辺の $u(x)$ を展開して近似すると、

$$E(u(w-X))\cong E\left(u(w-\mu_X)+(\mu_X-X)u'(w-\mu_X)+\frac{(\mu_X-X)^2}{2}u''(w-\mu_X)\right)$$

$$=u(w-\mu_X)+\frac{u''(w-\mu_X)}{2}\cdot\sigma_X^2$$

同様に(7.4)式の右辺の $u(x)$ を展開して近似すると、

$$u(w-P_0)\cong u(w-\mu_X)+(\mu_X-P_0)u'(w-\mu_X)$$

よって、

$$u(w-\mu_X)+\frac{u''(w-\mu_X)}{2}\cdot\sigma_X^2\cong u(w-\mu_X)+(\mu_X-P_0)u'(w-\mu_X)$$

$$P_0\cong\mu_X-\frac{\sigma_X^2}{2}\cdot\frac{u''(w-\mu_X)}{u'(w-\mu_X)}$$

となる。ここで、$r(x)=-\dfrac{u''(x)}{u'(x)}$ とすれば、

$$P_0\cong\mu_X+\frac{\sigma_X^2}{2}\cdot r(w-\mu_X) \tag{7.5}$$

と表現できる。　■

ここで、(7.5)式について考えてみると、リスクに対しての期待値を超える分が $\dfrac{\sigma_X^2}{2}\cdot r(w-\mu_X)$ であり、$r(x)$ が期待値を超える額を決定していることがわかる。効用関数は一次変換で表されるものを除いて一意であることから、この $r(x)$ は一意に定まる。この $r(x)$ は、Arrow-Pratt の絶対危険回避度と呼ばれており、この水準が高ければリスク回避度は高いことになる。

最後に、実務において用いられることが多い効用関数を示しておく。

指数効用　　$u(x) = -e^{-hx} \quad h > 0$

$u''(x) = -h^2 e^{-hx} < 0$ であるので、リスク回避的な効用関数であり、

$r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = -\dfrac{-h^2 e^{-hx}}{he^{-hx}} = h$ であることから、リスク回避度は一定であることがわかる。

対数効用　　$u(x) = \log x$

$u''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ であるので、リスク回避的な効用関数であり、

$r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = -\dfrac{-1/x^2}{1/x} = \dfrac{1}{x}$ であることから、リスク回避度は富の増大とともに減少することがわかる。

べき効用　　$u(x) = x^h \quad x > 0,\ 0 < h < 1$

$u''(x) = h(h-1)x^{h-2} < 0$ であるので、リスク回避的な効用関数であり、

$r(x) = -\dfrac{u''(x)}{u'(x)} = -\dfrac{h(h-1)x^{h-2}}{hx^{h-1}} = \dfrac{1-h}{x}$ であることから、リスク回避度は富の増大とともに減少することがわかる。

7.6 練習問題

1．指数原理による保険料算出については、保険料を2段階で求めることができる。つまり、ある確率変数Yを用いて$Y=y$という条件の下でのXの保険料$P(X\mid Y=y)$を求め、次に$Y=y$のときに$P(X\mid Y=y)$を保険金として支払う保険の保険料を求めることによりを算出することができる。まとめて表現すれば、

$$P(X)=P(P(X\mid Y))$$

が成り立つ。これを示せ。

2．効用関数が$u(x)=-e^{-hx}$かつ期初の富がwである人が保有しているリスクXに対して支払う保険料の上限P_0を、

$$E(u(w-X))=u(w-P_0)$$

を解くことによって求めよ。（Xの積率母関数$M_X(x)$を用いて表せ。）

3．指数原理による保険料算出は、Xが$N(\mu_X,\sigma_X^2)$に従うとき、分散原理となることを示せ。

4．$g(x)$が単調増加関数であるとき、任意の確率変数Xに対して$Cov(X,g(X))\geq 0$であることを示せ。

5．$F_X(x)$が逆関数を持つとき、$E\left(e^{h\Phi^{-1}(F_X(X))-\frac{h^2}{2}}\right)=1$を示せ。

6．エッシャー原理による保険料算出は、Xが$N(\mu_X,\sigma_X^2)$に従うとき、分散原理になることを示せ。

7．ワンの保険料算出原理は、平行移動共変性、正の同次性を満たすことを示せ。

8． パーセンタイル原理は、正の同次性を満たすことを示せ。

[参考文献]

1． 木島 正明、田中 敬一著『資産の価格付けと測度変換』(朝倉書店)

2． Bühlmann,H.[1980], "An Economic Premium Principle", ASTIN Bulletin, Vol.11, pp.52-60

3． Wang,S.S.[2002], "An Universal Framework for Pricing Financial and Insurance Risks", ASTIN Bulletin, Vol.32, No.2, pp.52-60

4． 榊原 茂樹、浅野 幸弘、青山 護著、日本証券アナリスト協会編『証券投資論』(日本経済新聞社)

5． 『損保 付録C 確率論的アプローチによる保険負債の時価評価』(日本アクチュアリー会)

6． 『金融工学に関連する数理的基礎研究PT報告書』(保険数理研究部会)

練習問題解答

1．

$$P(P(X \mid Y)) = \frac{\log E(\exp(h(\log E(e^{hX} \mid Y)/h)))}{h} = \frac{\log E(E(e^{hX} \mid Y))}{h}$$

$$= \frac{\log E(e^{hX})}{h} = \frac{\log M_X(h)}{h} = P(X) \quad ■$$

2．

$$E(u(w-X)) = E(-e^{-h(w-X)}) = -e^{-hw}E(e^{hX}) = -e^{-hw}M_X(h)$$

$$u(w-P_0) = -e^{-h(w-P_0)} = -e^{-hw}e^{hP_0}$$

よって、$E(u(w-X)) = u(w-P_0)$

$$\Leftrightarrow \quad -e^{-hw}M_X(h) = -e^{-hw}e^{hP_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad P_0 = \frac{\log M_X(h)}{h} \quad ■$$

3．

$$P(X) = \frac{\log M_X(h)}{h} = \frac{\mu_X h + \sigma_X^2 h^2/2}{h} = \mu_X + \frac{h}{2} \cdot \sigma_X^2 \quad ■$$

4．　$g(x)$ が単調増加関数であるとき、

$$E((X-Y)(g(X)-g(Y))) \geq 0$$

であり、Y を X と独立に同じ分布に従う確率変数とすると、

$$\begin{aligned} E((X-Y)(g(X)-g(Y))) &= E(X \cdot g(X) - X \cdot g(Y) - Y \cdot g(X) + Y \cdot g(Y)) \\ &= 2(E(X \cdot g(X)) - E(X)E(g(X))) \\ &= 2Cov(X, g(X)) \end{aligned}$$

であるので、$Cov(X, g(X)) \geq 0$ ■

5．

$$\Pr(\Phi^{-1}(F_X(X)) \leq x) = \Pr(F_X(X) \leq \Phi(x)) = \Pr(X \leq F_X{}^{-1}(\Phi(x)))$$

$$= F_X(F_X{}^{-1}(\Phi(x))) = \Phi(x)$$

であるので、$\Phi^{-1}(F_X(X))$ は $N(0,1)$ に従う。

$Z=\Phi^{-1}(F_X(X))$ とすれば、

$$E\left(e^{h\Phi^{-1}(F_X(X))-\frac{h^2}{2}}\right)=E\left(e^{hZ-\frac{h^2}{2}}\right)=e^{-\frac{h^2}{2}}M_Z(h)=e^{-\frac{h^2}{2}}e^{\frac{h^2}{2}}=1 \quad ■$$

6.　10ページの式から、$P(X)=(\log M_X(h))'=\mu_X+h\sigma_X^2$　■

7.　$Y=X+c$ とする。

Y の分布関数 $F_Y(y)$ は、

$$F_Y(y)=\Pr(Y\le y)=\Pr(X\le y-c)=F_X(y-c)$$

と表すことができる。

よって、

$$F_Y^Q(y)=\Phi(\Phi^{-1}(F_Y(y))-h)=\Phi(\Phi^{-1}(F_X(y-c))-h)=F_X^Q(y-c)$$

であるので、

$$P(Y)=\int y\,dF_Y^Q(y)=\int(x+c)\,dF_X^Q(x)=c+P(X)$$

次に、$Y=cX$ とする。

上記の議論と同様に $F_Y(y)=F_X\left(\frac{y}{c}\right)$ であり、$F_Y^Q(y)=F_X^Q\left(\frac{y}{c}\right)$ であるので、

$$P(Y)=\int y\,dF_Y^Q(y)=\int cx\,dF_X^Q(x)=cP(X) \quad ■$$

8.

$$x\in\{p\mid F_X(p)\ge 1-h\}\Leftrightarrow F_X(x)\ge 1-h$$

$$cx\in\{p\mid F_{cX}(p)\ge 1-h\}\Leftrightarrow F_{cX}(cx)\ge 1-h\Leftrightarrow F_X(x)\ge 1-h$$

よって、$x\in\{p\mid F_X(p)\ge 1-h\}\Leftrightarrow cx\in\{p\mid F_{cX}(p)\ge 1-h\}$ であるので、

$$p_0=\min\{p\mid F_X(p)\ge 1-h\}\Leftrightarrow cp_0=\min\{p\mid F_{cX}(p)\ge 1-h\} \quad ■$$

第８章

危険理論の基礎

第8章　危険理論の基礎

8.1　危険理論の概要

8.1.1　危険理論の目的

保険会社、特に損害保険会社の経営においては、事業成績が毎年変動し、その変動が非常に大きなものになることがあり、しかもこの変動を前もって予測することができないという特徴がある。いわば、保険事業は決定論的な事業ではなく、確率論的な事業であるといえる。もちろん他の事業分野においても確率的要素は存在しているものの、損害保険においては、この確率的要素が中心的問題なので、保険事業は偶然性の上に成り立っていると言われている。

損害保険会社の目的は、個人あるいは企業に降りかかる偶発的な損失を、保険料という報酬と引き換えに肩代わりすることにある。たとえば、工場物件における火災リスクを考えてみると、ここでの火災による損失は、一般的には非常に確率的なものである。もし火災事故がなければ損失は0となる。逆に、火災により工場の設備すべてが破壊されたとすれば、その損失は莫大なものとなる。その他、あまり大きくない損失をもたらす中小規模の火災は、頻繁に発生しているのが現実である。しかしながら、保険会社に保険をつけることにより、これらの設備について生じる火災損害は、火災保険料という決定論的な費用に転嫁され、その偶然性は保険会社の問題に移ってしまう。

一方、保険会社は、多数の保険契約を引き受けているので、保険会社のクレームコストの総額は大なり小なり平準化されて、偶然性も減少している。さらには、この偶然性による危険は、再保険を利用することによってもまた減少させることが可能である。すなわち、前述の企業が保険会社との間で行ったことと全く同様に、保険会社は、再保険という取り引きを通じて、再保険会社に偶然性による危険を肩代わりさせることになる。

危険理論とは、保険事業における偶然性、すなわちクレームの発生とその額の確率変数としての性質によって、保険事業に生じる変動の規模とその特徴を研究するものである。この理論の目的は、保険会社にこれらの変動をコントロールするために必要な手法を提供することにある。保険会社の経営者にとっては、再保険の手配、あるいは自己資本の拡充などの政策決定の際にこれらの手法が有用となる。

8.1.2 危険理論の応用範囲

(1) 再保険分野

再保険の概念がすべて保険リスクの変動をコントロールすることに関連している以上、危険理論が特に再保険の分野に応用されることは当然のことである。

再保険者は、再保険取り引きによって通常平均して利潤を得るが、その利潤は、再保険者が負担する変動危険の見合いとなるものである。この利益が出再会社によって拠出されるものである以上、出再会社の経営面で再保険上決定すべき中心問題は、どの程度の平均正味再保険コストで潜在的な変動危険を、どの程度出再するかということである。

出再会社の危険変動は、その大きさに応じて3種類に大別することができる。第1種の危険変動は、非常に大きいため、これに対する適当な再保険手段を採らなければ、会社の存続が危機にさらされる種類のものである。第2種の危険変動は、第1種よりも小さく、したがって会社を重大な危機に陥れるようなことがないにしても、経営にとって望ましくないために、これを除去した方がよいと考える種類のものである。第3種の危険変動は、保険事業の性質に密着したものであり、それを再保険に出すのは、不必要な支出をすることになる種類のものである。保有されたポートフォリオの将来の危険変動についての潜在的な程

度と結果を予測することが危険理論の手法である。

一方再保険会社も保険会社であり、危険変動は経営上望ましいものではない以上、変動要素の特に大きい危険の再保険料については、他の再保険契約よりも高い安全割増を貰わなければならない。また、超過損害額再保険契約やストップロス再保険契約[1]において、再保険料を計算する際にも危険理論を用いることができる。

(2) 支払能力

支払能力の問題は、他の一般事業の場合と異なる保険事業固有の特色の一つである。ただし、支払能力の概念は、それを考える者の立場によって異なる。たとえば、保険行政を司る立場からすれば、被保険者の保護を第一義に考え、保険会社の存続については二の次となる場合が多い。しかしながら、保険会社の経営者にとっては、会社の恒久的な発展ということの方が、重大関心事である。この両方の目的に対して、会社の実際の支払能力を知るために危険理論の手法を利用することができる。

保険行政の立場としては、大災害時でも保険会社に十分の保険金支払能力があることを保証することがその目的であり、これは再保険の項で述べた破産の問題である。

一方、保険会社の経営者としては、現在の保険ポートフォリオの実態から、今後5年あるいは10年間どの程度の支払能力を保てるかを、正確に把握しておく必要があり、これも古典的な危険理論の問題として解決することができる。また、新しい再保険手配を考える場合に、現在の会社の支払能力から見て、どのような方法を採れば効果的かを判断するために、危険理論を利用することが

[1] 第9章参照。

可能である。

(3) アンダーライティング

元受レベルのアンダーライティング政策において非常に重要な問題は、保険料率水準である。保険の引き受けにおいては、対象となる物件あるいは被保険利益に見合った保険料率を算定して、それを使用することが望ましいことではあるが、たとえば自然災害リスクのように、事故発生率はきわめて低いものの、事故が発生した場合には損害額が巨大となるリスクについては、料率算定が必ずしも容易に行えない場合もある。このようなリスクの引き受けにあたっては、危険理論の手法を用いることにより、リスクの評価を行い、再保険手配や会社の引受能力など総合的な判断のもとに、引き受けの可否ならびに引受金額や保険料率を決定することができる。

8.2 危険理論の基礎

8.2.1 モデル化の対象

危険理論におけるモデル化の対象として一般的に取り上げられるのは、ある保険種目（もしくは保険商品）におけるクレーム総額の時間的推移、および保険会社における**サープラス**（資産から負債を控除した後の剰余。期初において保険会社が留保している額に、保険引受に伴う収入を加え、保険引受に伴う支出を控除したもの）の時間的推移である。

前述のように、危険理論の目的は、保険事業における危険（リスク）の変動をコントロールするための理論的基盤を提供することである。第2章において扱った「クレームの分析」もその一つであるが、長期における保険事業の存続を問題にする場合、これでは不十分である。この場合に問題とすべきは、保険会社の最終的な財務状態ではなく、一定の期間（たとえば1年）ごとの各時点での財務状態である。そのために、クレーム総額の時間的推移やサープラスの時間的推移の数学的モデルを構築したうえで、「破産」を数学的に定義し、その統計的振る舞いを分析していくことが必要となる。この数学的モデルとして利用されるのが、確率過程（stochastic process）である。

以下では、危険理論において考察の対象とするいくつかの確率過程および破産確率の定義について概説する。

8.2.2 危険過程

一般に、時刻[2]を表すパラメータtを持つ確率変数の列$\{X_t\}_{t \in T}$を**確率過程**

2 確率過程におけるパラメータtは、必ずしも時刻に限定する必要はないものの（たと

と呼ぶ。ここで、T は、時刻 t の動く範囲を表す集合である。また、確率過程 $\{X_t\}$ の一つの実現値 x_t（t を引数とする実数値関数）を**見本関数**という。

時間 t の動く範囲 T は、連続的区間である必要はなく、一般に、T が実数の区間である確率過程を**連続時間型**、離散集合である確率過程を**離散時間型**という。

以降では確率過程によるモデルを用いて、

① クレーム件数の時間的推移を表す「クレーム件数過程」

② クレーム総額の時間的推移を表す「クレーム総額過程」

③ サープラスの時間的推移を表す「サープラス過程」

（①～③をまとめて**危険過程**と呼ぶことにする）について考察する。

まず、以下で用いる記号の定義をしておく。

N_t ：時点0から時点 t までに発生したクレームの件数（確率変数）

X_n ：時点0から n 件目に発生したクレーム1件の額（確率変数）

$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$

：時点0から時点 t までのクレーム総額（確率変数）

$\{N_t\}$ を**クレーム件数過程**、$\{S_t\}$ を**クレーム総額過程**もしくは**クレーム累計過程**という。また、用語の使い分けを明確にするため、1件のクレームの額 X_n を**クレーム額**、クレーム額の累計 S_t を**クレーム総額**もしくは**クレーム累計額**と呼ぶことにする。

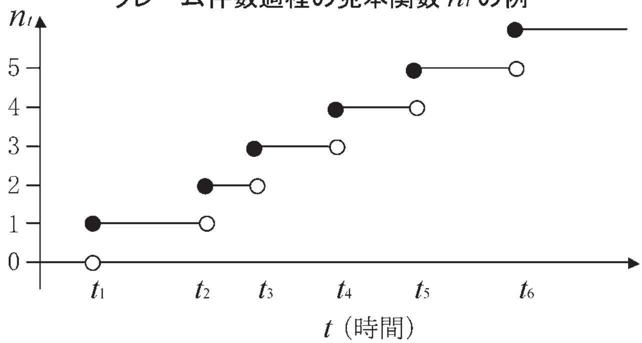
えばベルヌーイ試行における試行の順番（この場合は離散の変数となる）の場合もある）、実務における使用頻度等を考慮して、ここでは時刻によって説明することとする。

(1) クレーム件数過程

クレーム件数の時間的推移を表す確率過程がクレーム件数過程である。クレーム件数過程 $\{N_t\}$ が次の三つの条件を満たしていなければならないことは明らかであろう。

① $N_0 = 0$
② $\{N_t\}$ の見本関数は非負の整数値をとり、t について単調増加である。
③ $\{N_t\}$ の見本関数は右連続である。

クレーム件数過程の見本関数 n_t の例



一般に、この三つの条件を満たす連続時間型の確率過程 $\{N_t\}$ を**計数過程**(counting process)という。

計数過程の中で、理論的な取り扱いが比較的容易であり、実際的な問題にもよく応用されるものにポアソン過程があるが、これについては8.3節で詳説する。

以降、「クレーム件数過程」という場合には上記の①②③を満たしているものとする。

(2) クレーム総額過程

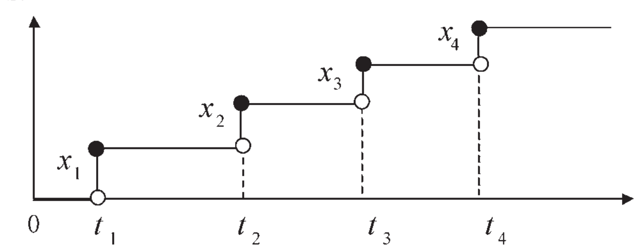
クレーム総額過程 $\{S_t\}$ はクレーム件数過程 $\{N_t\}$ とクレーム額 $X_1, X_2, \cdots$ を

合成したものである。

クレーム額X_nは正値をとる確率変数であるが、普遍的に適用できる特定の分布はない。損害保険の実務においては、便宜上一般的に対数正規分布やガンマ分布が使用されているものの、その他個々の状況・事情に応じてパレート分布等が使用される場合もある。

クレーム総額過程$\{S_t\}$の見本関数s_tの典型的な例を図示すると次のようになる。

クレーム総額過程の見本関数 s_t の例



この例では、クレーム総額は、$t_1, t_2, \cdots$の時点で発生した個々のクレームから成っており、それぞれのクレーム額を$x_1, x_2, \cdots$としている。一般的に危険理論においては、単純化のためにt_kの時点で発生したクレームに対する保険金は、すべてその時点t_kで一度に支払われるものと仮定する。したがって、この危険過程の見本関数は、クレームが発生する時点においてクレーム額分のステップをもち、その他の時点では水平の線で表現されるものとなる。

将来のある時点におけるクレーム総額を予測するためには、この危険過程において、ステップの点t_kがどこにあり、またどのくらいの密度なのか、すなわち発生するクレームがどの程度の頻度で発生するのか、さらには各ステップの高さx_kがどのくらいになるのか、すなわち各クレーム額がいくらになるのかを分析する必要がある。

(3) サープラス過程

サープラス過程は、サープラスの時間的推移を表す確率過程である。

時点0における**サープラス**をu_0、単位時間あたりの収入保険料[3]をcとする。

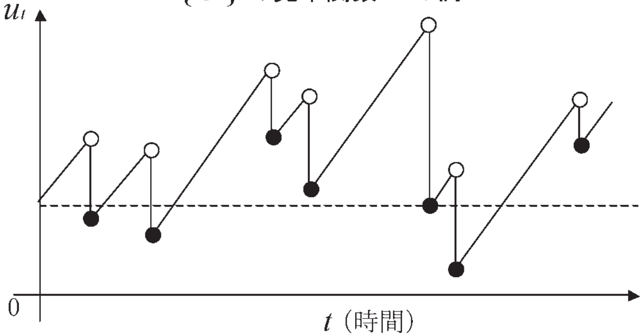
このとき、時点tにおけるサープラスU_tは、事業費や投資収益を無視すると

$$U_t = u_0 + ct - S_t$$

として表すことができる。

サープラス過程$\{U_t\}$の見本関数u_tは次のようになるであろう。

$\{U_t\}$ の見本関数 u_t の例



8.2.3 破産確率

保険会社は、保険事業が破綻しないように、将来の不確定要素である保険金の支払に備えて、十分な確たる資産を保有しておく必要がある。そこで、「支払が資産を超過する」—破産する—確率を数量的に把握することが関心の対

[3] 収入保険料についても確率変数として扱う方が現実的であると思われるが、ここではクレームの発生および金額のみを確率変数とし、収入保険料は確定的（時間に比例した金額を連続的に収入する）であるとしておく。

象となる[4]。前述のサープラス過程$\{U_t\}$を用いると、破産確率とはサープラスU_tが横軸を割り込む（つまりサープラスが負となる）確率として考えることができるので、このように定式化することによって確率過程を道具としたさまざまな分析をすることができる。

破産確率あるいは存続確率すなわち保険会社が長期にわたり破産せず存続する確率については、

- 保険会社のサープラスを常に確認し、サープラスがマイナスになった時点で即座に破産と判定する（連続時間型）か、サープラスの確認は一定の期間ごととし、期中におけるマイナスは問題としない（離散時間型）か、
- 保険会社が一定の期間破産しなければよいとする（有限期間）か、未来永劫存続することを要求する（無限期間）か、

によって、次の4とおりの定義を考えることができる。

(1) 連続時間型、有限期間

連続時間型のサープラス過程$\{U_t\}$に対し、期初サープラスu_0の保険会社が期間$[0,v]$に破産しない確率$\rho(u_0,v)$および破産確率$\varepsilon(u_0,v)$を以下のように定義する。

$$\rho(u_0,v)=P(\min_{0\le t\le v} U_t \ge 0)$$

$$\varepsilon(u_0,v)=1-\rho(u_0,v)$$

[4] この問題への関心は高く、多くのアクチュアリー学の研究者や保険会社の実務家によって様々な「破産確率」のモデルが提唱され、かつ利用されている。従って、破産確率モデルには数学的な意味での一義的なモデルはなく、「破産確率」という言葉は広義な意味を持つ語句であると理解されたい。

(2) 連続時間型、無限期間

(1)において期間を限定しないで、v を無限大とした場合の、期初サープラス u_0 の保険会社が永遠に倒産しない確率 $\rho(u_0)$ および破産確率 $\varepsilon(u_0)$ を以下のように定義する。

$$\rho(u_0) = P(\min_{t \geq 0} \ U_t \geq 0)$$
$$\varepsilon(u_0) = 1 - \rho(u_0)$$

(3) 離散時間型、有限期間

離散時間型のサープラス過程 $\{U_t\}$ に対し、期初サープラス u_0 の保険会社が期間 $[0, v]$ に破産しない確率 $\tilde{\rho}(u_0, v)$ および破産確率 $\tilde{\varepsilon}(u_0, v)$ を以下のように定義する。

$$\tilde{\rho}(u_0, v) = P(\min_{t=0,1,\ldots,v} \ U_t \geq 0)$$
$$\tilde{\varepsilon}(u_0, v) = 1 - \tilde{\rho}(u_0, v)$$

(4) 離散時間型、無限期間

(3)において期間を限定しないで、v を無限大とした場合の、期初サープラス u_0 の保険会社が永遠に倒産しない確率 $\tilde{\rho}(u_0)$ および破産確率 $\tilde{\varepsilon}(u_0)$ を以下のように定義する。

$$\tilde{\rho}(u_0) = P(\min_{t=0,1,\ldots} U_t \geq 0)$$
$$\tilde{\varepsilon}(u_0) = 1 - \tilde{\rho}(u_0)$$

以上の4種類の定義による存続確率の間に以下の関係が成り立つことは明らかであろう。

$$\rho(u_0) = \lim_{v \to \infty} \rho(u_0, v) \text{、} \tilde{\rho}(u_0) = \lim_{v \to \infty} \tilde{\rho}(u_0, v)$$

$$\rho(u_0) \leq \rho(u_0, v) \leq \tilde{\rho}(u_0, v)$$

$$\rho(u_0) \le \tilde{\rho}(u_0) \le \tilde{\rho}(u_0, v)$$

なお、破産確率の定義そのものの話からは逸れるが、破産確率の議論の中で、初めてサープラスがマイナスになる時点、すなわち、

$$\boxed{T = \min\{t \mid U_t < 0\}}$$

として**破産時刻**を表す確率変数Tを定義し、「Tが有限である($T < \infty$)」という条件で、「保険会社の(有限期間内での)破産」を意味させることもある。

8.3 クレーム件数の確率過程

本節および次節では、連続時間型の危険過程について、より詳しく見ていくこととしたい。

本節ではまずクレーム件数過程のみについて考える[5]。

クレーム件数過程に対する仮定として、まず、最も数学的な議論が容易であるものを置き、後に一般的な応用範囲の広いモデルについて考察する。

なお、数学的な議論において若干不十分な部分があるが、厳密な定義、証明等については本書のレベルを超えるため、興味のある読者は章末に示した文献を参照していただきたい。

8.3.1 ポアソン過程

まず、最も単純なケースとして、保険契約のポートフォリオの変化がなくクレーム発生率も安定している場合について数学的にモデル化し、どのような分布となるか考えてみる。

N_tを期間$\left[0,t\right]$において発生するクレーム件数（確率変数）とする。（$N_0=0$とする。）

ここではクレーム件数過程$\left\{N_t\right\}$は次の三つの条件を満たすものと仮定する。

① $0\leq s<t\leq u<v \quad \Rightarrow \quad N_t-N_s$と$N_v-N_u$は独立（$\left(s,t\right]$に発生するクレーム件数と$\left(u,v\right]$に発生するクレーム件数は独立である。）

② $N_{s+t}-N_t$とN_sは同じ分布に従う（$\left(t,s+t\right]$に発生するクレーム件数と

[5] 8.2.2における①②③を満たす確率過程（つまり計数過程）とする。

$(0,s]$に発生するクレーム件数は同じ分布に従う。つまり、クレーム発生件数は区間の幅のみに依存し、区間の位置には依存しない。）

③ 同一時刻に2件以上のクレームが発生することはない。

（数学的な条件としては、$P(N_{t+h}-N_t \geq 2)=o(h)$ [6]としておく。）

仮定①を満たす確率過程を一般に**加法過程**（または**独立増分過程**）という。

独立な確率変数の列$\{Y_n\}$に対して$\{N_n\}$を、

$$N_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

として定義すると、任意の自然数s,t,u,vに対して①が成り立つことわかる。加法過程は、これを連続な場合に拡張したものであると考えられる。

また、仮定②を満たす確率過程を、一般に**定常過程**という。上述の例において、さらに各Y_nが同一分布に従うと仮定すれば、任意の自然数s,tに対して②が成り立つことわかる。

以降では連続な時間をパラメータとする確率変数の列について考察するが、直観的には連続時間を1単位毎に分割し、各単位期間におけるクレーム発生件数を$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$として上式によって定義される確率変数の列$\{N_n\}$をイメージすればよい。

数学的な議論に入る前に、仮定①、②、③がクレーム件数に対する仮定としてどのような意味を持っているか、実務的な観点から考えてみる。

仮定①は、異なったクレームには相互関係がないことを表すものである。

クレームの相互関係としては、

- 一つのクレームが他のクレームを発生させること

---

6 $o(h)$はLandauの記号と呼ばれるものであり、$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$なる関数を表す記号である。

・ 外部要因の変化が異なったクレームの発生率を同時に変化させること

の2種類が考えられる。前者の例としては火災保険の延焼、後者の例としてはクレーム発生率に影響する社会環境、経済環境の変化などを考えることができる。仮定①はこれらを対象外とするものであるため、実際問題への適用において、①を仮定するモデルは十分なものではないかも知れない。しかし、前者については同時に発生するクレームを一つのクレーム発生として捉えることによって相互関係がないクレーム発生とすることができる場合が多く、また、後者については、①を仮定した議論を基礎として、外部要因の変化を考慮した、より一般的なクレーム件数過程モデルを考えることができる。よって、ここでは①を仮定して議論を進めるものとする。

仮定②は、危険の安定性、つまりクレーム発生率がどの時点でも同じであることを表すものである。

この仮定も実際問題への適用を考えれば大きな制約であり、1年のうちでクレーム発生率が異なる火災保険などを考えれば現実的とは言い難い仮定である。しかし、この仮定に関しても、②を仮定した議論を基礎として、より一般的な仮定に置き換えた場合の結果を導くことができる。(仮定②を拡張したモデルについては、8.3.2「オペレーショナル・タイム」において解説する。)

仮定③は数学的な取り扱いを容易にするためのものであるが、現実的な問題を考えても妥当な仮定であろう。二つのクレームが同時に起こるような場合についても、同時に発生するクレームを一つのクレーム発生として捉えることによって、この仮定を満たすものとすることができる場合が多い。

これらの仮定を満たすクレーム件数過程については、次の定理が成り立つ。なお、この定理の証明はこの章の終わりに載せている。

定理8.1 N_tを期間$\left[0,t\right]$において発生するクレーム件数(確率変数)とする。クレーム件数過程$\left\{N_t\right\}$が①、②、③を満たすとき、$\lambda=-\log P(N_1=0)$とし

て、任意の t に対して、

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ。

定理8.1より、仮定①、②、③を満たすクレーム件数過程はすべての時刻 t において、時間に比例するパラメータ λt を持つポアソン分布に従うことがわかる。

このような確率過程を**ポアソン過程**[7]といい、クレーム分析を行う際に中心的役割を演じるものである。

8.3.2 オペレーショナル・タイム

前述したように、クレーム発生率が安定しているという仮定②は、実際問題への応用を考えるとき、大きな制約となる。ここでは、仮定②をより現実的な条件に置き換えて、それら仮定を満たすクレーム件数過程がどのような分布となるかを考える。

クレーム件数過程 $\{N_t\}$ が仮定①、③に加えて次の②'を満たすものとする。

②' $f_0(t) = P(N_t = 0)$ は t の関数として連続

関数 $f_0(t)$ は明らかに単調減少関数であるので、仮定②'は $f_0(t)$ として単調減少連続関数を仮定するものとなる。

仮定①②③の下では、定理8.1より、

---

7 ポアソン過程とは、N_t の分布がパラメータ λt のポアソン分布に従うような加法過程のことであり、パラメータ λt のポアソン分布に従う確率変数 N_t の列（確率過程）が全てポアソン過程ということではないので注意を要する。（たとえば、N_t がパラメータ λt のポアソン分布に従うが、互いに独立であるような確率過程はポアソン過程とは呼ばない。）

$$f_0(t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$

として表すことができるので②'は満たされている。これは、仮定②を②'に置き換えることが、定理8.1の仮定を拡張するものであることを意味している。

このように一般化されたクレーム件数過程についても、本質的にポアソン過程に従うことを証明することができる。

この結果を導くにあたって必要となる概念が、クレーム発生率が安定するように時間尺度を取り直す意味を持つ**オペレーショナル・タイム**である。

オペレーショナル・タイム$\tau(t)$は下式によって定義される。

$$\tau(t) = -\log P(N_t = 0) = -\log f_0(t)$$

仮定②'の下では関数$f_0(t)$は単調減少連続関数であり、また、$-\log x$も単調減少連続関数であるので、$\tau(t)$はtの関数として単調増加連続関数であることがわかる。

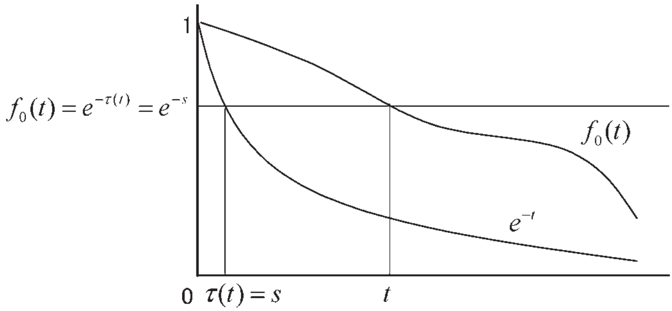
仮定①、②、③の下では、定理8.1より、オペレーショナル・タイムは、

$$\tau(t) = -\log f_0(t) = -\log e^{-\lambda t} = \lambda t$$

となり、時間tと比例関係にあることがわかるが、これはクレーム発生率が時間的に一様であることを表すものである。

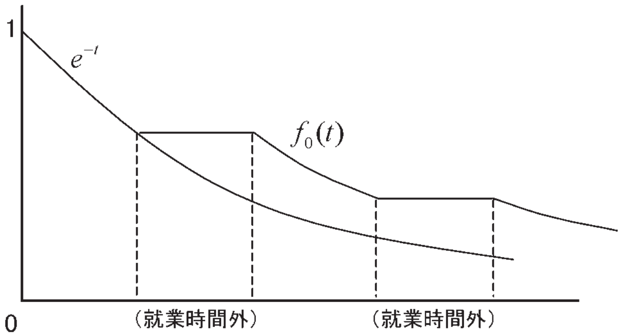
クレーム発生率が時間的に一様でない場合においても、クレーム発生率が高い時には時間の進み方を速くし、逆に低い時には遅くすることによって、単位時間当たりのクレーム発生率を調整し、一定と考えることができるようになる。

たとえば、時刻tにおいてクレーム件数が0である確率$f_0(t)$が下図のように与えられていたとき、この確率が常に$e^{-\tau(t)}$となるためには、$\tau(t) = -\log f_0(t)$とすればよい。すなわち、オペレーショナル・タイムを$\tau(t) = -\log f_0(t)$により定めることで、時刻$s = \tau(t)$においてクレーム件数が0である確率は常に$e^{-s} = e^{-\tau(t)}$となる。



例8-1　最も簡単な例として、就業時間中は一様にクレームが発生し、就業時間外はクレームが発生しない労災保険を考える。(クレーム件数過程は仮定①、③を満たしているものとする。)

この時、$f_0(t)$ は、就業時間外はクレームが発生しないので一定値であり、就業時間のみで考えれば $e^{-\lambda t}$ となるはずである。



よって、通常の時間 t に対して、オペレーショナル・タイム $\tau(t)$ は、

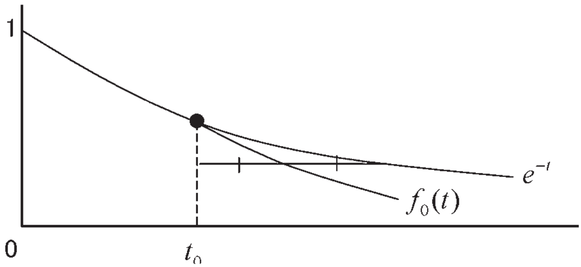
$$\tau(t)=\lambda\times\left([0,t]\text{での就業時間累計}\right)$$

となる。

例8-2　仮定①、③を満たすクレーム件数過程について、ある時点 t_0 以降はクレーム発生率が2倍になる場合を考える。

このとき、オペレーショナル・タイム $\tau(t)$ は下式によって表されるものとなる。

$$\tau(t)=\begin{cases}\lambda t & t\le t_0\\ \lambda t_0+2\lambda(t-t_0) & t>t_0\end{cases}$$



定理8.1をオペレーショナル・タイムという概念を用いて表現すると、「仮定①②③の下でクレーム件数過程はオペレーショナル・タイムをパラメータとするポアソン分布に従う」となるが、②を②'に置き換えた場合に対しても、この結果が成り立つ。

なお、この定理の証明はこの章の終わりに載せている。

定理8.2　N_tを期間$[0,t]$において発生するクレーム件数（確率変数）とし、クレーム件数過程$\{N_t\}$は①、②'、③を満たすものとする。

この時、オペレーショナル・タイム$\tau(t)$を、

$$\tau(t)=-\log f_0(t)=-\log P(N_t=0)$$

として、次の a.)、b.)が成り立つ。

a)　$N'_s=N_{\tau^{-1}(s)}$ $(s\in\tau([0,\infty)))$として定義される確率過程$\{N'_s\}$はポアソン過程に従う。

b)　$P(N_t=n)=\dfrac{\tau(t)^n}{n!}e^{-\tau(t)}$　$(n=0,1,2,\cdots)$

定理8.2より、クレームの発生が独立であるならばクレーム件数過程は本質的にポアソン過程として考えることができることがわかる。その際、時間尺度の調整のために用いられる概念がオペレーショナル・タイムである。

ここで、定理8.2の理解を深めるために、強度関数という概念を導入しておく。なお、ここでは $f_0(t)$ に対して連続性②'に加えて微分可能性を仮定して議論を進める。

強度関数とは $\lambda(t) = -\dfrac{f_0'(t)}{f_0(t)} = -\dfrac{dP(N_t = 0)/dt}{P(N_t = 0)}$ として定義される関数 $\lambda(t)$ のことである。ポアソン過程の強度関数は明らかに $\lambda(t) = \lambda$（定数）である。

強度関数の意味を理解するために、dt を微小時間として、$\lambda(t)dt$ という値について考えてみる。

仮定①、③を用い、$o(dt)$ の項を無視して $\lambda(t)dt$ を式変形すると、

$$
\begin{aligned}
\lambda(t)dt &= \frac{-f_0'(t)dt}{f_0(t)} = \frac{f_0(t) - f_0(t+dt)}{f_0(t)} \\
&= \frac{f_0(t) - f_0(t)P(N_{t+dt} - N_t = 0)}{f_0(t)} = 1 - P(N_{t+dt} - N_t = 0) \\
&= P(N_{t+dt} - N_t \geq 1) = P(N_{t+dt} - N_t = 1)
\end{aligned}
$$

となり、$\lambda(t)dt$ は「時刻 t から次の瞬間 dt の間にクレームが発生する確率」を表していることがわかる。

この強度関数とオペレーショナル・タイムには明確な関係式が成り立つ。強度関数を定義している式の両辺を積分すると下式がただちに導かれる。

$$\int_0^t \lambda(s)ds = -\log f_0(t) = \tau(t)$$

オペレーショナル・タイム $\tau(t)$ を用いて表現されている定理8.2の b.) を、この関係式を用いて強度関数 $\lambda(t)$ によって表現すると下式のようになる。

b) $$P(N_t = n) = \frac{\left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

強度関数という概念を用いると、「仮定①、②'、③を満たすクレーム件数過程は、ポアソン過程のパラメータ λ を時刻 t の関数 $\lambda(t)$ としたもの」として考えることができる。このような確率過程を**非斉時ポアソン過程**という。

8.3.3 マルコフ過程

最後に、クレーム件数過程として加法過程を出発点とせず、マルコフ過程を用いたモデルについて簡単に紹介しておく。

マルコフ過程とは加法過程をその特殊な場合として含む、より一般的な確率過程であり、次のような性質を持つものである。(この性質は**マルコフ性**と呼ばれる。)

> 任意の時刻$t_n < \cdots < t_1 < t$および任意の$x_{t_n}, \cdots, x_{t_1}$に対して
> $$P(N_t \le x \mid N_{t_n} = x_{t_n}, \cdots, N_{t_1} = x_{t_1}) = P(N_t \le x \mid N_{t_1} = x_{t_1})$$

マルコフ性を簡単に言えば、「時点tより前のいくつかの時点での実現値がわかっており、その条件の下でN_tの確率分布を考えるとき、時点tに最も近い時点での実現値以外についてはN_tの確率分布に影響を与えない。」というものである。

クレーム件数過程に限定して考えれば、マルコフ性の前提とは、

$(t, t+dt]$におけるクレーム発生件数$N_{t+dt} - N_t$は、N_tとtのみに依存する確率変数

を意味する。時点tまでに発生したクレームがいつ起こったのかは問題とはならず、クレーム件数累計であるN_tのみが次の瞬間のクレーム発生件数$N_{t+dt} - N_t$に影響を与えうる。

ポアソン過程は、

$(t, t+dt]$におけるクレーム発生件数$N_{t+dt} - N_t$は、N_tおよびtとは独立な確率変数

であり、オペレーショナル・タイムによってポアソン過程となるクレーム件数過程は、

$(t, t+dt]$におけるクレーム発生件数$N_{t+dt} - N_t$は、tのみに依存する確率変数

である。

つまり、マルコフ性を仮定するクレーム件数過程とは、オペレーショナル・タイムによってポアソン過程となるクレーム件数過程の強度関数$\lambda(t)$を、時点tまでに発生したクレーム件数累計nにも依存するようにしたもの（$\lambda(t)$の引数を増やして$\lambda_n(t)$としたもの）を含んだより一般的なクレーム件数過程と考えることができる。

クレーム件数過程$\{N_t\}$に対してマルコフ性を仮定し、さらに、$p_{n,n+k}(t,s)=P(N_s=n+k\,|\,N_t=n)\ (k\geq 0, s>t)$として、次の二つを仮定する。

④ $p_{n,n+1}(t,t+h)=h\lambda_{n+1}(t)+o(h)\quad(n=0,1,2,\cdots)$

⑤ $\sum_{k=2}^{\infty}p_{n,n+k}(t,t+h)=o(h)\quad(n=0,1,2,\cdots)$

ここで、関数$\lambda_n(t)(n=1,2,\cdots)$は時刻$t$における$n$件目のクレーム発生率密度であり、この$\lambda_n(t)$が$n$に依存しない場合は、本質的にポアソン過程に帰着される8.3.2のケースとなる。

これら仮定の下で$p_{n,n+k}(t,s)$は下式を満たすことが導かれ、この二つの式を用いてすべてのkに対して帰納的に$p_{n,n+k}(t,s)$を求めることができる。

$$p_{n,n}(t,s)=\exp\left(-\int_t^s\lambda_{n+1}(u)du\right)$$

$$p_{n,n+k}(t,s)=\int_t^s p_{n,n+k-1}(t,v)\exp\left(-\int_t^s\lambda_{n+k+1}(u)du\right)\lambda_{n+k}(v)dv$$

なお、この二つの式の導出については、この章の終わりに載せている。

8.4　累計損害額の確率過程

次に、保険会社が支払う保険金の総額である**クレーム総額過程**$\{S_t\}$について考える。

多くの損害保険では罹災状況によって保険金の支払額が異なるため、一般的にクレーム額は確率変数であるとして、累計損害額のモデル化を行うことが多い。クレーム額の確率分布としてはガンマ分布や対数正規分布などが利用されている。

ここでは各クレーム額について次の2つを仮定する。

①　個々のクレーム額$X_1, X_2, \cdots$および期間$[0,t]$において発生したクレーム件数N_tは、互いに独立である。
②　個々のクレーム額$X_1, X_2, \cdots$は同じ分布に従う。

このとき、

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$$

が期間$[0,t]$において発生したクレーム累計額S_tの確率過程モデルとなる。

確率変数$N_t, X_1, X_2, \cdots$が上記の①、②を満たし、さらに、$\{N_t\}$がポアソン過程であるとき、上式によって定義される確率過程$\{S_t\}$を**複合ポアソン過程**という。

S_tの分布関数は、第2章で述べた各種手法により計算することができる。

なお、傷害保険の死亡保障のように保険金の支払額が定額である場合についても、確率変数$X_i \, (i = 1, 2, \cdots)$が確率1で$x$という値をとると考えれば、上記のモデルに包含される。この場合、クレーム累計額S_tは

$$S_t = x \cdot N_t$$

となる。

8.5　破産確率の基礎

本節以降では、これまでの危険過程に関する議論の応用として、破産確率モデルにつき説明する。

8.5.1　破産確率モデル

「破産確率モデル」は、保険会社を資産を貯める「ダム」のような器と考え、川上から注がれる水（保険料等の保険引受に伴う収入）と川下に流れる水（支払クレーム額等の保険引受に伴う支出）を差し引いた結果のダムの貯水量（サープラス）の推移をシミュレートするモデルである。

(1)　Lundberg モデル

以下では、基本的な破産確率モデルであるLundbergモデルについて、その概要を紹介する。

Lundberg モデルは期首サープラスu_0、クレーム総額過程$\{S_t\}$および期間$[0,t]$の収入保険料P_tによってサープラス推移を表現する。

期首サープラスu_0は時点0における保険会社の資産であり正の定数である。

クレーム総額過程$\{S_t\}$は複合ポアソン過程、すなわち、

①　クレーム件数過程$\{N_t\}$はポアソン過程に従う

②　個々のクレーム額$X_i(i=1,2,\cdots)$とN_tは独立

③　個々のクレーム額$X_i(i=1,2,\cdots)$は同じ分布に従う

という仮定の下で、$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$として表される確率過程$\{S_t\}$であると仮定する。（クレーム件数が従うポアソン過程のパラメータをλとし、個々のクレーム額の平均$E(X_i)$をμとする。）

収入保険料P_tは確率過程ではなく、経過期間に比例して収入するものと仮定する。期間$[0,t]$で受け取る収入保険料総額は、当該期間でのクレーム累計

額の期待値$\lambda t\mu$に安全割増率$\theta(>0)$を考慮した、

$$P_t=(1+\theta)\lambda t\mu$$

として表されるものとする。

以上を踏まえて、時点tにおける保険会社のサープラスU_tを、

$$U_t=u_0+(1+\theta)\lambda t\mu-S_t$$

によって表現する。

この式が破産確率を考察する際の基本的な確率過程モデル（Lundberg モデル）である。

Lundberg モデルでは数学的な計算を容易にするため、上で述べたように諸条件が単純化されている。そのため、モデルを用いて分析する際には、その予測結果には必ず一定の限界（たとえば、ミクロな単位での予測数値のブレ）があることを十分注意しなければならない。しかし、そうした限界を内包しつつも、定性的な議論では十分に合理的な結論を出しにくい状況、たとえば、長期的な事業計画策定や、マクロな観点からのソルベンシーの評価等において、定量的なモデルを用いた分析は大きな方向性を打ち出せる意味で極めて有効と考えられる。

8.5.2 単期間（single-term）の破産確率

初歩的な破産確率として単期間（時点$t=0$から時点$t=1$まで）を例に取り、$t=1$においてサープラスU_tが負となる確率を考えてみる。ここでは分布の近似等の諸計算をできるだけ単純化しているので、次節以降の長期間の破産確率モデル理解の準備として、確認いただきたい。

サープラスの推移U_tは Lundberg モデル、すなわち、

期首サープラス	正の定数u_0
クレーム総額過程	複合ポアソン過程$\{S_t\}$

クレーム件数過程のパラメータをλ、

個々のクレーム額の平均をμとする。

収入保険料　　　　$P_t = (1+\theta)\lambda t\mu$　　θは安全割増率(>0)

として、$U_t = u_0 + (1+\theta)\lambda t\mu - S_t$によって表現されるものとする。

このとき、この単期間モデルの$t=1$における破産確率εは、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= P(U_1 < 0)\\ &= P(u_0 + (1+\theta)\lambda\mu - S_1 < 0) \qquad (8.1)\end{aligned}$$

である。

ここで、このモデルの契約集団が十分大きく、かつクレーム額X_iの分布がさほど歪んでいないとすると、中心極限定理より、S_1の分布は近似的に正規分布に従うと考えることができる。$E(S_1) = \lambda\mu,\ V(S_1) = \lambda E(X^2)$であるので[8]、$S_1$を標準化した$\dfrac{S_1 - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}$は近似的に標準正規分布に従うと考えられる。

よって、

$$\begin{aligned}(8.1)\text{式} &= P(u_0 + \theta\lambda\mu < S_1 - \lambda\mu)\\ &= P\left(\frac{u_0 + \theta\lambda\mu}{\sqrt{\lambda E(X^2)}} < \frac{S_1 - \lambda\mu}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right)\\ &= \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \qquad \left(k = \frac{u_0 + \theta\lambda\mu}{\sqrt{\lambda E(X^2)}}\right)\end{aligned}$$

として破産確率の近似値を計算することができる。

[8] 第2章において示した複合分布の平均・分散の式((2.2),(2.3))において、クレーム件数分布の期待値・分散をいずれもλとすることにより求められる。

8.6 長期間の破産確率－離散時間型モデル

8.6.1 離散時間型破産確率モデル

長期間の破産確率を考えるにあたり、まずは時刻tを離散時点$0,1,2,\cdots$としたモデルについて、以下の前提のもとで考える。

ある保険会社の時点$n\ (n=1,2,\cdots)$におけるサープラスU_nを

$$U_n = u_0 + nc - S_n$$

u_0 :期首サープラス

S_n :最初のn期間中の支払保険金の総額

c :各期間の収入保険料

とする。

期間iにおける支払保険金の総額をW_iとして、$W_1,W_2,\ldots,W_n$は互いに独立で同じ分布に従う確率変数とし、S_nは

$$S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

として表わされるものとする。（複合ポアソン分布の仮定は置かない。）

また、各期間の収入保険料は、各期間の支払保険金の期待値よりも大きいと仮定しておく。（つまり、$m=E(W_i)$、$c=(1+\theta)m$として$\theta>0$を仮定する。）

このモデルでは、$U_n<0$となることを破産とし、

$$\tilde{T} = \min\{n \mid U_n < 0\}$$

により破産時刻を表す確率変数$\tilde{T}$を定義する。この破産時刻$\tilde{T}$を用いると、破産確率$\tilde{\varepsilon}(u_0)$は、

$$\tilde{\varepsilon}(u_0) = P(\tilde{T} < \infty)$$

と表すことができる。

8.6.2 畳み込みによる破産確率の算出

W_iが離散分布により与えられた場合には、畳み込みにより有限期間の破産確率を直接計算することができる。

たとえば、期首サープラスu_0が1、各期における収入保険料cが2で、各期における支払保険金W_iの確率分布が$P(W_i=0)=0.5$，$P(W_i=2)=0.3$，$P(W_i=4)=0.2$であったとする。

このとき、1期後におけるサープラスU_1の確率分布は以下のとおりとなる。

確率	U_1
0.5	1 + 2 - 0 = 3
0.3	1 + 2 - 2 = 1
0.2	1 + 2 - 4 = -1

したがって、期間$[0,1]$における破産確率$\tilde{\varepsilon}(u_0,1)$は、0.2となる。また、1期後に破産しなかった場合、2期後におけるサープラスU_2は、

① $U_1=3$のとき（$P(U_1=3\,|\,\tilde{T}>1)=0.5/(1-0.2)=0.625$）

確率	U_2
0.5	3 + 2 - 0 = 5
0.3	3 + 2 - 2 = 3
0.2	3 + 2 - 4 = 1

② $U_1=1$のとき（$P(U_1=1\,|\,\tilde{T}>1)=0.3/(1-0.2)=0.375$）

確率	U_2
0.5	1 + 2 - 0 = 3
0.3	1 + 2 - 2 = 1
0.2	1 + 2 - 4 = -1

したがって、期間$[0,1]$において破産しなかった場合の、U_2の条件付確率分布は、

U_2	確率
5	$0.625\times0.5 \quad = 0.3125$
3	$0.625\times0.3+0.375\times0.5 \quad = 0.375$
1	$0.625\times0.2+0.375\times0.3 \quad = 0.2375$
−1	$0.375\times0.2 \quad = 0.075$

のように計算することができ、よって期間$[0,1]$において破産しなかった場合の期間$[1,2]$における破産確率$P(U_2<0\,|\,\tilde{T}>1)$は0.075、したがって、期間$[0,2]$における破産確率$\tilde{\varepsilon}(u_0,2)$は、$\tilde{\varepsilon}(u_0,1)+P(U_2<0,\tilde{T}>1)=0.26$となる。

一般に、破産確率$\tilde{\varepsilon}(u_0,t)$は

$$\tilde{\varepsilon}(u_0,t)=\tilde{\varepsilon}(u_0,t-1)+\sum_{u<0}P(U_t=u,\tilde{T}>t-1)$$

と表されるが、各期におけるサープラスの増加をX_i（本節のモデルにおいては$c-W_i$）、U_{t-1}のとりうる非負の値をu_j（$j=1,2,\cdots,n$）とすると、

$$\begin{aligned}&P(U_t=u,\tilde{T}>t-1)\\&\quad=\sum_{j=1}^{n}P(X_t=u-u_j\,|\,U_{t-1}=u_j,\tilde{T}>t-1)\cdot P(U_{t-1}=u_j,\tilde{T}>t-1)\end{aligned}$$

であり、これを用いて破産確率を求めることができる。ただし、この手法では、tが大きくなるにつれU_{t-1}のとりうる値の個数は増加し、それに応じて計算量も飛躍的に増加することが容易に想像されよう。

8.6.3 調整係数による破産確率の算出

本節では、確率過程の性質を利用した破産確率の算出について説明する。

(1) マルチンゲール

離散時間確率過程$\{N_t\}$において、任意のtに対し$E(N_{t+1}\,|\,N_1,\cdots,N_t)=N_t$が成り立つとき、$\{N_t\}$は**マルチンゲール**（martingale）であるという。

マルチンゲールは、『公平な賭け』という考え方から生まれた概念である。たとえば、以下のようなゲームを考える。

・開始時の持ち点を5点とする。

・コインを1枚投げ、表が出たら1点加点、裏が出たら1点減点する。

・表が出る確率と裏が出る確率はいずれも1/2とする。

t 回目のコインを投げた後の得点を N_t とすると、$E(N_{t+1}|N_1,\cdots,N_t)$ はどのような経路をたどったかによらず、N_t に、$t+1$ 回目のコインを投げた結果が表なら＋1、裏なら－1を加えた値となるため、$E(N_{t+1}|N_1,\cdots,N_t)=N_t$ であり、したがって $\{N_t\}$ はマルチンゲールである。

(2) 停止時刻

離散時間確率過程 $\{N_t\}$ および非負の整数値確率変数 T を考える。任意の t について、事象 $\{T \leq t\}$ が $N_1,\cdots,N_t$ のみに依存するとき、T は（$N_1,\cdots,N_t$ に関する）**停止時刻**（stopping time）であるという。

先ほどのコイン投げのゲームの例で考えると、

・T を、「最初に持ち点が0になるまでのコイン投げの回数」としたとき、$T \leq t$ か否かは $N_1,\cdots,N_t$ のみにより決まるため、T は停止時刻である。

・T を、「持ち点が最大値に達したときのコイン投げの回数」としたとき、$T \leq t$ か否かは $N_1,\cdots,N_t$ のみでは決まらず、N_{t+1} 以降の情報も必要となるため、T は停止時刻ではない。

停止時刻は、たとえば賭けをやめる時期の選択をどのような基準に基づき行うかを表す概念である。

(3) 任意停止定理

公平な賭けにおいては、賭けをやめる時期について、どのような戦略をとったとしても有利になることはなく、公平な賭けのままである。このことを表しているのが、**任意停止定理**（optional stopping theorem）である。

任意停止定理によると、$\{N_t\}$ がマルチンゲール、T が停止時刻のとき、一定の条件のもとで $E(N_T)=E(N_0)$ が成り立つ[9]。

(4) 破産確率の算出

任意停止定理を用いることにより、破産確率を求めることができる。まず、サープラス過程 $\{U_n\}$ をもとに、マルチンゲール $\{M_n\}$ を定める。すると、$\tilde{T}=\min\{n|\ U_n<0\}$ により定義される $\tilde{T}$ は停止時刻なので、任意停止定理により、$E(M_{\tilde{T}})=E(M_0)$ が成り立つ。$E(M_{\tilde{T}})$ は $\tilde{\varepsilon}(u_0)$ を含む式により表現できるので、これと別途算出した $E(M_0)$ が等しいことから、$\tilde{\varepsilon}(u_0)$ を求めることができる。

この過程において、問題となるのは適切なマルチンゲールを定めることである。ここで、独立かつ同一の分布に従う確率変数の列 $X_1,X_2,\cdots$ に対し、以下により定められる確率過程 $\{M_t\}$ を考える。

$$M_t=\frac{\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)}{E\left(\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)\right)}\quad(\tau:\text{定数})$$

このとき、$\{M_t\}$ はマルチンゲールである。実際、$E(M_{t+1}|M_1,\cdots,M_t)$ を考えると、

$$\begin{aligned}&E(M_{t+1}|M_1,\cdots,M_t)\\&=\frac{1}{E\left(\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t+1}X_i\right)\right)}E\left(\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t+1}X_i\right)\middle|X_1,\cdots,X_t\right)\end{aligned}$$

---

9 成立するための条件および証明について、関心のある読者は確率過程に関するテキストを参照されたい。

$$=\frac{1}{E\left(e^{\tau X_{t+1}}\cdot\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)\right)}E\left(e^{\tau X_{t+1}}\cdot\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)\middle|X_1,\cdots,X_t\right)$$

$$=\frac{E\left(e^{\tau X_{t+1}}\right)\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)}{E\left(e^{\tau X_{t+1}}\right)E\left(\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)\right)}$$

$$=\frac{\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)}{E\left(\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)\right)}=M_t$$

となる。

ここで、さらに$E\left(e^{\tau X_i}\right)$が1となるように定数$\tau$を選ぶことができたとすると、$M_t$の分母は1となり、$M_t=\exp\left(\tau\sum_{i=1}^{t}X_i\right)$はマルチンゲールとなる。また、$z$を定数とすると、$M'_t=\exp\left(\tau\cdot\left(z+\sum_{i=1}^{t}X_i\right)\right)$もまたマルチンゲールである。この式において、$z=u_0$、$X_i=c-W_i$、$\tau=-r$とおくと、

$$M'_t=\exp\left(-r\cdot\left(u_0+\sum_{i=1}^{t}(c-W_i)\right)\right)=\exp\left(-r\cdot\left(u_0+ct-S_t\right)\right)=e^{-rU_t}$$

となる。すなわち、$E(e^{-r(c-W_i)})=1$となるようなrに対し、e^{-rU_t}はマルチンゲールとなり、したがって$E(e^{-rU_{\tilde{T}}})=E(e^{-rU_0})$が成立する。ただし、$r=0$のときは左辺、右辺とも1となるため、以下では$r\neq 0$となるような$r$のみを考える。

両辺の期待値を計算すると、$E(e^{-rU_{\tilde{T}}})=E(e^{-rU_{\tilde{T}}}\mid\tilde{T}<\infty)\cdot P(\tilde{T}<\infty)$、$E(e^{-rU_0})=e^{-ru_0}$であることから$E(e^{-rU_{\tilde{T}}}\mid\tilde{T}<\infty)\cdot P(\tilde{T}<\infty)=e^{-ru_0}$であり、したがって破産確率$\tilde{\varepsilon}(u_0)=P(\tilde{T}<\infty)$は

$$\tilde{\varepsilon}(u_0)=\frac{e^{-ru_0}}{E(e^{-rU_{\tilde{T}}}\mid\tilde{T}<\infty)}$$

と表される。

$E(e^{-r(c-W_i)})=1$の正の解を**調整係数**(adjustment coefficient)と呼び、$\tilde{R}$により表す。$M_W(r)$を単位期間の支払保険金W_iの積率母関数とすると、$M_W(r)=E(e^{rW_i})$であり、したがって調整係数は以下の方程式の解として考えることもできる。

$M_W(r)=e^{rc}$ または $\log M_W(r)=rc$ または $c=\dfrac{1}{r}\log M_W(r)$

上記により算出した破産確率を、調整係数を用いて表すと以下のとおりとなる。

定理8.3 各期間の支払保険金$W_i(i=1,2,\cdots)$が互いに独立であり、同じ分布に従う離散型の破産確率$\tilde{\varepsilon}(u_0)$は下式で与えられる。

$$\tilde{\varepsilon}(u_0)=\frac{e^{-\tilde{R}u_0}}{E(e^{-\tilde{R}U_{\tilde{T}}}\mid\tilde{T}<\infty)}$$

(ここで、u_0は期首サープラス、$\tilde{R}$は調整係数($e^{-cr}M_W(r)=1$の正の解)、$\tilde{T}$は破産時刻である。)

定理8.3のマルチンゲールによらない証明をこの章の終わりに載せている。

なお、$\tilde{T}<\infty$すなわち破産した場合には$U_{\tilde{T}}<0$であることから、右辺分母の$E(e^{-\tilde{R}U_{\tilde{T}}}\mid\tilde{T}<\infty)$は1を超え、したがって

$$\tilde{\varepsilon}(u_0)=\frac{e^{-\tilde{R}u_0}}{E(e^{-\tilde{R}U_{\tilde{T}}}\mid\tilde{T}<\infty)}<e^{-\tilde{R}u_0}$$

であることがわかる。これにより破産確率の上限を知ることができる。

8.6.4 調整係数

(1) 複合ポアソン分布の調整係数

W_iが複合ポアソン分布の場合、クレーム件数の平均をλ、個々のクレーム額の平均および積率母関数[10]をそれぞれμ，$M_X(r)=E(e^{rX})$とすると、

$$\log M_W(r)=\lambda(M_X(r)-1)$$

$$E(W_i)=m=\lambda\mu \text{、} c=(1+\theta)m$$

なので、調整係数は

$$M_X(r)=1+(1+\theta)\mu r$$

を満たす正の解となる。

ここで、左辺・右辺それぞれをrの関数と考え$g_1(r)$および$g_2(r)$とおき、rを増加させていったときの$g_1(r)$，$g_2(r)$の振る舞いを考える。

左辺は$g_1'(r)=E(Xe^{rX})>0$および$g_1''(r)=E(X^2e^{rX})>0$より、単調増加かつ下に凸で、また$g_1(0)=1, g_1'(0)=\mu$である。一方、右辺はrの一次関数で、$g_2(0)=1, g_2'(0)=(1+\theta)\mu(>\mu)$である。

$r=0$においては$g_1(0)=g_2(0)=1$であるが、$g_1'(0)<g_2'(0)$なので、しばらくの間は$g_1(r)$は$g_2(r)$よりも小さい。ただし、$g_1''(r)>0$なので、$g_1(r)$の傾きは次第に大きくなり、ある点で$g_1'(r)=g_2'(r)$となる。以降は$g_1(r)$と$g_2(r)$との差は次第に縮まり、ある点でついに$g_1(r)$が$g_2(r)$を追い越す。このときのrの値が調整係数である。

たとえば、個々のクレーム額が指数分布に従う場合、

$$M_X(r)=E(e^{rX})=\int_0^\infty e^{rx}\cdot\frac{1}{\mu}e^{-x/\mu}dx=\frac{1/\mu}{1/\mu-r}\ (r<1/\mu)$$

であり、調整係数は$r<1/\mu$において

$$\frac{1/\mu}{1/\mu-r}=1+(1+\theta)\mu r$$

すなわち

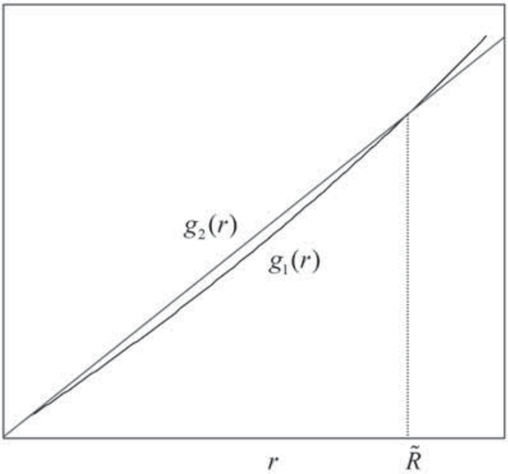
---

[10] いずれも存在するものとする。

$$r\left\{r-\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}\right\}=0$$

を満たす正の値$r=\dfrac{\theta}{(1+\theta)\mu}$である。

$g_1(r)$，$g_2(r)$と調整係数の関係



(2) 調整係数の近似

前節では、個々のクレーム額の分布が指数分布である複合ポアソン分布について調整係数を求めたが、一般の場合に調整係数$\tilde{R}$を直接的に求めることは困難なことが多いことから、以下、近似式による算出を簡単に紹介する。

まず、キュムラントと原点周りの積率の関係から、単位期間の支払保険金である確率変数Wに対して、

$$\left.\frac{d}{dt}\log M_W(t)\right|_{t=0}=E(W)$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\log M_W(t)\right|_{t=0}=V(W)$$

が成り立つので、$\log M_W(r)$の級数展開を考えると、

$$\log M_W(r) = E(W)r + \frac{V(W)}{2}r^2 + \cdots$$

となる。$\log M_W(r)$ としてこの級数展開の2次以下の項で近似をとると、調整係数 $\tilde{R}$ の近似式、

$$\tilde{R} \cong \frac{2(c - E(W))}{V(W)}$$

が導かれる。

W が複合ポアソン分布に従う場合には、$c = (1+\theta)\lambda E(X)$ として上記の近似式は、

$$\tilde{R} \cong \frac{2\theta E(X)}{E(X^2)}$$

となる。

8.7 長期間の破産確率－連続時間型モデル

最後に、連続時間型モデルの破産確率について考える。

サープラスの推移U_tは、

$$U_t = u_0 + ct - S_t$$

u_0:期首サープラス

N_t:クレーム件数

$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$ [11] :支払保険金の総額

c :単位時間あたりの収入保険料

により表されるものとする。

このモデルでは、$U_t < 0$となることを破産とし、

$$T = \min\{t \mid U_t < 0\}$$

により破産時刻を表す確率変数Tを定義する。この破産時刻Tを用いると、破産確率$\varepsilon(u_0)$は、

$$\varepsilon(u_0) = P(T < \infty)$$

と表すことができる。

8.7.1 調整係数による破産確率の算出

連続時間型モデルにおいても、離散時間型モデルと同様に、調整係数を用いて破産確率を評価することができる。

$M_t = \exp\left(\tau(ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i)\right) \Big/ E\left(\exp\left(\tau(ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i)\right)\right)$を考えると、$M_t$はマルチンゲールとなる。したがって

[11] 8.4節の仮定①、②を満たすものとする。

$$E\left(\exp\left(\tau(ct-\sum_{i=1}^{N_t}X_i)\right)\right)=1$$

すなわち

$$e^{\tau ct}M_{N_t}(\log M_X(-\tau))=1$$

（M_{N_t} および M_X はそれぞれ N_t および X_i の積率母関数）となるように定数 $\tau=-R$ を選ぶことができたとすると、$M_t=\exp\left(-R(ct-\sum_{i=1}^{N_t}X_i)\right)$ はマルチンゲールとなり、したがって $M'_t=\exp\left(-R\cdot\left(u_0+ct-\sum_{i=1}^{N_t}X_i\right)\right)=e^{-RU_t}$ もマルチンゲールとなる。

破産時刻 $T=\min\{t\,|\,U_t<0\}$ は停止時刻なので、任意停止定理により $E(M'_T)=E(M'_0)$ であり、両辺の期待値を評価することにより、$E(e^{-RU_T}\,|\,T<\infty)\cdot\varepsilon(u_0)=e^{-Ru_0}$ すなわち

$$\varepsilon(u_0)=\frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T}\,|\,T<\infty)}$$

であることがわかる。

特に、Lundberg モデル、すなわち $\{S_t\}$ が複合ポアソン過程（クレーム件数過程の強度 λ、個々のクレーム額の期待値 μ、単位時間あたりの収入保険料 $c=(1+\theta)\lambda\mu$）である場合には、$M_{N_t}(\theta)=\exp(\lambda t(e^\theta-1))$ であることから、調整係数は以下の方程式

$$M_X(r)=1+(1+\theta)\mu r$$

の正値の解となる。

定理8.4　Lundberg モデルの破産確率 $\varepsilon(u_0)$ は下式で与えられる。

$$\varepsilon(u_0)=\frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T}\,|\,T<\infty)}$$

（ここで、u_0 は期首サープラス、R は調整係数（$M_X(r)=1+(1+\theta)\mu r$ の正の解）、T は破産時刻である。）

定理8.4のマルチンゲールによらない証明をこの章の終わりに載せている。

8.7.2 調整係数の算出

連続時間型モデルにおいても、定理8.4の方程式から破産確率の値を直接的に求めることは、ほとんどの場合難しく(ただし、個々のクレーム額の分布が指数分布の場合、解析的に値を求めることが可能)、さまざまな近似計算を行うことが多い。

たとえば、離散時間型モデルの場合と同様に、定理8.4の等式右辺において $U_T<0$ より $E(e^{-RU_T}\mid T<\infty)>1$ であり、

$$\varepsilon(u_0)<e^{-Ru_0}$$

という不等式が成り立つ。(これは **Lundberg の不等式**と呼ばれる。)

さらに、この不等式を用いて破産確率を保守的に、

$$\varepsilon(u_0)\cong e^{-Ru_0}$$

と評価することもある。

この保守的な近似を用いると、会社が許容できる破産確率の水準 ε から、必要な安全割増率の水準を次のように決定することができる。

期首サープラス u_0 の保険会社が破産確率 ε まで容認できるとすると、破産確率の近似式 $\varepsilon\cong e^{-Ru_0}$ から、調整係数は $R=-\dfrac{\log\varepsilon}{u_0}$ となる。これを調整係数を定める方程式 $M_X(R)=1+(1+\theta)\mu R$ に代入して、安全割増率 θ について整理すると、必要な安全割増率が、

$$\theta=\frac{u_0\left\{M_X\left(-\dfrac{\log\varepsilon}{u_0}\right)-1\right\}}{-\mu\log\varepsilon}-1$$

として導かれる。

また、調整係数 R の方程式の解をコンピュータによる数値計算で求める際に

は、

$$
\begin{aligned}
1+(1+\theta)\mu R &= E(e^{RX}) \\
&= E(1+RX+\frac{R^2X^2}{2!}+\cdots) \\
&> E(1+RX+\frac{R^2X^2}{2!}) \\
&= 1+E(X)R+\frac{E(X^2)}{2}R^2
\end{aligned}
$$

という関係から、

$$
R<\frac{2\theta E(X)}{E(X^2)} \tag{8.2}
$$

という形で初期値を得ることができる。((8.2)式右辺を調整係数Rの近似値として用いることもある。)

8.7.3 破産確率の積分微分方程式

前節では破産確率を調整係数を用いて評価したが、調整係数は常に存在するとは限らない。以下の節では、調整係数を用いずに別のアプローチにより破産確率を算出する方法を考える。

初期サープラスuのとき、破産が発生し、かつ破産直後の欠損額がy以上である確率を$G(u,y)$とおき、$G(u,y)$が満たすべき条件を考えてみよう。

「初期サープラスuのとき、破産が発生し、かつ破産直後の欠損額がy以上である」という事象を、微小時間Δt経過後の状態に着目すると、

①事故が発生していない

②事故が1件発生し、破産していない

③事故が1件発生し、破産している

の3つの場合に分けられる。以下、それぞれの場合について確率を考える。

<u>①事故が発生していない</u>

期間$[0,\Delta t]$において事故が発生しない確率は$1-\lambda\Delta t$である。

このとき、サープラスは保険料収入により$u+c\Delta t$となっているため、その後破産が発生し、かつ破産直後の欠損額がy以上となる確率は$G(u+c\Delta t,y)$である。

②事故が1件発生し、破産していない

期間$[0,\Delta t]$において事故が発生する確率は$\lambda\Delta t$である。

この事故に対する支払額をxとすると、この時点で破産していないという条件から、xは$u+c\Delta t$未満でなければならない。支払後のサープラスは$u+c\Delta t-x$となっているため、その後破産が発生し、かつ破産直後の欠損額がy以上となる確率は$G(u+c\Delta t-x,y)$である。

③事故が1件発生し、破産している

期間$[0,\Delta t]$において事故が発生する確率は同じく$\lambda\Delta t$である。

この事故により破産し、かつ破産直後の欠損額がy以上であるという条件から、xは$u+c\Delta t+y$以上でなければならない。

以上により、$G(u,y)$は以下のとおり表すことができる。

なお、$F(x)$は個々のクレーム額の分布関数とする。

$$\begin{aligned}G(u,y) &= (1-\lambda\Delta t)G(u+c\Delta t,y)\\ &+\lambda\Delta t\int_0^{u+c\Delta t}G(u+c\Delta t-x,y)dF(x)\\ &+\lambda\Delta t\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty}dF(x)\end{aligned}$$

これを整理すると

$$\frac{G(u+c\Delta t,y)-G(u,y)}{c\Delta t}$$

$$=\frac{\lambda}{c}\{G(u+c\Delta t,y)-\int_0^{u+c\Delta t}G(u+c\Delta t-x,y)dF(x)-\int_{u+c\Delta t+y}^{\infty}dF(x)\}$$

となり、$\Delta t\to 0$とすることで、以下の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y)=\frac{\lambda}{c}\{G(u,y)-\int_0^u G(u-x,y)dF(x)-\int_{u+y}^{\infty}dF(x)\} \qquad (8.3)$$

8.7.4節では、特別な場合にこの$G(u,y)$についての積分微分方程式を解くことにより、破産確率を求めることができることを示す。

また、(8.3)をuについて$(0,\infty)$で積分すると、

$$G(\infty,y)-G(0,y)$$
$$=\frac{\lambda}{c}(\int_0^{\infty}G(u,y)du-\int_0^{\infty}\int_0^u G(u-x,y)dF(x)du-\int_0^{\infty}\int_{u+y}^{\infty}dF(x)du)$$

ここで、$G(\infty,y)=0$（初期サープラスが無限にあれば破産しない）であり、また右辺括弧内の第2項、第3項の積分はそれぞれ

$$\int_0^{\infty}\int_0^u G(u-x,y)dF(x)du=\int_0^{\infty}G(u,y)du$$
$$\int_0^{\infty}\int_{u+y}^{\infty}dF(x)du=\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du$$

であることから、以下の式を得る。

$$G(0,y)=\frac{\lambda}{c}\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du=\frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du$$

この式から、以下のことがわかる。

①初期サープラス0のときの破産確率

$$G(0,0)=\frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_0^{\infty}\{1-F(u)\}du=\frac{1}{1+\theta} \qquad (8.4)$$

②初期サープラス0で破産が発生したときの欠損額Yの分布関数$F_Y(y)$

$$P(Y>y\,|\,T<\infty)=\frac{P(Y>y,T<\infty)}{P(T<\infty)}=\frac{G(0,y)}{P(T<\infty)}=\frac{1}{\mu}\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du$$

したがって、

$$F_Y(y)=P(Y\le y\,|\,T<\infty)=1-\frac{1}{\mu}\int_y^{\infty}\{1-F(u)\}du=\frac{1}{\mu}\int_0^{y}\{1-F(u)\}du \qquad (8.5)$$

8.7.5節では、これらを用いて、より一般的な場合における破産確率の算出に

ついて説明する。

8.7.4 積分微分方程式による破産確率の算出

本節では、$G(u,y)$についての積分微分方程式(8.3)を解くことにより、破産確率を求めることができることを示す。

定義より、$G(u,y)$と破産確率$\varepsilon(u)$との間には$\varepsilon(u)=G(u,0)$の関係があるため、式(8.3)において$y=0$とすることにより、以下の式を得る。

$$\varepsilon'(u)=\frac{\lambda}{c}\{\varepsilon(u)-\int_0^u \varepsilon(u-x)dF(x)-\int_u^\infty dF(x)\}$$

また、存続確率$\rho(u)$についても、上式に$\rho(u)=1-\varepsilon(u)$を代入して整理することにより、以下の式が得られる。

$$\rho'(u)=\frac{\lambda}{c}\{\rho(u)-\int_0^u \rho(u-x)dF(x)\} \tag{8.6}$$

個々のクレーム額の分布が指数分布の場合には、式(8.6)の右辺の積分を消去することにより破産確率を求めることができる。個々のクレーム額の密度関数を$f(x)=\mu^{-1}e^{-x/\mu}$とすると、式(8.6)は

$$\begin{aligned}\rho'(u)&=\frac{\lambda}{c}\{\rho(u)-\frac{1}{\mu}\int_0^u \rho(u-x)e^{-x/\mu}dx\}\\&=\frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\rho(u)-\frac{1}{\mu}e^{-u/\mu}\int_0^u \rho(x)e^{x/\mu}dx\}\end{aligned} \tag{8.7}$$

となる。両辺を微分すると、

$$\rho''(u)=\frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\rho'(u)+\frac{1}{\mu^2}e^{-u/\mu}\int_0^u \rho(x)e^{x/\mu}dx-\frac{1}{\mu}\rho(u)\} \tag{8.8}$$

となるが、(8.7)より$\frac{1}{\mu^2}e^{-u/\mu}\int_0^u \rho(x)e^{x/\mu}dx=\frac{1}{\mu}\rho(u)-(1+\theta)\rho'(u)$なので、これを(8.8)に代入すると、以下の微分方程式を得る。

$$\rho''(u) = -\frac{\theta}{(1+\theta)\mu}\rho'(u) \qquad (8.9)$$

これを解くと、

$$\rho(u) = C_1 \exp\left\{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}\right\} + C_2$$

であり、C_1, C_2は(8.4)および(8.7)において$u=0$とすることで得られる

$$\rho(0) = 1 - G(0,0) = \frac{\theta}{1+\theta},\ \ \rho'(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu}\rho(0) = \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu}$$

を用いて、$C_1 = -\dfrac{1}{1+\theta}, C_2 = 1$と求められるので、結局

$$\rho(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta}\exp\left\{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}\right\}$$

であり、したがって破産確率$\varepsilon(u)$は

$$\varepsilon(u) = 1 - \rho(u) = \frac{1}{1+\theta}\exp\left\{-\frac{\theta u}{(1+\theta)\mu}\right\}$$

となる。

8.7.5 畳み込みによる破産確率の算出

8.7.4節の方法は、指数分布などごく限られたクレーム額分布に対してしか用いることができない。本節ではより一般的な場合について、式(8.4)および(8.5)を用いた破産確率の算出について説明する。

初期サープラスuの場合の破産確率$\varepsilon(u)$を求めるため、以下の確率変数を導入する。

$L_1 : u$と、U_tが初めてuを下回った時（T_1）のサープラス（U_{T_1}）との差
$L_2 : U_{T_1}$と、U_tが初めてU_{T_1}を下回った時（T_2）のサープラス（U_{T_2}）との差

以下同様に、破産に至るまで$L_3, L_4, \cdots$を定義する。すなわち、L_nは、n回目にU_tの「最低記録」を更新した時（時刻T_n）における「記録の更新幅」を表

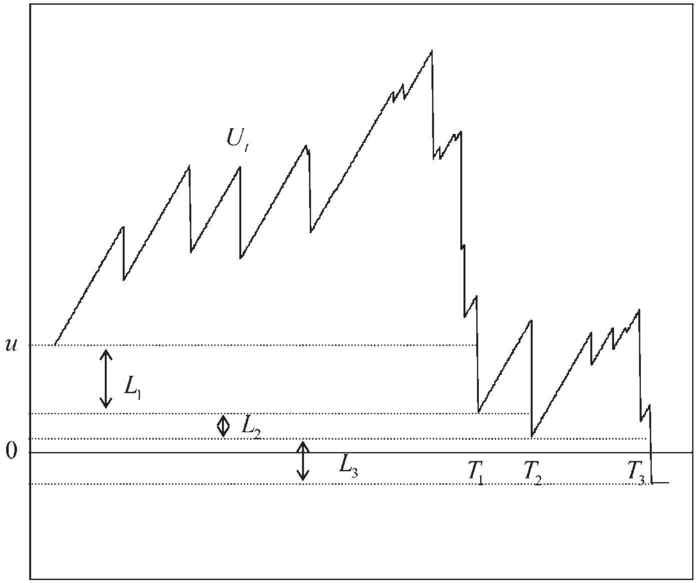
す。たとえば下図では、U_t は T_1 において初めて u を L_1 だけ下回り、T_2 において初めて U_{T_1} を L_2 だけ下回り、T_3 において初めて U_{T_2} を L_3 だけ下回り、その結果 $U_{T_3} < 0$ となり、破産に至った例を示している。

すなわち、破産とは $L = L_1 + L_2 + \cdots$ が u を超えることを意味し、したがって破産確率 $\varepsilon(u)$ は、

$$\varepsilon(u) = P(L > u)$$

と表現することができる。

$L_1, L_2, \cdots$ の例



ここで、「最低記録」の更新が起きる回数 K の確率分布を考えてみよう。まず、$K = 0$ である確率は、U_t が一度も初期サープラス u を下回らない確率であり、これは初期サープラス0のときに破産しない確率に等しく、この確率は(8.4)式より $\theta / (1+\theta)$ である。また、$K = 1$ である確率は、U_t が T_1 において u を下回り（確率 $1/(1+\theta)$）、以後 U_t が一度も U_{T_1} を下回らない（確率 $\theta / (1+\theta)$）確率と

して求められる。以下同様にして、$K=k$ である確率は、

$$P(K=k)=\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

であり、K は成功確率 $\theta/(1+\theta)$ の幾何分布に従う。

一方、「記録の更新幅」L_n の確率分布は初期サープラス0で破産が発生したときの欠損額 Y の確率分布に等しい。

以上により、L は複合幾何分布に従い、その分布関数は以下により表されることが分かる。

$$F_L(u)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_Y{}^{k*}(u)\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

ただし、$F_Y{}^{k*}(u)$ は $F_Y(u)$ の k 個の畳み込みを表す。

このように、破産確率の計算は複合幾何分布の確率の計算に帰着され、$F_Y(u)$ を離散分布で近似すれば、第2章で学んだ手法により破産確率を計算することができる。

8.8 補足

最後にこの章において示した4つの定理およびマルコフ性を仮定したクレーム件数過程の推移確率を導く漸化式の証明を載せておく。

証明の中には数学的にテクニカルな部分がいくつかあるが、証明を追うことによって定理の意味をより深く理解することができるので、是非、確認していただきたい。

[定理8.1の証明]

$f_n(t) \equiv P(N_t = n)$とする。

まず、$n=0$の時に定理8.1が成り立つことを示す。

$f_0(t)$は$f_0(0)=1$なる単調減少関数であり、任意の$s,t(>0)$に対して、

$$
\begin{aligned}
f_0(s+t) &= P(N_{s+t}=0) = P(N_s - N_0 = 0, N_{s+t} - N_s = 0) \\
&= P(N_s - N_0 = 0) \times P(N_{s+t} - N_s = 0) && (\because ①) \\
&= P(N_s = 0) \times P(N_t = 0) && (\because ②) \\
&= f_0(s) \times f_0(t)
\end{aligned}
$$

を満たす。ここでnを任意の自然数とすると、上式より、

$$f_0(1) = f_0\left(\frac{1}{n}\right) f_0\left(\frac{n-1}{n}\right) = \cdots = \left\{ f_0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n \Leftrightarrow f_0\left(\frac{1}{n}\right) = \left\{ f_0(1) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

であるので、任意の有理数$\dfrac{m}{n}$（m,nは自然数）に対して、

$$f_0\left(\frac{m}{n}\right) = f_0\left(\frac{1}{n}\right) f_0\left(\frac{m-1}{n}\right) = \cdots = f_0\left(\frac{1}{n}\right)^m = f_0(1)^{\frac{m}{n}}$$

となり、$f_0(t)$は指数関数であることがわかる。

任意の実数tに対してもtに収束する有理数増加列を$\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$、また、tに収束する有理数減少列を$\{q'_k\}_{k=1}^{\infty}$とすれば、$f_0(t)$が単調減少関数であることより、

$$f_0(t) \le f_0(q_k) = \{f_0(1)\}^{q_k} \xrightarrow{k\to\infty} \{f_0(1)\}^t$$
$$f_0(t) \ge f_0(q'_k) = \{f_0(1)\}^{q'_k} \xrightarrow{k\to\infty} \{f_0(1)\}^t$$
として、$f_0(t) = f_0(1)^t$ であることがわかる。

よって、$\lambda \equiv -\log f_0(1) = -\log P(N_1 = 0)$ なる λ を用いて、
$$f_0(t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$$
となる。

次に、$n \ge 1$ の場合について考える。

$n = 0$ の場合は上述のとおり定理8.1が成り立つことが示されたので、以下、数学的帰納法により $n \ge 1$ の場合を証明する。

$n = k\ (k \ge 0)$ の時 $f_k(t) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ が成り立つと仮定して、$n = k+1$ の場合を考える。

$f_{k+1}(t) = P(N_t = k+1)$ の値は、

(1) $[0, s]$ においてクレーム件数 k 件

(2) $(s, s+ds]$ においてクレーム件数1件

(3) $(s+ds, t]$ においてクレーム件数0件

となる確率をすべての $s \in [0, t]$ について合計すればよい。

(1)は $f_k(s)$ であり、(2)および(3)は、仮定②、③および $f_0(t) = e^{-\lambda t}$ より、
$$
\begin{aligned}
(2) &= P(N_{s+ds} - N_s = 1) = P(N_{ds} = 1) = 1 - P(N_{ds} = 0) - o(ds) \\
&= 1 - f_0(ds) - o(ds) = 1 - e^{-\lambda ds} - o(ds) = \lambda ds + o(ds)
\end{aligned}
$$
$$
\begin{aligned}
(3) &= P(N_t - N_{s+ds} = 0) = P(N_{t-s-ds} = 0) \\
&= e^{-\lambda(t-s-ds)} = e^{-\lambda(t-s)}(1 + O(ds))
\end{aligned}
$$ [12]

---

[12] $O(h)$ は Landau **の記号**と呼ばれるものであり、$\lim_{h\to 0}\left|\dfrac{O(h)}{h}\right| < M < \infty$ なる関数を表す記号である。

として表される。仮定①より(1)(2)(3)が生起する確率はこれらの積となるので、

$$f_{k+1}(t)=\int_0^t f_k(s)e^{-\lambda(t-s)}\lambda ds=\int_0^t \frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}\lambda ds$$
$$=\frac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda t}}{k!}\int_0^t s^k ds=\frac{(\lambda t)^{k+1}e^{-\lambda t}}{(k+1)!}$$

となり、$n=k+1$の時の成立が導かれる。

以上より、任意のtに対して、

$$f_n(t)=P(N_t=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つことが証明された。 (証明終)

[定理8.2の証明]

まず、任意の$s\in\tau([0,\infty))$に対してN'_sが一意に定められることを示しておく。

$\tau^{-1}(s)$は必ずしも一意には定まらないが、一意に定まらないとき、すなわち、ある2つの異なる時点$t_1,t_2(t_1<t_2)$に対して$\tau(t_1)=\tau(t_2)$となるときは、$\tau(t)$の定義より$f_0(t_1)=f_0(t_2)$であり、仮定②'より$f_0(t)$は単調減少連続関数であるので、区間$[t_1,t_2]$において$f_0(t)$は一定値となる。これは、区間$[t_1,t_2]$におけるクレーム発生確率がゼロであることを意味するものであるので、$N_{t_1}=N_{t_2}$となる。よって、すべての$s\in\tau([0,\infty))$に対してN'_sを一意に定めることができる。

a.)の証明は、定理8.1より、$\{N'_s\}$が①②③を満たすことを示せばよい。

まず、①、③を満たすことを示しておく。

① $0\le s<t\le u<v\Rightarrow\tau^{-1}(s)\le\tau^{-1}(t)\le\tau^{-1}(u)\le\tau^{-1}(v)$

$$\Rightarrow N_{\tau^{-1}(t)}-N_{\tau^{-1}(s)}\text{と}N_{\tau^{-1}(v)}-N_{\tau^{-1}(u)}\text{は独立}$$
$$\Rightarrow N'_t-N'_s\text{と}N'_v-N'_u\text{は独立}$$

③　$P(N'_{s+h}-N'_s \geq 2)=P(N_{\tau^{-1}(s+h)}-N_{\tau^{-1}(s)} \geq 2)=o(h)$[13]

$\{N'_s\}$が②を満たすことは最後に示すこととし、続いてb.)が成り立つことを示す。

$\tau([0,\infty))$上の関数$g_n(s)$を、

$$g_n(s) \equiv P(N'_s = n)$$

として定義する。

数学的帰納法によって、

$$g_n(s)=\frac{s^n}{n!}e^{-s} \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

であることを証明する。

$n=0$の時は$\tau(t)$の定義より、

$$g_0(s)=P(N'_s=0)=P(N_{\tau^{-1}(s)}=0)=f_0(\tau^{-1}(s))=e^{-s} \tag{8.10}$$

であるので成り立つ。

次に$n=k\ (k \geq 0)$の時$g_k(s)=\dfrac{s^k}{k!}e^{-s}$が成り立つと仮定して、$n=k+1$の場合を考える。

定理8.1の証明と同様に、$\{N'_s\}$が①を満たすことより、

$$g_{k+1}(s)=\int_0^s g_k(u)\times P(N'_{u+du}-N'_u=1)\times P(N'_s-N'_{u+du}=0) \tag{8.11}$$

と表される。

ここで、右辺積分項の$P(N'_{u+du}-N'_u=1)$について考えてみると、$\{N'_s\}$が③を満たすことより、

$$P(N'_{u+du}-N'_u=1)=1-P(N'_{u+du}-N'_u=0)-o(du) \tag{8.12}$$

であり、また、①を満たすことより、

13　この等式の成立は自明ではなく、厳密には若干の議論を要するものであるが、ここでは省略する。

$$P(N'_{u+du}=0)=P(N'_u=0)\times P(N'_{u+du}-N'_u=0)$$
$$=g_0(u)\times P(N'_{u+du}-N'_u=0)$$
$$\Rightarrow \quad P(N'_{u+du}-N'_u=0)=\frac{g_0(u+du)}{g_0(u)}=e^{-du}=1-du+o(du)$$

であるので、

$$(8.12)\text{式}=1-(1-du+o(u))-o(du)=du-o(u)$$

となる。右辺積分項 $P(N'_s-N'_{u+du}=0)$ についても同様に、

$$P(N'_s-N'_{u+du}=0)=\frac{g_0(s)}{g_0(u+du)}=e^{-(s-u-du)}=e^{-(s-u)}(1+O(du))$$

となる。

よって、

$$(8.11)\text{式}=\int_0^s g_k(u)e^{-(s-u)}du=\int_0^s \frac{u^k}{k!}e^{-u}e^{-(s-u)}du=\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}e^{-s}$$

として、$n=k+1$ の時も成り立つ。

以上より、任意の n に対して、$g_n(s)=\dfrac{s^n}{n!}e^{-s}$ が成り立つことが証明された。

よって、任意の n に対して、

$$P(N_t=n)=P(N'_{\tau(t)}=n)=g_n(\tau(t))=\frac{(\tau(t))^n}{n!}e^{-\tau(t)}$$

となり、b.)が成り立つ。

最後に、$\{N'_s\}$ が仮定② $P(N'_{s+t}-N'_t=n)=P(N'_s=n)$ を満たすことを示す。

まず、$n=0$ のときを考えると、①を満たすことより、

$$P(N'_{s+t}=0)=P(N'_t=0,N'_{s+t}-N'_t=0)=P(N'_t=0)\times P(N'_{s+t}-N'_t=0)$$

であるので、b.)を用いれば、

$$P(N'_{s+t}-N'_t=0)=\frac{P(N'_{s+t}=0)}{P(N'_t=0)}=\frac{e^{-s-t}}{e^{-t}}=e^{-s}$$

となり②が成り立つ。

次に$n=k$の時②が成り立つことを仮定して、$n=k+1$の時を考えると、

$$P(N'_{s+t}-N'_s=k+1)=\frac{P(N'_{s+t}-N'_t=k+1, N'_t=0)}{P(N'_t=0)}$$

$$=\frac{P(N'_{s+t}=k+1)-\sum_{l=1}^{k+1}P(N'_{s+t}-N'_t=k-l+1, N'_t=l)}{P(N'_t=0)}$$

$$=\frac{\frac{(s+t)^{k+1}e^{-s-t}}{(k+1)!}-\sum_{l=1}^{k+1}\frac{s^{k-l+1}e^{-s}}{(k-l+1)!}\frac{t^l e^{-t}}{l!}}{e^{-t}}$$

$$=\frac{e^{-s}}{(k+1)!}\sum_{l=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!}s^{k+1-l}t^l-e^{-s}\sum_{l=1}^{k+1}\frac{s^{k-l+1}}{(k-l+1)!}\frac{t^l}{l!}$$

$$=\frac{s^{k+1}e^{-s}}{(k+1)!}$$

となる。

よって数学的帰納法より②が成り立つことが示された。　　　　（証明終）

なお、証明後半の$\{N'_s\}$が②を満たすことについては、積率母関数を用いて証明することもできる。

[8.3.4における$p_{n,n+k}(t,s)$計算式の導出]

仮定④、⑤を用いると、

⑥　$p_{n,n}(t,t+h)=1-\sum_{k=1}^{\infty}p_{n,n+k}(t,t+h)=1-h\lambda_{n+1}(t)+o(h)$

が導かれる。

この仮定の下で、$p_{n,n+k}(t,s)$がどのように表現されるかを考えてみる。

$p_{n,n+k}(t,s+h)$ $(t<s)$なる確率は、その意味を考えれば次の確率を合計すればよいことがわかる。

(1)　$(s,s+h]$でクレームが発生しない場合

$$P(N_s=n+k, N_{s+h}=n+k \mid N_t=n)$$

(2)　$(s,s+h]$でクレームが1件発生する場合

$$P(N_s = n+k-1, N_{s+h} = n+k \mid N_t = n)$$

(3) $(s, s+h]$でクレームが2件以上発生する場合

$$\sum_{l=2}^{\infty} P(N_s = n+k-l, N_{s+h} = n+k \mid N_t = n)$$

（$k=0$の場合は(1)のみ、$k=1$の場合は(1)＋(2)、$k \geq 2$の場合は(1)＋(2)＋(3)である。）

(1)の確率は、マルコフ性および性質⑥を用いれば、

$$\begin{aligned}
(1) &= P(N_s = n+k \mid N_t = n) \times P(N_{s+h} = n+k \mid N_t = n, N_s = n+k) \\
&= P(N_s = n+k \mid N_t = n) \times P(N_{s+h} = n+k \mid N_s = n+k) \\
&= p_{n,n+k}(t,s) \times p_{n+k,n+k}(s, s+h) \\
&= p_{n,n+k}(t,s) \times (1 - h\lambda_{n+k+1}(s) + o(h))
\end{aligned}$$

であり、同様に(2),(3)は、

$$(2) = p_{n,n+k-1}(t,s) \times (h\lambda_{n+k}(s) + o(h))$$

$$(3) = o(h)$$

となるので、

$$\begin{aligned}
p_{n,n+k}(t, s+h) = p_{n,n+k}(t,s) &\times (1 - h\lambda_{n+k+1}(s) + o(h)) \\
&+ p_{n,n+k-1}(t,s) \times (h\lambda_{n+k}(s) + o(h)) + o(h)
\end{aligned}$$

として表される。

ここで$h \to 0$とすると$p_{n,n+k}(t, s+h)$ は次の微分方程式を満たすことが導かれる。（$k=0$の場合は第一項のみ。）

$$\frac{\partial}{\partial s} p_{n,n+k}(t,s) = -\lambda_{n+k+1}(s) p_{n,n+k}(t,s) + \lambda_{n+k}(s) p_{n,n+k-1}(t,s)$$

この微分方程式を解けば、

$$p_{n,n}(t,s) = \exp\left(-\int_t^s \lambda_{n+1}(u)du\right)$$

$$p_{n,n+k}(t,s) = \int_t^s p_{n,n+k-1}(t,v) \exp\left(-\int_v^s \lambda_{n+k+1}(u)du\right) \lambda_{n+k}(v)dv$$

となる。 （証明終）

[定理8.3の証明]

$U_n = u_0 + nc - S_n$ および $S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ より、$i < n$ として、

$$U_n - U_i = (n-i)c - (W_{i+1} + W_{i+2} + \cdots + W_n) \tag{8.13}$$

が成り立つ。

仮定より $W_{i+1}, W_{i+2}, \cdots, W_n$ は互いに独立であるので、(8.13)式と調整係数 $\tilde{R}$ の定義式 $\exp(-c\tilde{R})M_W(\tilde{R}) = 1$ により、

$$\begin{aligned} E(\exp\{-\tilde{R}(U_n - U_i)\}) &= E(\exp\{-\tilde{R}((n-i)c - (W_{i+1} + W_{i+2} + \cdots + W_n))\}) \\ &= \exp\{-\tilde{R}(n-i)c\}E(\exp\{\tilde{R}(W_{i+1} + W_{i+2} + \cdots + W_n)\}) \\ &= \exp\{-\tilde{R}(n-i)c\}M_W(\tilde{R})^{n-i} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{8.14}$$

となる。

さて、ここで恒等式

$$\begin{aligned} E(\exp(-\tilde{R}U_n)) = &\sum_{i=1}^{n} E(\exp(-\tilde{R}U_n) \mid \tilde{T} = i)P(\tilde{T} = i) \\ &+ E(\exp(-\tilde{R}U_n) \mid \tilde{T} > n)P(\tilde{T} > n) \end{aligned} \tag{8.15}$$

を考える。

左辺については、(8.14)式で i=0を代入することにより、

$$E(\exp(-\tilde{R}U_n)) = E(\exp(-\tilde{R}u_0))$$

であることがわかる。

一方、(8.15)式右辺の総和の項については、$U_n - U_i$ が $U_1, U_2, \ldots, U_i$ および事象 $\tilde{T} = i$ と独立であり、(8.14)式が成立することから、

$$\begin{aligned} E(\exp(-\tilde{R}U_n) \mid \tilde{T} = i) &= E(\exp\{-\tilde{R}(U_n - U_i + U_i)\} \mid \tilde{T} = i) \\ &= E(\exp\{-\tilde{R}(U_n - U_i)\})E(\exp(-\tilde{R}U_i) \mid \tilde{T} = i) \\ &= E(\exp(-\tilde{R}U_i) \mid \tilde{T} = i) \end{aligned}$$

となる。したがって、(8.15)式は以下のように変形される。

$$E(\exp(-\tilde{R}u_0)) = \sum_{i=1}^{n} E(\exp(-\tilde{R}U_i) \mid \tilde{T} = i) \cdot P(\tilde{T} = i)$$

$$+E(\exp(-\tilde{R}U_n)\,|\,\tilde{T}>n)\cdot P(\tilde{T}>n) \qquad (8.16)$$

(8.16)式において$n\to\infty$とすると、右辺の第一項は、

$$\sum_{i=1}^{\infty}E(\exp(-\tilde{R}U_i)\,|\,\tilde{T}=i)\cdot P(\tilde{T}=i)=E(\exp(-\tilde{R}U_{\tilde{T}})\,|\,\tilde{T}<\infty)\cdot P(\tilde{T}<\infty)$$

$$=E(\exp(-\tilde{R}U_{\tilde{T}})\,|\,\tilde{T}<\infty)\cdot\tilde{\varepsilon}(u_0)$$

であるから、定理の証明を完成させるためには、(8.16)式右辺の第二項が$n\to\infty$の時0に収束することを示せばよいが、$0\le P(\tilde{T}>n)\le 1$なので、結局$E(\exp(-\tilde{R}U_n)\,|\,\tilde{T}>n)\to 0(n\to\infty)$を示せば十分である。

$$\begin{aligned}
&0\le E(\exp(-\tilde{R}U_n)\,|\,\tilde{T}>n)\\
&=E(\exp(-\tilde{R}U_n)\,|\,\tilde{T}>n,0\le U_n\le E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)})\\
&\quad\times P(\tilde{T}>n,0\le U_n\le E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)})\\
&\quad+E(\exp(-\tilde{R}U_n)\,|\,\tilde{T}>n,E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)}<U_n)\\
&\quad\times P(\tilde{T}>n,E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)}<U_n)\\
&\le P(\tilde{T}>n,0\le U_n\le E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)})\\
&\quad+E(\exp(-\tilde{R}U_n)\,|\,\tilde{T}>n,E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)}<U_n)\\
&\le P(|U_n-E(U_n)|\ge n^{1/6}\sqrt{V(U_n)})\\
&\quad+E(\exp\{-\tilde{R}(E(U_n)-n^{1/6}\sqrt{V(U_n)})\})\\
&\le\frac{1}{n^{1/3}}+\exp\{-\tilde{R}(u_0+\theta mn-n^{1/6}\sqrt{nV(W)})\}\to 0\ (n\to\infty)\quad (m=E(W_i))
\end{aligned}$$

最後の不等式はチェビシェフの不等式、および、

$$E(U_n)=E(u_0+cn-S_n)=u_0+cn-mn=u_0+\theta mn$$

$$V(U_n)=V(u_0+cn-S_n)=V(S_n)=nV(W)$$

を用いている。 (証明終)

[定理8.4の証明]

単位期間あたりの収入保険料である$(1+\theta)\lambda\mu$をcとおく。

$t>0,r>0$として$E(e^{-rU_t})$の値について考える。この値は、

$$\underbrace{E(e^{-rU_t})}_{(8.18)} = \underbrace{E(e^{-rU_t} \mid T \le t)}_{(8.19)} P(T \le t) + E(e^{-rU_t} \mid T > t) P(T > t) \quad (8.17)$$

として表すことができる。

まず、直接(8.18)の値を計算すると、$U_t = u_0 + ct - S_t$より、

$$\begin{aligned} E(e^{-rU_t}) &= E(e^{-r(u_0+ct-S_t)}) \\ &= e^{-r(u_0+ct)} E(e^{rS_t}) \\ &= e^{-r(u_0+ct)} M_{S_t}(r) \\ &= e^{-r(u_0+ct)} \exp\{\lambda t(M_X(r)-1)\} \end{aligned} \quad (8.20)$$

となる[14]。

次に(8.19)の値を考える。

$$U_t = U_T + (U_t - U_T) = U_T + c(t-T) - (S_t - S_T)$$

であるので、これを(8.19)に代入すれば、

$$(8.19) \ = E(e^{-rU_T} e^{-rc(t-T)} e^{r(S_t - S_T)} \mid T \le t) \quad (8.21)$$

となる。

(8.21)式右辺の期待値について、まず、Tによる条件付期待値を計算すると、固定されたTに対して、$-rc(t-T)$は定数であり、$S_t - S_T$はクレーム累計額に対する複合ポアソン過程の前提により$Po(\lambda(t-T))$に従う確率変数であり、さらに、確率変数$S_t - S_T$とU_Tは独立であるので、

$$\begin{aligned} (8.21) &= E(E(e^{-rU_T} e^{-rc(t-T)} e^{r(S_t-S_T)} \mid T) \mid T \le t) \\ &= E(E(e^{-rU_T} \mid T) \cdot e^{-rc(t-T)} \cdot E(e^{r(S_t-S_T)} \mid T) \mid T \le t) \\ &= E(E(e^{-rU_T} \mid T) \cdot e^{-rc(t-T)} \cdot M_{S_t-S_T}(r) \mid T \le t) \\ &= E(E(e^{-rU_T} \mid T) \cdot e^{-rc(t-T)} \cdot \exp\{\lambda(t-T)(M_X(r)-1)\} \mid T \le t) \end{aligned} \quad (8.22)$$

---

[14] $M_{S_t}(r) = \exp\{\lambda t(M_X(r)-1)\}$が成り立つことについては第2章「2.2.2 クレーム総額分布」を参照。

となる。

ここで、$\lambda + rc = \lambda M_X(r)$ を満たす正の解 R、つまり調整係数 R を(8.20)および(8.22)の r に代入すると、

$$(8.20) = e^{-Ru_0}$$

$$\begin{aligned}(8.22) &= E(E(e^{-rU_T} \mid T) \mid T \le t) \\ &= E(e^{-rU_T} \mid T \le t)\end{aligned}$$

となる。

よって、(8.17)式の両辺に $r = R$（調整係数）を代入すると、

$$e^{-Ru_0} = E(e^{-RU_T} \mid T \le t)P(T \le t) + \underbrace{E(e^{-RU_t} \mid T > t)}_{(8.24)}\underbrace{P(T > t)}_{(8.25)} \qquad (8.23)$$

として表せることがわかる。

ここで、(8.23)式において $t \to \infty$ とすると、(8.23)式右辺第一項はそれぞれ、

$$E(e^{-RU_T} \mid T \le t) \xrightarrow{t \to \infty} E(e^{-RU_T} \mid T < \infty)$$

$$\begin{aligned}P(T \le t) \xrightarrow{t \to \infty} P(T < \infty) &= (\text{有限時間内で破産する確率}) \\ &= \varepsilon(u_0)\end{aligned}$$

であるので、(8.23)式右辺第二項 $\to 0(t \to \infty)$ となるならば、

$$e^{-Ru_0} = E(e^{-RU_T} \mid T < \infty) \cdot \varepsilon(u_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon(u_0) = \frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T} \mid T < \infty)}$$

として定理8.4が証明されたことになる。

$0 \le (8.25) \le 1$ より、$(8.24) \to 0(t \to \infty)$ を示せば十分であるが、これは定理8.3の証明における $E(\exp(-\tilde{R}U_n) \mid \tilde{T} > n) \to 0(n \to \infty)$ と全く同じ方法で導くことができる。（証明終）

8.9 練習問題

1．　単位期間のクレーム発生件数が $Po(\lambda)$ に従い、各クレームが一定の免責額を超える（つまり会社が保険金を支払う）確率が p であるものとする。クレームの発生および各クレームの額が独立であるとき、保険金支払のあるクレームの発生件数 N は $Po(p\lambda)$ に従うことを示せ。

2．　パラメータ λ のポアソン過程に従うクレーム件数過程 $\{N_t\}$ に対して、

$$T_n = (n\text{回目のクレームが発生する時刻})$$

として定義される確率変数 T_n は $\Gamma(n,\lambda)$ に従うことを示せ。

3．　強度関数 $\lambda(t)$ が存在する非斉時ポアソン過程 $\{N_t\}$ において、

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)^n}{n!}\exp\left(-\int_s^t \lambda(u)du\right) \qquad (s<t, n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

4．　独立増分過程はマルコフ性を持つことを確認せよ。

5．　マルコフ性を満たすクレーム件数過程 $\{N_t\}$ に対して導かれた、

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= p_{0,n}(0,t) \\ &= \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda_1(u)du\right) & (n=0) \\ \int_0^t p_{0,n-1}(0,v)\exp\left(-\int_v^t \lambda_{n+1}(u)du\right)\lambda_n(v)dv & (n\geq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

が、$\lambda_n(t)=\lambda(t)$ （n に依存しない関数）であるとき、定理8.2　b.)の強度関数を用いた表現、

$$P(N_t = n) = \frac{\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)^n}{n!} \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right) \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

に一致することを確認せよ。

6. 以下の前提に従って、問いに答えよ。(金額はすべて万円単位、確率は小数第3位まで求めること。)

前提① ある保険種目の1契約あたりのクレーム件数は平均0.015のポアソン分布に従い、クレーム額は平均80万円の指数分布に従う。

前提② 上記保険種目のみ引受を行い、当該保険種目の保険金支払いを事業年度期初に保有するサープラス1,500万円と純保険料に安全割増5%を加えた保険料収入とで賄う。

前提③ 引受契約件数は10,000件。

前提④ 契約は全て期初に締結され(同時に保険料を領収する)、保険金は全て当該事業年度期中に支払われる。また、運用益は考えない。

(1) 支払総額の平均、標準偏差および当該事業年度での破産確率を求めよ。

(2) 契約に全て90%の縮小てん補を付した場合の、支払責任総額の平均、標準偏差および当該事業年度での破産確率を求めよ。

(3) 1クレームあたり支払限度額(200万円)を導入した場合の、支払責任総額の平均、標準偏差および当該事業年度での破産確率を求めよ。

＜表＞ 標準正規分布；$u(\varepsilon)$、(上側確率ε)

ε	0.159	0.100	0.050	0.025	0.023
$u(\varepsilon)$	1.000	1.282	1.645	1.960	2.000

※ 自然対数e≒2.72として計算すること。

7. クレーム額が指数分布(確率密度関数$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$)に従う複合ポアソン過程の調整係数を算出した上で、初期サープラスがu_0のときの破産確率

$\varepsilon(u_0)$を求めよ。

8.　以下の保険会社を考える。

前提①　初期サープラスu_0は2,000。

前提②　1年間の収入保険料は3,000で、すべて期初に払い込まれる。

前提③　1年間の支払保険金の確率分布は以下のとおりで、年間を通じ平準的に支払われる。

支払保険金	確率
0	0.3
1,000	0.5
5,000	0.2

前提④　1年間保険金の支払がなかった場合、期末に保険料の20%を無事故戻しとして返戻する。

前提⑤　代理店手数料は保険料の20%で、すべて保険料収入時に支払う。

前提⑥　社費は年額600で、年間を通じ平準的に支出する。

前提⑦　期央サープラスに対し、期末に年5%の運用益が得られる。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 1年後のサープラスU_1の確率分布および1年以内に破産する確率$\tilde{\varepsilon}(u_0,1)$を求めよ。

(2) 2年以内に破産する確率$\tilde{\varepsilon}(u_0,2)$を求めよ。

9. Lundbergモデルにおいて、個々のクレーム額が平均2βのガンマ分布（確率密度関数$f(x)=\beta^{-2}xe^{-x/\beta},\ x>0$）に従うとき、破産確率$\varepsilon(u)$を求めよ。ただし安全割増率は$\theta=7/8$とする。

10. Lundbergモデルにおいて、個々のクレーム額がパレート分布（分布関数$F(x)=1-\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^4,\ x>0$）に従うとき、以下の問いに答えよ。ただし安全割増

率は$\theta=1$とする。(確率は小数第4位まで求めること。)

(1) 初期サープラス0のときの破産確率$\varepsilon(0)$および初期サープラス0で破産が発生したときの欠損額Yの分布関数$F_Y(y)$を求めよ。

(2) Yの分布を、ラウンド法を用いて離散分布により近似せよ。ただし、Yのとりうる値は0,1,2,3とし、$P(Y=3)$は$1-\sum_{y=0}^{2}P(Y=y)$により定めることとする。

(3) (2)の近似を用いて破産確率$\varepsilon(2)$を求めよ。

[参考文献]

1. 損保アクチュアリー学調査研究会訳『損害保険における統計学とその応用』(日本アクチュアリー会会報別冊第142号)
2. 小和田正著『確率過程とその応用』(実教出版)
3. Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, “ACTUARIAL MATHEMATICS”, The Society of Actuaries
4. Hans Bühlmann, “Mathematical Methods in Risk Theory”, Springer
5. C.D.Daykin, T.Pentikäinen, M.Pesonen, “Practical Risk Theory for Actuaries”, Chapman & Hall
6. Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot 著、日本アクチュアリー会損保数理モデル研究会訳『統計データの数理モデルへの適用』
7. Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit, Rob Kaas, “Modern Actuarial Risk Theory”, Kluwer Academic Pub

練習問題解答

1．
$$P(N=n)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}p^n(1-p)^k\left\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!}\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n!k!}(p\lambda)^n\{(1-p)\lambda\}^k e^{-\lambda}$$
$$=\frac{(p\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\{(1-p)\lambda\}^k}{k!}$$
$$=\frac{(p\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}\exp\{(1-p)\lambda\}$$
$$=\frac{(p\lambda)^n e^{-p\lambda}}{n!}$$

2．
$$P(T_n\le t)=P(\text{期間}[0,t]\text{におけるクレーム発生件数が}n\text{件以上})$$
$$=e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^n}{n!}+\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{(\lambda t)^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots\right)$$
$$\frac{dP(T_n\le t)}{dt}=-\lambda e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^n}{n!}+\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right)+e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\lambda(\lambda t)^n}{n!}+\cdots\right)$$
$$=e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda}{\Gamma(n)}e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}$$

3． $s<t$とすると、定理8.2より、$\{N'_t\}$をパラメータ1のポアソン過程に従う確率過程として、
$$P(N_t-N_s=n)=P(N'_{\tau(t)}-N'_{\tau(s)}=n)$$
$$=P(N'_{\tau(t)-\tau(s)}=n)$$
$$=\frac{(\tau(t)-\tau(s))^n}{n!}\exp\{-(\tau(t)-\tau(s))\}$$
が成り立つ。この式に$\tau(t)=\int_0^t\lambda(u)du,\ \tau(s)=\int_0^s\lambda(u)du$ を代入すればよい。

4．$\{N_t\}$を独立増分過程とすると、$t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$として、

$$
\begin{aligned}
&P(N_{t_n} = k_n \mid N_{t_1} = k_1, \cdots, N_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \\
&\qquad = \frac{P(N_{t_1} - N_0 = k_1, \cdots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})}{P(N_{t_1} - N_0 = k_1, \cdots, N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = k_{n-1} - k_{n-2})} \\
&\qquad = \frac{P(N_{t_1} - N_0 = k_1) \times \cdots \times P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})}{P(N_{t_1} - N_0 = k_1) \times \cdots \times P(N_{t_{n-1}} - N_{t_{n-2}} = k_{n-1} - k_{n-2})} \\
&\qquad = P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})
\end{aligned}
$$

となる。

同様に、$P(N_{t_n} = k_n \mid N_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = P(N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1})$であるので、独立増分過程はマルコフ性を満たす。

5．$n=0$の時は成り立っているので、$n \geq 1$の場合を数学的帰納法によって示す。

$n = k\ (k \geq 0)$のとき、

$$
p_{0,k}(0,t) = \frac{\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)^k}{k!} \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right)
$$

が成り立つと仮定すると、

$$
\begin{aligned}
p_{0,k+1}(0,t) &= \int_0^t \frac{\left(\int_0^v \lambda(u)du\right)^k}{k!} \exp\left(-\int_0^v \lambda(u)du\right) \exp\left(-\int_v^t \lambda(u)du\right) \lambda(v)dv \\
&= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right) \int_0^t \frac{\left(\int_0^v \lambda(u)du\right)^k}{k!} \lambda(v)dv \\
&= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right) \int_0^{\int_0^t \lambda(u)du} \frac{s^k}{k!} ds \\
&= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right) \left[\frac{s^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^{\int_0^t \lambda(u)du} \\
&= \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right) \frac{\left(\int_0^t \lambda(u)du\right)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
$$

よって、$\lambda(t)$ がnに依存しない関数であるとき、定理8.2　b)の強度関数を用いた表現に一致する。

6.

(1) **平均値**: クレーム件数の平均値は$n_1 = 10000 \times 0.015 = 150$、1クレーム当たりの支払額期待値は$m_1 = 80$（万円）であるので、支払総額$S_1$の期待値は$E(S_1) = n_1 \times m_1 =$ 12,000（万円）となる。

標準偏差: クレーム額は平均が80万円の指数分布に従うので、確率密度関数は$f(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{80}}}{80}$である。よって、クレーム額の原点周りの2次のモーメントは、

$$\int_0^\infty x^2 \frac{e^{-\frac{x}{80}}}{80} dx = 12800$$

であるので、標準偏差は、

$$\begin{aligned}\sqrt{V(S_1)} &= \sqrt{n_1 \times (\text{クレーム額の2次のモーメント})} \\ &= \sqrt{150 \times 12800} \\ &= 1{,}386(\text{万円})\end{aligned}$$

破産確率: 期初のサープラスをu_0とすると、

$$P(u_0 + 1.05 \times E(S_1) - S_1 < 0) = P\left(\frac{S_1 - E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}} > \frac{u_0 + 0.05 \times E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}} \right)$$

と表される。

$Z = \dfrac{S_1 - E(S_1)}{\sqrt{V(S_1)}}$は標準正規分布に近似的に従うとし、$u_0 = 1{,}500$（万円）を代入して、直線補間により破産確率を求めると、

$$P(Z \geq 1.515) = \frac{(1.645\text{-}1.515) \times 0.10 + (1.515\text{-}1.282) \times 0.05}{(1.645\text{-}1.282)} = 0.0679$$

（$\because P(Z > 1.645) = 0.05$、$P(Z > 1.282) = 0.10$）

よって、破産確率は6.8%となる。

(2) 同様に、$P(Z \geq 1.636) = 0.0512$ より、破産確率は5.1%となる。

(3) **平均値**: クレーム件数の平均値はn_3 ＝10000×0.015=150、1クレーム当たりの支払額期待値は、

$$m_3 = \int_0^{200} x \frac{e^{-\frac{x}{80}}}{80} dx + \int_{200}^{\infty} 200 \frac{e^{-\frac{x}{80}}}{80} dx = 80(1 - e^{-\frac{5}{2}})$$

であるので、支払総額S_3の期待値は$E(S_3) = n_3 \times m_3 =$ 11,017（万円）となる。

標準偏差: クレーム額の原点周りの2次のモーメントは、

$$\int_0^{200} x^2 \frac{e^{-\frac{x}{80}}}{80} dx + \int_{200}^{\infty} 200^2 \frac{e^{-\frac{x}{80}}}{80} dx = 12800\left(1 - \frac{7e^{-5/2}}{2}\right)$$

であるので、

$$\begin{aligned}\sqrt{V(S_3)} &= \sqrt{n_3 \times (\text{クレーム額の２次のモーメント})} \\ &= \sqrt{150 \times 12800\left(1 - \frac{7e^{-5/2}}{2}\right)} \\ &= 1{,}170(\text{万円})\end{aligned}$$

破産確率: $P(Z \geq 1.753) = 0.0414$ より、破産確率は4.1%となる。

	平 均 値（万円）	標準偏差（万円）	破産確率（%）
(1)	12,000	1,386	6.8
(2)	10,800	1,247	5.1
(3)	11,017	1,170	4.1

7. 定理8.4より、

$$\varepsilon(u_0) = \frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T} \mid T < \infty)}$$

が成り立つので、上式右辺の値を計算すればよい。

まず、調整係数Rを求める。Rは、

$$1 + (1+\theta)\mu r = M_X(r) \qquad (\mu = E(X))$$

の解であるから、$X \sim \Gamma(1, \lambda)$ より、

$$1+(1+\theta)\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot r=\frac{\lambda}{\lambda-r}$$

$$R=\frac{\theta\lambda}{1+\theta}$$

となる。

次に、$T<\infty$という条件の下での$-U_T$の分布を導く。

$$P(-U_T\le y\,|\,T<\infty)=1-P(-U_T>y\,|\,T<\infty)$$

であり、右辺第2項を破産直前のサープラス$U_{T-\delta}$および破産時点Tで起こったクレームの額Xを用いて表現すれば、

$$P(-U_T>y\,|\,T<\infty)=\frac{P(X>U_{T-\delta}+y)}{P(X>U_{T-\delta})}$$

となり、右辺を計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{P(X>U_{T-\delta}+y)}{P(X>U_{T-\delta})}&=\frac{\lambda\int_{U_{T-\delta}+y}^{\infty}e^{-\lambda x}dx}{\lambda\int_{U_{T-\delta}}^{\infty}e^{-\lambda x}dx}\\&=\frac{e^{-\lambda(U_{T-\delta}+y)}}{e^{-\lambda U_{T-\delta}}}\\&=e^{-\lambda y}\end{aligned}$$

として確率変数$U_{T-\delta}$に依存しないyの関数となることがわかる。

よって、$T<\infty$という条件の下での$-U_T$の分布関数は、

$$P(-U_T\le y\,|\,T<\infty)=1-e^{-\lambda y}$$

であり、確率密度関数は、

$$\frac{dP(-U_T\le y\,|\,T<\infty)}{dy}=\lambda e^{-\lambda y}$$

つまり、指数分布に従うことがわかった。

よって、

$$\begin{aligned}E(e^{-RU_T}\,|\,T<\infty)&=(\text{指数分布の積率母関数})\\&=\frac{\lambda}{\lambda-R}\end{aligned}$$

であるので、破産確率$\varepsilon(u_0)$は

$$\varepsilon(u_0)=\frac{e^{-Ru_0}}{\lambda/(\lambda-R)}=\frac{\exp\left(-\dfrac{\theta\lambda u_0}{1+\theta}\right)}{\dfrac{\lambda}{\lambda-\theta\lambda/(1+\theta)}}$$

$$=\frac{1}{1+\theta}\exp\left(-\frac{\theta\lambda u_0}{1+\theta}\right)$$

となる。

8.

(1) 1年目の保険金が0のとき(確率0.3)

期央サープラス ＝ 2,000 ＋ 3,000 - 600 - 0/2 - 600/2 ＝ 4,100

運用益 ＝ 4,100×5% ＝ 205

期末サープラス ＝ 2,000 + 3,000 - 600 - 0 - 600 - 600 ＋ 205 ＝ 3,405

同様に、

1年目の保険金が1,000のとき(確率0.5)

期央サープラス ＝ 3,600、運用益 ＝ 180、期末サープラス ＝2,980

1年目の保険金が5,000のとき(確率0.2)

期央サープラス ＝ 1,600、運用益 ＝ 80、期末サープラス ＝ －1,120

したがって、1年後のサープラスU_1の確率分布は以下のとおりとなる。

サープラス	確率
3,405	0.3
2,980	0.5
-1,120	0.2

また、1年以内に破産する確率$\tilde{\varepsilon}(u_0,1)$ ＝ 0.2である。

(2) 1年後のサープラスU_1が3,405、2,980それぞれの場合について、(1)と同様に2年後のサープラスU_2を求めればよい。

(a) 1年後のサープラスが3,405のとき(確率0.3)

(a-1) 2年目の保険金が0のとき(確率0.3×0.3)

期央サープラス ＝ 5,505、運用益 ＝ 275.25、期末サープラス ＝4,880.25

(a-2) 2年目の保険金が1,000のとき(確率0.3×0.5)

期央サープラス ＝ 5,005、運用益 ＝ 250.25、期末サープラス ＝4,455.25

(a-3) 2年目の保険金が5,000のとき(確率0.3×0.2)

期央サープラス ＝ 3,005、運用益 ＝ 150.25、期末サープラス ＝ 355.25

(b) 1年後のサープラスが2,980のとき(確率0.5)

(b-1) 2年目の保険金が0のとき(確率0.5×0.3)

期央サープラス ＝ 5,080、運用益 ＝ 254、期末サープラス ＝4,434

(b-2) 2年目の保険金が1,000のとき(確率0.5×0.5)

期央サープラス ＝ 4,580、運用益 ＝ 229、期末サープラス ＝4,009

(b-3) 2年目の保険金が5,000のとき(確率0.5×0.2)

期央サープラス ＝ 2,580、運用益 ＝ 129、期末サープラス ＝ -91

以上により、1年目に破産しなかった場合に、2年後のサープラスが負値となるのは(b-3)の場合のみである。

したがって、

$$\tilde{\varepsilon}(u_0,2)=\tilde{\varepsilon}(u_0,1)+\sum_{u<0}P(U_2=u,\tilde{T}>1)$$

$$= 0.2 + 0.5\times 0.2 = 0.3$$

9. (8.6)式より、存続確率は $\rho'(u)=\dfrac{\lambda}{c}\{\rho(u)-\int_0^u \rho(u-x)dF(x)\}$ である。

これに $c=(1+\theta)\lambda\mu$ 、$\mu=2\beta$ 、$f(x)=\beta^{-2}xe^{-x/\beta}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
&2(1+\theta)\beta\rho'(u)\\
&=\rho(u)-\int_0^u \rho(u-x)\beta^{-2}xe^{-x/\beta}dx\\
&=\rho(u)-\int_0^u \rho(x)\beta^{-2}(u-x)e^{-(u-x)/\beta}dx
\end{aligned}$$

$$= \rho(u) - \beta^{-2} u e^{-u/\beta} \int_0^u \rho(x) e^{x/\beta} dx + \beta^{-2} e^{-u/\beta} \int_0^u x \rho(x) e^{x/\beta} dx$$

ここで、$g(u) = \int_0^u \rho(x) e^{x/\beta} dx$ とおくと、

$$2(1+\theta)\beta\rho'(u) = \rho(u) - \beta^{-2} u e^{-u/\beta} g(u) + \beta^{-2} e^{-u/\beta} \int_0^u x g'(x) dx$$

第3項の積分は、部分積分を用いると、

$$\int_0^u x g'(x) dx = \left[x g(x) \right]_0^u - \int_0^u g(x) dx = u g(u) - \int_0^u g(x) dx$$

なので、

$$\begin{aligned} &2(1+\theta)\beta\rho'(u) \\ &\quad = \rho(u) - \beta^{-2} u e^{-u/\beta} g(u) + \beta^{-2} e^{-u/\beta} \left(u g(u) - \int_0^u g(x) dx \right) \\ &\quad = \rho(u) - \beta^{-2} e^{-u/\beta} \int_0^u g(x) dx \cdots ① \end{aligned}$$

両辺を微分すると、

$$2(1+\theta)\beta\rho''(u) = \rho'(u) + \beta^{-3} e^{-u/\beta} \int_0^u g(x) dx - \beta^{-2} e^{-u/\beta} g(u)$$

であり、これと①式から、

$$2(1+\theta)\beta\rho''(u) = -(1+2\theta)\rho'(u) + \beta^{-1}\rho(u) - \beta^{-2} e^{-u/\beta} g(u) \cdots ②$$

を得る。さらに両辺を微分すると、

$$\begin{aligned} &2(1+\theta)\beta\rho'''(u) \\ &= -(1+2\theta)\rho''(u) + \beta^{-1}\rho'(u) + \beta^{-3} e^{-u/\beta} g(u) - \beta^{-2} e^{-u/\beta} g'(u) \\ &= -(1+2\theta)\rho''(u) + \beta^{-1}\rho'(u) + \beta^{-3} e^{-u/\beta} g(u) - \beta^{-2} \rho(u) \end{aligned}$$ （$\because g(u)$ の定義より）

であり、これと②式から、

$$\rho'''(u) + \frac{3+4\theta}{2+2\theta} \beta^{-1} \rho''(u) + \frac{\theta}{1+\theta} \beta^{-2} \rho'(u) = 0$$

を得る。

これを $\rho'(u)$ についての微分方程式と考えると、その解は

$$\rho'(u) = C_1 e^{\alpha_1 u} + C_2 e^{\alpha_2 u} \quad (C_1, C_2 \text{は積分定数})$$

となる。ここで、α_1, α_2 は方程式 $t^2 + \frac{3+4\theta}{2+2\theta}\beta^{-1} t + \frac{\theta}{1+\theta}\beta^{-2} = 0$ の2つの解で

あり、$t=\dfrac{-3/2-2\theta\pm\sqrt{9/4+2\theta}}{2\beta(1+\theta)}=-\dfrac{1}{3\beta},-\dfrac{7}{5\beta}$より、

$$\rho'(u)=e^{-u/(3\beta)}C_1+e^{-7u/(5\beta)}C_2\cdots③$$

よって、

$$\rho(u)=-3\beta e^{-u/(3\beta)}C_1-\frac{5\beta}{7}e^{-7u/(5\beta)}C_2+C_3\quad(C_3\text{は積分定数})$$

であるが、$\rho(\infty)=1$より$C_3=1$なので、結局

$$\rho(u)=1-3\beta e^{-u/(3\beta)}C_1-\frac{5\beta}{7}e^{-7u/(5\beta)}C_2\cdots④$$

となる。

③、④式においてそれぞれ$u=0$とすると、

$$\rho'(0)=C_1+C_2$$

$$\rho(0)=1-3\beta C_1-\frac{5\beta}{7}C_2$$

であり、また、(8.4)式より$\rho(0)=\dfrac{\theta}{1+\theta}=\dfrac{7}{15}$、①式において$u=0$とすることにより$\rho(0)=2(1+\theta)\beta\rho'(0)=\dfrac{15}{4}\beta\rho'(0)$が得られるので、これらを用いると、

$$C_1=\frac{7}{36\beta}\text{、}C_2=-\frac{7}{100\beta}$$

したがって、

$$\rho(u)=1-\frac{7}{12}e^{-u/(3\beta)}+\frac{1}{20}e^{-7u/(5\beta)}$$

よって求める破産確率は

$$\varepsilon(u)=1-\rho(u)=\frac{7}{12}e^{-u/(3\beta)}-\frac{1}{20}e^{-7u/(5\beta)}$$

となる。

10.

(1) (8.4)式より、$\varepsilon(0)=\dfrac{1}{1+\theta}=\dfrac{1}{2}$

また、$\mu = E[X] = \int_0^\infty \{1-F(x)\}dx = \int_0^\infty (x+1)^{-4}dx = \left[-\frac{(x+1)^{-3}}{3}\right]_0^\infty = \frac{1}{3}$であり、

(8.5)式より、$F_Y(y) = \frac{1}{\mu}\int_0^y \{1-F(u)\}du = \frac{1}{\mu}\int_0^y (x+1)^{-4}du = 1-(y+1)^{-3}$ $(y>0)$

(2) ラウンド法は、連続分布における離散値の前後一定区間の確率を当該離散値の確率とする手法であるので[15]、$P(Y<0.5)$、$P(0.5\le Y<1.5)$、$P(1.5\le Y<2.5)$をそれぞれ$P(Y=0)$、$P(Y=1)$、$P(Y=2)$とし、残りを$P(Y=3)$とすればよい。

$$P(Y=0) = F_Y(0.5) = 1-1.5^{-3} = 0.7037$$

$$P(Y=1) = F_Y(1.5) - F_Y(0.5) = 1.5^{-3} - 2.5^{-3} = 0.2323$$

$$P(Y=2) = F_Y(2.5) - F_Y(1.5) = 2.5^{-3} - 3.5^{-3} = 0.0407$$

$$P(Y=3) = 1-\sum_{y=0}^{2} P(Y=y) = 0.0233$$

(3) 8.7.5節で定義した確率変数K, $L=\sum_{n=1}^{K} L_n$を用いると、求める破産確率は、

$$\varepsilon(2) = P(L>2)$$

と表される。

Kは成功確率$p=\theta/(1+\theta)=1/2$の幾何分布に従うので、$p_k = P(K=k)$とおくと、

$$p_k = (1-p)^k p = (1-p)p_{k-1}$$

であり、$a=1-p$, $b=0$とおくと$p_k = \left(a+\frac{b}{k}\right)p_{k-1}$の形に表すことができる。

---

[15] 第2章参照。

また L_n は Y と同一の分布に従うので、(2)により離散化した Y の確率分布を用いると、再帰法により L の確率分布を求めることができる。

$$P\left(L=0\right)=P_K\left(P(Y=0)\right)=\frac{p}{1-P(Y=0)(1-p)}=0.7714$$

（$P_K(t)$ は K の確率母関数）

$$P\left(L=1\right)=\frac{\sum_{y=1}^{1}\left(a+\frac{by}{1}\right)P\left(Y=y\right)P\left(L=1-y\right)}{1-a\cdot P\left(Y=0\right)}$$

$$=\frac{1-p}{1-(1-p)P\left(Y=0\right)}P\left(Y=1\right)P\left(L=0\right)$$

$$=0.1382$$

$$P\left(L=2\right)=\frac{\sum_{y=1}^{2}\left(a+\frac{by}{2}\right)P\left(Y=y\right)P\left(L=2-y\right)}{1-a\cdot P\left(Y=0\right)}$$

$$=\frac{1-p}{1-(1-p)P\left(Y=0\right)}\left\{P\left(Y=1\right)P\left(L=1\right)+P\left(Y=2\right)P\left(L=0\right)\right\}$$

$$=0.0490$$

したがって、

$$\varepsilon(2)=P(L>2)=1-\sum_{l=0}^{2}P(L=l)=0.0414$$

となる。

第９章

再　保　険

第9章　再保険

9.1　再保険の種類と概要

9.1.1　再保険とは

保険会社は、自ら引き受けた元受保険契約に基づく保険責任について、当然にそのすべてを負担する。しかしながら、リスクが巨大な保険契約等については、当該会社だけではそのすべてを負担できないので、その保険責任の一部を他へ転嫁することがある。このように、元受保険契約に基づいて当該保険会社が負う保険責任について、元受保険契約とは全く別にその全部または一部を他の保険会社へ転嫁すること、またはその転嫁した保険契約を**再保険**という。なお、受再保険契約についても上記元受保険契約と全く同様に新たに出再されることがあり、その場合には、再々保険とも呼ばれる。

9.1.2　再保険の目的と機能

(1)　保険会社の事業成績の安定化

a.　ポートフォリオ（契約集団）の大数化・平準化

保険は大数の法則を基盤とする経済機構であるため、事業成績の安定化を図るためには、同質のリスクを数多く集めることが重要であるが、再保険を利用することにより、ポートフォリオの大数化・平準化を図ることができる。

b.　異常損害に対するプロテクション

リスクを大数化・平準化したポートフォリオが構築できたとしても、地震や台風などの大規模な自然災害が発生すると、個々のリスクの集積により巨額な保険金支払が生じる可能性がある。

再保険はこうした巨大災害リスクによる損害に対するプロテクションとして、元受保険会社の単年度の事業成績の大幅な悪化を防ぐことに役立つ。

(2) 元受保険会社の引受能力の補完

損害保険においては、自己の勘定のみで負担するには過大な保険金額のリスクが数多く存在する。このようなリスクに対しても、負担能力を超える部分について再保険を手配することにより、元受保険者の引受が可能となる。

9.1.3 再保険の種類

再保険を契約手続き面により分類すると、再保険条件等の取引内容を個々の元受契約について個別に取り決める**任意再保険**(facultative reinsurance)と、複数の元受契約につき包括して取り決める**特約再保険**(treaty reinsurance)[1]に分類される。また、責任分担方法によって、**割合再保険**(proportional reinsurance)と**非割合再保険**(non-proportional reinsurance)に分類される。

再保険の目的に応じて、これらはさまざまに組み合わせて運用され、いろいろな種類の再保険取引が行われている。

9.1.4 再保険の概要

(1) 任意再保険と特約再保険

任意再保険とは、出再会社が自由に、かつ、個別に受再会社(再保険者)を選択して出再を行い、再保険者は個々の危険判断に基づいてその引受の可否を決定する取引であり、歴史的に見て最も古い再保険形態である。

任意再保険は、割合再保険と非割合再保険の両方の形で取引されており、どちらも広く行われている。

一方、特約再保険は、任意再保険と異なり、個々の契約毎に再保険交渉を

---

1 再保険において、特約とは特約再保険(treaty reinsurance)のことを指し、元受契約上付帯される特約条項(endorsement)とは全く別のものである。

行わず出再会社と受再会社があらかじめ、対象契約の範囲、保有金額、出再限度額などの再保険内容を取り決め、この契約内容に従って、個々の元受契約の再保険を行うものであり、任意再保険が拡大していく中で発展的に生まれてきた再保険形態である。

(2) 割合再保険と非割合再保険

出再会社と再保険会社の責任関係により次のとおり分類できる。

① 割合再保険(proportional reinsurance)

a. 比例再保険(quota share reinsurance)

b. 超過額再保険(surplus reinsurance)

② 非割合再保険(non-proportional reinsurance)

c. 超過損害額再保険(excess of loss cover)

d. ストップロス再保険(stop loss cover)

a. 比例再保険

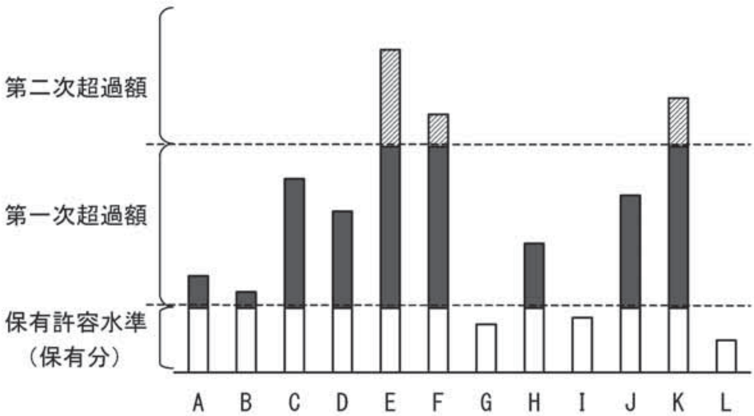
対象となるすべての契約を一定の割合で出再する方法である。たとえば、80%比例再保険特約の場合、全ての契約に対し保険料は20:80の割合で出再会社と再保険会社に配分され、保険事故が発生した場合、保険金については出再会社が被保険者に元受保険金の100%を支払い、後日80%分を再保険会社から回収することとなる。すなわち、保険料および保険金とも、出再会社と再保険会社は一定割合(ここでは20:80)で保有または出再されるので、比例再保険は、割合再保険に分類される。

b. 超過額再保険

出再会社は、あらかじめ定められた保有規定に基づいて保有額を決定し、それを超過する部分(surplus または excess)を出再する方式である。

全契約とも保有額が同一である場合、この再保険方式の保有と出再は図9-1のとおりとなる。

図9-1 超過額再保険



（注）白地部分は元受会社の保有部分、黒地部分は再保険部分を表す。

A～L までの契約について、個々に保有規定により、保有額を決定し、超過額分をこの再保険により出再するが、この場合、G, I, L の各契約については100%保有され、出再されない。また、E, F, K の各契約の第二次超過額は、元受会社の二次保有となるが、別の再保険会社に出再（2nd surplus：任意再保険）されることが多い。

この再保険方式においても、個々の契約についてみれば、保険料および保険金とも、出再会社と再保険会社との間で、保険料・保険金の額に関係なく同一割合で保有または出再されるので、超過額再保険は、割合再保険に分類される。

c. 超過損害額再保険（excess of loss cover: ELC再保険）

超過損害額再保険は、対象契約のいずれかに損害が発生し、その額が予め定めた一定額（**エクセスポイント**（excess point）という）を超過する場合、その超過部分のうち予め定めた再保険責任限度額(cover limit)を限度に再保険金として回収するものであり、保険料の出再割合と再保険金の回収割合が元受

支払保険金の大きさにより異なるため、非割合再保険といわれる。

再保険料率は、理論的には、保有責任額、再保険責任額、対象契約の内容、対象契約の全体の保険料、事故頻度等により決定されるべきであるが、実際には、さらに、過去に回収した再保険金等を勘案して、調整されることが多い。また、世界の再保険市場の動向により大きく変動することがある。

d. ストップロス再保険

ストップロス再保険は、対象とする契約集団の一定期間（通常1年間）の累計損害額（または損害率）が、あらかじめ定められた一定額（**エクセスポイント**（excess point）という）（あるいは一定率）を超過する場合、この超過損害額を再保険金として回収するものである。

9.2 再保険と破産確率

保険会社が再保険を行う主な理由は、保険金支払件数や支払保険金の平均額が一定せず過大な損害を被る可能性にさらされているため、再保険によってこれを回避することにある。

過大な損害とは、保険会社にとって許容できず、最悪の場合に保険会社が破産するという損害であり、これは、期首のリザーブと保険料収入との合計によって決定される。このことは、図9-2（ある特定期間（通常1事業年度）の保険会社の支払保険金の累計額の密度関数Fを示したもの）により簡単に説明することができる。

図9-2

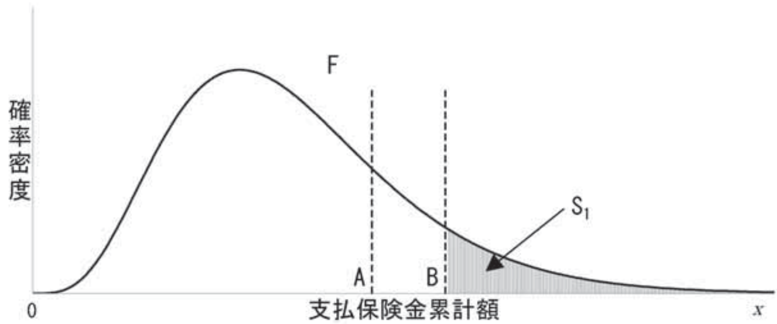


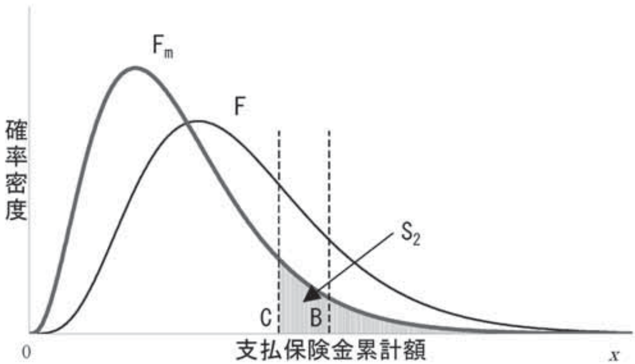
図9-2において、x軸は支払保険金の累計額であり、点Aは、会社の期首のリザーブR_0に当該期間中の収入危険保険料の累計額Pを加えたものに等しい。ここで、もし支払保険金の累計額がAを超えるならば保険会社は破産するであろう。このためAより右側にある分布曲線の下の面積は、その保険会社の

破産確率[2]となる。

そこで、保険会社は保険料に偶発事故に対する安全割増αを組み込むことによって、その資金を$R_0 + P(1+\alpha) = B$まで増加させ、それによって破産確率を低下させることができる。

それにもかかわらず、保険会社が当該期間内に累計でBを超える保険金支払いに見舞われる危険は残る。面積S_1はこの場合の破産確率を表している。再保険の目的は、再保険料を支払ってこの危険を減少することであるが、このことを示したのが図9-3である。

図9-3



再保険を行った場合、図9-3のように分布曲線の末尾の部分が短く(低く)なるように保険金の密度関数が修正される。曲線F_mは、支払保険金の保有部分の分布を表したものである。

図9-3において、Bは、図9-2におけるBと同一であるが、保険会社が支払う再保険料の総保険料に対する割合をωとすると、保険会社の資金量は、

2　9.2においては「破産確率」という用語を「1年後に 支払保険金＞期首リザーブ＋収入危険保険料 となっている確率」という意味で用いている。

$C = R_0 + P(1+\alpha)(1-\omega)$ まで減少する。したがって、この場合の破産確率は、面積 S_2 となる。

このように、再保険の目的が会社の破産確率を減少させることである場合は、$S_2 < S_1$ であるときに再保険を利用することができる。

また、再保険と破産確率との関係は、簡単な例によっても説明することができる。最も簡単な例として、次のとおり、保険金支払件数のみ変動し、常に保険金が保険金額に等しい場合を考えてみる。

例9-1 再保険と破産確率

保険金額	100万円
平均事故発生率	0.007
契約件数	1,000件
リザーブ	300万円

とする。このとき、1件あたりの危険保険料は、100万円×0.007=0.7万円 となる(経費や利息、安全割増は考慮しないものとする)。したがって、総危険保険料は、0.7万円×1000件=700万円である。

この例のポートフォリオにおいて n 件以下の保険金支払いが生じる確率は、

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{1000}{k} 0.007^k (1-0.007)^{1000-k}$$

により与えられる。この確率を実際に計算すると、表9-1のようになる。

もし再保険を行わず、かつ保険金の支払いに充てられる資金が収入保険料のみであれば、7件(支払保険金累計額700万円)までの保険金の支払が可能である。表9-1より、この場合の確率は0.59871である。

8件以上の事故が発生すると、保険会社は破産するが、この破産確率は、

$$1 - 0.59871 = 0.40129$$

となる。

しかしながら、この例では300万円のリザーブがあるので、10件(支払保険金

累計額1,000万円）までの保険金の支払が可能であり、破産確率は、表9-1により、

1－0.90222＝0.09778

となる。

表9-1

保険金支払件数 n	支払保険金 の累計額	n件以下の 発生確率
7	700万円	0.59871
8	800万円	0.72954
9	900万円	0.83121
10	1,000万円	0.90222
11	1,100万円	0.94728
12	1,200万円	0.97346
13	1,300万円	0.98748
14	1,400万円	0.99445
15	1,500万円	0.99768

これらの契約に対し、50％比例再保険を行った場合の収支は、表9-2のとおりとなる。

表9-2

	再保険を 行わない場合	50％比例再保険 を行う場合
総危険保険料	700万円	700万円
総保有保険料	700万円	350万円
リザーブ	300万円	300万円
総資金	1,000万円	650万円
支払保険金累計額の期待値	700万円	350万円
差引残高の期待値	300万円	300万円

再保険料を支払った後の保険会社の総資金650万円は、13件（支払保険金累計額1,300万円）までの保険金を支払うことができ、この破産確率は、

1－0.98748＝0.01252

に減少する。

この例では単純な比例再保険について検討したが、他の再保険を使用した場合であっても同様の効果がある。

また、この例では純保険料部分のみを考慮しているが、実際には元受契約に係る期待収益も再保険者に移転しており、一般に再保険を行った場合は差引残高は減少する。元受保険者は、収益の減少と引換えに破産確率の減少を得ることになる。

9.3 再保険料の算出方法

9.3.1 割合再保険の場合

比例再保険および超過額再保険においては、簡単に再保険料を計算することができる。すなわち、再保険料の元受保険料に対する割合が、再保険者の保険金の負担割合（出再割合）と同じであり、この出再割合またはその決定方法が再保険契約で決められているので、この出再割合によって再保険料を直接算出することができる。

9.3.2 非割合再保険の場合

再保険料は、前述のとおり、

① 保有責任額、再保険責任額等の再保険契約の条件

② 対象契約の内容、元受保険料、事故頻度等

③ 過去の再保険成績

④ 再保険市場の動向など

により決定される。

再保険者の負担する保険金の期待値をネット再保険料といい、これは、上記①および②をもとに数学的手法を用いて算出できる場合が多い。この**ネット再保険料**に、経費、手数料、利潤、元受契約のポートフォリオの特性に応じた適切な安全割増などの付加保険料を加えたものを**グロス再保険料**という。実際に適用される再保険料は、このグロス再保険料をもとに、出再会社と再保険者との交渉の中で、上記③および④を勘案して決定される。

ここでは、ネット再保険料の算出方法について検討する。

(1) 超過損害額再保険(ELC再保険)

ELC再保険のネット再保険料は、元受ポートフォリオにおける、支払保険金1件の金額Xの分布関数$F_X(x)$を使って求める。

超過損害額再保険では、再保険金は、各支払保険金のエクセスポイントmを超える部分である。すなわち、支払保険金Xの事故に対する再保険金は、$X > m$の場合は$X - m$であり、$X \leq m$の場合は0となる。

したがって、元受ポートフォリオの保険金支払件数の期待値をλとすると、再保険金の期待値、すなわちポートフォリオ全体のネット再保険料は、スティルチェス積分により次のとおり表すことができる。

$$P = \lambda \int_m^\infty (x-m)dF_X(x)$$

(2) ストップロス再保険

ストップロス再保険では、再保険金I_dは、対象とする契約集団の一定期間(以降1年間とする)の累計支払保険金総額Sが、エクセスポイントdを超える部分である。

$$I_d = \begin{cases} 0 & S \leq d \\ S-d & S > d \end{cases}$$

ストップロス再保険のネット再保険料は、支払保険金総額Sの分布関数を$F_S(x)$とすると、スティルチェス積分[3]により次のとおり表される。

$$P_d = E(I_d) = \int_d^\infty (x-d)dF_S(x) \qquad (9.1)$$

支払保険金総額Sが確率密度関数$f_S(x)$を持つ場合は、(9.1)式はさらに次のように表すことができる。

---

3 序章参照。

$$E(I_d)=\int_d^{\infty}(x-d)f_S(x)dx \tag{9.2}$$

$$=E(S)-d+\int_0^d(d-x)f_S(x)dx \tag{9.3}$$

ここで、$x-d=\int_d^x 1dt$ を (8.2)式に代入すると、

$$(9.2)式 =\int_d^{\infty}\left(\int_d^x 1\,dt\right)f_S(x)dx=\int_d^{\infty}\int_d^x f_S(x)dtdx$$

となり、この二重積分の積分順序を交換すると、

$$上式 =\int_d^{\infty}\int_t^{\infty}f_S(x)dxdt=\int_d^{\infty}(1-F_S(t))dt \tag{9.4}$$

として分布関数の積分によって表現する式が得られる。

また、$E(S)=E(I_0)$ および $E(I_0)=\int_0^{\infty}(1-F_S(t))dt$ を用いれば、

$$(9.4)式 =E(S)-\int_0^d(1-F_S(t))dt \tag{9.5}$$

となる。

支払保険金総額Sを複合ポアソン分布を用いてモデル化する場合、期待値は容易に計算できるものの確率の計算が難しい場合が多い。(9.3)式および(9.5)式は積分区間が$(0,d)$に限定されているため、$f_S(x)$についての近似もこの範囲のみで良く、この点において(9.2) 式および(9.4) 式と比べ使い勝手がよい。

支払保険金総額Sのとりうる値が非負の整数($0,1,2,\cdots$)であり、エクセスポイントdもまた非負の整数である場合には、Sの確率関数を$f_S(k)$ $(k=0,1,2,\cdots)$として、

$$E(I_d)=\sum_{k=d+1}^{\infty}(k-d)f_S(k) \tag{9.6}$$

$$=E(S)-d+\sum_{k=0}^{d-1}(d-k)f_S(k) \tag{9.7}$$

となり、さらに(9.6)式において$k-d=\sum_{l=d+1}^{k}1$ を代入して和の順序を交換すれ

ば、

$$(9.6)式 = \sum_{k=d+1}^{\infty}\sum_{l=d+1}^{k} f_S(k) = \sum_{l=d+1}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} f_S(k)$$

$$= \sum_{l=d+1}^{\infty}(1-F_S(l-1)) = \sum_{l=d}^{\infty}(1-F_S(l)) \tag{9.8}$$

が得られる。また、$E(S)=E(I_0)$ および $E(I_0)=\sum_{l=0}^{\infty}(1-F_S(l))$ を用いれば、

$$(9.8)式 = E(S) - \sum_{l=0}^{d-1}(1-F_S(l)) \tag{9.9}$$

となる。

例9-2　支払保険金総額 S がガンマ分布に従う場合

ガンマ分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ の分布関数を $F_{\alpha,\beta}(x)$、確率密度関数を $f_{\alpha,\beta}(x)$ とする。

このとき、エクセスポイントを d とするストップロス再保険のネット再保険料 $E(I_d)$ は、

$$E(I_d) = \int_d^{\infty}(x-d)f_{\alpha,\beta}(x)dx$$

$$= \int_d^{\infty} x\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx - \int_d^{\infty} d\cdot f_{\alpha,\beta}(x)dx$$

$$= \int_d^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\alpha}{\beta}x^{\alpha}e^{-\beta x}dx - d(1-F_{\alpha,\beta}(d))$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\int_d^{\infty} f_{\alpha+1,\beta}(x)dx - d(1-F_{\alpha,\beta}(d))$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}(1-F_{\alpha+1,\beta}(d)) - d(1-F_{\alpha,\beta}(d))$$

として表すことができる。

例9-3　支払保険金総額 S が複合ポアソン分布に従う場合

保険金支払件数が平均0.8のポアソン分布に従い、支払保険金1件の金額 X の分布が、

$$P(X=k)=\begin{cases}0.2 & (k=1)\\0.7 & (k=2)\\0.1 & (k=3)\end{cases}$$

である場合のエクセスポイントを$d=4$とするストップロス再保険のネット再保険料$E(I_4)$を考える。（個々の支払保険金の額および保険金支払件数は独立であるものとする。つまり、支払保険金総額Sは複合ポアソン分布に従うものとする。）

支払保険金総額Sの期待値は$E(S)=0.8\times E(X)=1.520$として直ちに求まるので、(9.7)式によって$E(I_4)$を計算することとする。(9.7)式によって$E(I_4)$を求める際に必要となる$f_S(k)$ $(k=0,1,2,3)$を計算すると次のようになる[4]。

$$f_S(0)=（支払件数0件である確率）$$
$$=e^{-0.8}=0.449$$
$$f_S(1)=（支払件数1件、支払保険金1である確率）$$
$$=\frac{0.8}{1!}\times e^{-0.8}\times 0.2=0.072$$
$$f_S(2)=（支払件数1件、支払い保険金2である確率）$$
$$+（支払件数2件、支払い保険金それぞれ1である確率）$$
$$=\frac{0.8}{1!}\times e^{-0.8}\times 0.7+\frac{0.8^2}{2!}\times e^{-0.8}\times 0.2^2=0.257$$
$$f_S(3)=（支払件数1件、支払保険金3である確率）$$
$$+（支払件数2件、支払保険金それぞれ1,2である確率）$$
$$+（支払件数3件、支払保険金すべて1である確率）$$

4 離散的な値のみをとる場合の複合ポアソン分布の確率の計算方法はいくつかある。（第1章参照） ここでは最も直接的な方法により計算している。

$$= \frac{0.8}{1!} \times e^{-0.8} \times 0.1 + \frac{0.8^2}{2!} \times e^{-0.8} \times 2 \times 0.2 \times 0.7 + \frac{0.8^3}{3!} \times e^{-0.8} \times 0.2^3$$
$$= 0.077$$

よって、(9.7)式より、

$$E(I_4) = E(S) - 4 + \sum_{k=0}^{3} (4-k) f_S(k) = 0.124$$

としてネット再保険料 $E(I_4)$ が計算される。

例9-3のように支払保険金総額 S が非負の整数のみをとる複合ポアソン分布に従い、エクセスポイント d も非負の整数である場合には、ストップロス再保険のネット再保険料 $E(I_d)$ の計算にあたっては次の漸化式が有用である。

$$\begin{cases} f_S(k) = \lambda \sum_{l=1}^{k} \frac{l \cdot p_l}{k} f_S(k-l) \\ F_S(k) = F_S(k-1) + f_S(k) \\ E(I_k) = E(I_{k-1}) - (1 - F_S(k-1)) \end{cases} \tag{9.10}$$

ここで、λ は支払件数の従うポアソン分布の平均であり、p_l は支払保険金1件の金額 X が l となる確率である。

一つめの式は第1章において導いた漸化式であり、二つめの式は分布関数の定義より、また三つめの式は(9.9)式より明らかである。

(9.10)を用いれば、

$$f_S(0) = F_S(0) = e^{-\lambda}, \quad E(I_0) = E(S) = \lambda E(X)$$

からスタートして、

$$f_S(0), F_S(0), E(I_0) \to f_S(1), F_S(1), E(I_1) \to f_S(2), F_S(2), E(I_2) \to \cdots$$

として順次 $E(I_k)(k = 0,1,2,\cdots)$ を計算することができる。

9.4　保有保険金および再保険金の確率変動

あるポートフォリオに対して種々の再保険案を検討する場合、その選択基準としては、破産確率の縮小効果と並んで、保有保険金および再保険金の確率変動の大きさが重要なポイントとなる。

たとえば、比例再保険およびストップロス再保険のように、「再保険者の責任額が保険会社の年間の支払保険金総額から直接的に算出される」関数型の再保険方式を考えてみる。関数型の再保険においては再保険者の支払責任は、元受保険金が少数の大クレームから成っているか、または、多数の小クレームから成っているかどうかには影響されず、支払保険金総額のみに影響される。

そこで、ここでは、関数型の再保険方式について、いくつかの確率変数の分散を検討する。

まず、保有保険金と再保険金の分散に関して、次の定理が成り立つ。

定理9.1 任意の関数型ではない再保険処理に対して、再保険料は同一であるが、保有保険金、再保険金とも分散が小さくなる関数型の再保険処理が常に存在する。

証明 元受保険金をXとして、保有保険金がY、再保険金が$Z=X-Y$である任意の関数型ではない再保険処理に対して、再保険金が$E(Z\mid X)$である関数型の再保険処理を考える。

$E(E(Z\mid X))=E(Z)$よりそれぞれのネット再保険料は同一である。

また、

$$V(Z)=V(E(Z\mid X))+E(V(Z\mid X))\geq V(E(Z\mid X)) \tag{9.11}$$

より、再保険金の分散は小さくなる。

同様にして、保有保険金の分散が小さくなることも導かれる。（証明終）

定理9.1により、関数型の再保険は、再保険金の分散を小さくすることがわかったが、次に、関数型の再保険のうち、どの形態のものが最小の分散を与えるかを次の定理で示す。

定理9.2 ネット再保険料が等しい再保険処理のうちで、ストップロス再保険が保有保険金の分散を最小にする。

証明 元受保険金をXとして、保有保険金が$\min(X,d)$であるエクセスポイントdのストップロス再保険と保有保険金が$g(X)$である関数型再保険を考える。分散の差を計算すると、

［ストップロス再保険の分散］－［関数型再保険の分散］

$$
\begin{aligned}
&= V(\min(X,d)) - V(g(X)) \\
&= V(\min(X,d)-d) - V(g(X)-d) \\
&= E((\min(X,d)-d)^2) - (E(\min(X,d)-d))^2 \\
&\qquad - E((g(X)-d)^2) + (E(g(X)-d))^2
\end{aligned}
$$

となるが、ネット再保険料が等しいという条件のもとでは、第2項と第4項は等しくなるので、

$$\text{上式} = E((\min(X,d)-d)^2) - E((g(X)-d)^2) \tag{9.12}$$

となる。

ここで、$A = (\min(X,d)-d)^2$と$B = (g(X)-d)^2$の大小関係を比較すると、

$X \leq d$の場合、$\min(X,d) = X \geq g(X)$より$A \leq B$

$X > d$の場合、$\min(X,d) - d = 0$より$A \leq B$

であるので、$A \leq B$が常に成り立つ。

よって(9.12)式≤ 0であるので、ストップロス再保険の場合に保有保険金の分散が最小となる。（証明終）

定理9.2よりストップロス再保険は保有保険金の分散を最小にすることがわかるが、逆に再保険金の分散が一般的に非常に大きくなる。つまり、再保険者にとっては収支の確率変動が大きくなるので、ネット再保険料に対して高い安全割増を付加する必要がある。

再保険金の分散に関しては次の定理が成り立つ。

定理9.3 保有保険金の分散が等しい再保険処理の中で、比例再保険は再保険金の分散の最小値を与える再保険である。

証明 元受保険金をX、再保険金をYとし、保有保険金の分散$V(X-Y)$が一定である再保険の中で、比例再保険($Y=kX, 0<k<1$)が再保険金の分散$V(Y)$の最小値を与えることを示す。

$$\begin{aligned}V(Y)&=V(X)+V(Y-X)+2Cov(X,Y-X)\\&=V(X)+V(Y-X)-\sqrt{V(X)V(Y-X)}2\rho(X,X-Y)\end{aligned}$$

であるので、$V(Y)$を最小にするには$\rho(X,X-Y)$を最大にすればよい。

相関係数の一般的な性質より$-1\le\rho(X,X-Y)\le 1$であり、$Y=kX$のとき、

$$\begin{aligned}\rho(X,X-Y)&=\rho(X,(1-k)X)\\&=\frac{Cov(X,(1-k)X)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V((1-k)X)}}=\frac{(1-k)V(X)}{(1-k)V(X)}=1\end{aligned}$$

であるので、$Y=kX$は$\rho(X,X-Y)$の最大値を与える。

よって、比例再保険の場合に$V(Y)$は最小値となる。　　　　　　(証明終)

9.5 危険理論を用いた破産確率の評価

9.5.1 破産確率と調整係数

一般的に再保険者が決定した(グロス)再保険料は、ネット再保険料(＝再保険金の期待値)に経費、手数料、利潤、安全割増などの付加保険料を加えて設定されている。

$$再保険料 = (1+\xi) \times (支払再保険金の期待値) \tag{9.13}$$

ξ：再保険付加率

どのタイプの再保険をどの程度購入するのかを考える場合、必然的に期待利得の減少と安全性の増加の間で折り合いをつけることになる。再保険料に含まれる付加保険料のために再保険の購入は出再者の期待利得を減少させる。一方、合理的な出再処理を行うと出再者の経営の安全性は増大される。

ここでは安全性に関するメジャーとして**破産確率**[5]を考える。破産確率を表す式が得られる場合はごく限られているので、ここでは、さまざまな再保険処理が**調整係数**[6]に与える影響について考える。「調整係数が大きい $\Leftrightarrow$ 破産確率が小さい」であるから、調整係数を評価することにより、破産確率を評価することができる。ある再保険処理の調整係数が十分大きくはないならば、破産確率が大きく、その再保険処理は調整する必要がある。

9.5.2 調整係数の計算例

ここでは3種類の再保険(ストップロス再保険、比例再保険およびELC再保

[5] 第8章参照。

[6] 第8章参照。

険）について、再保険を付さない場合と再保険を付した場合の保有分に係る調整係数の計算例を示す。

(1) ストップロス再保険の計算例

保険金支払件数が平均$\lambda=1.5$のポアソン分布に従い、支払保険金1件の金額Xの分布が、

$$P(X=1)=p_1=\frac{2}{3},\quad P(X=2)=p_2=\frac{1}{3}$$

であるような複合ポアソン分布に従う支払保険金総額Sに対して、毎年の収入保険料を$c=2.5$として、ストップロス再保険を付した場合の調整係数について考えてみる。

a. 元受ポートフォリオの調整係数

まず、再保険を付さない場合の調整係数を計算しておく。

複合ポアソン分布の調整係数Rは、

$$\lambda+cr=\lambda M_X(r)$$

を満たすrである[7]。この式に$\lambda=1.5, c=2.5$およびXの分布から計算される$M_X(r)$を代入すると、

$$1.5+2.5r=1.5(e^r\cdot 2/3+e^{2r}\cdot 1/3)$$

となり、これを解けば、

$$r=R=0.28$$

が導かれる。

b. エクセスポイント$d=3$、再保険付加率100%のストップロス再保険を付した場合の正味の保有分に係る調整係数

保有分についての調整係数Rは、c'を正味の（出再保険料を控除した）収

---

7 第8章参照。

入保険料、S'を1年間の正味の支払保険金総額として、

$$e^{-c'r}M_{S'}(r)=1$$

を満たすrである[8]。

まず、c'について考えてみる。c'はcからグロス再保険料を控除したものであり、グロス再保険料はネット再保険料$E(I_3)$に付加率100%を乗せた$2E(I_3)$であるので、$E(I_3)$が求まればc'は求めることができる。

ネット再保険料$E(I_3)$は、(9.10)式を用いて帰納的に求めることができ、

$$\begin{cases} f(0) &= 0.223 \\ F(0) &= 0.223 \\ E(I_0) &= 2.000 \end{cases} \to \begin{cases} f(1) &= 0.223 \\ F(1) &= 0.446 \\ E(I_1) &= 1.223 \end{cases} \to \begin{cases} f(2) &= 0.223 \\ F(2) &= 0.669 \\ E(I_2) &= 0.669 \end{cases} \to \begin{cases} f(3) &= 0.149 \\ F(3) &= 0.818 \\ E(I_3) &= 0.339 \end{cases}$$

となる。よって、

$$c'=c-2E(I_3)=2.5-2\times 0.339=1.822$$

としてc'が導かれる。

次に$M_{S'}(r)$であるが、S'の確率分布を考えると、

$$S'=\begin{cases} k & \text{(1 年間の支払保険金総額が}k(<3)\text{の場合)} \\ 3 & \text{(1 年間の支払保険金総額が3以上の場合)} \end{cases}$$

であるので、$E(I_3)$を導く過程で得られたfおよびFの値を用いて、

$$\begin{aligned} M_{S'}(r) &= \sum_{k=0}^{2} f(k)e^{rk}+\{1-F(2)\}e^{3r} \\ &= 0.223+0.223e^{r}+0.223e^{2r}+0.331e^{3r} \end{aligned}$$

が得られる。

よって、

$$e^{-c'r}M_{S'}(r)=1 \Leftrightarrow e^{-1.822r}(0.223+0.223e^{r}+0.223e^{2r}+0.331e^{3r})=1$$

であり、この方程式を解くと、

---

8 第8章参照。

$$r = R = 0.25$$

が導かれる。

なお、1年間での期待利得を計算してみると、それぞれ、

再保険を付さない場合　　$c - E(S) = 2.5 - 1.5 \times (1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{3}) = 0.5$

再保険を付した場合

$$c' - E(S') = 1.822 - (1 \times 0.223 + 2 \times 0.223 + 3 \times 0.331)$$

$$= 0.16$$

となる。

エクセスポイントを$d = 4,5$として引き上げた場合の調整係数および期待利得を同様に計算し、上記の結果を比較してみると下表のようになる。

エクセスポイント	調整係数	期待利得
3	0.25	0.16
4	0.35	0.34
5	0.34	0.43
∞（再保険なし）	0.28	0.50

安全性（調整係数で測ることにする）に関して、$d = 4$の場合は$d = 5$の場合よりよく、$d = 5$の場合は再保険なしの場合よりよい。期待利得の観点から見ると、順番は逆である。さらに、$d = 3$の場合を選択することは非合理的であると理解できる。$d = 3$の場合は再保険なしの場合より安全性に関しても期待利得に関しても悪いからである。

(2) 比例再保険の計算例

保険金支払件数が平均$\lambda = 1$のポアソン分布に従い、支払保険金1件の金額Xの分布が区間$(0,1)$上の一様分布に従うような、複合ポアソン分布に従う支払保険金総額Sに対して、毎年の収入保険料を$c = 1$として、比例再保険を

付した場合の調整係数について考えてみる。

a. 元受ポートフォリオの調整係数

まず、再保険を付さない場合の調整係数Rは、(1)a.と同様に、

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

を満たすrであるので、この式に$\lambda = 1, c = 1$およびXの分布から計算される$M_X(r)$を代入すると、

$$1 + r = \frac{e^r - 1}{r}$$

となる。この方程式を解けば、

$$r = R = 1.79$$

が導かれる。

b. 再保険付加率100%の100α%比例再保険（$0 < \alpha < 1$）を付した場合の正味保有分に係る調整係数

ストップロス再保険を付した場合とは異なり、比例再保険を付した場合（もっと一般的に言えば支払保険金1件あたりの再保険金がその元受支払保険金の額Xの関数となるような場合）は、正味の支払保険金総額S'についても1件ごとの正味支払保険金の額X'による複合ポアソン分布に従うと考えることができる。

複合ポアソン分布に従う場合の調整係数Rは、正味の収入保険料をc'として、

$$\lambda + c'r = \lambda M_{X'}(r)$$

を満たすrであり、

$$X' = (1-\alpha)X$$

$$c' = c - 2E(\alpha X) = c - 2\alpha E(X) = 1 - \alpha$$

$$M_{X'}(r) = M_{(1-\alpha)X}(r) = M_X((1-\alpha)r) = \frac{e^{(1-\alpha)r} - 1}{(1-\alpha)r}$$

であるから、

$$\lambda + c'r = \lambda M_{X'}(r) \quad \Leftrightarrow \quad 1+(1-\alpha)r = \frac{e^{(1-\alpha)r}-1}{(1-\alpha)r}$$

をrについて解けばよい。

なお、1年間での期待利得を計算してみると、それぞれ、

再保険を付さない場合　$c - E(S) = 1 - 1 \times E(X) = 0.5$

再保険を付した場合　$c' - E(S') = (1-\alpha) - 1 \times E(X') = \dfrac{1-\alpha}{2}$

となる。

$\alpha = 0.2, 0.4, 0.7$ に対して調整係数および期待利得を計算すると下表のようになる。

出再割合	調整係数	期待利得
0.7	5.98	0.15
0.4	2.99	0.30
0.2	2.24	0.40
0.0（再保険なし）	1.79	0.50

この例では、再保険付加率と保険者の安全割増率とともに100％であり一致しているため、調整係数はαの増加関数となっており、期待利得は出再割合に応じて圧縮される。

再保険付加率が保険者の安全割増率を上回る場合、この例で考えれば再保険付加率が100％を超えるとした場合は、αが増加するにつれてRは次第に大きくなり、その後急激に減少する。単位時間あたりの正味の収入保険料と正味の支払保険金の期待値が等しくなるところで正味の安全割増率は0となり、調整係数を定義する方程式に正の解がなくなり、確率1で破産することを意味

するものとなる[9]。

(3) 超過損害額再保険（ＥＬＣ再保険）の計算例

支払保険金総額Sが(2)の例と同じ複合ポアソン分布に従うものとして、再保険付加率100%、エクセスポイントmであるELC再保険を付した場合の調整係数について考えてみる。

この場合も支払保険金1件あたりの再保険金がその元受支払保険金額Xの関数となるような場合であるので、調整係数Rは、正味の収入保険料をc'、正味支払保険金額をX'として、

$$\lambda + c'r = \lambda M_{X'}(r)$$

を満たすrであり、

$$X' = \min\{X, m\}$$

$$c' = c - 2E(\max\{X - m, 0\}) = 1 - 2\int_m^1 (x - m)\, dx = 1 - (1 - m)^2$$

$$M_{X'}(r) = M_{\min\{X,m\}}(r) = \int_0^1 \exp(r \cdot \min\{x, m\}) dx = \frac{e^{rm} - 1}{r} + (1 - m)e^{rm}$$

であるから、

$$\lambda + c'r = \lambda M_{X'}(r) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + (1 - (1 - m)^2)r = \frac{e^{rm} - 1}{r} + (1 - m)e^{rm}$$

をrについて解けばよい。

なお、1年間での期待利得を計算してみると、それぞれ、

再保険を付さない場合　$c - E(S) = 1 - 1 \times E(X) = 0.5$

再保険を付した場合

$$c' - E(S') = 1 - (1 - m)^2 - \frac{1 - (1 - m)^2}{2} = \frac{1 - (1 - m)^2}{2}$$

となる。

---

9 数式を用いた議論をこの節の終わりに載せている。

$m=0.2, 0.4, 0.6$ に対して調整係数および期待利得を計算すると下表のようになる。

エクセスポイント	調整係数	期待利得
0.2	6.48	0.18
0.4	3.37	0.32
0.6	2.38	0.42
1.0(再保険なし)	1.79	0.50

ここで、比例再保険の場合と同様の現象を観察することができる。この例では、再保険付加率と保険者の安全割増率とともに100%であり一致しているため、調整係数はエクセスポイントmの減少関数となっており、期待利得はエクセスポイントに応じて圧縮される。

再保険付加率が保険者の安全割増率を上回る場合には、エクセスポイントmが減少するにつれてRは次第に大きくなり、その後急激に減少する。

9.5.3 調整係数の大小関係

9.5.2節の(2)、(3)において同じ元受契約に対して比例再保険を付した場合とELC再保険を付した場合の調整係数の計算例を示した。

破産確率(調整係数)と期待収益という2つの観点のみから結果を比較してみると下表のようになり、対応させている3つの区分すべてにおいてELC再保険の方が好ましい結果となっていることがわかる。

		調整係数	期待利得
①	出再割合 ＝ 0.7	5.98	0.15
	エクセスポイント＝ 0.2	6.48	0.18
②	出再割合 ＝ 0.4	2.99	0.30
	エクセスポイント＝ 0.4	3.37	0.32
③	出再割合 ＝ 0.2	2.24	0.40
	エクセスポイント＝ 0.6	2.38	0.42

破産確率（調整係数）と期待収益という2つの観点から考えるとELC再保険と他の関数型再保険[10]の優劣に関して、一般的に次の定理が成り立つ。

定理9.4　支払保険金総額 が複合ポアソン分布に従うものとする。このとき、ELC再保険を付した時の保有分に係る調整係数は、このELC再保険と同じ再保険付加率および同じネット再保険料を持つ任意の関数型再保険を付した時の保有分に係る調整係数よりも大きい。

つまり、1件の元受保険金の額をX、エクセスポイントmのELC再保険の再保険金を$h_m(X)(=\max\{X-m,0\})$、単位期間の再保険料をc_m、保有分に係る調整係数をR_mとし、同様に任意の関数型再保険に対して$h(X), c_h, R_h$を定義するとき、

$$E(h(X))=E(h_m(X)), c_h=c_m \quad \Rightarrow \quad R_h \le R_m$$

が成り立つ。

証明　R_h, R_mはそれぞれ方程式、

$$\lambda+(c-c_h)r=\lambda M_{X-h(X)}(r)$$

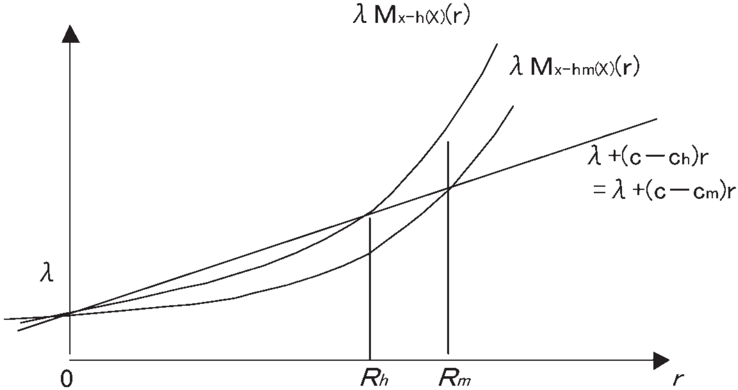
$$\lambda+(c-c_m)r=\lambda M_{X-h_m(X)}(r)$$

の正の解である。$c_h=c_m$より左辺は同じ一次式であるので、

$$M_{X-h(X)}(r) \ge M_{X-h_m(X)}(r) \quad r>0 \tag{9.14}$$

が成り立てば、下図より明らかに$R_h \le R_m$が成り立つ。

10　ここでは支払保険金1件あたりの再保険金が元受保険金の関数となる場合を指して「関数型」としており、9.4における「関数型の再保険」とは意味が異なる。



以下で(9.14)が成り立つことを示す。

最初に、指数関数が下に凸であることを用いると、

$$\exp\{r(x-h(x))\} \geq \exp\{r(x-h_m(x))\} + r\exp\{r(x-h_m(x))\}(h_m(x)-h(x)) \qquad (9.15)$$

が導かれる。

ここで、(9.15)式右辺の第2項について考えてみると、

・ $h_m(x)-h(x)>0$ のとき

$h_m(x)>h(x)\geq 0$ より、元受保険金 x に対してELC再保険での再保険金回収があるので、$x-h_m(x)=m$ である。よって、

上式右辺の第2項 $> r\exp\{rm\}\cdot(h_m(x)-h(x))$

・ $h_m(x)-h(x)\leq 0$ のとき

$x-h_m(x)\leq m$ より $0<\exp\{r\cdot(x-h_m(x))\}<\exp\{rm\}$ であるので、

上式右辺の第2項 $> r\exp\{rm\}\cdot(h_m(x)-h(x))$

となる。よって、

(9.15) $\Rightarrow \exp\{r(x-h(x))\} \geq \exp\{r(x-h_m(x))\} + r\exp(rm)(h_m(x)-h(x))$

が成り立つ。

両辺のxを確率変数Xとして期待値をとると、

$$E\left(\exp\{r(X-h(X))\}\right)$$
$$\geq E\left(\exp\{r(X-h_m(X))\}\right)+re^{rm}\cdot E\left(h_m(X)-h(X)\right)$$

となり、定理の仮定から右辺第2項の期待値は0であるので、(9.14)式が成り立ち、定理が証明された。　(証明終)

それぞれの再保険付加率の水準によっては、グロス再保険料、破産確率(調整係数)ともにELC再保険よりも他の関数型再保険の方がよい場合もあり得る。これは直観的に明らかであろう。

9.5.4 補足

最後に9.5.2(2)における議論に若干の補足をしておく。

支払保険金総額Sが複合ポアソン分布に従い、支払保険金1件あたりの再保険金がその元受保険金Xの関数($h(X)$とする)となる場合について、正味保有分に係る調整係数Rが存在するための条件を示しておく。

グロス再保険料をc_hとすると、正味保有分に係る調整係数Rは、

$$\lambda+(c-c_h)r=\lambda M_{X-h(X)}(r) \tag{9.16}$$

を満たすrである。(ここで、λは支払件数が従うポアソン分布の平均であり、$f(x)$は支払保険金1件の金額Xが従う確率分布の確率密度関数である。)

方程式(9.16)については次の①～④が成り立つ。

① 左辺はrについて1次式である。

② 右辺はrについて下に凸な関数である。

③ $r=0$のとき、左辺=右辺=λである。

④ 十分大きなrに対して左辺＜右辺である。

①、③は明らかであろう。

②、④に関しては、$X-h(X)>0$より$X-h(X)$原点周りの積率がすべて正

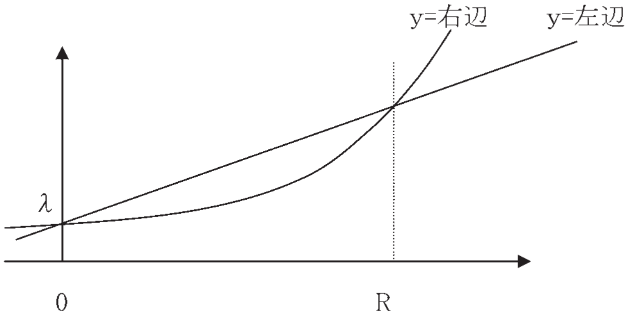
であり、$\lambda M_{X-h(X)}(r)$をrの級数として展開した場合のすべての項の係数が正であることから導かれる[11]。

これらから次のことが言える。

⑤ 方程式(9.16)は自明な解$r=0$をもつ。

⑥ 方程式(9.16)正の解を持つ（つまり調整係数を持つ）ための必要十分条件は、$r=0$において右辺の傾きが左辺の傾きより小さいことである。

⑥は①～④を用いて左辺と右辺のグラフを考えてみれば明らかである。



⑥の意味するところを数式によって表現すれば、

$$(\text{左辺の}\ r=0\ \text{での傾き}) = c - c_h$$

$$(\text{右辺の}\ r=0\ \text{での傾き}) = \lambda \frac{d}{dr} M_{X-h(X)}(r)\Big|_{r=0} = \lambda E(X-h(X))$$
$$= \lambda E(X) - \lambda E(h(X))$$

であるので、

右辺の$r=0$での傾き ＜ 左辺の$r=0$での傾き

11 本質的にすべて出再となるような（つまり$E(X-h(X))=0$となるような）場合は除いて考えている。

$$\Leftrightarrow \quad \lambda E(X) - \lambda E(h(X)) < c - c_h$$

$$\Leftrightarrow \quad c_h - \lambda E(h(X)) < c - \lambda E(X)$$

$\Leftrightarrow$ 再保険の付加保険料<元受保険の付加保険料

となる。

よって、方程式(9.16)が正の解(調整係数)を持つための必要十分条件は「元受保険の付加保険料よりも再保険の付加保険料の方が小さい」であることがわかる。

9.6 練習問題

1.　A保険会社は、次のような出再保険特約を有している。

再保険特約名	出再限度額（億円）	ライン数	出再できる種目
第一次 超過額再保険特約	100	20	すべての火災・動産総合
第二次 超過額再保険特約	45	9	すべての火災・動産総合

さらに、保有部分に対するELC（1事故単位で発動する）を次のとおり有している。

excess point　1億円

cover limit　9億円

また、A社は次の保有規定に基づいて保有・出再額を決めている。

火災保険の保有限度額　5億円

（ただし、利益保険については1億円）

動産総合保険の保有限度額　2億円

さて、A保険会社は次のような5件の大口契約を引き受けた。

契約	種目	保険金額（千円）	保険料（円）
A	火災　（通知保険）	1,000,000	1,000,000
B	火災　（ブランケット）	8,000,000	5,600,000
C	動産総合	5,000,000	5,500,000
D	火災　（ブランケット）	16,000,000	12,800,000
E	火災　（利益）	4,000,000	2,000,000

これらの契約それぞれに次のような損害が発生したとする。

契約	元受保険金(円)
A	200,000,000
B	100,000,000
C	1,000,000,000
D	200,000,000
E	500,000,000

A保険会社の立場に立って以下の問いに答えよ。ただし、次の条件を仮定する。

① 保有額は、限度額いっぱいまで必ず保有するものとする。また、第一次超過額再保険特約にも限度額いっぱいまで必ず保有するものとし、第一次超過額再保険特約がいっぱいになったらはじめて、第二次超過額再保険特約に出再するものとする。

② AからEまでの各契約は、すべて別リスクと考えられており、集積の問題は考慮しなくてもよい。また各契約は、保険金額をベースにして保有・出再を決定し、特にリスク状況などは考慮しなくてもよいものとする。

(1) 任意再保険の手当が必要なのは、どの契約か。

(2) 第一次超過額再保険特約に出再された再保険料の合計はいくらか。また、第二次超過額再保険特約に出再された再保険料の合計はいくらか。

(3) 第一次超過額再保険特約から回収した再保険金の合計はいくらか。また、第二次超過額再保険特約から回収した再保険金の合計はいくらか。

(4) 契約A，C，Dの事故が一事故であったとき、ELCからの回収保険金はいくらになるか。

2. A保険会社では、ある保険種目に対してエクセスポイント1億円、カバーリミット2億円の超過損害額再保険特約を設定した。A社のこの保険の元受ポートフォリオにおける、一件あたりの支払保険金額 X 億円の分布関数 $S(x)$ につ

いては、$1-e^{-2x}$であることがわかっている。

なお、解答にあたり、必要な場合は次の数値を用いよ。

$$e=2.7183,\quad e^{1.1}=3.0042,\quad e^{1/1.1}=2.4821$$

(1) この再保険特約のネット再保険料は、元受危険保険料理論値(上記保険金分布関数$S(x)$に基づく理論値)に対して何%となるか計算せよ。

(2) 支払保険金が一律に10%上昇した場合、この保険種目のネット再保険料は何%上昇するか計算せよ。

３. クレーム件数N_tが$\lambda=1$のポアソン過程に従い、個々のクレーム額Xが平均1の指数分布（確率密度関数$f(x)=e^{-x}\ (x\geq 0)$）に従うものとする。

元受契約の安全割増率を$\theta\ (>0)$として次の問に答えよ。

(1) 出再割合$\alpha\ (>0)$、ローディング$\xi\ (>0)$の比例再保険を付したときの保有保険金に係る調整係数Rを求めよ。

(2) エクセスポイント$m\ (>0)$、ローディング$\xi\ (>0)$のELC再保険を付したときの保有保険金に係る調整係数Rが満たす方程式を求めよ。

［参考文献］

1. R. L. カータ著（東亜火災海上再保険株式会社訳）『再保険概論』（保険研究所）

2. 日本アクチュアリー会損保研究会編『ペソーネン博士講演テキスト 危険理論とその応用』

3. トーア再保険株式会社編『再保険 その理論と実務』（財団法人損害保険事業総合研究所）

4. Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt, “ACTUARIAL MATHEMATICS”, The Society of Actuaries

練習問題解答

1．　各契約の配分は、次のとおり。

単位：保険金額　千円、割合　％

契　約		元受	保有	1st	2nd	(任再)
A	保有金額	1,000,000	500,000	500,000	0	—
	割　合	100.000	50.000	50.000	0	—
B	保有金額	8,000,000	500,000	7,500,000	0	—
	割　合	100.000	6.250	93.750	0	—
C	保険金額	5,000,000	200,000	4,000,000	800,000	—
	割　合	100.000	4.000	80.000	16.000	—
D	保険金額	16,000,000	500,000	10,000,000	4,500,000	1,000,000
	割　合	100.000	3.125	62.500	28.125	6.250
E	保険金額	4,000,000	100,000	2,000,000	900,000	1,000,000
	割　合	100.000	2.500	50.000	22.500	25.000

（注）契約ＣとＥは、ライン数の制限に注意。

この配分に従って保険料と保険金を計算すると、次のとおり。

【保険料】　　単位：円

契約	元受	保有	1st	2nd	(任再)
A	1,000,000	500,000	500,000	0	—
B	5,600,000	350,000	5,250,000	0	—
C	5,500,000	220,000	4,400,000	880,000	—
D	12,800,000	400,000	8,000,000	3,600,000	800,000
E	2,000,000	50,000	1,000,000	450,000	500,000
合計	26,900,000	1,520,000	19,150,000	4,930,000	1,300,000

【保険金】 単位：千円

契約	元 受	保 有	1st	2nd	(任再)
A	200,000	100,000	100,000	0	―
B	100,000	6,250	93,750	0	―
C	1,000,000	40,000	800,000	160,000	―
D	200,000	6,250	125,000	56,250	12,500
E	500,000	12,500	250,000	112,500	125,000
合計	2,000,000	165,000	1,368,750	328,750	137,500

(1) 任意再保険が必要なのは(任再に限らないが、とにかく通常の保有規定では処理できないため、何らかの特別な処理が必要である)、契約Dと契約Eである。

(2) 再保険料

第一次超過額再保険特約	19,150,000円
第二次超過額再保険特約	4,930,000円

(3) 再保険金

第一次超過額再保険特約	1,368,750,000円
第二次超過額再保険特約	328,750,000円

(4) 契約A、契約C、契約Dの保有保険金は、

契約A	100,000,000円
契約C	40,000,000円
契約D	6,250,000円
計	146,250,000円

したがって、100,000,000円を引いた46,250,000円がELCから回収される。

2.

(1) 再保険特約の設定によって支払件数は理論的には影響を受けないものと仮定することができるので、一件あたりの支払保険金と再保険金の期待値を比

較すればよい

1件あたり支払保険金Xの分布関数は$S(x)=1-e^{-2x}$であるから、確率密度関数は$S'(x)=2e^{-2x}$であり、期待値は$E(X)=\dfrac{1}{2}$(＝Lとおく)である。

一方、この超過損害額再保険特約の1件あたり再保険金の期待値は、

$$L_{elc}=\int_1^3(x-1)2\exp(-2x)dx+\int_3^\infty 2\cdot 2\exp(-2x)dx$$

$$=\left[-(x-1)\exp(-2x)\right]_1^3-\int_1^3(-\exp(-2x))dx+\left[-2\exp(-2x)\right]_3^\infty$$

$$=(\exp(-2)-\exp(-6))/2$$

である。したがって、ネット再保険料は、元受危険保険料理論値の、

$$\frac{\mathrm{L}_{elc}}{L}=\frac{(\exp(-2)-\exp(-6))/2}{1/2}=\exp(-2)-\exp(-6)=0.13285$$

となる。

(2) 支払保険金が一律に10%上昇した場合の1件あたり支払保険金をYとおくと、Yの確率密度関数は、$x=\dfrac{1}{1.1}y$、$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{1.1}$であることから、$2\exp\left(-\dfrac{2y}{1.1}\right)\Big/1.1$となり、この場合の超過損害額再保険特約の1件あたり再保険金の期待値は、(1)と同様に考えて、

$$L'_{elc}=(\exp(-2/1.1)-\exp(-6/1.1))\times 1.1/2$$

となる。したがって、ネット再保険料の上昇率は、

$$\frac{L'_{elc}}{L_{elc}}-1=\frac{(\exp(-2/1.1)-\exp(-6/1.1))\times 1.1/2}{(\exp(-2)-\exp(-6))/2}-1$$

$$=\frac{(2.4821^{-2}-2.4821^{-6})\times 1.1}{2.7183^{-2}-2.7183^{-6}}-1=0.30852$$

3.

(1) 保有分の1件あたりのクレーム額$X'=(1-\alpha)X$は、確率密度関数が

$f(x') = \dfrac{1}{1-\alpha} e^{-\frac{x'}{1-\alpha}}$ $(x' \geq 0)$ であるので、平均 $1-\alpha$ の指数分布に従うことがわかる。また、保有分に係る収入保険料は、

$$(1+\theta)\cdot 1 - (1+\xi)\cdot 1 \cdot E(\alpha X) = (1+\theta) - (1+\xi)\alpha$$

である。よって、調整係数 R は、

$$\begin{aligned} 1 + \{(1+\theta) - (1+\xi)\alpha\}R &= M_{X'}(R) \\ &= \frac{1}{1-R(1-\alpha)} \\ \Leftrightarrow \quad R &= \frac{\theta - \alpha\xi}{(1-\alpha)\{(1+\theta)-(1+\xi)\alpha\}} \end{aligned}$$

(2) 保有分の1件あたりのクレーム額 $X' = \min\{m, X\}$ の積率母関数は、

$$\begin{aligned} M_{X'}(r) &= \int_0^m e^{rx} e^{-x} dx + \int_m^\infty e^{rm} e^{-x} dx \\ &= \frac{1 - re^{-(1-r)m}}{1-r} \end{aligned}$$

また、保有分に係る収入保険料は、

$$(1+\theta)\cdot 1 - (1+\xi)\cdot 1 \cdot E(X - \min\{m, X\}) = (1+\theta) - (1+\xi)e^{-m}$$

である。

よって、調整係数 R が満たす方程式は、

$$1 + \{(1+\theta) - (1+\xi)e^{-m}\}R = \frac{1 - Re^{-(1-R)m}}{1-R}$$

第１０章

リスク評価の数理

第10章　リスク評価の数理

10.1 リスク評価の数理とは

本章では、リスクを定量的に評価するにあたって理解しておくべき事項のうち、これまでの章で触れてこなかった3つのテーマ、「極値理論」、「リスクの統合」、「リスク尺度」について取り上げる。

リスクとは損失発生の可能性であり[1]、その数学的なモデルとして、損失を表す確率変数が用いられる。リスクを定量的に評価するということは、この確率変数の従う確率分布を定め、その確率分布に対して一定のルールに従い数値を対応させることを意味する。

確率分布の推定にあたっては、「第2章　クレームの分析」で学習した手法を利用することができるが、リスク管理に際しては、ごくまれにしか発生しないような巨額の損失が関心の対象となることが多く、損失額分布の右裾についての精度が要求される。10.2節で取り上げる**極値理論**は、確率変数の最大値や一定の基準値(閾値)を超える値などの極端な値についての振る舞いを研究対象とする理論である。

また、たとえば、会社全体の保険引受に係るリスクを評価の対象とする場合には、保険契約のポートフォリオを同質なリスク区分ごとにグループ化し、それぞれについて保険引受に係る収支をモデル化したうえで、各リスク区分の損失額を表す確率変数の和の確率分布を考察の対象とする必要がある。10.3節では複数のリスクを合算する**リスクの統合**を取り上げ、**コピュラ**などを用いた相関のある確率変数の和をモデル化する手法について解説する。

リスクを表す確率変数がモデル化できれば、次にこれをいかに評価するかが

[1] 「リスク」という用語に画一的な定義はないが、本章ではリスクを「損失発生の可能性」と定義して考える。

問題となる。確率変数そのままでは比較しづらいため、一般にはリスクを表す確率変数に対して何らかの数値を対応させて、その数値の大小によりリスクを評価することが行われる。リスクを表す確率変数とその評価である数値との対応関係を**リスク尺度**という。10.4節では代表的なリスク尺度やリスク尺度に求められる性質について解説する。

なお、本章において、特に断らない限り、$F_X, f_X, M_X, \mu_X, \sigma_X$ は、確率変数 X の分布関数、確率密度関数、積率母関数、平均、標準偏差を表すものとし、また混同の恐れがない場合には添え字の X を省略することがある。

10.2　極値理論

極値理論（extreme value theory；EVT）はまれにしか発生しない現象に着目した理論であり、古くは水文学や工学といった分野で広く研究され、また応用に用いられてきた。1953年にオランダで発生した大洪水の後に、極値理論を用いて新たな土手の高さを設計した話はその一つの例である。保険の分野では再保険や巨大自然災害リスクの分析を中心に過去から利用されており、最近ではリスク管理においてテイルリスクを評価するための手法としても研究されてきている。

極値理論で扱う主要なモデルには、大きく分けて次の2つがある。

- **ブロック最大値モデル**（block maxima model）

  同一分布からの独立な標本の最大値の確率的性質を扱うモデル

- **閾値超過モデル**（peaks over threshold model）

  ある閾値を超過した標本の確率的性質を扱うモデル

以下、本節ではそれぞれの理論についてその概要を説明する。

10.2.1　ブロック最大値モデル

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を互いに独立に同一の分布 F に従う確率変数列とし、その最大値 $M_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を考える。たとえば、日最高気温の観測値と平年値との差 X_i が独立かつ同一分布に従うとしたとき、その年間最大値が M_n に相当する。n を大きくしたとき、M_n については単に確率分布の右端点 $x_F = \sup\{x \mid F(x) < 1\}$ [2]に収束するという当たり前の結果が得られるのみである

[2] 実数の部分集合 A について、任意の $x \in A$ に対し $x \le m$ となるような実数 m のうち最小のものを A の上限といい、$\sup A$ と表す。

が、M_n をある数列 c_n，d_n により正規化した値 $Z_n=(M_n-d_n)/c_n$ については、c_n，d_n を適当に選ぶことで、特定の分布に法則収束[3]することを示すことができる。

例10.1 （指数分布）

$F_{X_i}(x)=1-e^{-\beta x}\ \ (x\geq 0)$ のとき、$c_n=1/\beta, d_n=\log n/\beta$ とすると、

$$
\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= P\left((M_n-d_n)/c_n\leq x\right)=P\left(M_n\leq c_n x+d_n\right)\\
&= P\left(\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leq c_n x+d_n\right)\\
&= P\left(X_1\leq c_n x+d_n, X_2\leq c_n x+d_n,\cdots,X_n\leq c_n x+d_n\right)\\
&= \left\{P\left(X_i\leq c_n x+d_n\right)\right\}^n=\left\{F_{X_i}\left(c_n x+d_n\right)\right\}^n\\
&= \left\{F_{X_i}\left((x+\log n)/\beta\right)\right\}^n\\
&= \left(1-e^{-x-\log n}\right)^n=\left(1-e^{-x}/n\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-e^{-x}} \quad (-\infty<x<\infty)
\end{aligned}
$$

このような分布関数をもつ分布を**グンベル分布**[4]（Gumbel distribution）という。

例10.2 （パレート分布）

$F_{X_i}(x)=1-(\beta/x)^{\alpha}\ \ (x\geq\beta)$ のとき、$c_n=\beta n^{1/\alpha}, d_n=0$ とすると、

$$
\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \left\{F_{X_i}\left(c_n x+d_n\right)\right\}^n=\left\{F_{X_i}\left(\beta n^{1/\alpha}x\right)\right\}^n\\
&= \left\{1-\left(\beta/(\beta n^{1/\alpha}x)\right)^{\alpha}\right\}^n=\left(1-x^{-\alpha}/n\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x^{-\alpha}} \quad (x>0)
\end{aligned}
$$

このような分布関数をもつ分布を**フレシェ分布**（Fréchet distribution）という。

例10.3 （ベータ分布）

---

[3] 確率変数列 $\{X_n\}$ および確率変数 X の分布関数列 $\{F_{X_n}(x)\}$ および分布関数 $F_X(x)$ について、$F_X(x)$ の任意の連続点 x において $\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$ となるとき、$\{X_n\}$ は X に法則収束するといい、$X_n\xrightarrow{d}X$ または $X_n\xrightarrow{d}F_X$ と表す。

[4] 二重指数分布とも呼ばれる。

$F_{X_i}(x)=1-(1-x)^\alpha \quad (0\le x\le 1)$ のとき、$c_n=n^{-1/\alpha}, d_n=1$ とすると、

$$F_{Z_n}(x)=\left\{F_{X_i}\left(c_nx+d_n\right)\right\}^n=\left\{F_{X_i}\left(n^{-1/\alpha}x+1\right)\right\}^n$$
$$=\left\{1-(-n^{-1/\alpha}x)^\alpha\right\}^n=\left\{1-(-x)^\alpha/n\right\}^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-(-x)^\alpha} \quad (x\le 0)$$

これは、パラメータ $\theta=1, p=\alpha$ の**ワイブル分布**(Weibull distribution)に従う確率変数の符号を逆転させたものの分布関数である。

上記にあげた分布以外についても、一般に c_n，d_n を適当に選ぶことで $Z_n=(M_n-d_n)/c_n$ が特定の分布に法則収束するとき、Z_n は上記のいずれかの分布と同じ型の分布に属する[5]ことが知られている。

定理(Fisher−Tippett)

互いに独立に同一の分布に従う確率変数列 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ の最大値 $M_n=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ に対してある確率分布 H[6]および定数 $c_n>0$，d_n (正規化定数という)が存在し、

$$\frac{M_n-d_n}{c_n}\xrightarrow{d} H \quad n\to\infty \qquad (※)^7$$

を満たすならば、H は以下のいずれかの確率分布[8]と同じ型に属する。

フレシェ分布 $\quad \Phi_\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & x>0\end{cases} \quad \alpha>0$

---

5 確率変数 X , Y について、ある実数 a および $b>0$ が存在し X と $bY+a$ が同じ分布に従うとき、X と Y は同じ型に属するという。

6 厳密には、一点に全確率が集中しない分布(非退化分布という)とする。

7 次のようにも表現できる。

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\le c_nx+d_n)=\lim_{n\to\infty}\{F(c_nx+d_n)\}^n=H(x)$$

8 これら3種の分布を特に極値分布と呼ぶ。

ワイブル分布[9]	$\Psi_\alpha(x)=\begin{cases}\exp\left(-(-x)^\alpha\right), & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$	$\alpha>0$
グンベル分布	$\Lambda(x)=\exp\left(-e^{-x}\right),\quad -\infty<x<\infty$	

証明の概略は参考として章末に示す。

上記3つと同じ型の確率分布は以下のような3パラメータを持った1つの式で表現できる。これを**一般化極値分布**（Generalized Extreme Value distribution; GEV）と呼ぶ。

$$H_{\xi;\mu,\sigma}(x)=\exp\left\{-\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right\},\quad 1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}>0\,,\sigma>0$$

ただし、$\xi=0$のときは$H_{0;\mu,\sigma}(x)=\lim_{\xi\to 0}H_{\xi;\mu,\sigma}(x)=\exp\left(-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right)$により定義する。$\xi,\mu,\sigma$はそれぞれ形状パラメータ、位置パラメータ、尺度パラメータと呼ばれ、$\mu=0\,,\sigma=1$のとき、特に$H_\xi(x)$と記す。

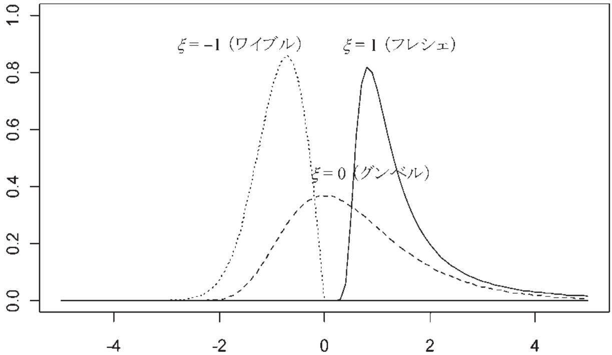
GEVのパラメータと3つの極値分布との関係は以下のとおりである。

- $\xi>0$のとき、フレシェ分布に対応
  $\xi=1/\alpha,\mu=1,\sigma=\xi$とすれば$\Phi_\alpha(x)$に一致
- $\xi=0$のとき、グンベル分布に対応
  $\xi=0,\mu=0,\sigma=1$とすれば$\Lambda(x)$に一致
- $\xi<0$のとき、ワイブル分布に対応
  $\xi=-1/\alpha,\mu=-1,\sigma=-\xi$とすれば$\Psi_\alpha(x)$に一致

[9] ここでいう「ワイブル分布」とは、極値分布としてのΨ_αおよびこれと同じ型の確率分布であって、分布関数が$1-e^{-(x/\theta)^\rho}$で表されるワイブル分布（この章に限り混同を避けるため以後「標準ワイブル分布」と呼ぶ）とは異なる。

図10.1

一般化極値分布の密度関数（$\alpha=2$）



極値理論におけるGEVは、中心極限定理における正規分布のような役割をしていると考えることができる。中心極限定理は、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の和 S_n を $(S_n - b_n)/a_n$ と標準化することで、これが X の分布によらず標準正規分布に法則収束することを主張するものであるが、Fisher−Tippett の定理は、最大値 M_n を $(M_n - d_n)/c_n$ と正規化することで、これが法則収束する場合その収束先は X の分布によらず GEV となることを述べたものである。

なお、（※）を満たす定数 $c_n > 0$ および d_n が存在するとき、「分布関数 F は一般化極値分布 H の**最大値吸引域**（Maximum Domain of Attraction）に属する」といい、$F \in MDA(H)$ と記す。上記の例より、

- パレート分布　：$F \in MDA(\Phi_\alpha)$
- ベータ分布　：$F \in MDA(\Psi_\alpha)$
- 指数分布　：$F \in MDA(\Lambda)$

であることがわかる。

上記の他、一般に用いられる連続分布の多くが $F \in MDA(H)$ となる。

極値分布	最大値吸引域に属する分布
フレシェ分布	パレート分布、コーシー分布、t 分布、F 分布、フレシェ分布、一般化パレート分布(後述)
ワイブル分布	ベータ分布、一様分布、ワイブル分布
グンベル分布	指数分布、正規分布、対数正規分布、ガンマ分布、標準ワイブル分布、グンベル分布

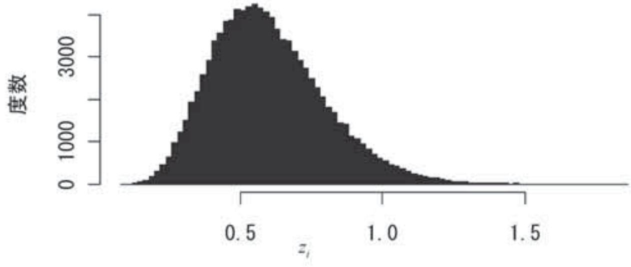
ただし、連続型分布であっても一般化極値分布の最大値吸引域に属さないものもあり、またポアソン分布や幾何分布などの離散分布も一般化極値分布の最大値吸引域には属さない。$F \in MDA(H)$となるための必要十分条件については本書のレベルを超えるため、関心のある読者は章末の参考文献(たとえば参考文献4)を参照されたい。

例10.4 (ガンマ分布)

平均0.6、標準偏差0.2のガンマ分布から抽出した互いに独立な10万個の標本(観測値)をz_iとし、これをn個ずつのブロックに分割したときの、各ブロックにおける最大値の分布を考える。

図10.2

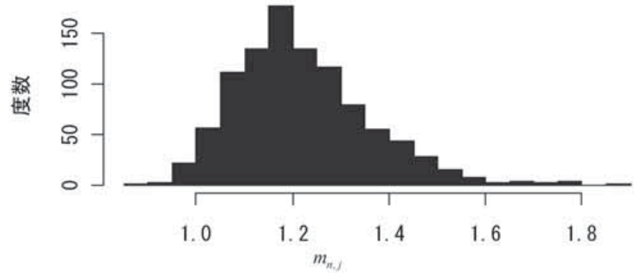
ガンマ分布からの10万個の標本(平均0.6、標準偏差0.2)



z_i ($i=1,\cdots,100000$)をn個ずつのN個のブロックに分割し、その最大値を$m_{n,j}$ ($j=1,\cdots,N$)とおく。たとえば、$n=100$とすれば、$N=1000$個の$m_{n,j}$を用

いてモデルを当てはめることになる。

図10.3 ブロック最大値の度数分布（$n=100$）



GEV のパラメータの推定は、最尤法により行うことができる。GEV の密度関数は

$$h_{\xi;\mu,\sigma}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma}\left(1+\xi\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi-1}\exp\left\{-\left(1+\xi\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right\} & \xi\neq 0\\ \dfrac{1}{\sigma}\exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\sigma}-e^{-(x-\mu)/\sigma}\right) & \xi=0\end{cases}$$

$$\left(1+\xi\frac{x-\mu}{\sigma}>0\right)$$

であり、対数尤度関数は$\xi\neq 0$のとき

$$l(\xi,\mu,\sigma)=-N\log\sigma-\frac{\xi+1}{\xi}\sum_{j=1}^{N}\log\left(1+\xi\frac{m_{n,j}-\mu}{\sigma}\right)-\sum_{j=1}^{N}\left(1+\xi\frac{m_{n,j}-\mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi}$$

$$\left(1+\xi\frac{m_{n,j}-\mu}{\sigma}>0,\ j=1,\cdots N\right)$$

また$\xi=0$のとき

$$l(0,\mu,\sigma)=-N\log\sigma-\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{m_{n,j}-\mu}{\sigma}+e^{-(m_{n,j}-\mu)/\sigma}\right)$$

となるので、これが最大となるようなξ,μ,σを求めればよい。

$n=1,10,100,1000$のとき、ξ,μ,σの推定結果は以下のとおりとなる。

n	ξ	μ	σ
1	−0.0885	0.5141	0.1727
10	−0.0846	0.8723	0.1393
100	−0.0570	1.1593	0.1169
1000	0.0712	1.4003	0.0877

推定結果の妥当性は、**QQプロット（分位点プロット）**により確認することができる。QQプロットは、観測値$x_k^{(n)}$とモデルによる理論値$F^{-1}\left(\dfrac{k}{N+1}\right)$との関係をプロットしたグラフである。ただし、$x_k^{(n)}$は$\{x_j^{(n)}\}_{j=1,\cdots,N}$のうち小さいほうから$k$番目の値、$F^{-1}(u)$はモデルで仮定した確率分布の分布関数の逆関数で、GEV の場合、

$$F^{-1}(u)=H_{\xi;\mu,\sigma}^{-1}(u)=\begin{cases}\mu+\dfrac{\sigma}{\xi}\left\{\left(-\log u\right)^{-\xi}-1\right\} & \xi\neq 0\\ \mu-\sigma\log(-\log u) & \xi=0\end{cases}$$

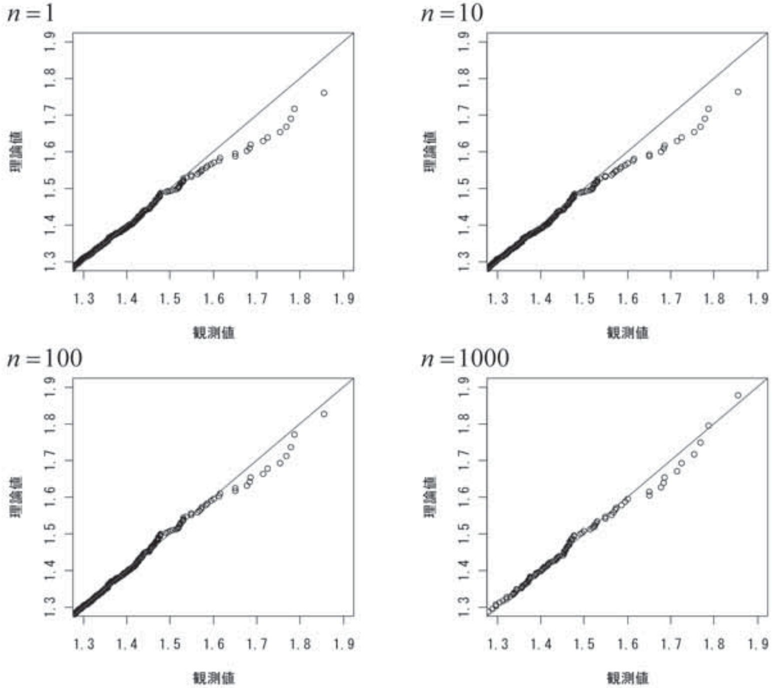
となる。$x_j^{(n)}$の母集団の分布がモデルで仮定した確率分布と一致するとき、プロットは右上がりの45度の直線上に並ぶと期待されることから、これを用いてモデルの当てはまり具合を確認することができる[10]。

今回推定したモデルのQQプロットは、下図のとおりである。

---

10 モデルの当てはまり具合を評価するために、経験分布関数と理論分布の分布関数との関係をプロットしたPPプロットを用いることがあるが、分布関数は分布の左裾においては必ず0、右裾においては必ず1となることから、PPプロットを用いた場合、両裾における観測値とモデルとの乖離を過小評価する恐れがある。したがって、特に分布の裾に関心がある場合にはQQプロットを用いるほうが望ましい。

図10.4 QQプロット



$n=1$ および $n=10$ のときは、QQ プロットは分布の右裾において45度の直線よりも下にあり、したがってモデルから想定される分位点よりも観測値のほうが大きい傾向にあるが、$n=100$ および $n=1000$ とすると、分布の右裾においてもGEV が観測値によく当てはまっていることがわかる。

10.2.2 閾値超過モデル

ブロック最大値モデルにおいては、一般に用いられる連続分布の多くが $F \in MDA(H)$ となるという重要な結果が得られているが、最大値以外の多くのデータを捨ててしまうという問題がある。

最大値だけではなくある閾値を超過したデータを対象とする閾値超過モデ

ルは、このような欠点を解消するものである。

閾値uの超過分布関数と平均超過関数を以下のように定義し、閾値を超過するデータがどのような分布に従うかを考えてみよう。

定義

超過分布関数(excess distribution function)

Xを分布関数Fを持つ確率変数とする。このとき

$$F_u(x) = P(X - u \le x \mid X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)},\ 0 \le x < x_F - u$$

を閾値uの超過分布関数という。ただしx_Fは確率分布の右端点とする。

平均超過関数(mean excess function)

平均が有限である確率変数Xについて、

$$e(u) = E(X - u \mid X > u)$$

を平均超過関数という。

ある分布FがH_ξ(ただし$\xi \neq 0$)の最大値吸引域に属するならば、

$$\lim_{n\to\infty}\left\{F\left(c_n x + d_n\right)\right\}^n = H_\xi(x)$$

であるが、このとき、

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(c_n x + d_n\right)\right) = -\log H_\xi(x)$$

がいえる[11]。

$\xi \neq 0$のとき、

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(c_n x + d_n\right)\right) = -\log H_\xi(x) = \left(1 + \xi x\right)^{-1/\xi}$$

であり、また、上式において$x = 0$とすると、

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - F\left(d_n\right)\right) = 1$$

11 証明は省略する。

これらの比をとると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F\left(c_n x+d_n\right)}{1-F\left(d_n\right)}=\left(1+\xi x\right)^{-1/\xi}$$

であるが、左辺は$x\geq 0$のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-F\left(c_n x+d_n\right)}{1-F\left(d_n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P(X>c_n x+d_n)}{P(X>d_n)}=\lim_{n\to\infty}P(X>c_n x+d_n\mid X>d_n)$$

であり、結局

$$\lim_{n\to\infty}P\left((X-d_n)/c_n\leq x\middle| X>d_n\right)=1-\left(1+\xi x\right)^{-1/\xi}\quad (x\geq 0,1+\xi x>0)$$

がいえる。同様に、$\xi=0$のときは

$$\lim_{n\to\infty}P\left((X-d_n)/c_n\leq x\middle| X>d_n\right)=1-e^{-x}\quad (x\geq 0)$$

となる。

上の2式の右辺のような分布関数を持つ分布を**一般化パレート分布**(Generalized Pareto Distribution；GPD)という。

一般の GPD の分布関数$G_{\xi,\beta}(x)$は次の式で与えられる。

$$G_{\xi,\beta}(x)=\begin{cases}1-\left(1+\xi x/\beta\right)^{-1/\xi} & \xi\neq 0\\ 1-\exp\left(-x/\beta\right) & \xi=0\end{cases}$$

($\beta>0$、また$\xi\geq 0$のとき$x\geq 0$、$\xi<0$のとき$0\leq x\leq -\beta/\xi$)

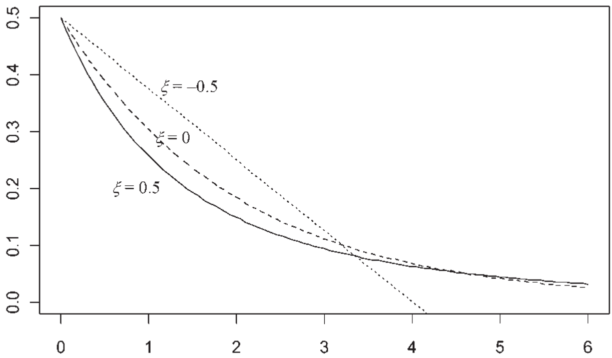
パラメータξ,βはそれぞれ形状パラメータ、尺度パラメータと呼ばれる。$G_{0,\beta}(x)=\lim_{\xi\to 0}G_{\xi,\beta}(x)$で、このとき GPD は平均$\beta$の指数分布$\Gamma(1,1/\beta)$となる。

また、$\xi>0$のときには、形状パラメータ$1/\xi$、尺度パラメータβ/ξのパレート分布[12]を、β/ξだけ負の方向に移動させ、定義域が$x\geq 0$となるように調整した分布となる。

[12] 分布関数$F(x)=1-\left(b/x\right)^{a}$をもつパレート分布のパラメータのうち、$a$を形状パラメータ、$b$を尺度パラメータと呼ぶ。

図10.5

一般化パレート分布の密度関数（$\beta=2$）



逆に、ある閾値を超える超過データの分布が GPD に法則収束するとき、元の分布は GEV の最大値吸引域に属することがわかっている。

定理（Pickands-Balkema-de Haan）

$F \in MDA(H_\xi)$であることは、下式を満たすある適当な正の関数$\beta(u)$が存在することと同値である。

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \le x < x_F - u} \left| F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}(x) \right| = 0$$ [13]

これは、uを大きくするにつれて超過分布関数F_uがGPDの分布関数に収束していくこととFが GEV の最大値吸引域に属することが同値であること、さらにGEV と GPD のパラメータξが共通であることを意味している。一般に用いられる連続分布の多くがあるξに対して$MDA(H_\xi)$に属していることから、GPD は高閾値の超過データをモデル化するための標準的な分布であるといえる。

[13] 関数$f(x)$および区間Iについて、$\sup\{f(x) \mid x \in I\}$を$\sup_{x \in I} f(x)$と表す。

GPD 自身の超過分布関数は簡単な計算により以下のとおりとなる。

$$F_u(x)=G_{\xi,\beta(u)}(x),\quad \beta(u)=\beta+\xi u$$

（$\xi \geq 0$ ならば $x \geq 0$, $\xi < 0$ ならば $0 \leq x \leq -\beta/\xi - u$ ）

ある閾値を超えるデータが GPD に従うとき、閾値をさらに大きくした超過分布も GPD であり、かつパラメータ ξ は不変、パラメータ $\beta(u)$ は閾値 u に関して線形に増大するという意味で、GPD は超過分布を計算するという操作の下で安定的な性質を持っている。

また、GPD の平均超過関数は次のとおりとなる。

$$e(u)=\frac{\beta(u)}{1-\xi}=\frac{\beta+\xi u}{1-\xi}$$

（$0 \leq \xi < 1$ ならば $u \geq 0$ ， $\xi < 0$ ならば $0 \leq u < -\beta/u$ ）[14]

これは GPD の平均超過関数が閾値 u に関して線形に増大することを示しており、この性質は、ある閾値を超過する観測データが GPD に従うとの仮定の妥当性の確認や、適切な閾値の選択に用いることができる。

$F_u(x)=G_{\xi,\beta(u)}(x)$ との仮定の妥当性の確認のためには、u を十分大きく取った場合の平均超過関数 $e(u)$ の観測値を u に対してプロットしたグラフ（**平均超過プロット**）を作成し、平均超過プロットが概ね線形になっていることを確認すればよい。データ x_i（$i=1,\cdots,n$）から、閾値 u を超えるデータのみを抽出したものを $\tilde{x}_j$（$j=1,\cdots,N_u$ 、すなわち閾値 u を超えるデータ数を N_u 個とする）としたとき、平均超過関数 $e(u)$ の観測値は

$$e(u)=\frac{1}{N_u}\sum_{j=1}^{N_u}(\tilde{x}_j-u)=\frac{1}{N_u}\sum_{j=1}^{N_u}\tilde{x}_j-u$$

として算出できる。

---

[14] $\xi \geq 1$ のときには平均が存在しないため、平均超過関数は定義できない。

閾値uの選択にあたっては、uを大きくすれば GPD への当てはまりはよくなることが期待されるが、その一方でモデルの当てはめに用いることができるデータが少なくなる点に留意する必要がある。実務においては平均超過プロットが線形とみなせる範囲内での最小値が採用する閾値の候補となるだろう。

このようにして$F_u\left(x\right)=G_{\xi,\beta(u)}\left(x\right)$が示唆され、適当な閾値$u$を選ぶことができれば、GPD のパラメータは、最尤法により推定することができる。GPD の密度関数は、

$$g_{\xi,\beta}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}\left(1+\xi x/\beta\right)^{-1/\xi-1} & \xi\neq 0\\ \dfrac{1}{\beta}\exp\left(-x/\beta\right) & \xi=0\end{cases}$$

（$\xi\geq 0$のとき$x\geq 0$、$\xi<0$のとき$0\leq x\leq -\beta/\xi$）

であり、対数尤度関数は$\xi\neq 0$のとき

$$\begin{aligned}l\left(\xi,\beta\right)&=\sum_{j=1}^{N_u}\log g_{\xi,\beta}\left(\tilde{x}_j-u\right)\\&=-N_u\log\beta-\left(1+\frac{1}{\xi}\right)\sum_{j=1}^{N_u}\log\left(1+\xi\frac{\tilde{x}_j-u}{\beta}\right)\end{aligned}$$

（$\xi>0$のとき$\tilde{x}_j\geq u$、$\xi<0$のとき$u\leq\tilde{x}_j\leq -\beta/\xi+u$, $j=1,\cdots N_u$）

また$\xi=0$のとき

$$\begin{aligned}l\left(\xi,\beta\right)&=\sum_{j=1}^{N_u}\log g_{\xi,\beta}\left(\tilde{x}_j-u\right)\\&=-N_u\log\beta-\sum_{j=1}^{N_u}\frac{\tilde{x}_j-u}{\beta}\end{aligned}$$

と計算されるので、これが最大となるようなξ,βを求めればよい。

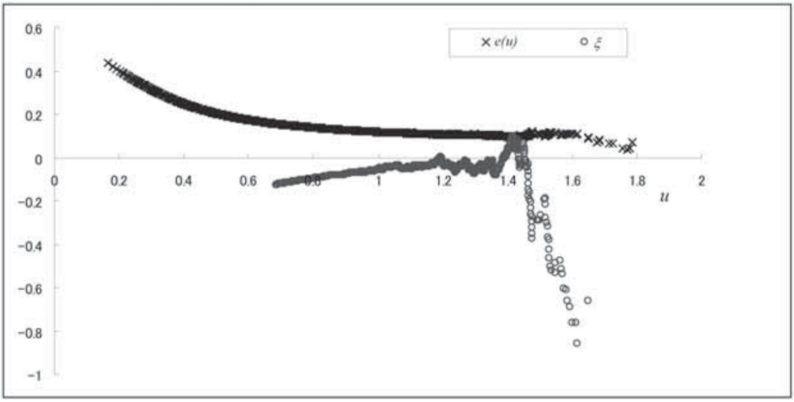
例10.5 （ガンマ分布、閾値超過）

例10.4のz_iの分布の右裾に、GPD を当てはめることを考える。

まずは、閾値を選択するため、z_iの平均超過プロットを作成する。また、それぞれの閾値uごとにパラメータξを最尤法により推定した結果もあわせて表示

する。

図10.6 平均超過プロット



$e(u)$の形状をみると、$u \geq 1.2$においてほぼ直線となっているが、$u = 1.4$以降やや上昇し、$u = 1.6$以降は低下に転じている。また、ξの推定結果は、$u = 1.2$まではuとともに上昇し、その後$u = 1.4$までは$\xi = 0$のあたりにとどまっているが、分布の右裾においては、観測値の数が少ないことや観測値に上限が存在することから、$u = 1.4$以降一旦大きく上昇し、その後急激に低下している。ここでは、$e(u)$が概ね直線となっている範囲の下限であり、またξの推定結果が比較的安定している$u = 1.2$を閾値として採用する。

このとき、ξ, βの推定結果は以下のとおりとなる[15]。

ξ	β
-0.0305	0.1102

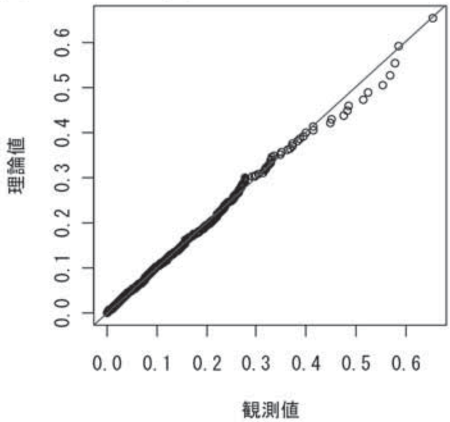
推定したモデルのQQプロットは、下図のとおりである。

---

15 ガンマ分布は$MDA(\Lambda)$に属し、ξの理論値は0である。

QQプロットからは、分布の右裾においてもモデルがよく当てはまっていることがわかる。

図10.7 QQプロット



10.3 リスクの統合

10.3.1 リスクファクター間の従属性[16]

評価の対象として、損害保険会社全体の保険引受に係るリスクを考える。単純化のため、保険引受に係る損益の変動は保険金の変動のみによるとすると、保険金を表す確率変数Lの確率分布が考察の対象となる。

損害保険会社の契約ポートフォリオは、自動車保険、火災保険、傷害保険等リスク特性の異なる様々な契約集団から構成されるため、各々のリスク特性の変化や構成割合の変化を適切に反映したモデルとするためには、Lを同質なリスク特性をもついくつかの契約集団に区分してモデル化したうえで、これらを合算する必要がある。

例10.6

契約ポートフォリオを自動車保険、火災保険、傷害保険、その他の保険の4つに区分し、これらの保険料および損害率をそれぞれp_1, p_2, p_3, p_4（定数）およびR_1, R_2, R_3, R_4（確率変数）とすると、Lは以下のように表される。

$$L = p_1R_1 + p_2R_2 + p_3R_3 + p_4R_4 \tag{10.1}$$

より一般に、損失Lの変動に影響を与える確率変数の組（**リスクファクター**）$\mathbf{R} = (R_1, R_2, \cdots, R_d)^T$により$L$を

---

16 「従属性」は、dependency の訳語であり、「（相互）依存関係」とも訳されるが、correlation の訳語である「相関」とは異なる概念である。単に「相関」といった場合には線形関係を意味することが多く、線形関係を含むより広い意味での関係を指す場合に、これと区別するため「従属性」を用いる。本節では、従属性を、「複数の確率変数の組における、ある確率変数と他の確率変数との間の変動の関連性」ととらえ、複数の確率変数が連動して動く傾向が強いとき、「従属性が強い」と表現する。

$$L = l(\mathbf{R})$$

と表すことができれば、Lの確率分布はリスクファクターの同時確率分布を定めることにより決定することができる。

各リスクファクターは互いに独立であるとは限らず、Lを適切にモデル化するためには、各リスクファクターの周辺分布だけではなく、リスクファクター間の従属性をあわせてモデル化する必要がある。

例10.7

以下のような、自動車保険および火災保険の2つの契約集団からなる契約ポートフォリオを考える。

自動車保険

保険料 1,000

損害率の確率分布

確率	損害率
0.5	55%
0.5	65%
平均	60%

火災保険

保険料 1,000

損害率の確率分布

確率	損害率
0.5	45%
0.5	75%
平均	60%

ここで、リスクファクターである自動車保険と火災保険の損害率の従属性について、3通りの前提をおいて、保険金総額の確率分布を計算してみよう。

① 自動車保険の損害率が高いとき、必ず火災保険の損害率が低くなる場合

確率	損害率		保険金		
	自動車	火災	自動車	火災	合計
0.5	55%	75%	550	750	1,300
0.5	65%	45%	650	450	1,100
平均	60%	60%	600	600	1,200

② 自動車保険の損害率が高いとき、必ず火災保険の損害率が高くなる場合

確率	損害率		保険金		
	自動車	火災	自動車	火災	合計
0.5	55%	45%	550	450	1,000
0.5	65%	75%	650	750	1,400
平均	60%	60%	600	600	1,200

③　自動車保険と火災保険の損害率が互いに独立の場合

確率	損害率		保険金		
	自動車	火災	自動車	火災	合計
0.25	55%	45%	550	450	1,000
0.25	65%	45%	650	450	1,100
0.25	55%	75%	550	750	1,300
0.25	65%	75%	650	750	1,400
平均	60%	60%	600	600	1,200

このように、周辺分布が同じでもリスクファクター間の従属性が異なる場合、たとえば保険金総額が1,300を超える確率が① 0、② 0.5、③ 0.25と、保険金総額の確率分布に違いが生じるため、リスクの評価にあたってはリスクファクター間の従属性を適切にモデル化することが必要である。

10.3.2　従属性の取り扱い

複数のリスクファクター間の従属性についての経験データを観察した結果、何らかの従属性が示唆される場合、その取り扱いについて2通りの考え方がある。

従属性の背後にある因果関係を特定できる場合には、その因果関係をモデル化することが考えられる。たとえば、風水害の発生により火災保険の保険金が増加し、また自動車保険の保険金も増加するという場合を考えると、まず風水害の発生そのものをモデル化し、これが各々の契約集団に与える影響をモデル化することにより、両者の従属性をモデル化することができる。このように、特定された因果関係に基づいて関連性の表現をするモデルを**構造的モデル**と

いう。

他方、因果関係は特定できないが何らかの従属性が見られるという場合には、将来もそのような関係が継続すると判断されるのであれば、過去の経験データを用いて統計的に推定された従属性を反映することも考えられる。このように、観察された統計的性質に基づいて関連性の表現をするモデルを**統計的モデル**という。

以下の節では、後者の統計的モデルを取り上げ、特に各リスクファクターの周辺分布が連続分布である場合におけるいくつかの具体的手法について解説する[17]。

10.3.3 多次元分布

各リスクファクターの周辺分布がすべて正規分布であると仮定できる場合には、リスクファクターの同時分布の候補として多次元正規分布を考えることができる。確率変数 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_d)^T$ の同時密度関数が以下により表されるとき、$\mathbf{X}$ は d 次元正規分布に従うといい[18]、$\mathbf{X}\sim N_d(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ と表す。

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}\exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right)$$

ここで、

$$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_d)^T$$

は各周辺分布の期待値を成分としてもつ平均ベクトル、$\boldsymbol{\Sigma}$ は以下により定義される分散共分散行列である。

---

[17] 周辺分布が離散分布の場合には、後述のようにコピュラが一意に定まらないなど、種々の問題が生じるため、本章では扱わない。

[18] 周辺分布がすべて正規分布であったとしても、同時分布が多次元正規分布に従うとは限らない。

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{SPS} = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1d}\sigma_1\sigma_d \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & {\sigma_2}^2 & \cdots & \rho_{2d}\sigma_2\sigma_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1d}\sigma_1\sigma_d & \rho_{2d}\sigma_2\sigma_d & \cdots & {\sigma_d}^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1d} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1d} & \rho_{2d} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

μ_i, σ_i ;各周辺分布の平均, 標準偏差

ρ_{ij} ;相関係数

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{V(X_i)}\sqrt{V(X_j)}} \tag{10.2}$$

多次元正規分布には、シミュレーションのための乱数発生が容易であること、平均ベクトルと分散共分散行列のみにより同時分布が特定できること、損失Lが(10.1)式のようにリスクファクターの線形結合

$$L = p_1R_1 + p_2R_2 + \cdots + p_dR_d = \mathbf{p}^T\mathbf{R} \qquad (\text{ただし}\ \mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_d)^T)$$

により表される場合に$\mathbf{R} \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$を仮定すると$L \sim N(\mathbf{p}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{p}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{p})$となることなど、便利な性質が多い。特に最後の性質について、2次元($d = 2$)の場合を例にとると、Lの標準偏差は

$$\sqrt{(p_1 \quad p_2)\begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \sqrt{(p_1\sigma_1)^2 + 2\rho_{12}(p_1\sigma_1)(p_2\sigma_2) + (p_2\sigma_2)^2}$$

$$= \sqrt{\rho_{12}(p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2)^2 + (1-\rho_{12})\{(p_1\sigma_1)^2 + (p_2\sigma_2)^2\}}$$

となる。例10.6のようにp_1, p_2を各契約集団の保険料と解釈すれば、$p_i\sigma_i$は契約集団iの保険金の標準偏差となる。したがって、リスクの大きさ(リスク量)を標準偏差で評価する場合には、契約ポートフォリオ全体のリスク量Qは、契約集団iのリスク量$Q_i = p_i\sigma_i$を用いて

$$Q = \sqrt{\rho_{12}(Q_1 + Q_2)^2 + (1-\rho_{12})(Q_1{}^2 + Q_2{}^2)}$$

と表すことができる。特に

$\rho_{12} = 0$のとき　$Q = \sqrt{Q_1{}^2 + Q_2{}^2}$

$\rho_{12} = 1$のとき　$Q = Q_1 + Q_2$

であり、これらはリスク量を標準偏差以外の指標で評価する場合であっても、リスク統合の簡便法として用いられることがある。

上記のとおり多次元正規分布には便利な性質が多い一方で、リスクファクターの周辺分布として正規分布を採用しているため極端な事象を過小評価する恐れがあること、また複数のリスクファクターが同時に大きく変動する可能性を過小評価する恐れがあることなどの問題点がある。

これらの欠点に対しては、**正規分散混合分布**[19]を用いることにより対処できる場合がある。正規分散混合分布を用いたモデルは、d個のリスクファクターの同時分布を、互いに独立なk個の標準正規分布のベクトル$\mathbf{Z} = (Z_1, \cdots, Z_k)^T$を用いて以下のように表現するモデルである。

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{W}\mathbf{AZ}$$

ここで、$\boldsymbol{\mu}$は定数ベクトル、Wは$\mathbf{Z}$と独立な非負の確率変数、$\mathbf{A}$は$d \times k$定数行列とする。Wによる条件付分布を考えると$\mathbf{X}|W \sim N_d(\boldsymbol{\mu}, W\boldsymbol{\Sigma})$、$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{AA}^T$であり、このモデルは、リスクファクターの同時分布を、Wを混合変数とする混合分布により表現するモデルであるといえる。

たとえば、Wを、$\nu / W \sim \chi^2(\nu)$なる確率変数とすると、$\mathbf{X}$は自由度νの**多次元t分布**に従い、その同時密度関数は以下のとおりである。

---

[19] 正規分散混合分布（およびさらにこれを一般化した正規平均分散混合分布）について、関心のある読者は、参考文献1を参照のこと。

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma},\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{(\nu\pi)^{d/2}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}}\left(1+\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{\nu}\right)^{-(\nu+d)/2}$$

多次元 t 分布は多次元正規分布に比べ周辺分布の裾が厚く、また複数のリスクファクターが同時に極端な値をとる事象に対しても多次元正規分布よりも大きな確率を与えることができるため、多次元正規分布の欠点への対処法の一つと考えられる。これ以外にも、W の確率分布を変えることで様々なモデルが考えられるが、たとえば多次元 t 分布ではすべてのリスクファクターの周辺分布が t 分布に従うなど、周辺分布の選択と、各周辺分布間の従属性の選択とを切り離して考えることができないといった問題があり、特に損害保険の保険金の変動のモデル化の手段としては不自由な面がある。

10.3.4 従属性の尺度

前節において、契約ポートフォリオ全体のリスク量Qを、契約集団iのリスク量Q_iと相関係数ρ_{12}により$Q=\sqrt{\rho_{12}(Q_1+Q_2)^2+(1-\rho_{12})(Q_1{}^2+Q_2{}^2)}$と表す手法を紹介したが、このような相関係数を従属性の尺度として用いる手法は妥当性を欠く場合がある。

例10.8

$X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 = X_1{}^2$のとき、X_2はX_1により完全に決定されるが、X_1, X_2の相関係数は、

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=E(X_1{}^3)-E(X_1)E(X_1{}^2)=0$$

より、0となる。

このように、X_1とX_2との間に完全な従属性があっても、相関係数が大きいとは限らない。

例10.9

$X_1 \sim \Gamma(1,1)$, $X_2 = X_1{}^2$のとき、X_1とX_2との間の関係は前掲の例と同じだが、

この場合の相関係数は$2/\sqrt{5}$となり、相関係数は従属性だけではなく周辺分布にも依存する。

例10.10

$\log X_1 \sim N(0,1), \log X_2 \sim N(0,\sigma^2)$のとき、$X_1, X_2$の相関係数$\rho$は、

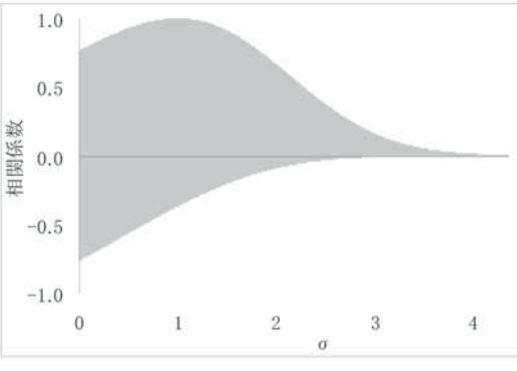
$$\frac{e^{-\sigma}-1}{\sqrt{e-1}\sqrt{e^{\sigma^2}-1}} \le \rho \le \frac{e^{\sigma}-1}{\sqrt{e-1}\sqrt{e^{\sigma^2}-1}}$$

であり、相関係数の取りうる範囲は周辺分布およびそのパラメータに依存する。[20]

たとえば、$\sigma=3$のとき、相関係数の上限は約0.16である。このとき、X_1, X_2は常に同じ方向に変動するが、相関係数はそれほど大きくない。

図10.8 相関係数の取りうる範囲

$\log X_1 \sim N(0,1), \log X_2 \sim N(0,\sigma^2)$



このように、相関係数は常に従属性の強弱を表すとは限らず、周辺分布が正規分布でない場合や各リスクファクター間の従属性が線形ではない場合には、適切な尺度とはいえない。

---

[20] 参考文献1 例5.26

相関係数に代わる尺度として、伝統的に用いられてきたのが順位相関係数である。これに対し、特に区別する場合には(10.2)式により定義される相関係数を**ピアソン（Pearson）の積率相関係数**と呼ぶ。

(1) ケンドール（Kendall）の順位相関係数（ケンドールの τ ）

確率変数 X,Y に対し、ケンドールの τ は、以下により定義される。

$$\begin{aligned}\rho_\tau(X,Y) &= P((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})>0) - P((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})<0) \\ &= E(sign((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})))\end{aligned}$$

ここで、$(\tilde{X},\tilde{Y})$ は (X,Y) の独立な複製、すなわち (X,Y) と同じ同時分布をもつが (X,Y) とは独立な確率変数、$sign(x)$ は以下により定義される関数とする。

$$sign(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

ケンドールの τ は、(X,Y) の2つの標本 (X_1,Y_1) , (X_2,Y_2) に対して、X_1,X_2 の大小と Y_1,Y_2 の大小が一致する[21]確率から、X_1,X_2 の大小と Y_1,Y_2 の大小が一致しない[22]確率を引いた値である。X_1,X_2 や Y_1,Y_2 の大小関係は X,Y の分布とは無関係に決まるため、ケンドールの τ はピアソンの積率相関係数と異なり周辺分布には依存しない。

標本 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ が与えられたとき、標本相関係数 $\hat{\rho}_\tau$ は、$i\neq j$ であるようなすべての (x_i,y_i) , (x_j,y_j) の組に対して $sign((x_i-x_j)(y_i-y_j))$ を計算し、合計を組の数 $n(n-1)$ で割ることにより計算することができる。[23]

---

[21] 協和（concordant）であるという。

[22] 不協和（discordant）であるという。

[23] $i\neq j$ に対して $x_i=x_j$ または $y_i=y_j$ となる場合には特別な取り扱いが必要となるが、説明は省略する。スピアマンの ρ についても同様である。

(2) スピアマン（Spearman）の順位相関係数（スピアマンの ρ ）

確率変数 X, Y に対し、スピアマンの ρ は、以下により定義される。

$$\begin{aligned}\rho_S(X,Y) &= \rho(F_X(X), F_Y(Y)) \\ &= \frac{Cov(F_X(X), F_Y(Y))}{\sqrt{V(F_X(X))}\sqrt{V(F_Y(Y))}}\end{aligned}$$

スピアマンの ρ は、確率変数 X, Y を $F_X(X), F_Y(Y)$ とすることで一旦一様分布に従う確率変数に変換したうえでこれらについてピアソンの積率相関係数を計算したものである。定義からあきらかなように、スピアマンの ρ もケンドールの τ と同様に周辺分布には依存しない。

標本 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\cdots,n}$ が与えられたとき、標本相関係数 $\hat{\rho}_S$ は、$\{(\hat{F}_X(x_i), \hat{F}_Y(y_i))\}_{i=1,\cdots,n}$ に対して計算したピアソンの積率相関係数として求めることができる。ここで、$\hat{F}_X, \hat{F}_Y$ は X, Y の経験分布の分布関数である。

ケンドールの τ やスピアマンの ρ は、周辺分布には依存しない相関の尺度であり、たとえば例10.9のように非負の確率変数 X_1, X_2 の間に $X_2 = X_1{}^2$ のような関係があれば、$\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 1$ となる。より一般に、ある単調増加関数 $u(x)$ が存在して $X_2 = u(X_1)$ と表される[24]とき、$\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 1$ となる。一方、ある単調増加（または減少）関数 $u_1(x)$ とある単調減少（または増加）関数 $u_2(x)$ が存在して $u_2(X_2) = u_1(X_1)$ と表される[25]とき、$\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = -1$ となる。また、X_1, X_2 が独立のとき $\rho_\tau(X_1, X_2) = \rho_S(X_1, X_2) = 0$ となる点についてはピアソンの積率相関係数と同様である。

このように、順位相関係数はピアソンの積率相関係数の欠点をある程度解

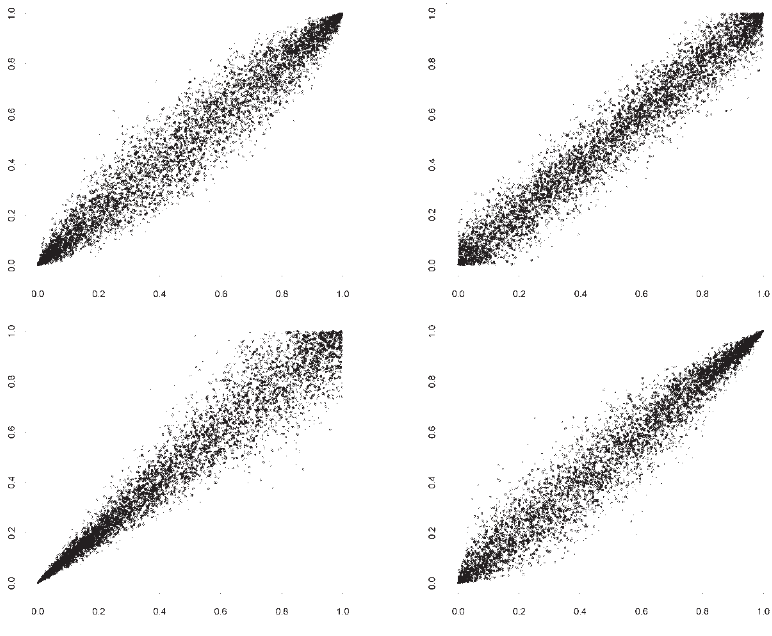
---

[24] このとき、X_1, X_2 は共単調（comonotonic）であるという。

[25] このとき、X_1, X_2 は反単調（countermonotonic）であるという。

消するものではあるが、$\rho_\tau(X_1, X_2) = 0$ や $\rho_S(X_1, X_2) = 0$ であることが必ずしも X_1, X_2 が独立であることを意味しないなど、順位相関係数だけでは確率変数間の従属性のすべてを表すことはできない。たとえば次の4つのグラフは、いずれも周辺分布が[0,1]上の一様分布に従い、ケンドールの τ が0.8であるような同時分布から抽出した10,000個の標本をプロットしたものである。ケンドールの τ が同じであっても、分布の左右の裾における従属性の対称性やその強さに違いがあることがわかる。

図10.9 ケンドールの τ が等しい同時分布の例(τ = 0.8)



特にリスク管理の観点からは、分布の裾における従属性を適切に表現するモデルが必要である。次節以降では、そのための有用な手段であるコピュラについて紹介する。

10.3.5 コピュラ（接合分布関数）

コピュラ（copula、接合分布関数）とは、すべての周辺分布が[0,1]上の一様分布であるような多次元の同時分布関数である。コピュラと同時分布および周辺分布の関係は、以下のように表される。

定理（Sklar）

周辺分布 $F_1,\cdots,F_N$ を持つ任意の N 次元同時分布 F について、以下を満たすコピュラ $C(u_1,\cdots,u_N)$ が存在する。

$$F(x_1,\cdots,x_N)=C(F_1(x_1),\cdots,F_N(x_N)) \qquad (※)$$

特に、$F_1,\cdots,F_N$ が連続分布の場合、$C(u_1,\cdots,u_N)$ は一意に定まる。

逆に、分布 $F_1,\cdots,F_N$ とコピュラ $C(u_1,\cdots,u_N)$ が与えられたとき、(※)により定まる F は周辺分布 $F_1,\cdots,F_N$ を持つ N 次元同時分布となる。

コピュラを用いることにより、周辺分布と従属性とを分離することができる。すなわち、周辺分布とコピュラを与えれば、Sklar の定理により、同時分布を定めることができる。

連続分布については、任意の確率変数 X について

- $F_X(X)$ は[0,1]上の一様分布に従う
- [0,1]上の一様分布に従う確率変数を U とすると、$F_X^{-1}(U)$ は X と同じ分布に従う

の2点に留意すれば容易に理解できるだろう。N 次元確率変数 X の同時分布 F が連続な周辺分布 $F_1,\cdots,F_N$ を持つとき、

$$C(u_1,\cdots,u_N)=F(F_1^{-1}(u_1),\cdots,F_N^{-1}(u_N))$$

により定まるコピュラを、F（または X）のコピュラという。

周辺分布が連続でない場合には、以下の例のようにコピュラは一意には定まらない。

例10.11

以下の分布に従う(X_1, X_2)を考える。[26]

	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$
$X_1 = 0$	$P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1/8$	$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 2/8$
$X_1 = 1$	$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 2/8$	$P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 3/8$

周辺分布は以下のとおりとなる。

$P(X_1 = 0) = 3/8$、$P(X_1 = 1) = 5/8$

$P(X_2 = 0) = 3/8$、$P(X_2 = 1) = 5/8$

$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$より、$C(u_1, u_2)$について以下の関係が得られる。

$$F(0,0) = C(3/8, 3/8) = 1/8$$

$$F(0,1) = C(3/8, 1) = 3/8$$

$$F(1,0) = C(1, 3/8) = 3/8$$

$$F(1,1) = C(1,1) = 1$$

ところが、最初の等式以外は$C(u_1, u_2)$が同時分布関数であることから自明であり、結局$C(3/8, 3/8) = 1/8$を満たす限り任意のコピュラが(X_1, X_2)のコピュラとなる。

同時生存関数$\overline{F}(x_1, \cdots, x_N) = P(X_1 > x_1, \cdots, X_N > x_N)$と周辺生存関数$\overline{F}_{X_1}(x_1), \cdots, \overline{F}_{X_N}(x_N)$の間にも同様に

$$\overline{F}(x_1, \cdots, x_N) = \hat{C}(\overline{F}_1(x_1), \cdots, \overline{F}_N(x_N))$$

の関係が成り立ち、$\hat{C}(u_1, \cdots, u_N)$を**生存コピュラ**(survival copula)という。

2次元の場合には、$C(u_1, u_2)$と$\hat{C}(u_1, u_2)$の間に以下の関係が成り立つ。

$$\hat{C}(1-u_1, 1-u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$$

---

[26] 参考文献1 例5.5

10.3.6 コピュラの例

(1) 共単調コピュラ、反単調コピュラ、積コピュラ

共単調コピュラ、反単調コピュラ、積コピュラは、それぞれ以下のように定義されるコピュラである。

共単調コピュラ　$C^{+}(u_1,\cdots,u_N)=\min(u_1,\cdots,u_N)$

反単調コピュラ　$C^{-}(u_1,u_2)=\max(u_1+u_2-1,0)$

積コピュラ　$C^{\perp}(u_1,\cdots,u_N)=u_1\cdot\cdots\cdot u_N$

確率変数(X_1,X_2)が共単調または反単調のとき、そのコピュラは共単調コピュラまたは反単調コピュラとなる。3次元以上の場合には反単調コピュラは存在しない。

任意の$0\le u_i\le 1, i=1,\cdots,N$に対して$C_1(u_1,\cdots,u_N)\le C_2(u_1,\cdots,u_N)$が成り立つとき、コピュラ$C_1$はコピュラ$C_2$より小さいといい$C_1\prec C_2$と表す。2次元の場合には、共単調コピュラおよび反単調コピュラはコピュラの上限および下限となる。3次元以上の場合であっても、任意のN次元コピュラCに対して

$$\max\left(\sum_{i=1}^{N}u_i-N+1,0\right)\prec C\prec \min(u_1,\cdots,u_N)$$

が成り立つが、$\max\left(\sum_{i=1}^{N}u_i-N+1,0\right)$はコピュラではない。

$(X_1,\cdots,X_N)$のコピュラが積コピュラであるとき、

$$\begin{aligned}F(x_1,\cdots,x_N)&=C(F_1(x_1),\cdots,F_N(x_N))\\&=F_1(x_1)\cdot\cdots\cdot F_N(x_N)\end{aligned}$$

であり、$(X_1,\cdots,X_N)$は独立である。$(X_1,\cdots,X_N)$の周辺分布が連続の場合には、その逆も成り立つ。

(2) アルキメデス型コピュラ

アルキメデス型コピュラ（Archimedean copula）は、以下により定義されるコピュラである。

$$C(u_1,\cdots,u_N;\varphi)=\varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\cdots+\varphi(u_N))$$

ここで、φ は $[0,1]$ から $[0,\infty]$ への連続な狭義単調減少関数で、以下の条件を満たすものとし、アルキメデス型コピュラの生成作用素（generator）という。

$\varphi(0)=\infty$ 、$\varphi(1)=0$

すべての非負の整数 k に対し $(-1)^k \dfrac{d^k}{dx^k}\varphi(x)\geq 0$

アルキメデス型コピュラの例として、以下のものがある。

フランク・コピュラ（Frank copula）

$$C(u_1,\cdots,u_N)=-\frac{1}{\alpha}\log\left\{1+\frac{(e^{-\alpha u_1}-1)\cdots(e^{-\alpha u_N}-1)}{(e^{-\alpha}-1)^{N-1}}\right\},\ \alpha\neq 0$$

$$\left(\varphi(u)=-\log\frac{e^{-\alpha u}-1}{e^{-\alpha}-1}\right)$$

グンベル・コピュラ（Gumbel copula）

$$C(u_1,\cdots,u_N)=\exp\left(-\left((-\log u_1)^\alpha+\cdots+(-\log u_N)^\alpha\right)^{1/\alpha}\right),\ \alpha\geq 1$$

$$\left(\varphi(u)=(-\log u)^\alpha\right)$$

クレイトン・コピュラ（Clayton copula）

$$C(u_1,\cdots,u_N)=(u_1^{-\alpha}+\cdots+u_N^{-\alpha}-N+1)^{-1/\alpha},\ \alpha>0$$

$$\left(\varphi(u)=\frac{1}{\alpha}(u^{-\alpha}-1)\right)$$

グンベル・コピュラは $\alpha=1$ のとき積コピュラとなり、またフランク・コピュラおよびクレイトン・コピュラはいずれも $\alpha\to 0$ の極限において積コピュラと一致する。

(3) 楕円コピュラ

多次元正規分布および多次元t分布のコピュラを、それぞれ**正規コピュラ**（normal copula, Gaussian copula）、**tコピュラ**という。

正規コピュラ　$C(u_1,\cdots,u_N;\boldsymbol{\rho})=\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(\Phi^{-1}(u_1),\cdots,\Phi^{-1}(u_N))$

tコピュラ　$C(u_1,\cdots,u_N;\boldsymbol{\rho},\nu)=T_{\boldsymbol{\rho},\nu}(T_\nu^{-1}(u_1),\cdots,T_\nu^{-1}(u_N))$

ここで、

$\Phi(u)$ は標準正規分布の分布関数、

$\Phi_{\boldsymbol{\rho}}(u_1,\cdots,u_N)$ は相関係数行列 $\boldsymbol{\rho}$ の多次元標準正規分布の分布関数、

$T_\nu(u)$ は自由度 ν の t 分布の分布関数、

$T_{\boldsymbol{\rho},\nu}(u_1,\cdots,u_N)$ は自由度 ν 、相関係数行列 $\boldsymbol{\rho}$ の多次元 t 分布の分布関数

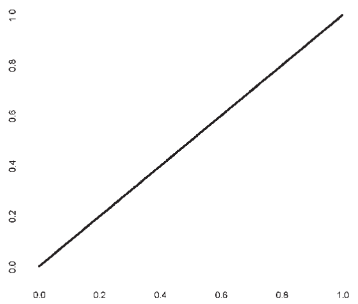
とする。

正規コピュラおよびtコピュラは楕円コピュラ[27]とよばれる型のコピュラに属する。

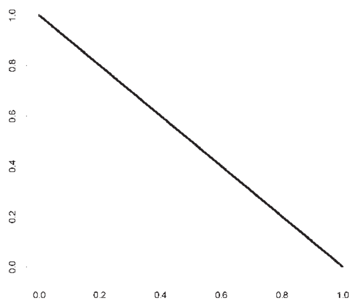
下図は、本節で紹介したコピュラをもつ同時分布（周辺分布はいずれも[0,1]上の一様分布）から10,000個の標本を抽出してプロットしたものである。フランク・コピュラ、グンベル・コピュラ、クレイトン・コピュラ、正規コピュラ、tコピュラについては、いずれもケンドールの τ が0.8となるようにパラメータを設定している[28]。

図10.10 コピュラの例

共単調コピュラ



反単調コピュラ

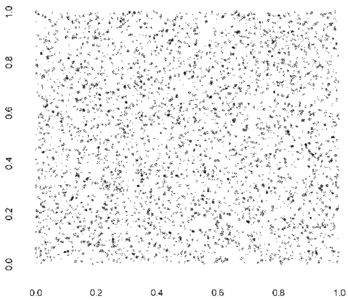


---

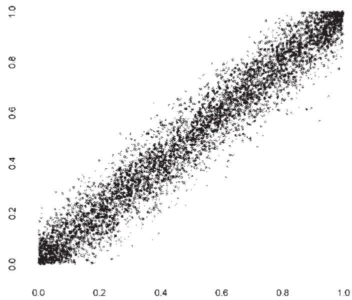
27 楕円コピュラ（elliptical copula）の定義については参考文献9を参照のこと。

28 正規コピュラ、フランク・コピュラ、クレイトン・コピュラ、グンベル・コピュラのグラフは、それぞれ図10.9の左上、右上、左下、右下のグラフと同じものである。

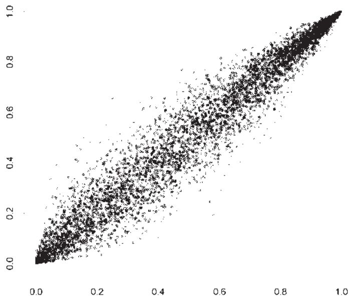
積コピュラ



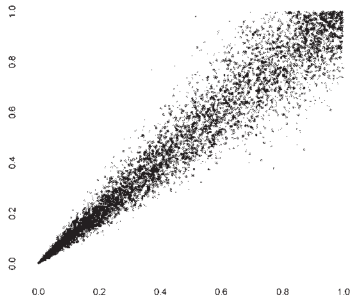
フランク・コピュラ（$\alpha = 18.192$）



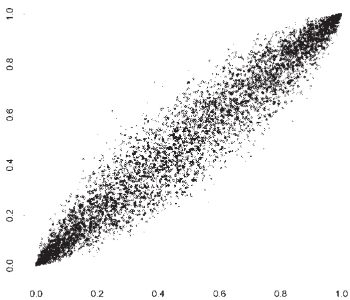
グンベル・コピュラ（$\alpha = 5$）



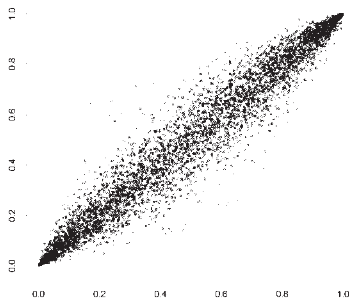
クレイトン・コピュラ（$\alpha = 8$）



正規コピュラ（$\rho = 0.951$）



tコピュラ（$\rho = 0.951$、自由度3）



10.3.7 コピュラによる従属性の尺度の表現

(1) 順位相関係数

10.3.4節において紹介したケンドールの τ やスピアマンの ρ といった順位相関係数は、周辺分布に依存しない尺度であり、コピュラのみを用いて表現することができる。

・ ケンドールの τ

$$\begin{aligned}\rho_\tau(X,Y) &= P((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})>0) - P((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y})<0) \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 C(u_1,u_2)dC(u_1,u_2)-1\end{aligned}$$

・ スピアマンの ρ

$$\begin{aligned}\rho_S(X,Y) &= \rho(F_X(X),F_Y(Y)) \\ &= 12\int_0^1\int_0^1 (C(u_1,u_2)-u_1u_2)du_1du_2\end{aligned}$$

前節で紹介した各種のコピュラについて、ケンドールの τ は以下のとおりとなる。

コピュラ	$\rho_\tau(X,Y)$
共単調コピュラ	1
反単調コピュラ	-1
積コピュラ	0
アルキメデス型コピュラ	$1+4\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}du$
フランク・コピュラ	$1-4\alpha^{-1}(1-D_1(\alpha))$, $D_1(\alpha)=\alpha^{-1}\int_0^\alpha \frac{t}{e^t-1}dt$
グンベル・コピュラ	$1-1/\alpha$
クレイトン・コピュラ	$\alpha/(\alpha+2)$
正規コピュラ	$2\arcsin(\rho)/\pi$
tコピュラ	$2\arcsin(\rho)/\pi$

(2) 裾従属係数

裾従属係数(tail dependence coefficient)は、分布の左右の裾における従属性を表す尺度として用いられる。

・ **左裾従属係数**(lower tail dependence coefficient)

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \lim_{u\to+0} P(F_{X_1}(X_1)\le u \mid F_{X_2}(X_2)\le u) \\ &= \lim_{u\to+0}\frac{C(u,u)}{u} \\ &= \lim_{u\to+0}\left(\left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial s}\right|_{s=t=u} + \left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial t}\right|_{s=t=u}\right) \quad ^{29} \\ &= \lim_{u\to+0}\{P(U_2\le u \mid U_1=u)+P(U_1\le u\mid U_2=u)\}\end{aligned}$$

・ **右裾従属係数**(upper tail dependence coefficient)

$$\begin{aligned}\lambda_u &= \lim_{u\to1-0} P(F_{X_1}(X_1)> u \mid F_{X_2}(X_2)> u) \\ &= \lim_{u\to1-0}\frac{\hat{C}(1-u,1-u)}{1-u} \\ &= \lim_{u\to1-0}\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u} \\ &= 2-\lim_{u\to1-0}\frac{1-C(u,u)}{1-u} \\ &= \lim_{u\to1-0}\left\{\left(1-\left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial s}\right|_{s=t=u}\right)+\left(1-\left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial t}\right|_{s=t=u}\right)\right\} \\ &= \lim_{u\to1-0}\{P(U_2> u \mid U_1=u)+P(U_1> u\mid U_2=u)\}\end{aligned}$$

ここで、(U_1,U_2) は $(F_{X_1}(X_1),F_{X_2}(X_2))$ により定義される2次元一様分布に従う確率変数の組とする。

$\lambda_l>0$ および $\lambda_u>0$ のときそれぞれ左裾および右裾において裾従属性を持つといい、$\lambda_l=0$ および $\lambda_u=0$ のときそれぞれ左裾および右裾において漸近的に独立であるという。

---

29 ロピタルの定理による。

例10.12　正規コピュラ

コピュラは周辺分布に依存しないため、2次元標準正規分布に従う確率変数(X_1, X_2)により正規コピュラの裾従属性を評価する。正規分布の対称性から$\lambda_l = \lambda_u$であり、λ_lについてのみ評価すればよい。

$$\begin{aligned}
\lambda_l &= \lim_{u\to+0}\{P(U_2 \le u \mid U_1 = u) + P(U_1 \le u \mid U_2 = u)\} \\
&= 2\lim_{u\to+0} P(U_2 \le u \mid U_1 = u) \\
&= 2\lim_{u\to+0} P(\Phi^{-1}(U_2) \le \Phi^{-1}(u) \mid \Phi^{-1}(U_1) = \Phi^{-1}(u)) \\
&= 2\lim_{x\to-\infty} P(X_2 \le x \mid X_1 = x) \qquad (x = \Phi^{-1}(u)\text{とおいた})
\end{aligned}$$

相関係数をρ（$-1<\rho<1$）とすると、$X_2 \mid X_1 = x \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$より、

$$\lambda_l = 2\lim_{x\to-\infty}\Phi\left(\frac{x-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) = 2\lim_{x\to-\infty}\Phi\left(x\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\right) = 0$$

であり、正規コピュラは両裾において漸近的に独立である。

例10.13　グンベル・コピュラ

$C(u_1,u_2) = \exp\left(-\left(\left(-\log u_1\right)^{\alpha} + \left(-\log u_2\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}\right)$より$C(u,u) = u^{2^{1/\alpha}}$なので、

$$\lambda_l = \lim_{u\to+0}\frac{C(u,u)}{u} = \lim_{u\to+0}\frac{u^{2^{1/\alpha}}}{u} = \lim_{u\to+0} u^{2^{1/\alpha}-1} = 0$$

$$\begin{aligned}
\lambda_u &= 2 - \lim_{u\to1-0}\frac{1-C(u,u)}{1-u} = 2 - \lim_{u\to1-0}\frac{1-u^{2^{1/\alpha}}}{1-u} = 2 - \lim_{u\to1-0} 2^{1/\alpha}u^{2^{1/\alpha}-1} \\
&= 2 - 2^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

であり、グンベル・コピュラは左裾において漸近的に独立であり、右裾において裾従属性を持つ。

その他のコピュラについても同様に計算が可能であり、まとめると下表のとおりとなる。

コピュラ	λ_l	λ_u
フランク・コピュラ	0	0
グンベル・コピュラ	0	$2-2^{1/\alpha}$
クレイトン・コピュラ	$2^{-1/\alpha}$	0
正規コピュラ	0	0
tコピュラ	$2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$ [30]	$2t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)$

10.3.8 コピュラの推定

(1) 経験コピュラ

経験コピュラ(empirical copula)は、観測データから得られるコピュラであり、以下により計算される。

$$\tilde{C}\left(\frac{t_1}{T},\cdots,\frac{t_N}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}1_{\left[x_1^t\le x_1^{(t_1)},\cdots,x_N^t\le x_N^{(t_N)}\right]}$$

ここでTは観測データの数、$x_n^{(t_n)}$は$\{x_n^t\}_{t=1,\cdots,T}$を昇順に並び替えたなかでt_n番目のデータを表す。

Σの中は、すべてのnに対しx_n^tがt_n番目以下であるようなデータの個数を表し、これをデータの総数で割ることにより、経験分布関数を求めている。

(2) コピュラの選択

経験コピュラをそのまま用いるのではなく、あるパラメトリックなコピュラを用いて従属性をモデル化する場合には、何らかの基準により観測データからコピュラを特定し、特定したコピュラのパラメータを推定する必要がある。

コピュラの特定にあたっては、母集団に関する先験的な知見をもとに、対称

[30] t_νは自由度νのt分布の分布関数を表す。

性や裾従属性の有無などにより適切と考えられるコピュラを選択する方法、経験コピュラとの差

$$d(\tilde{C},C)=\sqrt{\sum_{t_1=1}^{T}\cdots\sum_{t_N=1}^{T}\left\{\tilde{C}\left(\frac{t_1}{T},\cdots,\frac{t_N}{T}\right)-C\left(\frac{t_1}{T},\cdots,\frac{t_N}{T}\right)\right\}^2}$$

を最小とするようにコピュラを選択する方法などがある。

(3) パラメータの推定

コピュラのパラメータを推定する方法には、順位相関係数による積率法、最尤法、IFM法、規準最尤法などがある[31]。

・ **順位相関係数による積率法**

コピュラのケンドールの τ が、観測データから求めたケンドールの τ に等しいものとして、コピュラのパラメータを推定する方法である。たとえば、観測データから求めたケンドールの τ が0.5のとき、グンベル・コピュラのケンドールの τ は $1-1/\alpha$ であることから、$1-1/\alpha=0.5$ より $\alpha=2$ と求めることができる。

なお、tコピュラについては $\rho_\tau=2\arcsin(\rho)/\pi$ であり、この方法により自由度を決定することができないため、ρ を決定した上で、自由度は最尤法などのほかの手法により推定する必要がある。

順位相関係数による積率法には、以下に述べる最尤法やIFM法とは異なり、周辺分布を仮定する必要がないという利点がある。

・ **最尤法**

コピュラの密度関数は、

$$c(u_1,\cdots,u_N)=\frac{\partial^N C(u_1,\cdots,u_N)}{\partial u_1\cdots\partial u_N}$$

---

31 パラメータ推定方法の詳細については、参考文献1および参考文献8を参照されたい。

により与えられるため、これを用いて対数尤度

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{t=1}^{T} \log c(F_1(x_1^t), \cdots, F_N(x_N^t)) + \sum_{t=1}^{T} \sum_{n=1}^{N} \log f_n(x_n^t)$$

を最大化するパラメータ$\boldsymbol{\theta}$を求める方法である。

最尤法は、周辺分布のパラメータとコピュラのパラメータをあわせて推定する方法であり、次元Nが大きいときには推定が困難なことがある。

- **IFM法**（inference-function for margin）

IFMは直訳すれば周辺分布に対する推測関数法となる。

最尤法が周辺分布のパラメータとコピュラのパラメータをあわせて推定する方法であるのに対し、IFM 法は先に周辺分布のパラメータを推定し、次に推定した周辺分布により観測データを分位点データに変換し、これをもとに最尤法によりコピュラのパラメータを推定する方法である。

- **規準最尤法**（canonical maximum likelihood）

最尤法およびIFM法は周辺分布にパラメトリックな分布を仮定しそのパラメータを推定するが、コピュラのパラメータの推定結果が周辺分布の推定誤りの影響を受けるという欠点がある。規準最尤法は周辺分布の推定誤りの影響を避けるため、観測データを周辺経験分布により分位点データに変換し、これをもとに最尤法によりコピュラのパラメータを推定する方法である。

10.4 リスク尺度

リスク尺度とは、リスクを表す確率変数Xとその評価である数値$\rho(X)$との対応関係である[32]。たとえば、保険料算出原理は、将来の保険金の分布とリスクプレミアムとの対応関係を定めるものであり、リスク尺度の一種である。また、サープラスの変動により定められる破産確率も、リスク尺度と考えることができる。

このように、リスク尺度にはさまざまなものが含まれるが、企業のリスク管理の文脈においては、企業が保有するリスクに対し、そのリスクから生じる予想外の損失をカバーするために必要な資本、すなわち**所要資本**を定めるリスク尺度が考察の対象となることが多い。本節では、代表的なリスク尺度やリスク尺度に求められる性質について解説する。

10.4.1 代表的なリスク尺度

(1) VaR

VaR(Value at Risk)は所要資本の定義として広く用いられているリスク尺度であり、以下により定義される。

$$VaR_{\alpha}(X) = \min\{x \mid F_X(x) \geq \alpha\} \quad 0 < \alpha < 1$$

パラメータαを信頼水準といい、上式により定義される VaR を信頼水準100α%の VaR、または単に100α%VaR と呼ぶ。100α%VaR は、損害額がその

[32] 本章では損失額分布によりリスクを表現し、したがってリスク尺度も損失額分布に対して定義するが、文献によっては損失ではなく収益の確率分布に対してリスク尺度を定義しているものもあり、注意が必要である。この点については後に述べる確率順序においても同様である。

値を上回る確率が100(1-α)%となるような値を表す。X が連続型確率変数の場合には、より簡単に

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

と表すことができる。

例10.14

X が平均 μ_X、標準偏差 σ_X の正規分布に従うとき、Φ を標準正規分布の分布関数とすると、$F_X(x) = \Phi((x-\mu_X)/\sigma_X)$ より、

$$F_X^{-1}(\alpha) = \mu_X + \Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma_X$$

したがって、

$$VaR_\alpha(X) = \mu_X + \Phi^{-1}(\alpha) \times \sigma_X$$

(2) 期待ショートフォール、TVaR、CTE

期待ショートフォール(Expected Shortfall;ES)、TVaR(Tail VaR)、CTE(Conditional Tail Expectation)[33]はいずれも VaR を用いて定義されるリスク尺度であり、それぞれ以下により定義される。

$$ES_\alpha(X) = E[(X - VaR_\alpha(X))_+]$$ [34] [35]

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_t(X)dt$$

$$CTE_\alpha(X) = E[X \mid X > VaR_\alpha(X)]$$

100α%VaR と同額の資本を持っている場合、期待ショートフォールは欠損額(破産しない場合は0)の期待値を表すものと考えることができる。また、100α%TVaR は100(1-α)%の確率で被る損失額の平均値、100α%CTE は

---

[33] CTE は、CVaR(Conditional VaR)とも呼ばれる。

[34] $(X)_+ = \max(X,0)$

[35] 期待ショートフォールを TVaR と同義に用いることもある。(たとえば参考文献1等)

100α%VaR を超える損失額の平均値である。

期待ショートフォール、TVaR および CTE の間には、以下のような関係がある。

$$ES_\alpha(X) = E[(X - VaR_\alpha(X))_+]$$
$$= \int_\alpha^1 \{VaR_t(X) - VaR_\alpha(X)\}dt$$

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_t(X)dt$$
$$= VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \{VaR_t(X) - VaR_\alpha(X)\}dt$$
$$= VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} ES_\alpha(X)$$

$$CTE_\alpha(X) = E[X \mid X > VaR_\alpha(X)]$$
$$= VaR_\alpha(X) + E[(X - VaR_\alpha(X))_+ \mid X > VaR_\alpha(X)]$$
$$= VaR_\alpha(X) + \frac{E[(X - VaR_\alpha(X))_+]}{P(X > VaR_\alpha(X))}$$
$$= VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1 - F_X(VaR_\alpha(X))} ES_\alpha(X)$$

$P(X = VaR_\alpha(X)) = 0$ であれば $F_X(VaR_\alpha(X)) = \alpha$ なので、このとき $CTE_\alpha(X)$ と $TVaR_\alpha(X)$ は一致する。したがって、連続型確率変数に対しては TVaR,CTE は同じものと考えてよい。また、一般に $\alpha \le F_X(VaR_\alpha(X))$ なので、VaR,TVaR,CTE の間には、

$$VaR_\alpha(X) \le TVaR_\alpha(X) \le CTE_\alpha(X)$$

が成り立つ。

例10.15

X が平均 μ_X、標準偏差 σ_X の正規分布に従うとき、

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_t(X)dt$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_X^{-1}(\alpha)}^\infty x f_X(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} x\frac{1}{\sigma_X}\phi\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)dx \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty}(\mu_X+\sigma_X z)\phi(z)\,dz \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left\{\mu_X\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty}\phi(z)\,dz+\sigma_X\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty}z\phi(z)\,dz\right\} \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\left\{\mu_X(1-\alpha)+\sigma_X\phi(\Phi^{-1}(\alpha))\right\} \\
&= \mu_X+\sigma_X\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} \qquad \phi:\text{標準正規分布の密度関数}
\end{aligned}
$$

例10.16

X が以下の確率分布に従うものとする。

x	$P(X=x)$
0	0.2
10	0.2
20	0.2
30	0.2
40	0.2

$$VaR_{70\%}(X)=\min\{x\mid F_X(x)\geq 0.7\}=30$$

$$
\begin{aligned}
ES_{70\%}(X) &= E[(X-VaR_{70\%}(X))_+] \\
&= (30-30)\times 0.2+(40-30)\times 0.2=2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
TVaR_{70\%}(X) &= \frac{1}{1-0.7}\int_{0.7}^{1}VaR_x(X)\,dx \\
&= \frac{1}{1-0.7}\left\{30\int_{0.7}^{0.8}dx+40\int_{0.8}^{1}dx\right\}=\frac{11}{0.3}=36.\dot{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
CTE_{70\%}(X) &= E[X\mid X>VaR_{70\%}(X)] \\
&= \frac{40\times 0.2}{0.2}=40
\end{aligned}
$$

(3) 歪みリスク尺度

歪みリスク尺度(distortion risk measure)は、評価の対象とするリスクの確率

分布を一定の規則に従い変換した確率分布のもとでの期待値として定義されるリスク尺度である。

X の期待値は、生存関数 $S_X(x)=1-F_X(x)$ を用いて

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^\infty S_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty S_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 \{1-S_X(x)\}\,dx
\end{aligned}
$$

と表すことができる。$S_X(x)$ を、$g(0)=0, g(1)=1$ であるような $[0,1]$ 上の左連続な非減少関数 $g(u)$ を用いて

$$S_X^*(x) = g\left(S_X(x)\right)$$

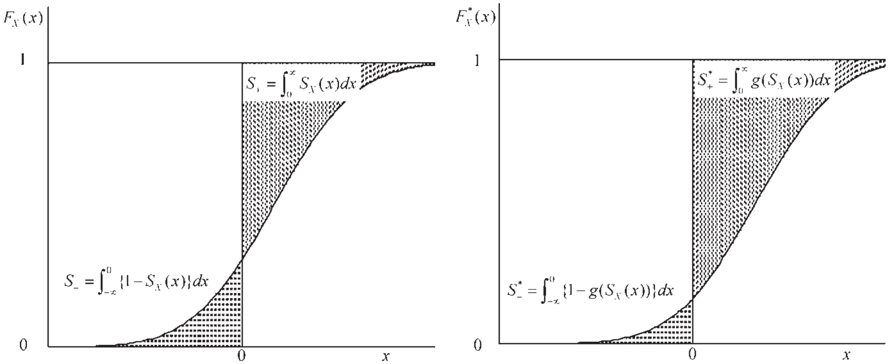
のように変換したとき、

$$
\begin{aligned}
E_g[X] &= \int_0^\infty S_X^*(x)\,dx - \int_{-\infty}^0 \{1-S_X^*(x)\}\,dx \\
&= \int_0^\infty g\left(S_X(x)\right)dx - \int_{-\infty}^0 \{1-g\left(S_X(x)\right)\}\,dx
\end{aligned}
$$

は g により変換された確率分布のもとでの期待値を表す。上式により定義されるリスク尺度を、歪み関数 g により生成される歪みリスク尺度という。

図10.11 歪みリスク尺度

（S_+, S_-, S_+^*, S_-^* は網掛け部分の面積を表す）



$S_X(x)$ のもとでの期待値

$$E[X] = S_+ - S_-$$

$g(u)$ で変換された $S_X^*(x)$ のもとでの期待値

$$E_g[X] = S_+^* - S_-^*$$

例10.17

VaR は、歪み関数

$$g(u)=\begin{cases}0 & (u\le 1-\alpha)\\ 1 & (1-\alpha<u)\end{cases}\qquad (0<\alpha<1)$$

により生成される歪みリスク尺度である。

例10.18

TVaR は、歪み関数

$$g(u)=\min\left(\frac{u}{1-\alpha},1\right)\qquad (0<\alpha<1)$$

により生成される歪みリスク尺度である。

例10.19

歪み関数

$$g(u)=\int_0^u \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

により生成される歪みリスク尺度を、**ベータ歪みリスク尺度**（Beta-distortion risk measure）という。特に $a=1/\gamma<1, b=1$ のとき $g(u)=u^{1/\gamma}$ であり、これにより生成される歪みリスク尺度を、**PH変換リスク尺度**（PH-transform risk measure、PH = Proportional Hazard）という。

例10.20

歪み関数

$$g(u)=\Phi\left(\Phi^{-1}(u)+\alpha\right)$$

により生成される歪みリスク尺度を、**ワン変換リスク尺度**（Wang transform risk measure）という。

10.4.2 リスク尺度に求められる性質

前述のようにさまざまなリスク尺度が存在する中で、実際にリスクを評価する際にはあるひとつのリスク尺度を選択する必要がある。選択にあたっては、計

算が可能か、特に実務においてよく用いられる確率分布について結果が発散するようなことはないかといった、実務的観点からの検討や、あらかじめ定義した望ましいリスク尺度が満たすべき条件に合致しているかといった理論的観点からの検討が必要となる。ここでは理論的観点からみた場合にリスク尺度に求められる性質について取り上げる。

(1) コヒーレント・リスク尺度

望ましいリスク尺度が満たすべき条件の代表的なものとして、Artzner ら[36]が定めた次の4つの公理を挙げることができる。これらの条件を満たすリスク尺度を、**コヒーレント・リスク尺度**(coherent risk measure)という。

① **平行移動不変性**(Translation invariance)

任意の実数cに対し、$\rho(X+c)=\rho(X)+c$

② **単調性**(Monotonicity)

$P(X_1 \le X_2)=1$ならば、$\rho(X_1) \le \rho(X_2)$

③ **劣加法性**(Subadditivity)

$\rho(X_1+X_2) \le \rho(X_1)+\rho(X_2)$

④ **正の同次性**(Positive homogeneity)

任意の正の実数cに対し、$\rho(cX)=c\rho(X)$

これらの条件について、もう少し詳しく見ていこう。

平行移動不変性は、リスクXに定額の損失cをあわせたリスクに対する評価すなわちリスク量が、リスクXの評価にcを加算したものになるという条件である。損失額とリスクに対する評価とが同じ単位で表されることを求めた条件と考える

[36] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999). Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance 9(3) 203-228.

こともできる。また、$c=-\rho(X)$ とおくと

$$\rho(X-\rho(X))=\rho(X)-\rho(X)=0$$

となる。このことから、$\rho(X)$ は、リスク X を受け入れるために最低限必要な資本の額と解釈することができる。

単調性は、いかなる場合においてもより大きな損失額をもたらすリスクにより大きな評価を与えるものであり、自明な条件である。

劣加法性は、2つのリスクをあわせたリスクに対する評価が、それぞれのリスクについての評価の合計額以下となることを求めた条件である。言い換えれば、ポートフォリオを2つに分割したときに、各々に対するリスク量の合計が、元のポートフォリオのリスク量以上となることを求めているともいえる。この条件を満たすリスク尺度を用いた場合、ポートフォリオを複数の部分に分割し、それぞれについてあらかじめ定めたリスク量を超えないようにポートフォリオの管理を行うことで、全体のリスク量があらかじめ定めた値以下となることが保証される。

正の同次性は、リスク X に定数 c を乗じたリスクに対する評価が、リスク X の評価の c 倍になるという条件であり、次のような解釈ができる。

例10.21

損失額を円建で評価した場合のリスク量は、ドル建で評価したリスク量を円換算したものに等しい[37]。

例10.22

1%の確率で損失100億円、99%の確率で損失0となるポートフォリオのリスク量は、1%の確率で損失100万円、99%の確率で損失0となるポートフォリオのリスク量の10,000倍である。

[37] 為替変動はないものとする。

劣加法性を前提とすると、同一のリスクXをn個あわせたポートフォリオのリスク量は$\rho(nX) \le n\rho(X)$となるが、正の同次性は$\rho(nX) < n\rho(X)$とならないことを求めた条件であり、このようなリスクを多数集めてもポートフォリオ全体のリスク量はそれぞれのリスク量の合計を下回らない、すなわちリスクの分散効果が働かないことに対応している。

コヒーレント・リスク尺度は、以下の性質を持つ。

- $\rho(0) = 0$

  正の同次性の条件において、$c = 0$とおくことにより導かれる。

- $\rho(c) = c$

  平行移動不変性の条件において$X = 0$とすると、$\rho(c) = \rho(0) + c$

  これと$\rho(0) = 0$から導かれる。

- $P(X \le m) = 1$となるmに対し、$\rho(X) \le m$

(2) 凸リスク尺度

正の同次性については、例10.22のような場合にはリスクの集中に対しペナルティを課すため$\rho(cX) > c\rho(X)$とすべき、との批判がある。このような批判にこたえるものとして提案されたリスク尺度が、**凸リスク尺度**（convex risk measure）である。

凸リスク尺度は、コヒーレント・リスク尺度の満たすべき公理のうち、劣加法性および正の同次性を、

⑤ **凸性**（Convexity）

$$0 \le c \le 1 \text{に対し、} \rho(cX_1 + (1-c)X_2) \le c\rho(X_1) + (1-c)\rho(X_2)$$

に置き換えたものである。上式において、$X_2 = 0$とおくと$0 \le c \le 1$に対して$\rho(cX_1) \le c\rho(X_1)$となり、さらに$Y = cX_1, c' = 1/c$（$1 \le c'$）とおくと$\rho(c'Y) \ge c'\rho(Y)$となる。凸性も分散効果によるリスク減少を表したものであるが、劣加法性とは異なり$\rho(cX) > c\rho(X)$が許容される。

例10.23

ρをコヒーレント・リスク尺度とすると、

$$\rho(cX_1+(1-c)X_2)\le\rho(cX_1)+\rho((1-c)X_2) \quad \text{（劣加法性より）}$$

$$=c\rho(X_1)+(1-c)\rho(X_2) \quad \text{（正の同次性より）}$$

であり、コヒーレント・リスク尺度は凸性を満たす。

(3) 歪みリスク尺度の性質

歪みリスク尺度は、平行移動不変性、単調性および正の同次性を満たす。また、歪み関数gが凹関数[38]の場合劣加法性を、凸関数の場合

⑥ **優加法性**（Superadditivity）

$$\rho(X_1+X_2)\ge\rho(X_1)+\rho(X_2)$$

を満たす。逆に、歪みリスク尺度が劣加法性を満たすとき、歪み関数gは凹関数であり、したがって、歪みリスク尺度がコヒーレント・リスク尺度であることと、その歪み関数gが凹関数であることは同値である。例10.17～10.20で示した各々のリスク尺度についてみると、以下のとおりとなる。

- VaRの歪み関数は凹関数ではないため劣加法性を満たさず、したがってVaRはコヒーレント・リスク尺度ではない[39]。

---

[38] 任意の2点x_0, x_1および$\theta\in[0,1]$について、

$$g(\theta x_0+(1-\theta)x_1)\ge\theta g(x_0)+(1-\theta)g(x_1)$$

であるとき、関数gは凹関数であるといい、

$$g(\theta x_0+(1-\theta)x_1)\le\theta g(x_0)+(1-\theta)g(x_1)$$

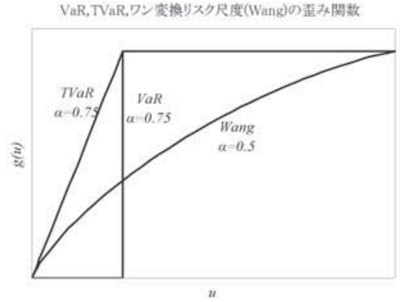
であるとき、関数gは凸関数であるという。

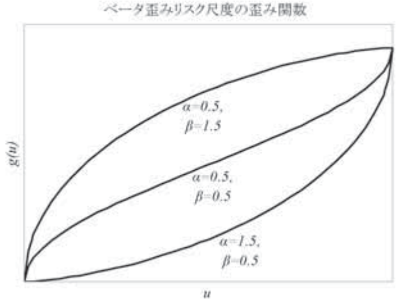
[39] 一般の場合には劣加法性を満たさないが、X_iが多次元正規分布や多次元t分布等に従う場合には劣加法性を満たす。ただし、このような分布を仮定した場合、VaRは

$$VaR_\alpha(X)=\mu_X+q(\alpha)\times\sigma_X$$

・ TVaR、ワン変換リスク尺度の歪み関数は凹関数なので劣加法性を満たし、したがって TVaR、ワン変換リスク尺度はコヒーレント・リスク尺度である。
・ ベータ歪みリスク尺度の歪み関数は $a \le 1, b \ge 1$ のときに限り凹関数となり、したがってリスク尺度はコヒーレント・リスク尺度となる。特にPH変換リスク尺度はコヒーレント・リスク尺度である。

図10.12 歪み関数





さらに、歪み関数 g が凹関数のとき、$g(0)=0, g(1)=1$ より $g(u) \ge u$ であり、$\rho(X) \ge E[X]$ が成り立つ。

10.4.3 確率順序とリスク尺度

(1) 確率順序

リスク尺度はリスクに対する評価であるが、その評価のもとになされる意思決定と、期待効用原理に基づき行われる意思決定との間にはどのような関係があるだろうか。

期待効用原理を用いるにあたっては、まず意思決定者の効用関数が問題と

と表され、標準偏差によるリスク評価に帰着することになる。

なるが、その具体的な関数形を特定することは容易ではない。具体的な効用関数を定めることができない場合に、リスク回避的か否かといった情報により決まる効用関数の性質に基づき不確実性を持つ対象の順位付けを行う方法として、確率順序を用いるという考え方がある。

確率順序とは、確率変数に関する順序付けであり、以下のように定義される。

① **通常の確率順序**（usual stochastic order）

任意の増加関数 h に対し $E[h(X)] \geq E[h(Y)]$ を満たすとき、X は Y より確率的に大きい（stochastically larger）といい、$X \succeq_{st} Y$ と表す。

期待効用を考えるにあたっては、損失を表す確率変数 X,Y ではなく富が問題になるが、$X \succeq_{st} Y$ ならば $E[h(-X)] \leq E[h(-Y)]$ であり、また効用関数は一般に増加関数であることに留意すると、通常の確率順序に基づく選択は期待効用に基づく選択と一致し、期待効用原理と整合的であるといえる。

② **増加凸順序**（increasing convex order）、**増加凹順序**（increasing concave order）

任意の増加凸関数 h に対し $E[h(X)] \geq E[h(Y)]$ を満たすとき、X は Y より**増加凸順序**の意味で大きいといい、$X \succeq_{icx} Y$ と表す。

なお、$X \succeq_{icx} Y$ であるための条件は、「任意の x に対し $E[(X-x)_+] \geq E[(Y-x)_+]$ を満たす」ことと同値である。$E[(X-x)_+]$ はエクセスポイント x のストップロス再保険料と解釈することもできるため、増加凸順序は**ストップロス順序**（stop-loss order）とも呼ばれる。この場合は特に $X \succeq_{sl} Y$ と表す。

また、任意の増加凹関数 h に対し $E[h(X)] \geq E[h(Y)]$ を満たすとき、X は Y より**増加凹順序**の意味で大きいといい、$X \succeq_{icv} Y$ と表す。$X \succeq_{icx} Y$ は $-X \preceq_{icv} -Y$ と同値である。

リスク回避的な意思決定者の効用関数は増加凹関数であるため、増加凸順

序に基づくリスクの選択（すなわち増加凹順序に基づく収益の選択）は、リスク回避的な意思決定者の期待効用に基づく選択と一致する。

(2) 確率順序と整合的なリスク尺度

ある確率順序$\succeq$について、$X \succeq Y$ならば$\rho(X) \geq \rho(Y)$が成り立つとき、ρは確率順序$\succeq$と整合的なリスク尺度であるという。この性質は、確率順序$\succeq$のもとでより大きいと評価されるリスクが、リスク尺度ρのもとでも同様に評価されることを保証するものである[40]。歪みリスク尺度においては、歪み関数が凹関数のとき、リスク尺度ρは増加凸順序と整合的であり、したがってX, Yの間に増加凸順序の関係がある場合には、ρによる選択はリスク回避的な意思決定者にとって期待効用原理に基づく選択と一致する。例10.17～10.20において挙げたリスク尺度のうち、VaRは増加凸順序と整合的ではなく、TVaR、PH変換リスク尺度およびワン変換リスク尺度は増加凸順序と整合的である。

40 対偶をとると「$\rho(X) < \rho(Y)$ならば$X \succeq Y$ではない」となるが、ここから「$\rho(X) < \rho(Y)$ならば$X \preceq Y$」と結論することはできない。X, Yの間に確率順序に基づく大小関係がない場合もあるためである。

10.5 参考

ここでは10.2節で紹介した Fisher-Tippett の定理の証明の概略を示す[41]。

定理(Fisher-Tippett)(再掲)

互いに独立に同一の分布に従う確率変数列 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大値 $M_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ に対してある確率分布 H および定数 $c_n > 0$，d_n (正規化定数という)が存在し、

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H \quad n \to \infty$$

を満たすならば、H は以下のいずれかの確率分布と同じ型に属する。

フレシェ分布 $$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp\left(-x^{-\alpha}\right), & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

ワイブル分布 $$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\left(-(-x)^{\alpha}\right), & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

グンベル分布 $$\Lambda(x) = \exp\left(-e^{-x}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

証明には以下の定理を用いる。

定理(型収束定理)

$A, B, A_1, \cdots, A_n$ を確率変数、$b_n > 0, \beta_n > 0, a_n, \alpha_n$ を定数とする。

$$(A_n - a_n)/b_n \xrightarrow{d} A \quad n \to \infty$$

のとき、

$$(A_n - \alpha_n)/\beta_n \xrightarrow{d} B \quad n \to \infty$$

[41] 証明の詳細については、たとえば Resnick, S., Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes, Springer, New Nork, 1987を参照されたい。

であるための必要十分条件は、

$$\lim_{n\to\infty} b_n / \beta_n = b > 0, \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - \alpha_n)/\beta_n = a$$

である。このとき、a,b は一意に定まり、B と $bA+a$ は同じ分布に従う。

[Fisher-Tippett の証明]

$X_1,\cdots,X_n$ の分布関数を $F_X(x)$ とすると、M_n の分布関数は $(F_X(x))^n$ であり、$\dfrac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H$ より

$$P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \le x\right) = (F_X(c_n x + d_n))^n \to H(x) \quad n\to\infty \tag{10.3}$$

(10.3)式は n を $[nt]$ に置き換えても成り立つことから、

$$(F_X(c_{[nt]}x + d_{[nt]}))^{[nt]} \to H(x) \quad n\to\infty \tag{10.4}$$

すなわち、$\dfrac{M_{[nt]} - d_{[nt]}}{c_{[nt]}}$ の分布関数は $H(x)$ に収束する。ただし、t は正の実定数、$[\ ]$ はガウス記号とする。

同様に、$M_{[nt]}$ の分布関数が $(F_X(x))^{[nt]}$ であることから、

$$P\left(\frac{M_{[nt]} - d_n}{c_n} \le x\right) = (F_X(c_n x + d_n))^{[nt]}$$

$$= \{(F_X(c_n x + d_n))^n\}^{[nt]/n} \to (H(x))^t \quad n\to\infty \tag{10.5}$$

すなわち、$\dfrac{M_{[nt]} - d_n}{c_n}$ の分布関数は $(H(x))^t$ に収束する。

したがって、型収束定理より、(10.4),(10.5)式から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{[nt]}} = \gamma(t) > 0, \lim_{n\to\infty}\frac{d_n - d_{[nt]}}{c_{[nt]}} = \delta(t), \ t>0$$

となる $\gamma(t),\delta(t)$ が存在し、また分布関数 $H(x)$, $(H(x))^t$ をもつ確率変数をそれぞれ Y,Y_t とすると、$\gamma(t)Y_t + \delta(t)$ と Y が同じ分布に従うことから、

$$P(\gamma(t)Y_t + \delta(t) \le x) = P(Y \le x)$$

すなわち、

$$\{H(x)\}^t = H(\gamma(t)x + \delta(t)) \tag{10.6}$$

(10.6)式より、

$$\{H(x)\}^{st} = H(\gamma(st)x + \delta(st)) \tag{10.7}$$

また

$$\begin{aligned}\{H(x)\}^{st} &= \{(H(x))^s\}^t = \{H(\gamma(s)x + \delta(s))\}^t \\ &= H(\gamma(t)\gamma(s)x + \gamma(t)\delta(s) + \delta(t))\end{aligned} \tag{10.8}$$

したがって、(10.7),(10.8)式より

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t)\,,\ \delta(st) = \gamma(t)\delta(s) + \delta(t) \tag{10.9}$$

が得られ、関数方程式(10.6),(10.9)の解として$\Phi_\alpha(x), \Lambda(x), \Psi_\alpha(x)$が導かれる。

（終）

10.6　練習問題

1．　一様分布

$$F(x)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ \dfrac{x-a}{b-a} & (a\le x\le b)\\ 1 & (b<x)\end{cases}$$

について、$F\in MDA(\Psi_1)$であることを示せ。

2．　平均mの指数分布の超過分布関数および平均超過関数を求めよ。

3．　あるポートフォリオについて、個々のクレーム額が平均10の指数分布に従うことがわかっている。このポートフォリオにおいて、100件のクレームを観測したとき、最大クレーム額が100以上である確率を、以下の2通りの方法で求めよ[42]。

(1)　最大値の分布関数から直接計算する方法

(2)　最大値を正規化した分布を極値分布により近似して計算する方法

4．　平均m、標準偏差sの対数正規分布の100α%VaRおよび100α%TVaRを、標準正規分布の分布関数$\Phi(x)$を用いて表せ。

5．　閾値uの超過分布関数が一般化パレート分布の分布関数$G_{\xi,\beta}(x)$により表されるとき、100α%VaRがu以上となるようなαについて、100α%TVaRを100α%VaR$=q_\alpha$を用いて表せ。

6．　2次元クレイトン・コピュラ（パラメータα）の裾従属係数を求めよ。

7．　以下のデータについて、ケンドールのτおよびスピアマンのρを求めよ。

---

[42]（出典）Krvavych, Yu., Mergel V., ″Large Loss Distributions: probabilistic properties, EVT tools, maximum entropy characterization″, 31st ASTIN Proceedings

X	0.683	0.942	0.763	0.247	0.418	0.347	0.277	0.471	0.061	0.772
Y	0.738	0.942	0.928	0.196	0.576	0.950	0.501	0.986	0.342	0.910

また、ケンドールの τ がデータと一致するようなグンベル・コピュラのパラメータを求めよ。

［参考文献］

（全般）

1. Alexander J. McNeil, Ruediger Frey, Paul Embrechts 著, 塚原 英敦, 小林 俊, 三浦 良造, 川崎 能典, 内山 浩嗣, 中山 秀敏訳『定量的リスク管理 −基礎概念と数理技法−』（共立出版）

（極値理論）

2. Paul Embrechts, Claudia Klüppelberg, and Thomas Mikosch, "Modelling Extremal Events", Springer
3. Thomas Mikosch 著, 山岸義和訳 『損害保険数理』（シュプリンガー）
4. 森本祐司著 『金融と保険の融合について』（日本アクチュアリー会アクチュアリージャーナル第40号）
5. 高橋倫也著 『極値統計学』（情報論的学習理論テクニカルレポート2009）

（リスクの統合）

6. Roger B. Nelsen, "An Introduction to Copulas", Springer
7. 塚原英敦著 『接合分布関数とその応用』（応用統計学会 応用統計学 Vol.32. No.2, 2003）

8. 戸坂凡展, 吉羽要直著 『コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説』(日本銀行金融研究所　金融研究2005.12)

9. Paul Embrechts, Filip Lindskog, and Alexander McNeil, "Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management", in Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Rachev S. T. editor, Elsevier/North-Holland, 2003.

(リスク尺度)

10. 塚原英敦著 『リスク尺度－理論と統計手法』(日本保険・年金リスク学会 リスクと保険第3号)

11. 楠岡成雄著 『リスク尺度の最近の発展』(日本保険・年金リスク学会 リスクと保険 第5号)

12. 山井康浩, 吉羽要直著 『リスク指標の性質に関する理論的整理－VaRと期待ショートフォールの比較分析－』(日本銀行金融研究所　金融研究 2001.12)

13. Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit ,"Modern Actuarial Risk Theory: Using R ", Springer

14. Dhaene, J., Vanduffel, S., Tang, Q., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D., "Solvency Capital, Risk Measures and Comonotonicity: A Review", Research Report OR 0416, Department of Applied Economics, K.U.Leuven.

練習問題解答

1．題意の分布に従うn個の互いに独立な確率変数$X_1,\cdots,X_n$の最大値をM_n、$c_n=\dfrac{b-a}{n}$，$d_n=b$とおくと、$Z_n=(M_n-d_n)/c_n$の分布関数$F_{Z_n}(x)$は、

$$\begin{aligned}F_{Z_n}(x)&=\{F(c_nx+d_n)\}^n\\&=\left\{F\left(\frac{b-a}{n}x+b\right)\right\}^n\\&=\begin{cases}0 & (x<-n)\\ \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n & (-n\le x\le 0)\\ 1 & (0<x)\end{cases}\end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{n\to\infty}F_{Z_n}(x)=\begin{cases}e^x & (x\le 0)\\ 1 & (0<x)\end{cases}=\Psi_1(x)$$

であり、題意が示された。

2．平均mの指数分布に従う確率変数Xの分布関数は、

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x/m} & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

したがって、閾値uの超過分布関数$F_u(x)$および平均超過関数$e(u)$は、

$$\begin{aligned}F_u(x)&=P(X-u\le x\mid X>u)=\frac{F(x+u)-F(u)}{1-F(u)}\\&=\begin{cases}1-e^{-x/m} & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}\end{aligned}$$

$$e(u)=E(X-u\mid X>u)=m$$

3．

(1) 個々のクレーム額X_iの分布関数は

$$F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-e^{-x/10} & (x\ge 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

よって、100件のクレームを観測したときの最大クレーム額M_{100}の分布関数は

$$F_M(x)=\begin{cases}\left(1-e^{-x/10}\right)^{100} & (x\geq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

したがって、求める確率は

$$P(M\geq 100)=1-\left(1-e^{-100/10}\right)^{100}=0.00453$$

(2)　$c_n=1/\beta, d_n=\log n/\beta$, n件のクレームを観測したときの最大クレーム額をM_nとすると、$Z_n=(M_n-d_n)/c_n$の分布関数は、

$$F_{Z_n}(x)\approx e^{-e^{-x}}$$

したがって、$n=100, \beta=1/10$より、

$$\begin{aligned}P(M_{100}\geq 100)&=P\left(\frac{M_{100}-d_{100}}{c_{100}}\geq\frac{100-d_{100}}{c_{100}}\right)\\&=P\left(\frac{M-10\log 100}{10}\geq\frac{100-10\log 100}{10}\right)\\&=1-F_{Z_{100}}\left(\frac{100-10\log 100}{10}\right)\\&\approx 1-\exp\left(-\exp\left(-\frac{100-10\log 100}{10}\right)\right)\\&\approx 1-\exp\left(-100\exp\left(-10\right)\right)\\&=0.00453\end{aligned}$$

4.　Xが平均m、標準偏差sの対数正規分布に従うとき、$\log X$は正規分布$N(\mu,\sigma)$に従う。ただし、

$$m=\exp\left(\mu+\sigma^2/2\right)、s^2=\exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left\{\exp\left(\sigma^2\right)-1\right\}$$

より、

$$\mu=\log\left(\frac{m^2}{\sqrt{m^2+s^2}}\right)、\sigma=\sqrt{\log\left(1+s^2/m^2\right)}$$

である。

連続分布においては$VaR_\alpha(X)=F_X{}^{-1}(\alpha)$であり、

$$P(X \le VaR_\alpha(X)) = \alpha$$

より

$$P\left(\frac{\log X - \mu}{\sigma} \le \frac{\log(VaR_\alpha(X)) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

$\dfrac{\log X - \mu}{\sigma}$は標準正規分布に従うので、

$$P\left(\frac{\log X - \mu}{\sigma} \le \frac{\log(VaR_\alpha(X)) - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\log(VaR_\alpha(X)) - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

したがって、

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(X) &= \exp\left(\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)\right) \\ &= \frac{m^2}{\sqrt{m^2 + s^2}} \exp\left(\sqrt{\log\left(1 + s^2 / m^2\right)} \cdot \Phi^{-1}(\alpha)\right) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_t(X) dt \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{F_X^{-1}(\alpha)}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(\alpha)} x f_X(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(m - \int_{-\infty}^{VaR_\alpha(X)} x f_X(x) dx \right) \end{aligned}$$

ここで、$Y = \log X$とおくと、$Y \sim N(\mu, \sigma)$より、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{VaR_\alpha(X)} x f_X(x) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\log(VaR_\alpha(X))} e^y e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\log(VaR_\alpha(X))} e^{-\frac{(y-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dy \times e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(VaR_\alpha(X)) - \mu - \sigma^2}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \times e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \\ &= \Phi\left(\frac{\log(VaR_\alpha(X)) - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \times m \\ &= \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha) - \sigma\right) \times m \end{aligned}$$

したがって、

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\left(m - \int_{-\infty}^{VaR_\alpha(X)} x f_X(x)dx\right)$$
$$= \frac{m}{1-\alpha}\left\{1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha) - \sigma\right)\right\}$$
$$= \frac{m}{1-\alpha}\left\{1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha) - \sqrt{\log\left(1 + s^2 / m^2\right)}\right)\right\}$$

5．題意の条件を満たす分布に従う確率変数をX、その分布関数を$F_X(x)$とおくと、連続分布においては$VaR_\alpha(X) = F_X{}^{-1}(\alpha)$であることから、

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_t(X)dt = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(t)dt$$
$$= F_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \{F_X^{-1}(t) - F_X^{-1}(\alpha)\}dt$$
$$= F_X^{-1}(\alpha) + \frac{1}{1-\alpha}\int_{F_X^{-1}(\alpha)}^\infty \{u - F_X^{-1}(\alpha)\} f_X(u)du$$
$$= F_X^{-1}(\alpha) + E[X - F_X^{-1}(\alpha) \mid X > F_X^{-1}(\alpha)]$$

一方、$F_u\left(x\right) = \dfrac{F\left(x+u\right) - F\left(u\right)}{1 - F\left(u\right)} = G_{\xi,\beta}(x)$より、

$$1 - F_u\left(x\right) = 1 - \frac{\left(1 - F\left(u\right)\right) - \left(1 - F\left(x+u\right)\right)}{1 - F\left(u\right)} = \frac{\left(1 - F\left(x+u\right)\right)}{1 - F\left(u\right)}$$

したがって$v \geq u$に対し、

$$F_v\left(x\right) = 1 - \frac{\left(1 - F\left(x+v\right)\right)}{\left(1 - F\left(v\right)\right)}$$
$$= 1 - \frac{\left\{1 - F\left(u + (x + v - u)\right)\right\}}{\left(1 - F\left(u\right)\right)} \frac{\left(1 - F\left(u\right)\right)}{\left\{1 - F\left(u + (v - u)\right)\right\}}$$
$$= 1 - \frac{1 - F_u\left(x + v - u\right)}{1 - F_u\left(v - u\right)} = 1 - \frac{1 - G_{\xi,\beta}\left(x + v - u\right)}{1 - G_{\xi,\beta}\left(v - u\right)}$$
$$= G_{\xi,\beta+\xi(v-u)}\left(x\right)$$

（$G_{\xi,\beta}\left(x\right)$の超過分布関数が$G_{\xi,\beta+\xi u}\left(x\right)$であることを用いた。）

$v = VaR_\alpha(X)$とすると、

$$E[X - F_X^{-1}(\alpha) \mid X > F_X^{-1}(\alpha)] = \int_0^\infty F_{VaR_\alpha(X)}\left(x\right)dx$$

$$= \frac{\beta + \xi(VaR_\alpha(X) - u)}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi(F_X{}^{-1}(\alpha) - u)}{1-\xi}$$

よって、

$$TVaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) + E[X - F_X^{-1}(\alpha) \mid X > F_X^{-1}(\alpha)]$$
$$= F_X{}^{-1}(\alpha) + \frac{\beta + \xi(F_X{}^{-1}(\alpha) - u)}{1-\xi}$$
$$= q_\alpha + \frac{\beta + \xi(q_\alpha - u)}{1-\xi}$$
$$= \frac{q_\alpha + \beta - \xi u}{1-\xi}$$

6．　2次元クレイトン・コピュラは

$$C(u_1, u_2) = (u_1{}^{-\alpha} + u_2{}^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}, \ \alpha > 0$$

であり、裾従属係数は以下のとおりとなる。

左裾従属係数

$$\lambda_l = \lim_{u \to +0} \frac{C(u,u)}{u} = \lim_{u \to +0} \frac{(2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}}{u} = \lim_{u \to +0} (2 - u^\alpha)^{-1/\alpha} = 2^{-1/\alpha}$$

右裾従属係数

$$\lambda_u = 2 - \lim_{u \to 1-0} \frac{1 - C(u,u)}{1-u} = 2 - \lim_{u \to 1-0} \frac{1 - (2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}}{1-u}$$
$$= 2 - \lim_{u \to 1-0} \left(2u^{-\alpha-1} (2u^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha - 1} \right)$$
$$= 0$$

7．　$i \neq j$ であるようなすべての (x_i, y_i) , (x_j, y_j) の組（ $i = 1, \cdots, 10$ ）に対して $sign((x_i - x_j)(y_i - y_j))$ を計算した結果は、下表のとおりである。

	x_j	0.683	0.942	0.763	0.247	0.418	0.347	0.277	0.471	0.061	0.772
	y_j	0.738	0.942	0.928	0.196	0.576	0.950	0.501	0.986	0.342	0.910
x_i	y_i										
0.683	0.738	–	1	1	1	1	−1	1	−1	1	1
0.942	0.942	1	–	1	1	1	−1	1	−1	1	1
0.763	0.928	1	1	–	1	1	−1	1	−1	1	−1
0.247	0.196	1	1	1	–	1	1	1	1	−1	1
0.418	0.576	1	1	1	1	–	−1	1	1	1	1
0.347	0.950	−1	−1	−1	1	−1	–	1	1	1	−1
0.277	0.501	1	1	1	1	1	1	–	1	1	1
0.471	0.986	−1	−1	−1	1	1	1	1	–	1	−1
0.061	0.342	1	1	1	−1	1	1	1	1	–	1
0.772	0.910	1	1	−1	1	1	−1	1	−1	1	–

したがって、ケンドールの τ は、

$$\frac{1}{10\cdot(10-1)}\sum_{i\neq j} sign((x_i-x_j)(y_i-y_j))=\frac{46}{90}=0.511$$

となる。

スピアマンの ρ は、$\{(\hat{F}_X(x_i),\hat{F}_Y(y_i))\}_{i=1,\cdots,10}$（$\hat{F}_X,\hat{F}_Y$ は経験分布の分布関数）に対して計算したピアソンの積率相関係数であるが、

$$\hat{F}_X(x)=\frac{x_j\leq x\text{を満たす}\,x_j\text{の数}}{\text{データの数}}$$

すなわち、

$$\hat{F}_X(x_i)=1-\frac{rank(x_i)-1}{\text{データの数}}\qquad（rank(x_i):x_i\text{の順位}）$$

であり、$\hat{F}_Y(y_i)$ についても同様であることから、$\{(rank(x_i),rank(y_i))\}_{i=1,\cdots,10}$ に対して計算したピアソンの積率相関係数と等しい。

$\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\cdots,10}$ について $\{(rank(x_i),rank(y_i))\}_{i=1,\cdots,10}$ は以下のとおりである。

x_i	0.683	0.942	0.763	0.247	0.418	0.347	0.277	0.471	0.061	0.772
y_i	0.738	0.942	0.928	0.196	0.576	0.950	0.501	0.986	0.342	0.910
$rank(x_i)$	4	1	3	9	6	7	8	5	10	2
$rank(y_i)$	6	3	4	10	7	2	8	1	9	5

したがって、スピアマンの ρ は $\{(rank(x_i),rank(y_i))\}_{i=1,\cdots,10}$ のピアソンの積率相関係数を計算することにより、0.624となる。

また、グンベル・コピュラのパラメータをαとすると、ケンドールのτは$1-1/\alpha$であり、これが0.511と一致することから、

$$\alpha = \frac{1}{1-0.511} = 2.04$$

となる。

平成12年6月　発行
平成15年6月　改訂版発行
平成21年7月　改訂
平成23年2月　改訂

発行所　社団法人　日本アクチュアリー会
東京都中央区晴海1－8－10
晴海アイランド トリトンスクエア
オフィスタワーX 2階
電　話（5548）6033

発行者　野　呂　順　一

印刷所　株式会社　ケ　イ　ス　イ
電　話（5225）6526