'92改訂版

二見　隆著

生命保険数学

上巻

日本アクチュアリー会

まえがき（'92 改訂版）

昭和63年に発行した本書は日本アクチュアリー会の新しい資格試験制度の下においても受験参考書として指定され、アクチュアリーを志す多くの方々によって購読されたが、その後の環境の変化も考え今回の増刷の機に内容に若干の改訂や追加を行うこととした。主要な変更は

・第５回全会社生命表の発表に伴い、本文、練習問題、解答にわたり第４回全会社生命表を引用した箇所すべてについて新生命表に置き換えた、

・介護保険の発売に伴い、第12章（下巻）で要介護者に対する給付にも言及した、

・第16章の退職年金保険（下巻）で、財政方式について以前より詳細に記述した、

ことである。その他にもいくつかの箇所で文言や説明を書き改めているが、上巻については生命表の変更を除くと殆んど内容は変わっていない。

今回の改訂にあたっても前回と同じく当研究所ならびに日本生命の多くのアクチュアリー関係者からご援助を受けたが、吉田英樹（第16章）、猪ノ口勝徳（第12章ほか）および北野實（リライト、校正）の各氏には特になにかとお骨折りをいただいた。これらの方々に厚くお礼申しあげたい。

平成４年１月23日

生命保険文化研究所

二　見　　隆

まえがき（初版）

当研究所が昭和38年と39年に出版した 守田常直 著「保険数学」（上下２巻）は、その後現在にいたるまで、標準的なテキストとして多くのアクチュアリー学徒に親しまれてきたが、発行後すでに約25年が経過し、その間に保険数学にもいくつかの新しい展開があった。例えば企業年金の普及や変額保険の登場はアクチュアリーに新しい知識を要求するようになったし、またコンピューターの発達はかって保険数学の重要な領域であった「責任準備金の群団計算」や「基礎率の変更が保険価格に及ぼす影響」を実用的には無意味なものとしてしまった。

そのためこれまでの彌縫的な改訂ではもはや対処できず、全面的な書き直しが所の内外から要望されていたが、先年浅学を顧みず新テキストの作成を思い立ち、数年に及ぶ作業の結果、ようやくここに当研究所の設立35周年記念事業の一つとして発刊する運びとなった。

今回も分量の関係から全体を上下２巻に分けたが、予備知識として微積分と初歩の確率論を習得していれば、すべて理解できるよう記述した。また体系的かつ簡明に把握できるように、各章節の配列や説明の仕方を工夫した。

タイトルを「生命保険数学」としたのは、生命保険会社の業務に携わっているアクチュアリーに必要な基礎的知識を与えることを目標としたからである。現在ではアクチュアリーの職務は生命保険以外の分野にも拡大しており、保険数学と名づけてそれらすべてをとりあげることは筆者の能力を超えている。ここでとりあげなかった主な分野は

・死亡表作成の詳細とそれに関連する補整法等の手法

・集合的危険論等の損害保険および再保険に関連する数理

・公的年金その他の社会保険の数理

・資産の投資・運用に関する数学的取扱い

であるが、これらについては別の専門書あるいは雑誌の論文によって学ばれたい。また本書の企業年金に関する記述（下巻）もごく基礎的な部分にとどまっているので、この部門で実務に当たるアクチュアリーは他の専門書によって補っていただきたい。

本書の発刊に至るまでには、当研究所ならびに日本生命主計部の多くの方々から数々のご援助を受けた。特に 岡本量太氏 は全原稿に目を通して随所で貴重な修正を提案された。これらの方々に厚くお礼申し上げる次第である。

昭和63年１月24日

生命保険文化研究所

二　見　　隆

生命保険数学

上巻 目次

下巻　目次

第１章　利息の計算

§1　複利および等価

資金利用者が資金提供者に支払う報酬を利息という。利息を得るために貸借される資本を元金あるいは元本と名付ける。支払われた利息が元金に加えられてさらに利息を生む場合も多い。

利息の金額は、元金の大きさと投資された期間とによって定まる。元金１に対して単位の期間に支払われる利息を利率とよび、通常は％で表わす。例えば元金1000を年利率５％で投資した場合、１年後に支払われる利息は50である。

元金投資の期間がどれほど長くても、利息を元金に繰入れることをせず、投資期間に比例した利息を支払う場合、そのような方法を**単利**という。従って元金を P、ある単位期間の利率を i、投資期間数を n とすると、利息 I は

$$I=Pni \tag{1.1.1}$$

となり、期間経過後の元利合計すなわち元金と利息の合計額は

$$S=P+I=P(1+ni) \tag{1.1.2}$$

となる。S を P の**終価**とよび、また P を S の**現価**とよぶ。例えば元金1000を年利率５％で５年間単利で投資した場合の５年後の元利合計は1250である。

単利の場合と異なり、一定期間の終了するごとに利息を元金に繰入れ、その合計を改めて次の期の元金としてそれに利息を付けることを、期毎

に繰返す方法を**複利**という。この場合は、元金を P、ある単位期間の利率を i、投資期間数を n とすると、期間経過後の元利合計は

$$S=P(1+i)^n \tag{1.1.3}$$

となる。ここでも S を P の**終価**とよび、また P を S の**現価**とよぶ。例えば元金1000を年利率５％で５年間複利で投資した場合の元利合計は

$$1000\times 1.05^5 \fallingdotseq 1276$$

である。

複利においては通常利息を付ける単位期間を１年とし、年利率を使用する。その時

$$v=\frac{1}{1+i} \tag{1.1.4}$$

を用いると、(1.1.3)より期間が n 年の場合は

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=v^n S \tag{1.1.5}$$

と書くことができる。v を**現価率**とよぶ。特に $n=1$、$S=1$ ならば $P=v$ で、v は１年後に支払う１という金額の現価である。また

$$d=1-v=\frac{i}{1+i} \tag{1.1.6}$$

を**割引率**という。v が１年後に支払う１という金額の現価であるから、仮に現時点で１年早く１という金額を支払えば、$d=1-v$ は１年早く支払ったための利息の損失と考えられる。（受ける側からすれば利息の得）あるいは $d(1+i)=i$ より、d は i の現価を表わす。いいかえれば期間の始めに支払っておく前払利息とも考えられる。変形によって得られる

$$(1-d)(1+i)=1 \tag{1.1.7}$$

からも同じ意味が読みとれる。

一般に利息の計算では、どの時点で支払う（あるいは受取る）金額かということが重要な要素となる。例えば(1.1.3)における P と S とは異なった時点における金額を表わしているが、複利であることと、その利率が分っている時に $S=P(1+i)^n$ とすることは、両者が同じ価値のものと考えているわけである。このように複利に基づいて、ある時点で考えた金額を、違った時点における金額と同じ価値と考える場合、両者は**等価**であるという。なおこれまでは n を整数と考えたが、端数のつく年数 t でも

$$S=P(1+i)^t \qquad \text{あるいは} \qquad P=v^tS$$

となる時には、P と S は等価であると考える。

等価という考え方をとると、支払時点の異なるいくつかの金額を一つの時点で一括して考えることができる。例えば m 年後に支払う金額 S と、n 年後に支払う金額 T とを現在時点で合わせた v^mS+v^nT は、両者合算の現在価値と考える。

なお、ここで本書の次節以下でよく用いる展開式をあげておく。

$$(1+\varepsilon)^k=1+\binom{k}{1}\varepsilon+\binom{k}{2}\varepsilon^2+\binom{k}{3}\varepsilon^3+\cdots\cdots\cdots \tag{1.1.8}$$

（ただし $k\fallingdotseq 0$）

$$log(1+\varepsilon)=\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}-\cdots\cdots\cdots \tag{1.1.9}$$

$$e^{\varepsilon}=1+\frac{\varepsilon}{1!}+\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots \tag{1.1.10}$$

§2　名称利率と実利率

銀行預金や郵便貯金などでは半年毎に利息を計算して元金に繰り入れるが、その時例えば年利率6％の割合というと、1年後の元利合計は

$$S=P\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^2$$

で計算する。一般に1年を k 回に分け（ $k=2$ は半年毎、$k=4$ は3月毎、$k=12$ は月毎の利息繰入れを意味する）、年利率 i の割合で複利計算した時の1年後の元利合計は

$$\left(1+\frac{j}{k}\right)^k$$

となり、これより元金を引いたもの、すなわち1年後に得られる利息は

$$i=\left(1+\frac{j}{k}\right)^k-1 \tag{1.2.1}$$

となる。このような場合、k すなわち1年間に利息を元金に繰入れる回数を**転化回数**とよび、また $\dfrac{1}{k}$ 年すなわち繰入れを行う期間を**転化期間**とよぶ。**転化**とは利息が元金に繰入れられて元金に化するという意味である。j は各 $\dfrac{1}{k}$ 年間に適用する利率 $\dfrac{j}{k}$ から形式的に推算される年利率であるので、これを**名称利率**といい、$i^{(k)}$ で表わす。これに対し(1.2.1) の i は単位元金に対し1年後に実際に収入される利息を表わすので、これを**実利率**という。両者の間には

$$\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k=1+i \tag{1.2.2}$$

従って

$$i=\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^{k}-1 \tag{1.2.3}$$

$$i^{(k)}=k\{(1+i)^{\frac{1}{k}}-1\} \tag{1.2.4}$$

という関係がある。(1.1.8) を用い、 i または $i^{(k)}$ の 4 乗以上の項を省略すると

$$i \fallingdotseq i^{(k)}+\frac{k-1}{2k}i^{(k)^2}+\frac{(k-1)(k-2)}{6k^2}i^{(k)^3} \tag{1.2.5}$$

$$i^{(k)} \fallingdotseq i-\frac{k-1}{2k}i^2+\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}i^3 \tag{1.2.6}$$

利率について言えたことが割引率についても言える。すなわち 1 年を k 等分し、最後の $\frac{1}{k}$ 年について割引いたものを、さらにその前の $\frac{1}{k}$ 年について割引き、それを k 回繰返すことを考える。その時**名称割引率**を $d^{(k)}$、**実割引率**を d とすると、(1.2.2) 等に対応する関係として

$$\left(1-\frac{d^{(k)}}{k}\right)^{k}=1-d \tag{1.2.7}$$

従って

$$d=1-\left(1-\frac{d^{(k)}}{k}\right)^{k} \tag{1.2.8}$$

$$d^{(k)}=k\{1-(1-d)^{\frac{1}{k}}\} \tag{1.2.9}$$

が成立する。(1.1.8) を用い d または $d^{(k)}$ の 4 乗以上の項を省略すると

$$d \fallingdotseq d^{(k)}-\frac{k-1}{2k}d^{(k)^2}+\frac{(k-1)(k-2)}{6k^2}d^{(k)^3} \tag{1.2.10}$$

$$d^{(k)} \fallingdotseq d + \frac{k-1}{2k} d^2 + \frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2} d^3 \tag{1.2.11}$$

となる。また（1.1.6）の類似として

$$d^{(k)} = \frac{i^{(k)}}{(1+i)^{\frac{1}{k}}} \tag{1.2.12}$$

がある。これは（1.2.9）の右辺の $(1-d)^{\frac{1}{k}}$ を（1.1.7）により $(1+i)^{-\frac{1}{k}}$ とおきかえて（1.2.4）と見比べればわかる。

§3　利力

前節で述べた転化回数 k を無限大に近づければどうなるであろうか。（1.2.2）と（1.1.10）を用いると

$$log(1+i) = k\ log\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)$$

$$i^{(k)} = k\{e^{\frac{1}{k} log(1+i)} - 1\}$$

$$= k\left[\frac{1}{k} log(1+i) + \frac{\{log(1+i)\}^2}{2k^2} + \cdots\cdots\cdots\right]$$

であるが、ここで $k \to \infty$ とした時の極限値を δ で表わすと

$$\delta = \lim_{k\to\infty} i^{(k)} = log(1+i) \tag{1.3.1}$$

δ は**利力**と言われ、次のように解釈される：元金1に対し次の微少期間 $\varDelta t$ 内に生じる利息を $\delta \cdot \varDelta t$（k を極めて大きくした場合の $\frac{1}{k}$ が $\varDelta t$）として、年始の元金に対しそのような利息を $\varDelta t$ 毎に元金に転化して行った場合、年末の実利率が i になる。(1.3.1), （1.2.2）と（1.1.4）より、次の関係が得られる。

$$e^{\delta}=1+i=\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^{k} \quad (1.3.2)$$

$$v=e^{-\delta} \quad (1.3.3)$$

同じことが割引率についても言える。すなわち（1.2.7）の両辺の対数をとって得られる $d^{(k)}$ について、その極限を δ' とすれば

$$\delta'=\lim_{k\to\infty} d^{(k)}=-\log(1-d) \quad (1.3.4)$$

となる。しかし（1.1.7）をここに入れてわかるように、これは $\log(1+i)$ に等しく、従って $\delta'=\delta$ である。

（1.1.9）を用いて δ の近似値を i または d で表わすと

$$\delta \fallingdotseq i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3} \quad (1.3.5)$$

$$\fallingdotseq d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3} \quad (1.3.6)$$

i と d が近い値であることに注目して、両式の和半をとり

$$\delta \fallingdotseq \frac{i+d}{2} \quad (1.3.7)$$

としても良い近似値になる。また次のような関係にあることも容易に証明される。

$$d < d^{(k)} < \delta < i^{(k)} < i \quad (1.3.8)$$

$i = 0.05,\ k = 2$ の場合、この不等式は次のようになる。

$$0.04762 < 0.04820 < 0.04879 < 0.04939 < 0.05$$

§4　資産利回りの計算

生命保険会社では所有する資産を投資して利息を生み、その利息をま

た投資するが、資産は利息収入のみならず、保険料収入、保険金支払、事業費支出などの原因によって常に増減（通常は増加）している。その場合に資産の利回りを測定する方法として、ハーディ（G. F. Hardy）の導いた次の式がよく用いられる。それは、年始の資産を A 、年末の資産を B 、年間利息収入を I として

$$i=\frac{2I}{A+B-I} \tag{1.4.1}$$

をその年度の利回りとするものである。この式は**ハーディの公式**と呼ばれるが、これを大づかみに解釈すると次のようになる：$B-I$ は年末資産中の利息による増加分を除いたいわば投資対象となった資産であり、$\frac{A+B-I}{2}$ は年間の平均投資資産である。これが１年間に I の利息を生むならば、$I\div\frac{A+B-I}{2}$ すなわち（1.4.1）の右辺が利回りを与える。

もう少し理論的に考えて（1.4.1）を導くこともできる。時刻 t（$0\leqq t\leqq 1$）におけるその会社の資産を $A(t)$ とし（従って $A(0)=A$, $A(1)=B$）、その資産は常に実利率 i で利息を生むものとすれば、ある時点 t と $t+\Delta t$ の間における収入利息は、式（1.3.1）の解釈で述べたように、$A(t)\delta\Delta t$ である。従って１年間の利息は

$$I=\int_0^1 A(t)\delta dt \tag{1.4.2}$$

であるが、$A(t)$ が A, B を直線補間するような増えかたをすると仮定すると

$$I=\delta\frac{A+B}{2}$$

となる。従って

$$\delta = \frac{2I}{A+B} \tag{1.4.3}$$

であるが、これから次のようにして i を導く。(1.3.2) と (1.1.10), (1.1.8) を用いると

$$i = e^{\delta} - 1 \fallingdotseq \delta\left(1 + \frac{\delta}{2} + \cdots\cdots\right)$$

$$\fallingdotseq \delta\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)^{-1} \tag{1.4.4}$$

となり、この δ に (1.4.3) を用いると

$$i \fallingdotseq \frac{2I}{A+B} \times \frac{1}{1 - \dfrac{I}{A+B}}$$

となる。これで (1.4.1) が得られた。

各月末の資産すなわち $A(0) = A$, $A\left(\frac{1}{12}\right)$, $A\left(\frac{2}{12}\right)$, ・・・・・, $A(1) = B$ がわかっていて、それらが直線上にあると認め難いような場合には、12等分した各区間ではほとんど直線と考えて (1.4.2) を用いる。その結果は

$$I = \sum_{k=0}^{11} \int_{\frac{k}{12}}^{\frac{k+1}{12}} A(t)\ \delta\ dt$$

$$= \sum_{k=0}^{11} \delta\ \frac{A\left(\frac{k}{12}\right) + A\left(\frac{k+1}{12}\right)}{2} \times \frac{1}{12}$$

$$= \delta\ \frac{\frac{1}{2}A(0) + A\left(\frac{1}{12}\right) + A\left(\frac{2}{12}\right) + \cdots\cdots + A\left(\frac{11}{12}\right) + \frac{1}{2}A(1)}{12}$$

最終項の右辺の分数を $\frac{1}{12}$ 方式の平均経過資産とよび、$\overline{A}$ で表わすと、

$\delta = \dfrac{I}{\bar{A}}$ となり、これを（1.4.4）に入れると、ハーディの公式に代わる次の式が得られる。

$$i = \frac{I}{\bar{A}} \times \frac{1}{1 - \dfrac{I}{\bar{A}}} = \frac{I}{\bar{A} - \dfrac{I}{2}} \qquad (1.4.5)$$

第１章　練習問題（１）

（１）　年利７％で10年後に1000万円を得るためには、今いくら用意すればよいか。

（２）　12年後に支払いを受ける債権200万円を888,024円で譲り受けた。投資利回りはいくらか。

（３）　半年転化、年６％の名称利率は、実利率でいくらになるか。３月転化、１月転化、瞬間転化の場合はどうか。

（４）　100万円を半年転化、年５％の名称利率により利殖すれば、７年後の終値はいくらか。

（５）　今から n_1，n_2，・・・・，n_r 年後に支払う金額 S_1，S_2，・・・・，S_r の負債がある。一定利率 i の仮定の下に、これを一括して金額 $\sum S_t$ で n 年後に支払うには、n をどう定めればよいか。
（n を**支払平均期日**という）

（６）　次の近似式を証明せよ。

$$i \fallingdotseq \delta + \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{6}\delta^3$$

（７）　(1.3.7) に類似の次式を証明せよ。

$$\delta \fallingdotseq \frac{i^{(k)}+d^{(k)}}{2}$$

（８）　次式を証明せよ。

$$\frac{dv^n}{d\delta}=-nv^n\ ,\qquad \frac{dv^n}{di}=-nv^{n+1}$$

（９）　ある会社のある年度の決算において

年始総資産	71,028	億円
年末総資産	81,490	〃
利息および配当金収入	5,706	〃

であった。総資産利回りはいくらになるか、ハーディの公式を用いて計算せよ。

§5　確定年金（年払）

あらかじめ定められた期間（年金支給期間）中に、一定の間隔（1年とか半年とか1月とか）をおいて継続的に支払われる一連の金額を年金という。年金には、その期間中は無条件に支払う**確定年金**と、所定の人の生存を条件に支払う**生命年金**とがある。本章では確定年金のみを取扱う。

時間的に定められた一定の間隔の初めに年金を支払う場合を**期始払**年金といい、終りに年金を支払う場合を**期末払**年金という。いま毎年の年始に1ずつ n 年間支払われる期始払年金があるとして、その金額を年利 i の複利で積み立てていった場合、n 年後に合計でいくらになるかを計算してみよう。そのような値を**年金終価**とよび $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ で表わすが、(1.1.3) を用いると、第1回支払金の n 年後の元利合計は $(1+i)^n$ であり、第2回支払金の $n-1$ 年後の元利合計は $(1+i)^{n-1}$ であり、以下同じことが繰り返されるから、それらの和に等価なものとして

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\cdots\cdots+(1+i)$$

$$=\frac{(1+i)\{(1+i)^n-1\}}{i}=\frac{(1+i)^n-1}{d} \qquad (1.5.1)$$

となる。また期末払年金の終価は $s_{\overline{n}|}$ で表わされ、同様に考えて

$$s_{\overline{n}|}=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots\cdots+1$$

$$=\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (1.5.2)$$

次に終価と反対に、毎年の年始に1ずつ n 年間支払われる年金のそれぞれの支払金について年金開始時点における現価を求め、その和を計算してみよう。そのような値、すなわち年金開始時点において支払年金

総額に等価な価額を**年金現価**といい、$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ で表わすが、(1.1.5), (1.1.6) を用いると

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \cdots\cdots + v^{n-1}$$

$$= \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{d} \tag{1.5.3}$$

である。期末払年金についても、同様に

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots\cdots + v^n$$

$$= \frac{1-v^n}{i} \tag{1.5.4}$$

となる。年金開始時点で $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ なる金額を所有し、それを n 個の金額 1, v, ・・・・, v^{n-1} に分けて、それぞれを年利 i で利殖すればちょうど過不足なしに約束の年金を支払えるから、年金現価は開始時点における年金全体の必要所要額と考えることもできる。

(1.5.1) ないし (1.5.4) より次の諸式が容易に導かれる。

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)\, s_{\overline{n}|} \tag{1.5.5}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \tag{1.5.6}$$

$$s_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{n-1}|} + 1 \tag{1.5.7}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\, a_{\overline{n}|} \tag{1.5.8}$$

$$a_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+1}|} - 1 \tag{1.5.9}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n-1}|} + 1 \tag{1.5.10}$$

$$v^n \ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{1.5.11}$$

$$v^n s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \tag{1.5.12}$$

年金を約束する時、一定期間を置いてから支払を始める場合があるが、これを**据置年金**という。それに対し、これまで述べたような第1期から支払を開始する年金を**即時開始年金**という。f 年据置でその後 n 年間、

年額1の年金が毎年支払われる場合の年金現価を ${}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$（期始払）または ${}_{f|}a_{\overline{n}|}$（期末払）で表わすと

$$
\begin{aligned}
{}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= v^f + v^{f+1} + \cdots\cdots + v^{f+n-1} \\
&= v^f \ddot{a}_{\overline{n}|}
\end{aligned}
\tag{1.5.13}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{f|}a_{\overline{n}|} &= v^{f+1} + v^{f+2} + \cdots\cdots + v^{f+n} \\
&= v^f a_{\overline{n}|}
\end{aligned}
\tag{1.5.14}
$$

$$ {}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{f+n}|} - \ddot{a}_{\overline{f}|} \tag{1.5.15} $$

$$ {}_{f|}a_{\overline{n}|} = a_{\overline{f+n}|} - a_{\overline{f}|} \tag{1.5.16} $$

また特殊な場合として、永久に年金が支払われるいわゆる**永久年金**が考えられる。その現価は（1.5.3),（1.5.4）で $n \to \infty$ として

$$ \ddot{a}_{\infty} = \frac{1}{d} \tag{1.5.17} $$

$$ a_{\infty} = \frac{1}{i} \tag{1.5.18} $$

となる。

最後に、(1.1.6）とその解釈を拡張してみると：1なる金額の支払を n 年早めたための利息の損失（早めた時点での）は $d\ddot{a}_{\overline{n}|}$ である。なぜなら（1.5.3）より

$$ d\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 - v^n \tag{1.5.19} $$

となるからである。

§6　確定年金（年 k 回支払の場合）

前節では年始か年末に1ずつ支払われる年金を考えたが、本節では年に k 回、毎回 $\dfrac{1}{k}$ ずつ n 年間支払われる年金を考えてみよう。(例えば $k=4$ の時は、3月毎に支払われる年金）このように1年を数回に分けて

支払う場合、毎回の年金額の単純合計を**年金年額**というが、ここでは年金年額１の場合を考えるわけである。§２におけると同様にこの場合の記号も§５の記号の右肩に (k) をつけて表わす。計算を１年の実利率 i で行うことにすると、(1.2.4) と (1.2.12) とを用いて

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{k}\left\{(1+i)^{n}+(1+i)^{n-\frac{1}{k}}+\cdots\cdots+(1+i)^{\frac{1}{k}}\right\}$$

$$=\frac{(1+i)^{\frac{1}{k}}\{(1+i)^{n}-1\}}{i^{(k)}}=\frac{(1+i)^{n}-1}{d^{(k)}} \qquad (1.6.1)$$

$$s_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{k}\left\{(1+i)^{n-\frac{1}{k}}+(1+i)^{n-\frac{2}{k}}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=\frac{(1+i)^{n}-1}{i^{(k)}} \qquad (1.6.2)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{k}\left\{1+v^{\frac{1}{k}}+\cdots\cdots+v^{n-\frac{1}{k}}\right\}$$

$$=\frac{(1+i)^{\frac{1}{k}}(1-v^{n})}{i^{(k)}}=\frac{1-v^{n}}{d^{(k)}} \qquad (1.6.3)$$

$$a_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{k}\left\{v^{\frac{1}{k}}+v^{\frac{2}{k}}+\cdots\cdots+v^{n}\right\}$$

$$=\frac{1-v^{n}}{i^{(k)}} \qquad (1.6.4)$$

これらの式は n が整数でなくても $\dfrac{1}{k}$ の倍数であればやはり成立する。従って記号 $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)}$, $s_{\overline{n}|}^{(k)}$, $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)}$, $a_{\overline{n}|}^{(k)}$ は n が整数でなくても $\dfrac{1}{k}$ の倍数の時には使用することができる。

(1.5.5) ないし (1.5.18) に関しても全く類似の次の式が成立する。(ただし n および f は $\dfrac{1}{k}$ の倍数とする)

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = (1+i)^{\frac{1}{k}} s_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.6.5}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = s_{\overline{n+\frac{1}{k}}|}^{(k)} - \frac{1}{k} \tag{1.6.6}$$

$$s_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{s}_{\overline{n-\frac{1}{k}}|}^{(k)} + \frac{1}{k} \tag{1.6.7}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = (1+i)^{\frac{1}{k}} a_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.6.8}$$

$$a_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{n+\frac{1}{k}}|}^{(k)} - \frac{1}{k} \tag{1.6.9}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = a_{\overline{n-\frac{1}{k}}|}^{(k)} + \frac{1}{k} \tag{1.6.10}$$

$$v^n \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.6.11}$$

$$v^n s_{\overline{n}|}^{(k)} = a_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.6.12}$$

$${}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = v^f \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.6.13}$$

$${}_{f|}a_{\overline{n}|}^{(k)} = v^f a_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.6.14}$$

$${}_{f|}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{f+n}|}^{(k)} - \ddot{a}_{\overline{f}|}^{(k)} \tag{1.6.15}$$

$${}_{f|}a_{\overline{n}|}^{(k)} = a_{\overline{f+n}|}^{(k)} - a_{\overline{f}|}^{(k)} \tag{1.6.16}$$

$$\ddot{a}_{\infty}^{(k)} = \frac{1}{d^{(k)}} \tag{1.6.17}$$

$$a_{\infty}^{(k)}=\frac{1}{i^{(k)}} \tag{1.6.18}$$

次に$\ddot{s}_{\overline{1|}}^{(k)}$, $s_{\overline{1|}}^{(k)}$, $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(k)}$, $a_{\overline{1|}}^{(k)}$ を用いて$\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(k)}$ 等を$\ddot{s}_{\overline{n|}}$ 等で表わす式を挙げておこう。

$$\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(k)}=\ddot{s}_{\overline{1|}}^{(k)}s_{\overline{n|}}=\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(k)}\ddot{s}_{\overline{n|}} \tag{1.6.19}$$

$$s_{\overline{n|}}^{(k)}=s_{\overline{1|}}^{(k)}s_{\overline{n|}}=a_{\overline{1|}}^{(k)}\ddot{s}_{\overline{n|}} \tag{1.6.20}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(k)}=\ddot{s}_{\overline{1|}}^{(k)}a_{\overline{n|}}=\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(k)}\ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{1.6.21}$$

$$a_{\overline{n|}}^{(k)}=s_{\overline{1|}}^{(k)}a_{\overline{n|}}=a_{\overline{1|}}^{(k)}\ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{1.6.22}$$

これらは各記号を定義する展開式を入れて容易に証明することができるが、式の意味を考えておくと使いやすい。例えば（1.6.19）の中項は、各年度について $\frac{1}{k}$ 年ごとに支払われる年金を１年分一まとめにして年末に支払われると考え、そのまとめた分で n 年間の年金の終価を考えている。これらの式によって $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(k)}$ と $a_{\overline{1|}}^{(k)}$ との表と、$\ddot{s}_{\overline{n|}}$ と $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ との表があれば、$\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(k)}$ 等がすべて容易に計算される。

なお、後に用いる近似式をここであげておく。（1.6.3）と（1.2.10），（1.2.11）を用い　d^3　以上の項を省略すると

$$\begin{aligned} 1-\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(k)} &= 1-\frac{1-v}{d^{(k)}}=\frac{d^{(k)}-d}{d^{(k)}} \\ &\fallingdotseq \frac{k-1}{2k}d^{(k)}-\frac{(k-1)(k-2)}{6k^2}d^{(k)2} \\ &\fallingdotseq \frac{k-1}{2k}d+\frac{k^2-1}{12k^2}d^2 \end{aligned} \tag{1.6.23}$$

§7　確定年金（連続支払の場合）

年 k 回支払年金の極限の場合、すなわち $k\to\infty$ とする場合が理論的には考えられる。この場合でも年金年額は1である。終価を $\bar{s}_{\overline{n}|}$、現価を $\bar{a}_{\overline{n}|}$ で表わすと（1.6.1）ないし（1.6.4）で $k\to\infty$ として

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\int_0^n(1+i)^t\,dt=\frac{(1+i)^n-1}{\delta} \tag{1.7.1}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\int_0^n v^t\,dt=\frac{1-v^n}{\delta} \tag{1.7.2}$$

である。これらの2式は n が整数でなく任意の正の実数である場合にも成立する。また前節のその他の諸式で $k\to\infty$ として次の関係が得られる。

$$v^n\bar{s}_{\overline{n}|}=\bar{a}_{\overline{n}|} \tag{1.7.3}$$

$$_{f|}\bar{a}_{\overline{n}|}=v^f\bar{a}_{\overline{n}|} \tag{1.7.4}$$

$$_{f|}\bar{a}_{\overline{n}|}=\bar{a}_{\overline{f+n}|}-\bar{a}_{\overline{f}|} \tag{1.7.5}$$

$$\bar{a}_{\infty}=\frac{1}{\delta} \tag{1.7.6}$$

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\bar{s}_{\overline{1}|}\,s_{\overline{n}|}=\bar{a}_{\overline{1}|}\,\ddot{s}_{\overline{n}|} \tag{1.7.7}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\bar{s}_{\overline{1}|}\,a_{\overline{n}|}=\bar{a}_{\overline{1}|}\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{1.7.8}$$

もちろんこれらは（1.7.1）と（1.7.2）の定義から出発して直接証明することもできる。なお、次の関係も成立する。

$$i\,s_{\overline{n}|}=i^{(k)}s^{(k)}_{\overline{n}|}=\delta\,\bar{s}_{\overline{n}|}=d^{(k)}\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|}=d\,\ddot{s}_{\overline{n}|} \tag{1.7.9}$$

$$i\,a_{\overline{n}|}=i^{(k)}a^{(k)}_{\overline{n}|}=\delta\,\bar{a}_{\overline{n}|}=d^{(k)}\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|}=d\,\ddot{a}_{\overline{n}|} \tag{1.7.10}$$

（1.7.9）の各項はすべて $(1+i)^n-1$ に等しく、（1.7.10）の各項はすべて $1-v^n$ に等しいからである。これらを不等式（1.3.8）と比べると

$$s_{\overline{n}|} < s_{\overline{n}|}^{(k)} < \bar{s}_{\overline{n}|} < \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} < \ddot{s}_{\overline{n}|} \qquad (1.7.11)$$

$$a_{\overline{n}|} < a_{\overline{n}|}^{(k)} < \bar{a}_{\overline{n}|} < \ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} < \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad (1.7.12)$$

が得られる。$i=0.05$ ，　$n=10$ ，　$k=2$ の場合、これらの不等式は次のようになる。

$$12.578 < 12.733 < 12.890 < 13.048 < 13.207$$

$$7.722 < 7.817 < 7.913 < 8.010 < 8.108$$

§８　変動年金

これまでは支払われる年金額は毎回同額としてきたが、これが毎回変わる場合もあり、そのような年金を**変動年金**という。変わり方に一定の法則性があれば、その終価や現価を計算する式がつくれる。

期末払で、第１年度の年金額が１で、以後毎年等差数列的に h だけ増える年金を考えてみよう。第 t 年目の年金額は $1+(t-1)h$ であるから、年利率 i で計算するとして、現価 a は

$$a = v + v^2(1+h) + \cdots\cdots + v^n\{1+(n-1)h\}$$

$$= a_{\overline{n}|} + a'h$$

で、ここに

$$a' = v^2 + 2v^3 + \cdots\cdots + (n-1)v^n$$

である。　va'　をつくり　a'　から引くと

$$(1-v)a' = v^2 + v^3 + \cdots\cdots + v^n - (n-1)v^{n+1}$$

$$= va_{\overline{n}|} - nv^{n+1}$$

となり、$\dfrac{v}{1-v} = \dfrac{1}{i}$ を用いると

$$a' = \frac{1}{i}(a_{\overline{n}|} - nv^n)$$

となるので

$$a = \left(1+\frac{h}{i}\right)a_{\overline{n}|} - \frac{nv^n h}{i} \tag{1.8.1}$$

終価 s についても同様に計算されて

$$s = \left(1+\frac{h}{i}\right)s_{\overline{n}|} - \frac{nh}{i} \tag{1.8.2}$$

(1.8.1) で $n\to\infty$ とすると累増する永久年金の現価が得られるが、それは (1.5.18) と $nv^n\to 0$ とより

$$a_{\infty} = \frac{1}{i}\left(1+\frac{h}{i}\right) \tag{1.8.3}$$

特に $h=1$ の場合、すなわち年金額が 1, 2, 3, ・・・, n と増えて行く場合を**累加年金**とよび、その現価および終価を $(Ia)_{\overline{n}|}$ および $(Is)_{\overline{n}|}$ で表わす。(1.8.1) と (1.8.2) で $h=1$ とし、$1+\dfrac{1}{i}=\dfrac{1}{d}$ を用いると

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{1}{d}a_{\overline{n}|} - \frac{nv^n}{i} \tag{1.8.4}$$

$$(Is)_{\overline{n}|} = \frac{1}{d}s_{\overline{n}|} - \frac{n}{i} \tag{1.8.5}$$

である。永久累加年金の現価は

$$(Ia)_{\infty} = \frac{1}{id} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \tag{1.8.6}$$

次に期末払で年金額が等比数列となる年金、すなわち第1年度の1から始まり、以後の年金額が r, r^2, ・・・・, r^{n-1} となる年金を考えてみよう。その現価は $rv \neq 1$ のとき

$$a = v + rv^2 + \cdots\cdots + r^{n-1}v^n$$

$$=v\,\frac{1-r^n v^n}{1-r\,v}=\frac{1-r^n v^n}{(1+i)-r} \qquad (1.8.7)$$

であり、$rv=1$ ならば nv となる。また終価は $rv\neq1$ のとき

$$s=\frac{(1+i)^n-r^n}{(1+i)-r} \qquad (1.8.8)$$

であり、$rv=1$ ならば $n(1+i)^{n-1}$ となる。この時の永久年金の現価は $r<1+i$ の時にのみ一定の値に収束し

$$a_\infty=\frac{1}{(1+i)-r} \qquad (1.8.9)$$

§９　金利計算表

前節までに述べた各種の値（価格）を、与えられた i について計算したり、あるいは利息に関する実際問題を解いたりするためには、基本的な価格についての数値表があると、計算が手軽にできて極めて便利である。そのような表を**金利計算表**（あるいは利息表）という。例えばある一つの金利計算表では

$$(1+i)^n \quad , \quad v^n \quad , \quad s_{\overline{n|}} \quad , \quad a_{\overline{n|}} \quad , \quad \frac{1}{s_{\overline{n|}}} \quad , \quad \frac{1}{a_{\overline{n|}}}$$

の値が

（１）　i について0.5％から10％まで0.5％刻みに

（２）　１から100までのすべての整数値 n について

（３）　小数点８桁まで

計算されて表になっている。

$\dfrac{1}{s_{\overline{n|}}}$ ，$\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}$ が掲載されるのは§１１および§１２で述べるような応用があるからであるが、(1.12.3) で示すように

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i \tag{1.9.1}$$

であるので、その一方だけが与えられることもある。また $s_{\overline{n}|}$ ，$a_{\overline{n}|}$ 等の代わりに $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ ，$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 等の表をあげる場合もあるが、この時も

$$\ddot{s}_{\overline{n}|}=s_{\overline{n+1}|}-1 \qquad , \qquad \ddot{a}_{\overline{n}|}=a_{\overline{n-1}|}+1$$

であるから、どちらか一方があれば同じ表で他方も容易に読みとれる。

現在わが国で入手可能な金利計算表としては

A．佐々木道雄：金利計算諸表（東京大学出版会発行）

B．生命保険協会：金利計算表（昭和57年）

がある。本書巻末の付録１ではBからその一部を転載した。（この表では $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ ，$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ が用いられている）　金利計算表を使用する時には（１）利率 i についての刻みと範囲、（２）期間 n の範囲、（３）各種の価格の桁数、をよく調べなければならない。

年 k 回転化する場合や年 k 回支払の年金を考える時は、付録１の（１）のような金利常数表を用いて、§２と§６の諸公式を利用すれば早く計算ができる。例えば $a^{(k)}_{\overline{1}|}$，$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|}$ の値と（1.6.19）～（1.6.22）を用いると $\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|}$ 等が計算できる。また場合によっては、もとの金利計算表をうまく利用して計算できる場合もある。例えば

（ａ）　元金１が名称利率６％で半年転化する時の10年後の元利合計は $(1+i)^n$ の表で $i=0.03$ ，$n=20$ の箇所を見ればよい。

（ｂ）　半年毎に１を支払う10年間の年金を名称利率６％で半年転化で考える時の $s_{\overline{n}|}$ と $a_{\overline{n}|}$ は、$i=0.03$ ，$n=20$ についてのそれらの値を見ればよい。

最近は手軽なコンピューターが普及しているので、それらにプログラムさえ入れておけば、これらの価格について細かいところまで計算が可

能であり、また電卓でも金利計算用に作られたものがある。しかし簡単な計算にはやはり金利計算表が便利である。

第１章　練習問題（２）

（１）　年利７％で10年後に1000万円を得るためには、毎年始にいくらずつ積み立てればよいか。

（２）　問題（１）で、積立を開始してから４年後から、銀行は利率を６％に引下げた。利率引下げ後の積立額はいくらか。

（３）　付録１の金利計算表を利用して、年利６％で v^{95} および $\ddot{a}_{\overline{95}|}$ を計算せよ。

（４）　10年ごとに年金額が順次半分となるような30年間の年１回期始払確定年金の終価を、年5.5％の利率で計算せよ。また現価についても計算せよ。

（５）　即時開始、年１回期末払、年金額１、30年間の確定年金につき、最初の10年間は利率５％、以後10年ごとに0.5％ずつ減少する利率で、その現価を計算せよ。

（６）　次式を証明せよ。

$$(Ia)_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + n_{n|}a_{\infty} = \frac{a_{\overline{n}|}}{i}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} + n_{n|}a_{\infty} = a_{\overline{n}|}\ddot{a}_{\infty}$$

（７）　$(I\ddot{a})_{\overline{n|}}=\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^t$ と定義すると、次の諸式が成立することを証明せよ。

$$(Ia)_{\overline{n|}}=(I\ddot{a})_{\overline{n+1|}}-\ddot{a}_{\overline{n+1|}}$$

$$\frac{(I\ddot{a})_{\overline{n|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}<\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

（８）　付録１の金利計算表を利用して、年利６％で $\ddot{a}^{(4)}_{\overline{7.5|}}$ および $\bar{a}_{\overline{7.5|}}$ を計算せよ。

（９）　与えられた実利率 i に対応する年 k 回転化の名称利率が $i^{(k)}$ であるとき、$\dfrac{i^{(k)}}{k}$ を年利率として kn 年間毎年 $\dfrac{1}{k}$ ずつ支払う期末払年金の現価 a はもとの i に基づく $a^{(k)}_{\overline{n|}}$ に等しいことを証明せよ。

§１０　利率（利回り）のもとめ方

これまでは i ，n 等を与えて諸価格を計算する方法を述べてきたが、逆に価格と n が判っている時に i を推定したいと思う場合も多い。例えば年金額１、期間 n に対する期始払年金現価 a が判っている時に、利率 i を求めるにはどうすればよいか。最も簡単なのは、金利計算表を用いて直線的に逆補間することである。すなわち $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ の表で同じ n について a をはさむ直近の２つの年金現価 $\ddot{a}_1$ と $\ddot{a}_2$ （$\ddot{a}_1 > a > \ddot{a}_2$）に対応する利率を i_1 ，$i_2(i_1 < i_2)$ として

$$\frac{i - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{\ddot{a}_1 - a}{\ddot{a}_1 - \ddot{a}_2}$$

によって i を求めることである。この場合もとの表の i の刻みが細かい程よい値が得られるが、それが粗い時には若干の工夫が必要となる。しかし現在では、小型のコンピューターにでも $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ を計算するプログラムを入れておけば、i をいくらでも細かい刻みで動かしてみて、a に該当する i を試行によっていくらでも細かいところまで求めることができる。

債券の利回りを求める問題についても同じことが言える。債券の額面が C 、償還されるまでの年数が n、半年後から開始される年２回払の利息が C に対し名称利率で年に j 、その購入価格が A（C より小さいことが多いが、大きくてもかまわない）である時、n 年後に C で償還されるその債券は年何％の利回りになるか、という問題である。利回りが i であるとすると、A を i で n 年間利殖した金額と、債券を保有したことにより収入したすべての金額の利率 i による終価とが等しい筈であるから

$$A(1+i)^n = C + jC\, s_{\overline{n}|}^{(2)}$$

$$A = C v^n + j C a_{\overline{n}|}^{(2)} \qquad (1.10.1)$$

となり、この右辺を金利計算表を用いて種々の i について計算し、相次ぐ i_1 と $i_2(i_1 < i_2)$ について計算した値 A_1 と A_2 が A を挾んだ $(A_1 > A > A_2)$ 時

$$\frac{i - i_1}{i_2 - i_1} = \frac{A_1 - A}{A_1 - A_2} \qquad (1.10.2)$$

によって i が求められる。この時もコンピューターを利用して、試行によって i の値を細かい所まで求めることができる。

§11　元利均等返済

短期の債務については通常その元利合計が一時に返済されるが、長期の場合には分割して返済されることが多い。その場合の分りやすい一つの返済方法は、元金は等分に返済することとし、毎返済時には前返済時からの利息を返済元金に加えて支払う方法である。その場合には、元金が減少するに従い支払う利息も減少するので、時の経過とともに返済額が減少する。

これに対し、返済額が毎期同額となるような返済方法があり、これを**元利均等返済**という。またその時の毎期の返済額を**均等返済金**という。返済期間を n 年とし、年に k 回返済されるものとしよう。年実利率を i とし、返済額の年額を R とすると、すべての返済金の現価が元金 S に等しくなければならないから

$$S = R\, a_{\overline{n}|}^{(k)}$$

となる。従って年返済額は

$$R = \frac{S}{a_{\overline{n}|}^{(k)}} \qquad (1.11.1)$$

となり、毎回の返済額すなわち均等返済金は $\dfrac{R}{k}$ となる。

ところでこの返済額中、いくらが利息にあたり、いくらが元金の返済となるであろうか。まず第1回の均等返済金を考えると、それまでの利息は元金 $S=R\,a_{\overline{n}|}^{(k)}$ に対し $\dfrac{i^{(k)}}{k}$ であるので、(1.6.4) を用いてそれは

$$R\cdot\frac{1-v^n}{i^{(k)}}\cdot\frac{i^{(k)}}{k}=\frac{R}{k}(1-v^n) \qquad (1.11.2)$$

である。残りは元金の返済であるからそれは

$$\frac{R}{k}-\frac{R}{k}(1-v^n)=\frac{Rv^n}{k} \qquad (1.11.3)$$

となる。そしてその時点での元金の残高は

$$R\,a_{\overline{n}|}^{(k)}-\frac{Rv^n}{k}=R\,a_{\overline{n-\frac{1}{k}}|}^{(k)} \qquad (1.11.4)$$

となる。このような計算を繰り返すから、次の返済時には

利息は　$\dfrac{R}{k}\left(1-v^{n-\frac{1}{k}}\right)$

元金の返済は　$\dfrac{R}{k}\,v^{n-\frac{1}{k}}$

残存元金は　$R\,a_{\overline{n-\frac{2}{k}}|}^{(k)}$

となり、これを続ければ完済時までの返済の構造を次のような表にまとめることができる。

返済期	均等返済金中の利息部分	均等返済金中の返済元金	残存元金
$\frac{1}{k}$	$\frac{R}{k}(1-v^n)$	$\frac{R}{k}v^n$	$Ra^{(k)}_{\overline{n-\frac{1}{k}}\rceil}$
$\frac{2}{k}$	$\frac{R}{k}(1-v^{n-\frac{1}{k}})$	$\frac{R}{k}v^{n-\frac{1}{k}}$	$Ra^{(k)}_{\overline{n-\frac{2}{k}}\rceil}$
……	………	………	………
t	$\frac{R}{k}(1-v^{n-t+\frac{1}{k}})$	$\frac{R}{k}v^{n-t+\frac{1}{k}}$	$Ra^{(k)}_{\overline{n-t}\rceil}$
……	………	………	………
n	$\frac{R}{k}(1-v^{\frac{1}{k}})$	$\frac{R}{k}v^{\frac{1}{k}}$	0

念のため返済元金の和を求めると、(1.6.4) により

$$\frac{R}{k}\ (v^n+v^{n-\frac{1}{k}}+\cdots\cdots+v^{\frac{1}{k}})=R\ a^{(k)}_{\overline{n}|}$$

となり、当初の元金と一致する。

実際の債務返済に当たっては、あらかじめこのような返済表を作成しておくと、残存元金や将来の支払構造が一目瞭然となり便利である。

$k=1$ の場合は年払返済であるが、例えば半年払返済で名称利率 $i^{(2)}$ の時には、$\frac{i^{(2)}}{2}$ の年利率で $2n$ 年の年払返済と考えても同じ結果が得られる。(本章 練習問題(2)の(9)を参照)

§12　減債基金

元利均等返済では返済期毎に元金をいくらかずつ返済していたが、元金の返済をせずにその期の利息のみを支払うこととし、一方で元金返済のため一定額を別に積立てる方法が考えられる。このような積立金を**減**

債基金という。

元金は常に当初の S であるから、毎期支払う利息は $S\dfrac{i^{(k)}}{k}$ であり、積立額は n 年後に元利合計が S となるような金額、すなわち年額で $S/s_{\overline{n|}}^{(k)}$、毎期の額で $S/k\,s_{\overline{n|}}^{(k)}$ である。従って毎期の所要額は

$$S\frac{i^{(k)}}{k}+S\frac{1}{k\,s_{\overline{n|}}^{(k)}} \tag{1.12.1}$$

となる。この額は元利均等返済の毎期返済額 $S/k\,a_{\overline{n|}}^{(k)}$ と同じになるべきであるが、そのことは次のように証明される。すなわち（1.6.4）と（1.6.2）より

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{\overline{n|}}^{(k)}}&=\frac{i^{(k)}}{1-v^n}=i^{(k)}+\frac{i^{(k)}}{(1+i)^n-1}\\&=i^{(k)}+\frac{1}{s_{\overline{n|}}^{(k)}}\end{aligned} \tag{1.12.2}$$

が得られるが、これは元利均等返済によっても減債基金によっても数理的には同じであることを示している。

なお（1.12.2）で特に $k=1$ あるいは $k\to\infty$ とすれば、次式が得られる。

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}=i+\frac{1}{s_{\overline{n|}}} \tag{1.12.3}$$

$$\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}}}=\delta+\frac{1}{\bar{s}_{\overline{n|}}} \tag{1.12.4}$$

減債基金の利殖が借入金の利率 i と異なった利率 i' で行われる場合には、（1.12.1）は

$$S\frac{i^{(k)}}{k}+S\frac{1}{k\,s_{\overline{n|}}^{\prime(k)}}$$

となり、$i' > i$ ならば、これは（1.12.1）より小さい。

§13　元金償還保険（定期積金）

個人が銀行等で行う定期積金も、減債基金と同じく、一定年数後に一定の目標額を得ようとして等額ずつ積立てるものである。外国の保険会社では、それを**元金償還保険**あるいは貯蓄保険と称して販売している場合がある。後章で述べるような真の意味の保険ではないが、満期時に支払う金額を**保険金**、毎期の積立充当金を**保険料**と称している。

ここでは保険会社の経費や利益を考えない、いわゆる純保険料に当たるものを考えてみよう。保険金を1、満期までの期間を n 年とし、年 k 回保険料を払込むとする。減債基金と異なるのは積立が毎期始めに行われることであるので、保険料の年額を $P_{\overline{n}|}^{(k)}$ とすると

$$P_{\overline{n}|}^{(k)}\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)}=1$$

より

$$P_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)}} \tag{1.13.1}$$

となり、毎期の保険料は

$$\frac{P_{\overline{n}|}^{(k)}}{k}=\frac{1}{k\,\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)}} \tag{1.13.2}$$

である。（1.6.11）を（1.13.1）に用いると

$$P_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)}} \tag{1.13.3}$$

となるが、分子の v^n は n 年後に支払う保険金1の契約時における現価、すなわち一時払保険料にあたる。これを $A_{\overline{n}|}$ $(=v^n)$ で表わせば

$$P_{\overline{n|}}^{(k)}=\frac{A_{\overline{n|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(k)}} \tag{1.13.4}$$

となる。特に $k=1$、あるいは $k\to\infty$ とすれば次式が得られる。

$$P_{\overline{n|}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}=\frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} \tag{1.13.5}$$

$$\bar{P}_{\overline{n|}}=\frac{1}{\bar{s}_{\overline{n|}}}=\frac{v^n}{\bar{a}_{\overline{n|}}} \tag{1.13.6}$$

今1なる元金を借りて直ちに前払で d なる利息を支払うと、1年後の元金はやはり1である。((1.1.7) をみよ) これを n 年間繰り返して最後に元金1を返せば、当初に借りた元金は皆済されるから、返済額のそれぞれを現価に直すと

$$d\,\ddot{a}_{\overline{n|}}+v^n=1$$

でなければならないが、この関係は (1.5.3) に外ならない。((1.5.19) のような解釈もできる) 従って

$$A_{\overline{n|}}=v^n=1-d\,\ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{1.13.7}$$

と書き直せる。また (1.13.5) をこれに入れて

$$P_{\overline{n|}}=\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}-d \tag{1.13.8}$$

を得るが、これは次のような解釈からも出てくる。すなわち上記の解釈で n 年後に返す元金1を毎年分割して返すとした時その額は $P_{\overline{n|}}$ であるから

$$d\,\ddot{a}_{\overline{n|}}+P_{\overline{n|}}\,\ddot{a}_{\overline{n|}}=1$$

となり、これは (1.13.8) と同じ式である。

(1.13.7)，(1.13.8) の類似として、(1.7.10) より次式が得られる。

$$A_{\overline{n}|}=1-d^{(k)}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} \tag{1.13.9}$$

$$P_{\overline{n}|}^{(k)}=\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)}}-d^{(k)} \tag{1.13.10}$$

$$A_{\overline{n}|}=1-\delta\,\bar{a}_{\overline{n}|} \tag{1.13.11}$$

$$\bar{P}_{\overline{n}|}=\frac{1}{\bar{a}_{\overline{n}|}}-\delta \tag{1.13.12}$$

さて$\boldsymbol{k}=1$、すなわち保険料が年払の時に t 年経過後の元利合計はいくらになっているであろうか。t 年目の保険料収入の直前で計算するとして、その値を ${}_tV_{\overline{n}|}$ で表わすと、$1 \leqq t \leqq n$ として

$${}_tV_{\overline{n}|}=P_{\overline{n}|}\ddot{s}_{\overline{t}|}=\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} \tag{1.13.13}$$

となる。これは保険料を受け取った保険会社が将来の支払のために持っていなければならない金額で、やはり保険の場合との類似で**責任準備金**と呼んでいる。今見方を変えて t 年経過時点で、満期時に支払う額の現価と、t 年目以降の保険料の現価との差額を保有していれば、将来の支払が過不足なく出来ると考えると

$${}_tV_{\overline{n}|}=v^{n-t}-P_{\overline{n}|}\ddot{a}_{\overline{n-t}|} \tag{1.13.14}$$

と書けるが、事実これは（1.13.13）に等しいことが証明される。すなわち（1.13.14）に（1.13.7）を用いると

$${}_tV_{\overline{n}|}=1-(P_{\overline{n}|}+d)\ddot{a}_{\overline{n-t}|}$$

となり、これに（1.13.8）を用いて

$$ {}_tV_{\overline{n}|}=1-\frac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \tag{1.13.15}$$

となるが、さらに（1.5.15），（1.5.13），（1.5.11）を用いると

$$ {}_tV_{\overline{n}|}=\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{v^{n-t}\,\ddot{a}_{\overline{t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} $$

が得られる。

生命保険における責任準備金（第5章参照）と対比してみると、（1.13.13）は過去法による責任準備金にあたり、（1.13.14）は将来法による責任準備金にあたる。

保険料が年 k 回払の時の責任準備金は

$$ {}_tV^{(k)}_{\overline{n}|}=P^{(k)}_{\overline{n}|}\,\ddot{s}^{(k)}_{\overline{t}|}=\frac{\ddot{s}^{(k)}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|}} \tag{1.13.16}$$

であるが、t が整数の場合は（1.6.19）により

$$ {}_tV^{(k)}_{\overline{n}|}=\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} $$

となり、年払の場合と一致する。将来法では

$$ {}_tV^{(k)}_{\overline{n}|}=v^{n-t}-P^{(k)}_{\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n-t}|} \tag{1.13.17}$$

であるが、（1.13.15）を導いた時と同じような変形で、これは

$$ {}_tV^{(k)}_{\overline{n}|}=1-\frac{\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|}} \tag{1.13.18}$$

となり、さらに同じようにして（1.13.16）に等しいことが証明される。

$k\to\infty$　すなわち保険料が連続払の時は次のようになる。

$$ {}_t\bar{V}_{\overline{n}|}=\frac{\bar{s}_{\overline{t}|}}{\bar{s}_{\overline{n}|}}=1-\frac{\bar{a}_{\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}=v^{n-t}-\bar{P}_{\overline{n}|}\,\bar{a}_{\overline{n-t}|} $$

§１４　年金積立保険

一定年数経過後から一定額の年金を一定期間受けることを期待して、年金開始時までに積立を行うことは、金融機関の商品としてよくみられるものである。その際保険会社以外では年金受給者の生死に関係ない利息だけを考慮した商品を扱っているが、外国の例にあるように、保険会社がそのようなものを扱う場合には、やはり保険との類似から**年金積立保険**と呼んでいる。

m年間積立てた後、年金額rの期始払年金をn年間支払うとして、そのような年金の年払保険料を求めてみよう。m年後の時点で考えた年金現価は$r\,\ddot{a}_{\overline{n}|}$であるから、これを§１３の元金償還保険の保険金とみれば、保険料は（1.13.5）および（1.5.13）より

$$P=\frac{r\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{s}_{\overline{m}|}}=\frac{v^m r\,\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{1.14.1}$$

$$=\frac{r\,{}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{m}|}} \tag{1.14.2}$$

責任準備金は、$t \leqq m$ であれば（1.13.13）および（1.13.14）より

$${}_tV=r\,\ddot{a}_{\overline{n}|}\,\frac{\ddot{s}_{\overline{t}|}}{\ddot{s}_{\overline{m}|}} \tag{1.14.3}$$

$$=r\,\ddot{a}_{\overline{n}|}\,v^{m-t}-P\,\ddot{a}_{\overline{m-t}|} \tag{1.14.4}$$

となる。また年金開始後（$m < t \leqq m+n$）は、開始時の手持金から支払った年金を控除した残高（過去法）、あるいは将来支払う年金の現価（将来法）と考えて

$$ {}_tV = r\,\ddot{a}_{\overline{n}|}\,(1+i)^{t-m} - r\,\ddot{s}_{\overline{t-m}|} \qquad (1.14.5)$$

$$ = r\,\ddot{a}_{\overline{m+n-t}|} \qquad (1.14.6)$$

となる。(両式が同じになることを証明するには、$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+v+\cdots\cdots+v^{n-1}$; $\ddot{s}_{\overline{t-m}|}=(1+i)^{t-m}+\cdots\cdots+(1+i)$ を上式に入れる)

第１章　練習問題（３）

（１）　額面100円、名称利率年7.2％の国債で、あと８年で償還されるものを89.5円で購入した。この場合の利回りを付録１の金利計算表を利用して計算せよ。

（２）　(a）額面100円、年利率７％（利息年１回払）の公債で、あと５年で償還されるものは、帳簿価格がいくらであれば利回りが年８％となるか。

(b）この公債を満期まで所有するものとし、毎年８％の利回りが実現するように、評価益を計上して帳簿価格を変更するものとする。毎年の利息収入、評価益および帳簿価格を計算して表にせよ。（このような帳簿価格の計算方法を**均等利回り評価**あるいは**アモチゼーション**という）

（３）　1000万円の負債がある。半年転化８％の名称利率で、４年間に半年毎の元利均等返済を行なおうとする。その時の返済表を作成せよ。

（４）　100万円を年９％で借り入れ、最初の５年間の年払返済金はあとの５年間のそれの２倍になるようにして、10年間で完済するようにした。それぞれの返済金はいくらになるか。

（５）　元金１の年払元利均等返済では、年返済金が $\dfrac{1}{a_{\overline{n|}}}$ である（(1.11.1）参照）が、t 年経過後の借入金残高は $a_{\overline{n-t|}}/a_{\overline{n|}}$ となることを（直接に）証明せよ。

（6） 月賦購入の際によく用いられる方法であるが、利息を年単位（または月単位）の単利で呼称し、元金と全利息の合計額を返済期間の総月数で割った額ずつ毎月返済する方法を**アドオン方式**という。金額Aを年利rのアドオン方式で借りn年間で返済する時、毎月の返済金はいくらか。またこの時の年実利率iは

$$i \fallingdotseq \frac{2nr}{(n+1)-\dfrac{11}{12}} \fallingdotseq 2r$$

となることを示せ。

（7） ある人が金融機関から10年の期限で100万円を借り入れ、これに対して年8％の利息を支払いながら、別に年6％の利率による減債基金をその金融機関で積立てることにした。

（a） この人にとって借入金の実利率はいくらになるか。

（b） 第6年度の支払をする直前に、債務者は一時金でこの債務を完済することにした。その時の所要額はいくらか。またこの場合の実利率はいくらになるか。

（8） 年1回払の元金償還保険の保険料は（1.13.5）によれば$\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$であり、（1.13.8）によれば$\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}-d$であるが、両者の等しいことを式の展開で証明せよ。

（9） （1.13.7）の

$$A_{\overline{n}|}=1-d\,\ddot{a}_{\overline{n}|}=1-d(1+a_{\overline{n-1}|})$$

を式の展開で証明せよ。

（１０）　元金償還保険において t 年（$\frac{1}{k}$ の倍数とする）経過後の責任準備金 ${}_{t}V_{\overline{n|}}^{(k)}$ と $t+\frac{1}{k}$ 年経過後の責任準備金 ${}_{t+\frac{1}{k}}V_{\overline{n|}}^{(k)}$ との間には

$$\left({}_{t}V_{\overline{n|}}^{(k)}+\frac{1}{k}P_{\overline{n|}}^{(k)}\right)\left(1+i\right)^{\frac{1}{k}}={}_{t+\frac{1}{k}}V_{\overline{n|}}^{(k)}$$

という関係があることを証明せよ。

（１１）　10年後から始まり、３年毎に30万円ずつ15年間受け取れる年金を、今後10年間で毎月積立てようとする。$i=0.06$ として積立額を計算せよ。

第２章　生命表および生命関数

§1　生命表

ある特定された大きな集団に属する人々の死亡状況を観察して、年齢別に死亡する割合（死亡率）とそれに基づく死亡・生存の状況を表わしたものを**生命表**という。**死亡表**あるいは**死亡生残表**ということもある。

それは通常次のような形のものである。（数字は巻末付録２の日本全会社生命表（1984～'85）男子の一部をとり出したものである）

x	l_x	d_x	p_x	q_x	$\mathring{e}_x$
0	100,000	137	0.99863	0.00137	75.99
1	99,863	98	0.99902	0.00098	75.09
2	99,765	67	0.99933	0.00067	74.16
・	・・・	・	・・・	・・・	・・
・	・・・	・	・・・	・・・	・・
50	94,353	417	0.99558	0.00442	28.55
51	93,936	464	0.99506	0.00494	27.67
・	・・・	・	・・・	・・・	・・
・	・・・	・	・・・	・・・	・・
105	0.8165	0.8165	0.00000	1.00000	0.50
106	0				

ここに、 x は年齢、 l_x は生存数、 d_x は死亡数、 p_x は生存率、 q_x は死亡率、 $\mathring{e}_x$ は平均余命を表わすが、それぞれは次のように解釈される。

この集団の属性をもつ者が、ある時同時に l_0(100,000人) 生まれたとすると、そのうち d_0(137人) が次の1年間に死亡し、丁度1歳に生存している者は l_1(99,863人) である。また次の1年間には d_1(98人) の死亡があり、満2歳に生存している者は l_2(99,765人) である。このような死亡·生存を繰り返して、ω (死亡表の最終年齢。例えば 101歳とか 106歳が用いられる) では $l_\omega = 0$ となる。

あるいは l_{50} 以降のみを考える時は、丁度満50歳の者を l_{50} (94,353人) 集めたとすると、そのうち次の1年間に d_{50}(417人) が死亡して、1年後には l_{51} (93,936人) になり、それ以降は前の場合と同様に推移すると考える。以上の説明からわかるように

$$l_x - d_x = l_{x+1} \tag{2.1.1}$$

という関係がある。従って容易にわかるように整数 n (≥ 1) について

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_{x+n-1} + l_{x+n} \tag{2.1.2}$$

となる。また**生存率** p_x および**死亡率** q_x は

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{2.1.3}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \tag{2.1.4}$$

を計算したものである。これらから

$$l_{x+1} = l_x \, p_x \tag{2.1.5}$$

$$d_x = l_x \, q_x \tag{2.1.6}$$

とも書ける。$\mathring{e}_x$ については§5で述べる。明らかに

$$p_x + q_x = 1 \tag{2.1.7}$$

$$p_x = 1 - q_x \tag{2.1.8}$$

という関係がある。

なお新生児の死亡率は出生直後に極めて高いので、特に0歳から1歳までの区間をさらに細分した生命表が添付されることもある。例えば次のような表である。(数字は第15回生命表男子のものである)

x	l_x	d'_x	p'_x	q'_x
0 日	100,000	444	0.99556	0.00444
7 〃	99,556	62	0.99938	0.00062
14 〃	99、494	31	0.99969	0.00031
21 〃	99,463	20	0.99980	0.00020
28 〃	99,443	59	0.99941	0.00059
2 月	99,384	36	0.99964	0.00036
3 〃	99,348	87	0.99912	0.00088
6 〃	99,261	87	0.99912	0.00088
12 〃	99,174			

この時は $l_{x(+1)}$ を l_x のすぐ次の生存数として、次の関係が成り立っている。

$$l_x - d'_x = l_{x(+1)}$$

$$p'_x = \frac{l_{x(+1)}}{l_x} \quad , \qquad q'_x = \frac{d'_x}{l_x}$$

生命表には国民表と経験表とがある。国民表は、国民全体について生存・死亡の状況を一定期間観察して作成されるものであるが、経験表は、特定された範囲の生命保険加入者の全体について観察して作成されるものである。通常は男女別に作成されるが、経験表では男女合算のこともある。

国民表は、国勢調査結果による男女別・年齢別の人口と、毎年の出生、死亡等の統計である人口動態統計とを基礎にして作成される。現在わが国では国勢調査が5年に1回であるため、国民表も5年毎に作られている。わが国で最初に作られた国民表は、内閣統計局が明治24年～明治31年の観察によって作成した局1表であるが、これは局6表（昭和10年～昭和11年)まで続いた。戦後は厚生省で国民表が作成されることになり、まず第8回生命表が昭和22年の観察から作成されたが、以後は5年毎に発表され、最新のものは第16回生命表（昭和60年）である。厚生省ではその他に毎年簡易生命表を発表しているが、そこでは国勢調査のない年の人口の年齢分布が推定によって算出されている。

生命保険加入者の死亡状況は、会社による被保険者の選択（健康な被保険体のみ加入させ、弱体者は排除するか特別のグループとして別扱いする行為）あるいは被保険者による逆選択（弱体者は死亡保険に、強健者は生存保険に加入して利益を得ようとする行為）の影響があって、国民全体の場合とは違ったものとなる。そのため保険加入者のみを対象とした経験表が作成されるが、その際死亡保険加入者と生存保険加入者とは区別して経験表がつくられる。また年金受給者に対しては特別に年金受給者生命表がつくられる。

死亡保険加入者についての**経験表**では、さらに総合表、截断表、選択表、終局表という区別がある。通常会社は契約締結の際、被保険体にた

いし医的診査等を行って弱体者を排除するので、被保険者となった者は契約後数年間は国民全体よりも低い死亡率をしめす。そのため、例えば契約後３年間とか５年間とかを除外して年齢別に死亡率を算出したものが**截断表**であって、除外する期間を付して３年截断表などという。こうした除外期間を設けずに契約直後の期間も観察に加えて作成するのが**総合表**である。

選択表は、契約直後については各年度毎に死亡率を算出して示すものであるが、例えば l_x の表として次のような表がある。(商工省日本経験生命表,件数男子,選択表による)

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	l_{x+3}	$x+3$
10	100,766 →	100,505 →	100,264 →	100,000 ↓	13
11	100,477 →	100,263 →	99,999 →	99,660 ↓	14
12	100,231 →	99,997 →	99,659 →	99,214 ↓	15
·	·	·	·	·	·
·	·	·	·	·	·
				終局表	

この表によって、例えば11歳で保険に加入した者の生存数は、死亡による減少の結果、矢印 → に従って $l_{[11]}$, $l_{[11]+1}$, $l_{[11]+2}$, l_{14} , l_{15} ,・・・・・ という形で進行すると考える。ここでは契約時から３年を経過すれば、選択による死亡率減少の効果も薄れて、死亡率は本来のものに落ち着くと考えられている。この表の右端の l_{x+3} の欄で定まる生命表を**終局表**という。終局表につながるまでの期間、すなわち死

亡率が年齢のほかに契約時からの経過年数にも影響される期間（この例では３年）を**選択期間**という。

選択表では x 歳で契約して t 年経過した被保険者（年齢 $x+t$ 歳）に関する l , d , p , q を $l_{[x]+t}$, $d_{[x]+t}$, $p_{[x]+t}$, $q_{[x]+t}$ によって表わす。終局表の添字は $[x]$ と書かず、x のままである。選択表においても、例えば選択期間を３年として

$$l_{[x]+t}-d_{[x]+t}=l_{[x]+t+1} \qquad (t=0,1,2)$$

$$p_{[x]+t}=\frac{l_{[x]+t+1}}{l_{[x]+t}}, \quad q_{[x]+t}=\frac{d_{[x]+t}}{l_{[x]+t}} \qquad (t=0,1,2)$$

という関係がある。一般に契約直後の死亡率が低く、その後次第に終局表に近づくので、同じ年齢 x ではあるが

$$q_{[x]}<q_{[x-1]+1}<q_{[x-2]+2}<\cdots\cdots\cdots$$

となる。上記の $l_{[x]+t}$ の表の各欄を $q_{[x]+t}$ の数値で置き換えた表が通常選択表として使用される。

わが国の経験表では、古いものでは「日本三会社生命表」（明治14年～明治38年）や「商工省日本経験生命表」（明治45年～昭和２年）が著名であるが、最近では生命保険協会に加盟している各社がそれぞれの資料をもちより、それに基づいて協会で経験表を作成して発表している。

日本全会社生命表（1960～'63）　　略称　　第１回全会社表

に始まり、第２回（1965～'69），第３回（1972～'76），第４回（1979～'80）を経て、最新のものは

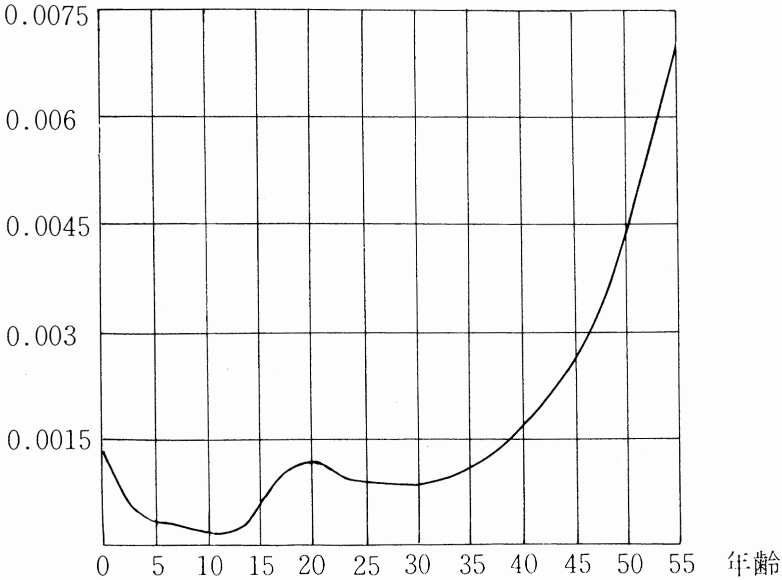
日本全会社生命表（1984～'85）　略称　　第５回全会社表

である。その他に郵政省簡易保険局が作成している経験表などもある。

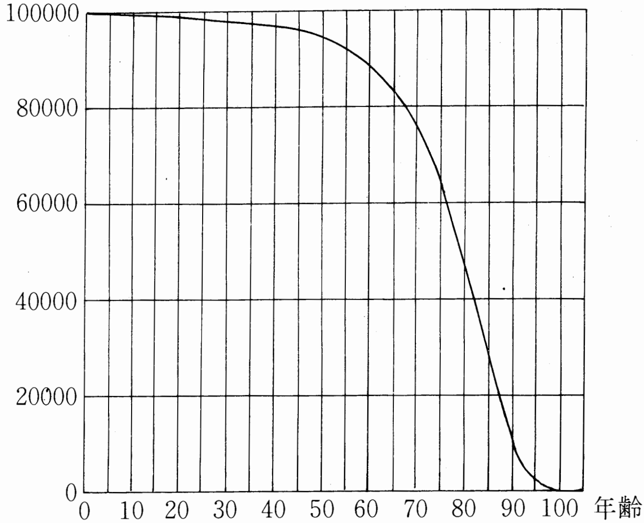
本書では最新の日本全会社生命表（1984～'85）を計算例などに主として引用するが、略称を用いて第5回全会社表と書くこととし、また特に断りのない限りそれは男子の生命表を指すものとする。

なお、q_x, d_x, l_x の曲線の形を頭に入れておくと理解の助けとなることが多いので、第5回全会社表についてそれらのグラフを掲げておく。q_xー曲線で20歳前後に山が見られるのは、交通事故等の災害死亡に基づくものであるが、そのような死因分析等死亡表に関する研究は他書に譲ることとする。

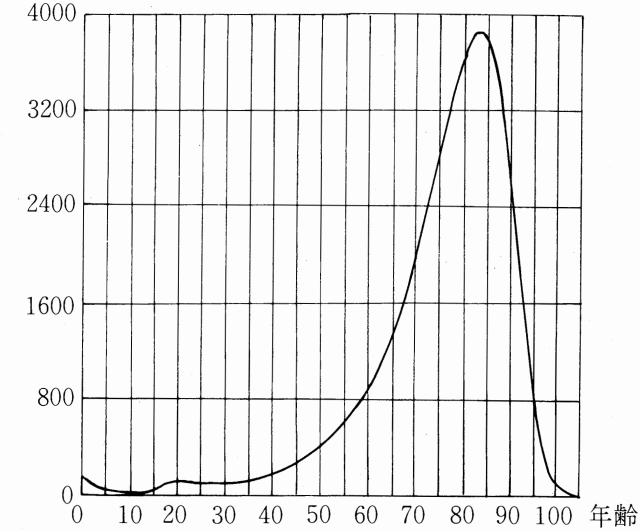
死亡率曲線（q_x ー曲線）



生存数曲線（l_x − 曲線）



死亡数曲線（d_x − 曲線）



§2　生命確率

与えられた生命表の諸数値から年齢や期間の関数として計算される諸種の値を**生命関数**という。ここではまず最も基本的な生命関数として、いくつかの**生存確率**（生存する割合）および**死亡確率**（死亡する割合）について述べる。これらは総称して**生命確率**といわれる。

表現を簡略にするため、今後「生命表の年齢 x 歳の者」というかわりに単に (x) と書くことにする。

（１） (x) が n 年間生存する確率 ${}_np_x$ は

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{2.2.1}$$

で表わされる。これについては明らかに次式が成立する。

$${}_{m+n}p_x = {}_mp_x \cdot {}_np_{x+m} \tag{2.2.2}$$

（２） (x) が n 年以内に死亡する確率 ${}_nq_x$ は

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x \tag{2.2.3}$$

となる。　従って次式が成立する。

$${}_np_x + {}_nq_x = 1 \tag{2.2.4}$$

（１）および（２）において左下の添字は事象を観察する期間を表わす。$n=1$ は通常省略され、(2.1.3), (2.1.4) のように単に p_x ，q_x とする。

（３） (x) が f 年間生存し、次の１年以内に死亡する確率は

$${}_{f|}q_x = \frac{d_{x+f}}{l_x} = \frac{l_{x+f} - l_{x+f+1}}{l_x} = {}_fp_x - {}_{f+1}p_x \tag{2.2.5}$$

あるいは

$$ {}_{f|}q_x = \frac{l_{x+f}}{l_x} \cdot \frac{d_{x+f}}{l_{x+f}} = {}_{f}p_x \, q_{x+f} \tag{2.2.6} $$

（4）(x) が f 年間生存し、次の r 年以内に死亡する確率は

$$ {}_{f|r}q_x = \frac{l_{x+f} - l_{x+f+r}}{l_x} = {}_{f}p_x - {}_{f+r}p_x \tag{2.2.7} $$

あるいは

$$ {}_{f|r}q_x = \frac{l_{x+f}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+f} - l_{x+f+r}}{l_{x+f}} = {}_{f}p_x \cdot {}_{r}q_{x+f} \tag{2.2.8} $$

（3）および（4）において、記号 q の左下隅の縦線の左側は観察を開始するまでの期間、右側は事象を観察する期間を表わす。$r=1$ は通常省略する。${}_{f|}q_x$ については次式が成立する。

$$ {}_{n}q_x = q_x + {}_{1|}q_x + {}_{2|}q_x + \cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x \tag{2.2.9} $$

なお選択表が使用される場合には、上記の諸式で x を $[x]$ と書き直せばよい。

§3　近似多項式

保険数学では、ある曲線の具体的な関数形が不明であったり、あるいは判明していても複雑であったりする時に、それでもその曲線がある与えられた区間内では直線に近い単調な変化をすることが判っている場合には、与えられた曲線を多項式で近似して計算を進めることがよく行われる。その最も単純なものは直線による近似であり、例えば区間〔0, 1〕で曲線 $f(t)$ を近似するものとして

$$ \overline{f_1}(t) = f(0) - \{f(0) - f(1)\}t \tag{2.3.1} $$

を採用することである。（$t=0, 1$ について $\overline{f_1}(t) = f(t)$ となる）この式

は単純ながら比較的よく用いられるものであるが、さらに近似の度合いをよくするためには、やや高次の多項式で近似する。ここでは後に利用する式を次にいくつか挙げておこう。

（１）　与えられた３点を通る２次曲線

関数 $f(t)$ が t の整数値でしか与えられていない場合、３点 $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$ を通る２次曲線

$$\overline{f_2}(t)=f(0)-\frac{f(-1)-f(1)}{2}t+\frac{f(-1)-2f(0)+f(1)}{2}t^2 \qquad (2.3.2)$$

は区間〔-1, 1〕における $f(t)$ の簡単な一つの近似である。（$t=-1$, 0, 1 について $\overline{f_2}(t)=f(t)$ となることを確かめよ）

同様に与えられた区間の両端と中間における値が既知の時に、それらの３点 $(0, f(0))$, $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$, $(1, f(1))$ を通る２次曲線は

$$\overline{g_2}(t)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\{f(0)-f(1)\}\left(t-\frac{1}{2}\right)+2\left\{f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right\}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (2.3.3)$$

である。（$t=0$, $\frac{1}{2}$, 1 について $\overline{g_2}(t)=f(t)$ となる）

（２）　与えられた５点を通る４次曲線

(2.3.2) の場合の３点の外に $(-2, f(-2))$, $(2, f(2))$ を加えた５点を通る４次曲線をつくると、区間〔-1, 1〕では $f(t)$ に対しさらによい近似になると考えられるが、それは

$$\overline{f_4}(t)=\overline{f_2}(t)+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t^3+\alpha_4 t^4 \qquad (2.3.4)$$

$$\alpha_1=\frac{1}{12}\{f(-2)-2f(-1)+2f(1)-f(2)\}$$

$$\alpha_2=\frac{1}{24}\{-f(-2)+4f(-1)-6f(0)+4f(1)-f(2)\}$$

$$\alpha_3=\frac{1}{12}\{-f(-2)+2f(-1)-2f(1)+f(2)\}$$

$$\alpha_4=\frac{1}{24}\{f(-2)-4f(-1)+6f(0)-4f(1)+f(2)\}$$

で与えられる。（ $t=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ ついて $\overline{f_4}(t)=f(t)$ となることを確かめよ）

（３）　与えられた区間の両端でもとの関数値をとり、かつ両端でもとの曲線と接線を同じくする３次曲線

区間〔 0，1 〕で $f(t)$ を近似する最も簡単な曲線は両端を結ぶ直線 (2.3.1) であるが、さらに両端における接線の方向すなわち $f'(0)$，$f'(1)$ が分っているとすると、次のような３次曲線がさらによい近似になると考えられる。

$$\overline{f_3}(t)=\overline{f_1}(t)+\beta_1 t-\beta_2 t^2+\beta_3 t^3 \qquad (2.3.5)$$

$$\beta_1=\{f(0)-f(1)\}+f'(0)$$

$$\beta_2=3\{f(0)-f(1)\}+2f'(0)+f'(1)$$

$$\beta_3=2\{f(0)-f(1)\}+f'(0)+f'(1)$$

この3次曲線については、$t=0, 1$ において $\bar{f}_3(t)=f(t)$, $\bar{f}'_3(t)=f'(t)$ となることが容易に確かめられるから、$\bar{f}_3(t)$ は区間〔0, 1〕の両端でもとの曲線と関数値および接線の方向を同じくする近似の曲線を与える。

もしこのような3次曲線による近似を区間〔0、1〕のみならず、〔1, 2〕,〔2, 3〕等について逐次施すと、各整数値について $f(t)$ に等しいだけでなく、それらの点で左からの近似も右からの近似も $f(t)$ と同じ接線の方向をもつので、広い区間で滑らかに結ばれた $f(t)$ の近似曲線が得られる。

（4）　区間〔0, 1〕で定義される単調な正値の関数 $f(t)$, $g(t)$ があり、かつ $f(t)$ は直線に近く、$g(t)$ は $g(0)-g(1)$ が極めて小さいものである時

$$\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \fallingdotseq f\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 g(t)\,dt \tag{2.3.6}$$

とすることが、保険数学でよく行われる。その時の誤差の程度を調べておこう。(2.3.6) の両辺の差は

$$\int_0^1 \left\{ f(t)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} g(t)\,dt$$

であるが、$f(t)-f\left(\frac{1}{2}\right)$ は $t<\frac{1}{2}$ と $t>\frac{1}{2}$ とで符号が異なり、かつ $f(t)$, $g(t)$ に関する仮定があることから、〔0, $\frac{1}{2}$〕における積分値と〔$\frac{1}{2}$, 1〕における積分値がかなりの程度相殺されることが予想される。それを数値で表わすため、この被積分関数を $F(t)$ とし、それを2次曲線 (2.3.3) で近似すると

$$F(0)=\left\{ f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} g(0)$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$F(1) = \left\{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} g(1)$$

であるので

$$\int_0^1 F(t)\,dt \fallingdotseq \int_0^1 - \{F(0) - F(1)\}\left(t - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$+ \int_0^1 2\{F(0) + F(1)\}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt$$

ここで $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = 0$ ，$\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}$ であるので

$$\int_0^1 F(t)\,dt \fallingdotseq \frac{1}{6}\{F(0) + F(1)\}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left\{f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} g(0) - \left\{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right\} g(1)\right] \quad (2.3.7)$$

この式から分かるように、$f(t)$ が直線に近く、$g(0)$ と $g(1)$ に差がなければ、誤差は小さい。あるいは $g(0)$ と $g(1)$ に少々差があっても $f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$ ，$f(1)$ が極めて接近した値であるときには、この誤差が小さい。

§４　死力

死亡表では l_x は x の整数値に対してのみ与えられているが、実際には途中でも継続的に単調に減少して行くと考えられる。ここでは l_x は区間〔０，ω〕において単調減少でかつ微分可能な関数と考えて議論を進める。従って x は必ずしも整数である必要はない。その場合にある微小な区間 Δt に関して $l_x - l_{x+\Delta t}$ をとると、これは x 歳と $x + \Delta t$ 歳との

間における死亡数を表わす。その死亡数を１年分に引き直すと

$\dfrac{l_x - l_{x+\Delta t}}{\Delta t}$ であり、それを期初の l_x で割ると、Δt における死亡状況が

１年続いた場合の死亡率が得られる。それは

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{l_x \Delta t}$$

であるが、ここで $\Delta t \to 0$ としたものが**死力**と呼ばれ μ_x で表わされる。すなわち

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-1}{l_x} \cdot \frac{l_{x+\Delta t} - l_x}{\Delta t} \tag{2.4.1}$$

$$= -\frac{1}{l_x} \frac{dl_x}{dx} \tag{2.4.2}$$

$$= -\frac{d \log l_x}{dx} \quad . \tag{2.4.3}$$

逆にこの μ_x を用いてこれまでに述べた生命確率を表現することもできる。すなわち（2.4.2）から $l_x \mu_x = -\dfrac{d\, l_x}{dx}$ であるので

$$d_x = l_x - l_{x+1} = \int_0^1 \left[-\frac{d\, l_{x+t}}{dt} \right] dt$$

$$= \int_0^1 l_{x+t}\, \mu_{x+t}\, dt \tag{2.4.4}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \int_0^1 {}_t p_x\, \mu_{x+t}\, dt \tag{2.4.5}$$

$${}_{f|}q_x = \frac{d_{x+f}}{l_x} = \frac{1}{l_x} \int_0^1 l_{x+f+t}\, \mu_{x+f+t}\, dt$$

$$= \int_f^{f+1} {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt. \qquad (2.4.6)$$

また（2.2.9）より

$${}_nq_x = \int_0^n {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt \qquad (2.4.7)$$

$${}_{f|r}q_x = \int_f^{f+r} {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt. \qquad (2.4.8)$$

死力に関してよく用いられる関係式をさらに列挙しておこう。

（1）

$$\mu_{x+t} = -\frac{1}{{}_tp_x} \frac{d \; {}_tp_x}{dt} \qquad (2.4.9)$$

何故ならば

$$\text{右辺} = -\frac{l_x}{l_{x+t}} \frac{d\left(\dfrac{l_{x+t}}{l_x}\right)}{dt} = -\frac{1}{l_{x+t}} \frac{d \, l_{x+t}}{dt}$$

（2）　（2.4.9）より不定積分で

$$\int {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt = -{}_tp_x \qquad (2.4.10)$$

（3）　（2.4.3）より

$$\int_0^n \mu_{x+t} \, dt = \left[-\log l_{x+t}\right]_0^n = -\log \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$= -\log {}_np_x \qquad (2.4.11)$$

であるから

$$ {}_np_x = e^{-\int_0^n \mu_{x+t}\,dt} \qquad (2.4.12) $$

特に $n=1$ の時は

$$ p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}\,dt} \qquad (2.4.13) $$

μ_x を定義する式は（2.4.1）等で判ったが、それでは実際に死亡表の中で見られる数値からその値を導くにはどうすればよいであろうか。

それには前節の諸式を利用して近似計算を行う。いま $f(t)=l_{x+t}$（ただし負の t も認める）とすれば

$$ f(-1)=l_{x-1}\ ,\ f(0)=l_x\ ,\ f(1)=l_{x+1} $$

であるので、(2.3.2) により曲線 l_{x+t} の近似として区間〔-1, 1〕で

$$ \overline{f}_2(t)=l_x-\frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2}t+\frac{l_{x-1}-2l_x+l_{x+1}}{2}t^2 $$

が得られる。$\dfrac{dl_x}{dx}$ の代わりに $\left[\dfrac{d\overline{f}_2(t)}{dt}\right]_{t=0}$ を用いて（2.4.2）に入れれば

$$ \mu_x \fallingdotseq -\frac{1}{l_x}\left[-\frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2}\right] $$

$$ =\frac{l_{x-1}-l_{x+1}}{2l_x}=\frac{d_{x-1}+dx}{2l_x} \qquad (2.4.14) $$

さらによい l_{x+t} の近似として（2.3.4）の $\overline{f}_4(t)$ を用い、$\dfrac{dl_x}{dx}$ の代わりに $\left[\dfrac{d\overline{f}_4(t)}{dt}\right]_{t=0}$ を使うと

$$\frac{dl_x}{dx} \fallingdotseq \left[\frac{d\overline{f}_2(t)}{dt} \right]_{t=0} + \alpha_1$$

$$= -\frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2} + \frac{1}{12}\{ l_{x-2} - 2l_{x-1} + 2l_{x+1} - l_{x+2} \}$$

$$= -\frac{1}{12}\{ 8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2}) \}$$

であるので

$$\mu_x \fallingdotseq \frac{1}{12l_x}\{ 8(d_{x-1} + d_x) - (d_{x-2} + d_{x-1} + d_x + d_{x+1}) \}$$

$$= \frac{1}{12l_x}\{ 7(d_{x-1} + d_x) - (d_{x-2} + d_{x+1}) \} \qquad (2.4.15)$$

死亡表の最小年齢付近の死力、例えば μ_0 については（2.4.14）によってその値を求めることができないが、 l_{1+t} を近似する $\overline{f}_2(t)$ を用いて $\left[\frac{d\overline{f}_2(t)}{dt} \right]_{t=-1}$ を求め、それを（2.4.2）に入れて計算式が得られる。その時は（2.3.2）より

$$\left[\frac{d\overline{f}_2(t)}{dt} \right]_{t=-1} = -\frac{l_0 - l_2}{2} + \frac{l_0 - 2l_1 + l_2}{2} 2(-1)$$

$$= -\frac{1}{2}(3\,l_0 - 4\,l_1 + l_2)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2l_0}(3l_0 - 4l_1 + l_2) = \frac{3d_0 - d_1}{2l_0} \qquad (2.4.16)$$

となる。しかし実際には新生児死亡率は出生直後で極端に高いため、生命表も例えば１週間おきに作られて、 $l_{7日}$, $l_{14日}$ 等の数値が与えられている。これらを用いた方が真実に近い値になると考えられるが、その時

は（2.4.16）の最終項の分子が $\dfrac{7}{365}$ 年間の d を用いていることになるので、それを1年分の d に直すと次のような式が得られる。

$$\mu_0 = \frac{365}{7}\ \frac{1}{2l_0}(3l_0 - 4l_{7日} + l_{14日}) \tag{2.4.17}$$

あるいは（2.3.3）を拡張して、$(0, f(0))$, $\left(\dfrac{k}{2}, f(\dfrac{k}{2})\right)$, $(k, f(k))$ を通る2次曲線をつくり、その曲線の $(0, f(0))$ における微分係数を計算して（2.4.2）に入れ、$k = \dfrac{14}{365}$ としても（2.4.17）が得られる。（読者で試みられたい）

次に、（2.4.14）では μ_x が d_x により近似計算されているが、逆に μ_x を用いて d_x を表現している（2.4.4）について右辺を近似計算してみよう。（2.4.4）の被積分関数を近似するため（2.3.3）で $f(x) = l_{x+t}\,\mu_{x+t}$ とすると

$$d_x \doteqdot \left[f\left(\frac{1}{2}\right) t \right]_0^1 - \left[\{f(0)-f(1)\}\left\{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}\right\}\right]_0^1$$

$$+\left[2\left\{f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\right\}\left\{\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+\frac{t}{4}\right\}\right]_0^1$$

$$= f\left(\frac{1}{2}\right) - 0 + \frac{1}{6}\left\{ f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right\}$$

$$= l_{x+\frac{1}{2}}\,\mu_{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}\left\{ l_x\,\mu_x - 2\,l_{x+\frac{1}{2}}\,\mu_{x+\frac{1}{2}} + l_{x+1}\,\mu_{x+1}\right\} \tag{2.4.18}$$

ここで $l_{x+\frac{1}{2}}\mu_{x+\frac{1}{2}}$ が $\dfrac{l_x\,\mu_x + l_{x+1}\,\mu_{x+1}}{2}$ にほぼ等しく、従って右辺の第2項が極めて小さいとみれば

$$d_x \doteqdot l_{x+\frac{1}{2}}\,\mu_{x+\frac{1}{2}} \tag{2.4.19}$$

§5　平均余命

x 歳に到達した者がその後生存する年数の平均を x 歳の**平均余命**あるいは**完全平均余命**といい、$\mathring{e}_x$ で表わす。(§1冒頭の生命表を参照) また生存する年数の端数を切捨てて平均したものを**略算平均余命**といい、e_x で表わす。$\mathring{e}_0$ は特に**平均寿命**とも言われる。

l_x 人のうち t 年後（t は整数）から1年以内に死亡する者の数は d_{x+t} であるから

$$e_x = \frac{1}{l_x}\{\,0\,d_x + 1\,d_{x+1} + 2\,d_{x+2} + \cdots\cdots\}$$

$$= \frac{1}{l_x}\{\,1(l_{x+1} - l_{x+2}) + 2(l_{x+2} - l_{x+3}) + \cdots\cdots\}$$

$$= \frac{1}{l_x}(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots + l_\omega) \tag{2.5.1}$$

$$= p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \cdots\cdots \tag{2.5.2}$$

また μ_x の定義式（2.4.1）から $l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$ は年齢 $x+t$ の直後の死亡数を表わすので、彼らの生存年数の和 $t\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$ を t について合計して l_x で割ったものが $\mathring{e}_x$ となる。すなわち

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} t\,l_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt \tag{2.5.3}$$

$$= \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} t\left(-\frac{d\,l_{x+t}}{dt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{l_x}\left\{\left[-t\,l_{x+t}\right]_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,dt\right\}$$

$$= \frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,dt \qquad (2.5.4)$$

$$= \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt \qquad (2.5.5)$$

$\mathring{e}_x$の場合には、t年後（$t=0,\ 1,\ 2\cdots$）から1年間の死亡者についてe_xの場合より平均$\dfrac{1}{2}$歳長く生存を考えているとみなせるので、近似式として

$$\mathring{e}_x \fallingdotseq e_x + \frac{1}{2} \qquad (2.5.6)$$

が通常用いられる。あるいは区間〔0，1〕におけるl_{x+t}の近似値が（2.3.1）で与えられるとすると

$$l_{x+t} \fallingdotseq f(0) - \{f(0) - f(1)\}t$$

$$= l_x - (l_x - l_{x+1})t \qquad (2.5.7)$$

従って

$$\int_0^1 l_{x+t}\,dt \fallingdotseq \left[l_x t\right]_0^1 - \left[(l_x - l_{x+1})\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

$$= l_x - \frac{l_x - l_{x+1}}{2} = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} \qquad (2.5.8)$$

となる。区間〔1，2〕等についても同様の近似で$\dfrac{l_{x+1}+l_{x+2}}{2}$等が得られるので、（2.5.4）より

$$\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\left[\frac{l_x + l_{x+1}}{2} + \frac{l_{x+1}+l_{x+2}}{2} + \cdots\cdots\right]$$

となり、（2.5.1）を用いてやはり（2.5.6）が得られる。

さらに精密に$\mathring{e}_x$を計算するには、（2.3.5）を利用する。すなわち区

間 $0 \leqq t \leqq 1$ における l_{x+t} の近似値が（2.3.5）で与えられるとするが、その際

$$f'(0) = \left[\frac{d\,l_{x+t}}{dt}\right]_{t=0} = -l_x \mu_x$$

$$f'(1) = \left[\frac{d\,l_{x+t}}{dt}\right]_{t=1} = -l_{x+1} \mu_{x+1}$$

である。従って

$$l_{x+t} \fallingdotseq l_x - (l_x - l_{x+1})t + \beta_1 t - \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3 \qquad (2.5.9)$$

$$\beta_1 = (l_x - l_{x+1}) - l_x \mu_x$$

$$\beta_2 = 3(l_x - l_{x+1}) - 2l_x \mu_x - l_{x+1} \mu_{x+1}$$

$$\beta_3 = 2(l_x - l_{x+1}) - l_x \mu_x - l_{x+1} \mu_{x+1}$$

となり

$$\int_0^1 l_{x+t}\,dt \fallingdotseq \frac{l_x + l_{x+1}}{2} + \left[\frac{\beta_1 t^2}{2} - \frac{\beta_2 t^3}{3} + \frac{\beta_3 t^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{l_x + l_{x+1}}{2} - \frac{l_x \mu_x - l_{x+1} \mu_{x+1}}{12} \qquad (2.5.10)$$

となる。区間〔１，２〕等についても同様の近似で

$$\int_1^2 l_{x+t}\,dt \fallingdotseq \frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{2} - \frac{l_{x+1} \mu_{x+1} - l_{x+2} \mu_{x+2}}{12}$$

等が得られるので、（2.5.4）を用いて次式が得られる。

$$\mathring{e}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} \frac{l_{x+t} + l_{x+t+1}}{2\,l_x}$$

$$- \frac{1}{12\,l_x}\{l_x \mu_x - l_{x+1} \mu_{x+1} + l_{x+1} \mu_{x+1} - l_{x+2} \mu_{x+2} + \cdots\cdots\}$$

$$= e_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\mu_x \qquad (2.5.11)$$

ただし $\mathring{e}_0$ については0歳から1歳の間の l_x の変化が激しいので別の工夫が必要である。例えば $l_{7日}$, $l_{14日}$ 等が与えられている場合には、$l_0 - l_{7日}$ に入る死亡者についての平均寿命は $\frac{3.5}{365}$ 、$l_{7日} - l_{14日}$ に入る死亡者についての平均寿命は $\frac{10.5}{365}$ 等として、次のような式が用いられる。

$$\mathring{e}_0 = \frac{1}{l_0}\int_0^\infty l_t\,dt$$

$$= \frac{1}{l_0}\left\{\frac{3.5}{365}(l_0 - l_{7日}) + \frac{10.5}{365}(l_{7日} - l_{14日}) + \cdots\cdots\right\}$$

$$+ \frac{1}{l_0}\int_1^\omega l_t\,dt \qquad (2.5.12)$$

次に x 歳に到達した者を n 年間の観察期間で見た場合の生存年数（この場合 n 年後の生存者はすべて生存年数 n とする）の平均を**定期平均余命**という。この時も略算平均余命と完全平均余命とがあり、それぞれは上記と類似に

$${}_ne_x = \frac{1}{l_x}(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots + l_{x+n}) \qquad (2.5.13)$$

$$= p_x + {}_2p_x + \cdots\cdots + {}_np_x \qquad (2.5.14)$$

$${}_n\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_0^n l_{x+t}\,dt \qquad (2.5.15)$$

$$= \int_0^n {}_tp_x\,dt \qquad (2.5.16)$$

で与えられる。また n 年後の生存者の生存年数のみを考える場合（すなわち n 年内の死亡者の生存年数はすべて 0 とする）には**据置平均余命**というが、これは

$$ {}_{n|}e_x = \frac{1}{l_x}(l_{x+n+1} + l_{x+n+2} + \cdots\cdots) \tag{2.5.17} $$

$$ = {}_{n+1}p_x + {}_{n+2}p_x + \cdots\cdots \tag{2.5.18} $$

$$ = {}_np_x\, e_{x+n} \tag{2.5.19} $$

$$ {}_{n|}\mathring{e}_x = \frac{1}{l_x}\int_n^{\omega-x} l_{x+t}\, dt \tag{2.5.20} $$

$$ = \int_n^{\omega-x} {}_tp_x\, dt \tag{2.5.21} $$

$$ = {}_np_x\, \mathring{e}_{x+n} \tag{2.5.22} $$

で与えられる。この場合明らかに次式が成立する。

$$ e_x = {}_ne_x + {}_{n|}e_x $$

$$ \mathring{e}_x = {}_n\mathring{e}_x + {}_{n|}\mathring{e}_x $$

第2章　練習問題（1）

（1）　付録2の第5回全会社表を用いて、30歳の男子（および女子）について次の値を計算せよ。

（a）　40歳まで生存する確率

（b）　50歳までに死亡する確率

（c）　49歳と50歳の間で死亡する確率

（d）　40歳と50歳の間で死亡する確率

（2）　次式を証明せよ。

（a）　$${}_{n}p_{x} = \frac{{}_{n}p_{x} - {}_{n+1}p_{x}}{q_{x+n}}$$

（b）　$${}_{n}p_{x} = {}_{n+m}p_{x} + {}_{n|m}q_{x}$$

（3）　l_x が直線的に減少し

$$l_x = k(86 - x) \qquad (k \text{ は定数})$$

である場合には

$$d_x = k \ , \ p_x = \frac{85 - x}{86 - x} \ , \ q_x = \frac{1}{86 - x}$$

となることを示せ。

（4）　第5回全会社表（男子）を用いて μ_{20} および μ_0 を計算せよ。

（５）　(2.4.14) を用いて次の証明をせよ。

（ａ）　$\mu_x \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q_{x-1}}{p_{x-1}} + q_x\right)$

（ｂ）　$d_{x-1} \gtreqless d_x$ に従って $\mu_x \gtreqless q_x$ となる。

（６）$\displaystyle\int_0^1 \mu_{x+t}\,dt \fallingdotseq \mu_{x+\frac{1}{2}}$ と考えて次式を証明せよ。

（ａ）　$q_x \fallingdotseq \mu_{x+\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{1}{2}\mu_{x+\frac{1}{2}}\right)$

（ｂ）　$\mu_{x+\frac{1}{2}} \fallingdotseq q_x\left(1 + \dfrac{q_x}{2}\right)$

（７）　$l_x \mu_x$ が x の増加関数であれば $\mu_x < q_x$ であることを証明せよ。

（８）　μ_x が x の増加関数であれば

$$q_{x-1} < \mu_x < \frac{q_x}{p_x}$$

となることを証明せよ。

（９）　第１の生命表の死力 μ_x と第２の生命表の死力 μ'_x との間に常に $\mu'_x = 2\mu_x$ という関係があるとき、q'_x と $2\,q_x$ とはどんな大小関係にあるか。（問題（６），（ａ）の結果を用いる）

（１０）　現在 x 歳の者が最終年齢までには全員が死亡することを意味

する次の式を証明せよ。

（ａ）　$q_x + p_x\, q_{x+1} + {}_2p_x\, q_{x+2} + \cdots\cdots = 1$

（ｂ）　$\int_0^{\omega-x} {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt = 1$　　（（2.4.7）参照）

（１１）　a が100に近い定数で

$$\mu_x = \frac{1}{a - x} \qquad (0 \leqq x \leqq a)$$

であるとき、l_x はどんな式となるか。またそのとき

$$q_x = \frac{2\,\mu_{x+\frac{1}{2}}}{2 + \mu_{x+\frac{1}{2}}}$$

であることを示せ。

（１２）　前問で

$$\mu_x = \frac{k}{a - x} \qquad (\ k\ は比例定数)$$

のときには、l_x および $\mathring{e}_x$ はどんな式になるか。

（１３）　s の関数 ${}_{t+s}p_x$（ $0 \leqq s \leqq 1$ ）を（2.3.5）で与えられる３次曲線で近似すると

$${}_{t+\frac{1}{2}}p_x \fallingdotseq \frac{{}_tp_x + {}_{t+1}p_x}{2} - \frac{{}_tp_x\, \mu_{x+t} - {}_{t+1}p_x\, \mu_{x+t+1}}{8}$$

となることを示せ。

（１４）　第５回全会社表の男子および女子について、e_{20}，$\mathring{e}_{20}$，e_0，$\mathring{e}_0$，${}_{20}e_0$および${}_{20}\mathring{e}_0$を計算せよ。ただし男子については

$\sum_{x=21}^{105} l_x = 5,560,119$ $\sum_{x=1}^{105} l_x = 7,548,736$ であり、女子については

$\sum_{x=21}^{109} l_x = 6,165,302$ $\sum_{x=1}^{109} l_x = 8,156,306$ である。

（１５）　$$e_x = p_x(1 + e_{x+1})$$

を証明せよ。

（１６）　$$\frac{d\ {}_tp_x}{dx} = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$$

を証明し、これを用いて

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx} = \mu_x\,\mathring{e}_x - 1\text{，従って}\quad \mu_x = \frac{1}{\mathring{e}_x} + \frac{1}{\mathring{e}_x}\ \frac{d\mathring{e}_x}{dx}$$

となることを示せ。

（１７）　（2.5.11）に似た次の近似式を証明せよ。

$${}_n\mathring{e}_x = {}_ne_x + \frac{1}{2}(1 - {}_np_x) - \frac{1}{12}(\mu_x - {}_np_x\,\mu_{x+n})$$

（１８）　$q_x \leqq q_{x+1} \leqq q_{x+2} \leqq \cdots\cdots\cdots$のときには

（ａ）　$e_x \geqq e_{x+1} \geqq e_{x+2} \geqq \cdots\cdots\cdots$

（ｂ）　$e_x \leqq \dfrac{p_x}{q_x}$

となることを示せ。

（１９）　t の区間〔０，n〕において ${}_tp_x\,\mu_{x+t}$ が t の１次関数で表わされ

$${}_tp_x\,\mu_{x+t} = a + bt$$

となるとき、(a) q_x (b) μ_{x+1} (c) ${}_n\mathring{e}_x$ はどうなるか。

§６　生命表が表わす開集団

これまでは同時に出生した l_0 人の**閉集団**（新規加入のない集団）が時の経過とともに減少して行く状態を表現するものが生命表であると考えてきた。しかし生命表をもとにして次のような**開集団**（新規加入のある集団）を考えることができる。すなわちある発足時点で、ちょうど０歳の者が l_0 人、ちょうど１歳の者が l_1 人、ちょうど２歳の者が l_2 人・・・・・いるような開集団を考える。死亡表の表わすような死亡率がこの集団に実現すると、次の１年間の総死亡数は

$$d_0 + d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{\omega-1} = l_0$$

となるが、それに応ずるだけの人数がちょうど１年後に同時に出生して集団に加わるとすると、この集団の年齢構成は１年前と同じである。このような死亡・出生が繰り返されれば、この開集団の整数年数経過後の年齢分布状況は常に死亡表の l_x 欄によって与えられる。このように年齢構成が時の経過にかかわらず一定不変である開集団を**定常状態**にあるという。l_0 人出生直後のこの集団の総人口は $l_0 + l_1 + l_2 + \cdots\cdots + l_\omega$ となる。

しかし l_0 人がちょうど同じ時刻に出生するというのも不自然なので、l_0 人が１年を通じて一様に出生する場合を考えてみよう。その時は期間 $\varDelta t$ の間に出生する者の数は $l_0\varDelta t$ であり、死亡についても一様に分布しているとすると、$\varDelta t$ の間に死亡する者の総数は $(d_0 + d_1 + \cdots\cdots + d_{\omega-1})\varDelta t = l_0\varDelta t$ である。従ってこの集団は常に同数の出生、死亡を繰り返し、かつ年齢分布も常に同じで、定常状態にある。年齢分布は死亡表の l_x が表わす連続な関数で与えられる。

この開集団において、任意のある時点で、年齢が x と $x+1$ との間にある者の総数 L_x を求めてみよう。ある時刻に出生した $l_0\varDelta t$ 人のうち

年齢が$x+t$（$0 \leqq t < 1$）になっている者の数は$l_{x+t}\,\varDelta t$であるから、その総数は

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt \tag{2.6.1}$$

となる。またx歳以上の人口をT_xとすれば

$$T_x = \sum_{t=x}^{\omega-1} L_t = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, dt \tag{2.6.2}$$

で、特に総人口は

$$T_0 = \int_0^{\omega} l_t\, dt \tag{2.6.3}$$

である。l_{x+t}が$0 \leqq t < 1$で直線と仮定すると、(2.5.8) と同じ計算で

$$L_x \fallingdotseq l_x - \frac{1}{2}d_x = \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) \fallingdotseq l_{x+\frac{1}{2}} \tag{2.6.4}$$

となり、従って

$$T_x \fallingdotseq \sum_{t=x}^{\omega-1}\frac{1}{2}(l_x + l_{x+1}) = \frac{1}{2}l_x + \sum_{t=x+1}^{\omega-1} l_t \tag{2.6.5}$$

となる。またl_{x+t}を3次曲線で近似する時は（2.5.10）により

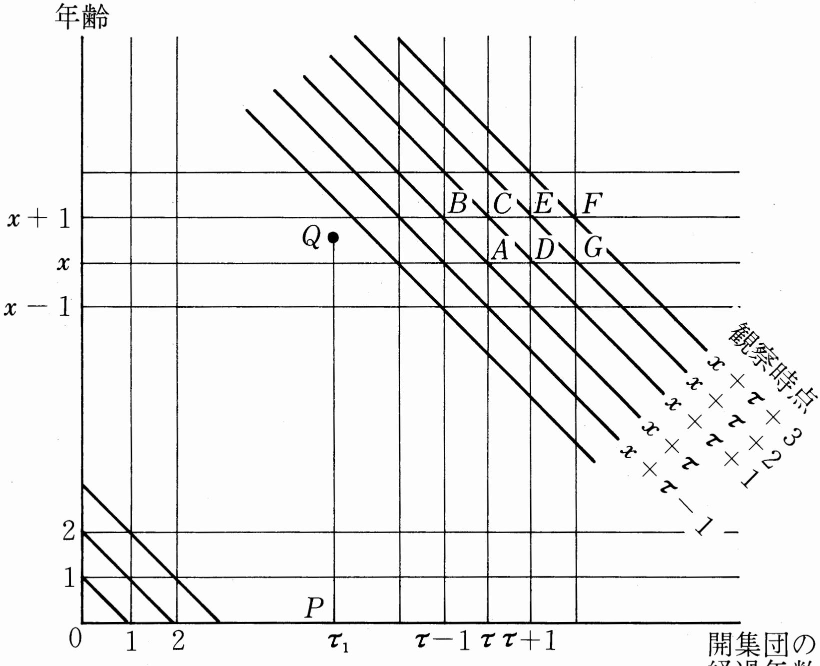
$$L_x \fallingdotseq \frac{l_x + l_{x+1}}{2} - \frac{l_x\mu_x - l_{x+1}\mu_{x+1}}{12} \tag{2.6.6}$$

となる。従ってこの時は

$$T_x \fallingdotseq \frac{1}{2}l_x + \sum_{t=x+1}^{\omega-1} l_t - \frac{l_x\mu_x}{12} \tag{2.6.7}$$

ここで、開集団の時間的経過を考える時によく用いられる図表（**レキシスの図示法**（W. Lexis））を示そう。次の図表がそれであるが、こ

の図において、原点は開集団の出発点である特定の時点を表わし、横軸はその時点からの経過を１年を単位に表わす。また縦軸は年齢を表わす。そして時刻 τ_1 に出生した一つの生命が $x+\dfrac{1}{2}$ 歳まで生存して死亡した時には、この生命に対し図の線分 PQ のような τ_1 から垂直に立って $x+\dfrac{1}{2}$ まで続く線分を付与し、これを彼の生命線と呼ぶ。また Q を彼の死亡点と呼ぶ。



また図には、観察時点と書いて斜めに45度で交わる直線をいくつか引いているが、それは次のような意味のものである。例えば τ で出生した者が x 歳になったとすれば、その時点は原点からみて $x+\tau$ 経過しており、彼の生命線は A 点にある。同様に $\tau-1$ で出生した者が $x+1$ 歳に

到達すれば、その時点は原点から $x+\tau$ の経過であり、彼の生命線はB点にある。このことから判るように、A ，Bを通る斜めの直線と交わる生命線は、この観察時点 $x+\tau$で生存している者を表わす。従ってこの直線と交わる生命線の数によって、時点$x+\tau$における生存者数が把握される。特に線分ABと交わる生命線は、観察時点 $x+\tau$で年齢が xと $x+1$との間にある者を表わす。また▱$ABCD$内に死亡点のある者は、$x+\tau$から1年間観察している間に年齢が xと $x+1$との間で死亡した者を表わす。

さて（2.6.1）を得たような開集団を考えると、これは図の横軸上で生命線が1年間に l_0 の割合で均等に分布して発生するような開集団であり、従って横軸上の短い期間 Δt の中にある生命線の数は $l_0 \Delta t$ である。かつこの数は上に行くに従い死亡表が示すとおりに減少して行き、年齢 $x+t$（$0 \leqq t \leqq 1$）を表わす横線の上では $l_{x+t}\Delta t$ になっている。従って（2.6.1）の $L_x=\int_0^1 l_{x+t}\,dt$ は線分AB上の生命線の数を求めたことになる。

この開集団について、ある観察年度（$x+\tau$ から $x+\tau+1$ までとする）において、x 歳と $x+1$ 歳との間で死亡する者の総数は△ADCと△ABC の中における死亡点の数である。上に述べたように $l_0 \Delta t$ のうち x 歳と $x+t$ 歳との間で死亡する者の数は $l_x \Delta t - l_{x+t}\Delta t$ であるから、求める死亡者の総数は

$$\int_0^1 (l_x - l_{x+t})\,dt + \int_0^1 (l_{x+t} - l_{x+1})\,dt$$

$$= \int_0^1 l_x\,dt - \int_0^1 l_{x+1}\,dt = l_x - l_{x+1} = d_x \tag{2.6.8}$$

となり、死亡表の d_x に一致する。このことは定常状態ということから

も想像されるところである。

次にそのような死亡者の平均年齢を求めよう。上記の$l_x \Delta t - l_{x+t} \Delta t$に当たる者の死亡時年齢の総和は

$$\left[\int_0^t (x+s) l_{x+s} \mu_{x+s} ds \right] \Delta t$$

であるから、$\triangle ADC$と$\triangle ABC$に関するこれらの和を求めると、死亡者の年齢の総和は

$$\int_0^1 \left[\int_0^t (x+s) l_{x+s} \mu_{x+s} ds \right] dt + \int_0^1 \left[\int_t^1 (x+s) l_{x+s} \mu_{x+s} ds \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^t + \int_t^1 \right] = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x+s) l_{x+s} \mu_{x+s} ds \right] dt$$

$$= \int_0^1 (x+s) l_{x+s} \mu_{x+s} ds \qquad (2.6.9)$$

となり、平均年齢はこれをd_xで割ったものである。

一方、生命表(閉集団を表わす)に基づけば（2.4.4）のとおり

$$d_x = \int_0^1 l_{x+s} \mu_{x+s} ds$$

であり、x歳と$x+1$歳の間で死亡する者の平均年齢は

$$\int_0^1 (x+s) l_{x+s} \mu_{x+s} ds \Big/ \int_0^1 l_{x+s} \mu_{x+s} ds \qquad (2.6.10)$$

である。これは定常状態開集団の場合のそれと一致する。

このような定常状態開集団について、ある観察年度におけるx歳以上の死亡者の総数は

$$d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_{\omega-1} = l_x \qquad (2.6.11)$$

であり、彼らの平均年齢は（2.6.9）を用いて

$$\frac{1}{l_x}\int_0^{\omega-x}(x+s)\,l_{x+s}\,\mu_{x+s}\,ds$$

となるが、平均余命の定義（2.5.3）より、これは

$$\frac{1}{l_x}x\,l_x+\mathring{e}_x=x+\mathring{e}_x \tag{2.6.12}$$

に等しい。特に $x=0$ とすると、開集団の1年間の全死亡者の平均年齢が $\mathring{e}_0$ となり、生命表(閉集団)から計算した平均寿命と一致する。すなわちこのような定常状態開集団の場合に限って、平均寿命の素朴な解釈(全死亡者の死亡時年齢の平均)が死亡表の平均寿命と一致する。

またこのような開集団については、ある観察年度における x 歳以上の死亡者の総数は（2.6.11）により l_x であるから、年初の x 歳以上の生存者の総数 T_x に対するその割合、すなわち x 歳以上でみた観察死亡率は $\dfrac{l_x}{T_x}$ となる。一方生命表から計算した $\mathring{e}_x$ は（2.5.4),（2.6.2）により

$$\mathring{e}_x=\frac{T_x}{l_x} \tag{2.6.13}$$

であるから、観察死亡率は $\dfrac{1}{\mathring{e}_x}$ であると言える。特に $x=0$ の場合、すなわち総人口死亡率は $\dfrac{1}{\mathring{e}_0}$ である。

次に、x 歳以上で死亡する者の死亡年齢の合計は（2.6.12）を用いて $l_x(x+\mathring{e}_x)$ で表わされるが、同じく $x+n$ 歳以上で死亡する者の死亡年齢の合計は $l_{x+n}(x+n+\mathring{e}_{x+n})$ で表わされる。従って x 歳と $x+n$ 歳の間で死亡する者の死亡年齢の合計は（2.6.13）を用いて

$$\begin{aligned}&l_x(x+\mathring{e}_x)-l_{x+n}(x+n+\mathring{e}_{x+n})\\&=x\,l_x-(x+n)\,l_{x+n}+T_x-T_{x+n}\end{aligned}$$

となり、この間の死亡者総数$l_x - l_{x+n}$で割って平均年齢を求めると

$$\frac{x(l_x - l_{x+n}) - nl_{x+n} + T_x - T_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$$

$$= x + \frac{T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}}{l_x - l_{x+n}} \tag{2.6.14}$$

国民の人口等の統計から死亡率を計算する場合には、本節の図の線分AB上の生存者数と▱$ABCD$中の死亡者数とが調査の集計によって把握される。国民がある死亡表に従う定常状態開集団であれば、上記に説明したところにより、これはL_xとd_xを観察したことになる。そこで観察値$\dfrac{d_x}{L_x}$と、もとの死亡率q_xとの関係をみておく必要がある。

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} \tag{2.6.15}$$

は**中央死亡率**と言われるが、(2.6.4) と (2.1.4) より

$$m_x = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x} = \frac{q_x}{1 - \frac{q_x}{2}}$$

これを解いて次式が得られる。

$$q_x = \frac{2m_x}{2 + m_x} = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x} \tag{2.6.16}$$

$$p_x = 1 - q_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x} \tag{2.6.17}$$

次に年齢毎にではなく、年齢群団で観察をする場合を考えよう。この時観察されるのは年初において年齢がx歳以上$x+n$歳までの者の数$L_x + L_{x+1} \cdots\cdots + L_{x+n-1}$と、1年間に$x$歳以上$x+n$歳未満で死亡す

る者の数 $d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_{x+n-1}$ とである。この年齢群団についての中央死亡率は

$$
{}_nm_x = \frac{d_x + d_{x+1} + \cdots\cdots + d_{x+n-1}}{L_x + L_{x+1} + \cdots\cdots + L_{x+n-1}} = \frac{l_x - l_{x+n}}{\int_0^n l_{x+t}\,dt}
$$

となるが、l_{x+t}（$0 \leqq t \leqq n$）がほぼ直線と仮定すると

$$
\int_0^n l_{x+t}\,dt = l_x n - \frac{1}{2}(l_x - l_{x+n})n
$$

であるので、上記の分母と分子を l_x で割ると（2.2.3）の ${}_nq_x$ を用いて

$$
{}_nm_x = \frac{{}_nq_x}{n\left(1 - \frac{1}{2}\,{}_nq_x\right)} \tag{2.6.18}
$$

が得られる。またこれを解けば

$$
{}_nq_x = \frac{n\,{}_nm_x}{1 + \frac{n}{2}\,{}_nm_x} \tag{2.6.19}
$$

国民に関する生命表を作成する時には、まず統計によって m_x を計算し、次に（2.6.16）によって観察値 m_x から q_x を求める。ただし実際にはこのようにして求めた q_x は、それを年齢順に並べてみると、まだ凹凸があるので、それを均して滑らかな数列 q_0 ，q_1 ，q_2 ，………を算出する。（そのような修正を**補整**という（注））その上で l_0（例えば100,000）を与えて（2.1.6）と（2.1.1）〔または（2.1.5)〕を繰り返し用いて l_1 ，l_2 ，……を算出して行き、生命表が作成される。

（注）　生命表の作成あるいは補整については本書でとりあげないが、例えば文献〔8〕が詳しい。

ただしこれは国民表作成についてのごく原則的な手順を述べたものである。実際問題では、定常状態の社会でないための修正など、いろいろ細かい配慮が加えられる。また簡易生命表では、このままの方法でなく、例えば5歳年齢群団のように年齢範囲を拡げて観察が行われる。詳しくは各国民生命表にその作成過程が記載されているので参照されるとよい。

経験生命表に記載される死亡率の作成については、第3章§2で作成方法の原則的な過程を述べる。

§7　死亡法則

本章§1の終わりに q_x や l_x の曲線のグラフを描いたが、生命表の生命関数 l_x ，q_x あるいは μ_x に x の関数としての数式を与えたものを**死亡法則**と言っている。数学的あるいは生物学的興味にとどまらず、ある種の法則については生命に関する各種の価格を簡単に算出できるという実用性もある。

最も古くは1725年ドゥ・モワーブル（de Moivre）が、生存数は等差数列的に減少すると考えて

$$l_x = l_0 \frac{86-x}{86} \tag{2.7.1}$$

とした。このときは（2.4.2）により死力は $\mu_x = \dfrac{1}{86-x}$ となり、年齢が上がるにつれて大きくなる。また ${}_tp_x = \dfrac{86-x-t}{86-x}$ を用いて、生命年金の計算（(4.3.8)を参照）を当時としては比較的簡単に行える利点があった。

その後多くの学者により l_x ，q_x あるいは μ_x の曲線によくあてはまるような関数形についてさまざまの提案がなされたが、有名なのは次の2つである。第1は1825年にゴムパーツ（B. Gompertz）が発表したもの

で、彼は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -h\frac{1}{\mu_x} \qquad (2.7.2)$$

と仮定した。これは $\dfrac{1}{\mu_x}$ が「死を免れる力」を表わすと考え、その衰え方は、その力自身に比例するとしたものである。(2.7.2) を解くと

$$log\left(\frac{1}{\mu_x}\right) = -hx - logB \qquad (-\,logB\text{ は積分定数})$$

となり、$h = log\,c$ と考えると

$$\mu_x = Bc^x \qquad (2.7.3)$$

となる。従ってゴムパーツの仮定は死力が幾何級数的に増大することを表わすとも言える。さらに (2.4.3) を (2.7.3) に入れると

$$-\frac{d\,log\,l_x}{dx} = Bc^x$$

$$log\,l_x = -\frac{Bc^x}{log\,c} + log\,k \qquad (log\,k\text{ は積分定数})$$

$$= c^x\,log\,g + log\,k \qquad \left(\text{ただし } log\,g = -\frac{B}{log\,c}\right)$$

$$l_x = k\,g^{c^x} \qquad (2.7.4)$$

となる。(2.7.3) あるいは (2.7.4) は**ゴムパーツの法則**とよばれる。ここでの積分定数 k は生命表の基数 l_0（年齢 x から上のみ考えるときは l_x）から定まる。すなわち

$$log\,l_0 = -\frac{B}{log\,c} + log\,k = log\,g + log\,k$$

より $k = \dfrac{l_0}{g}$ であり、g と c は生命表に固有のものとして定まる。この

場合は（2.7.4）より ${}_tp_x = g^{c^x(c^t-1)}$ である。

次いで1860年にメーカム（W. M. Makeham）はゴムパーツの法則を修正して、(2.7.3) のかわりに

$$\mu_x = A + Bc^x \qquad (2.7.5)$$

とすればさらによく実際の生命表に適合することを示した。

$$A = -\log s \ , \ \log g = -\frac{B}{\log c}$$

として、これを解けば

$$\log l_x = \log k + x \log s + c^x \log g \qquad (\log k \text{ は積分定数})$$

従って

$$l_x = k\, s^x g^{c^x} \qquad (2.7.6)$$

$${}_tp_x = s^t g^{c^x(c^t-1)} \qquad (2.7.7)$$

となる。(2.7.5) あるいは (2.7.6) は**メーカムの法則**と呼ばれる。(2.7.6) は 50 歳位から上の年齢に対して特によく当てはまる。そのため逆に粗死亡率を補整する場合に、観測値からパラメーター k，s，g，c を定めて、補整死亡率をこの曲線に乗せてしまうこともよく行われる。s，g，c は**メーカム定数**と呼ばれるが、これらの定数の大きさは、50～60歳以後の年齢にこの法則を適用する場合、通常

$$0.001 < A < 0.003 \ , \ 10^{-6} < B < 10^{-3} \ , \ 1.08 < c < 1.12$$

従って

$$0.997 < s < 0.999 \ , \quad 0.85 < g < 0.99999$$

といった範囲にある。（文献〔7〕P.29による）

後に第１２章で述べるように、メーカムの法則を仮定すると連生生存確率や連生年金の計算を簡便に行うことができる。この法則はそのような実用上の利点も備えている。

その他にも種々の死亡法則の提案があるが、次に重要と思われるものをいくつか挙げておこう。

二重幾何級数（Lazarus ,1867）：　$\mu_x = A + Bc^x + Mn^x$

メーカムの第2法則（1889）：　$\mu_x = A + Hx + Bc^x$

Perks（1931）　：　$\mu_x = \dfrac{A + Bc^x}{Kc^{-x} + 1 + Dc^x}$

Perksの式を変形したものがイギリス国民生命表（English Life Table）の補整に用いられている。その No.11 と No.12 では

$$m_x = a + \frac{b}{1 + exp\{-2(x - x_1)\}} + c\ exp\{-\beta(x - x_2)^2\}$$

によって補整が行われた。またイギリスの被保険者生命表（1967－70）では Barnett が与えた式

$$q_x = \frac{A - Hx + Bc^x}{1 + A - Hx + Bc^x}$$

が補整に用いられている。この式は $\dfrac{q_x}{p_x} = A - Hx + Bc^x$ から導かれている。おおざっぱに $\mu_x \fallingdotseq \dfrac{q_x}{p_x}$ と考えて、この式のように μ_x のかわりに $\dfrac{q_x}{p_x}$ に類似の数式を与えることもよく行われる。例えば Heligman & Pollard はオーストラリア国民生命表（1960－62）の補整にあたって全年齢に適合する式として

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)c} + D\ exp\{-E(log\ x - log\ F)^2\} + GH^x$$

を用いた。(なお文献〔1〕および〔8〕にはさらにいくつかの法則が記載されている)

第２章　練習問題（２）

（１）　第５回全会社表（男子）で表わされる定常社会について L_{20}, T_{20}, L_0, T_0を計算せよ。（本章、練習問題（１）の（１４）を参照）

（２）　定常社会で100,000人の人口に対し、毎年1,387人の死亡がある。死亡者の平均年齢を求めよ。

（３）　ある定常社会で、１年間の死亡数が4,000、出生率（総人口に対する出生数の比）が２％であり、また年齢25歳までの人口が総人口の40％で、かつ25歳未満で死亡する者の平均年齢は2.5歳である。

出生時の平均余命、毎年25歳に達する人口および25歳以上での総人口死亡率を計算せよ。

（４）　ある団体を組織し、毎年10,000人が一様に入ってくるようにした。加入者はすべて40歳で加入し、以後第５回全会社表（男子）に従って死亡して、60歳になればすべて退会するものとする。

（ａ）　この団体は20年経過すれば定常状態に到達するが、その時の人数はどうなるか。

（ｂ）　定常状態に到達した後、ある時点で40歳から50歳の間にある者が60歳までに死亡する割合を求めよ。

（５）　今まで定常状態にあった人口の出生数がある年から毎年１％ずつ増加し始めた。この増加が始まった年の１年目、２年目、３年目の終

わりにおける人口を求めよ。

（6）　前問において、定常状態にあった時代の6歳以上12歳未満の児童数は A であったとする。

（a）　出生数が増加し始めてから10年後および20年後における児童数は何人か。

（b）　20年後までの12歳到達者の総数は何人か。

（7）　人口が定常状態にあったある国家で、出生数が毎年等比数列的に減少し始めた。65歳以上人口の、20歳以上60歳未満人口に対する比を、定常状態時、減少し始めて30年後、60年後および90年後について、それぞれ求めよ。

（8）　$m_{55}=0.00743$,　$m_{56}=0.00801$,　$m_{57}=0.00863$,　$m_{58}=0.00929$,　$m_{59}=0.01002$ が観測された。その時 $l_{55}=30{,}000$ として l_{56} ,………, l_{60} を計算せよ。

（9）　$q_x<m_x<\dfrac{q_x}{p_x}$　を証明せよ。

（10）　死亡が年間を通じて一様に発生する時は

$$\mu_{x+\frac{1}{2}}=m_x$$

となることを証明せよ。

（11）　第5回全会社表（男子）が高年齢の部分においてメーカムの法則（2.7.6）に従って作成されていることが判っているとする。l_{60} ,

l_{70} ， l_{80} ， l_{90} の値から定数 c を算定せよ。続いて g ， s ， k を算定せよ。(対数計算には関数電卓が便利である)

（１２）　第１の生命表はゴムパーツの法則に従い、第２の生命表はその死力が第１の生命表の死力の２倍になるように作成されている。第２の生命表の ${}_np_x^{(2)}$ は、第１の生命表の ${}_np_{x+a}^{(1)}$（a は正の定数）に等しくなることを証明し、かつ a の値を定めよ。

第３章　脱退残存表

§1　被保険者集団および脱退残存表

第２章§１で述べた生命表は、同時に生まれた l_0 人の集団が死亡によって減少して行く状況を表わすものであった。この集団の構成員は生存という属性を持ち、それを失うこと（死亡）によって集団を離脱する。

このようにその範囲を明確に定義づけられた人達のうち所定の属性を持つ者の集団を生命保険や社会保険で考える時に、それを**被保険者集団**という。例えば、生命保険では、ある保険種類で、ある事業年度に契約した同一年齢者の全員を一つの被保険者集団と考えることがよくある。退職年金基金では、ある会社の従業員のうち所定の加入資格を満たした者全員が一つの被保険者集団である。またわが国の厚生年金保険では、国民のうち被保険者の定義に該当する者全員で一つの被保険者集団を構成している。

被保険者集団には、閉集団と開集団とがある。**閉集団**は、構成員が属性を失うことにより縮小して行くが、新規に集団に加入する者のない集団である。上記の生命保険契約集団の例がこれにあたる。一般に生命保険契約集団では、死亡以外にも解約等の原因によって集団が縮少して行くが、このように構成員が属性を失う原因は必ずしも一つとは限らず、二つ以上の場合もある。

開集団は、構成員の離脱がある一方で新たな加入もあって、構成員が変化して行く集団である。上記の退職年金基金や厚生年金保険の例がこ

れにあたる。また先に第２章§６では、開集団の一つの例を考えた。

被保険者集団の構成員が持たねばならない属性は、一つであるとは限らない。例えばある会社の従業員中独身者である者を問題とする時には、属性は会社の従業員であることと独身であることとの二つである。そのいずれかを欠いた者は集団を離脱する。そのような場合、集団を定義する属性を全部備えた者の集まり、すなわちもとの集団を**主集団**といい、主集団を離脱した構成員で特定の属性の有無を同じくする者の集まりを**副集団**という。上の例では、会社の従業員で独身である者の集団が主集団であり、また副集団は３個できて、（１）会社の従業員で既婚者（２）会社を退職した独身者（３）会社を退職した既婚者　のそれぞれについての集団である。

閉集団である主集団が構成員の属性の喪失によって減少して行く状態を、さらに脱退原因別にして表わしたものが、次節で述べる一般の**脱退残存表**である。単に脱退表ともいうが、生命表はその最も単純なものである。脱退表によって、ある時間経過後に、構成員のうち何人が主集団に残り、何人がどの副集団に入って行くかを見ることができる。保険における実用上の応用では、主集団の脱退残存表のみを使用することが多いが、必要があれば副集団の脱退残存表を付加して使用する場合もあるし、また副集団から主集団への復帰についての状況を仮定して使用することもある。

§２　多重脱退表

前節で述べた脱退残存表のうち、生命表以外でよく用いられるものの一般的な型は次のようなものである。（数字は仮に与えたもの）

x	l_x	a_x	b_x	c_x
0	100,000	158	85	18
1	99,739	127	83	21
2	99,508	111	79	24
3	・・・	・	・	・
4	・・・	・	・	・

ここでは x は一応年齢と考えているが、集団の経過年数と考えることもある。この表は、同時に同一状態で存在した l_0 人からなる主集団が、三つの脱退原因によって縮小して行く状態を表わしている。すなわち主集団から構成員が脱退する原因が A ，B ，C と三つある場合を考えているが、それが二つでも、あるいは四つでも議論は全く平行的に展開される。

表中の l_x は x 歳における主集団の人数を表わしているが、さらに年齢 x で原因 A によって脱退する者の数を a_x により、また B あるいは C によって脱退する者の数をそれぞれ b_x ，c_x により表わしている。このような脱退表では

$$l_{x+1} = l_x - a_x - b_x - c_x \qquad (3.2.1)$$

となっている。

一般にこのように脱退原因が 2 つ以上ある場合の脱退表を**多重脱退表**といい、そのうち原因が二つの場合を 2 重脱退表、三つの場合を 3 重脱退表などとよぶ。

多重脱退表の数値から得られる

$$q_x^A = \frac{a_x}{l_x}, \qquad q_x^B = \frac{b_x}{l_x}, \qquad q_x^C = \frac{c_x}{l_x} \qquad (3.2.2)$$

をそれぞれ年齢 x における A **脱退率**、B脱退率、C脱退率とよぶ。一方、1年間の生存率を

$$p_x^* = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{3.2.3}$$

で表わすと、（3.2.1）より次式ができる。

$$p_x^* = 1 - q_x^A - q_x^B - q_x^C \ . \tag{3.2.4}$$

多重脱退表の脱退率に関しては、**絶対脱退率**というものが考えられる。それは、例えばA脱退率について言えば、BやCによる脱退が存在しない場合に主集団からAによって脱退する割合である。それらを q_x^{A*}, q_x^{B*}, q_x^{C*} で表わして、q_x^A, q_x^B, q_x^C との関係を考えてみよう。

その場合に

(1) A脱退、B脱退、C脱退はそれぞれ独立に発生する。すなわちA脱退の発生はB，Cの発生に影響を与えないし、また影響を受けることもない。

(2) 脱退の発生は一年を通じて一様に起こる。

と仮定しておく。その時 $l_x q_x^{A*}$ は $a_x = l_x q_x^A$ より大きい。前者はA脱退しか考えていないが、その時には、A脱退、C脱退に先立ってB脱退が起ったため脱退した者（b_x に入っている）や、A脱退、B脱退に先立ってC脱退が起こったため脱退した者（c_x に入っている）の中でのA脱退により脱退したであろう者を前者に含めなければならないからである。

まず2重脱退表を考えると、$l_x q_x^A = a_x$ は、$l_x q_x^{A*}$ からB脱退が先に起こったためカウントされなかった分を差引いたものである。カウントされなかった数を求めよう。ある時間区間（t，$t+\Delta t$）($0 < t < 1$)

で A 脱退する者の数は仮定（2）により $l_x q_x^{A*} \Delta t$ であるが、時刻 t までに B 脱退のある確率は $t q_x^{B*}$ であるから、仮定（1）と（2）により求める数は

$$\int_0^1 t\, q_x^{B*} l_x q_x^{A*} dt = \frac{1}{2} l_x q_x^{B*} q_x^{A*} \tag{3.2.5}$$

となる。従って

$$l_x q_x^A = l_x q_x^{A*} - \frac{1}{2} l_x q_x^{B*} q_x^{A*}$$

$$q_x^A = q_x^{A*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{B*}\right) \tag{3.2.6}$$

が得られる。q_x^B についても A と B を入れ換えた式ができる。

次に3重脱退表について考えると、上記からの類推から $l_x q_x^A$ は $l_x q_x^{A*} - \frac{1}{2} l_x q_x^{B*} q_x^{A*} - \frac{1}{2} q_x^{C*} q_x^{A*}$ に等しいと考えられるが、この場合は例えば第2項については B の前に C の起こっているケースを除いておかねばならない。（それは第3項に入っている）時刻 t までに B 脱退があり、かつそれに先だって C 脱退のある確率は

$$\int_0^t s\, q_x^{C*} q_x^{B*} ds = \frac{t^2}{2} q_x^{C*} q_x^{B*}$$

であるから、上記の部分は

$$\int_0^1 \frac{t^2}{2} q_x^{C*} q_x^{B*} l_x q_x^{A*} dt = \frac{1}{6} l_x q_x^{C*} q_x^{B*} q_x^{A*}$$

である。第3項についても同じであるから、結局

$$l_x q_x^A = l_x q_x^{A*} - \left(\frac{1}{2} l_x q_x^{B*} q_x^{A*} - \frac{1}{6} l_x q_x^{C*} q_x^{B*} q_x^{A*} \right)$$

$$- \left(\frac{1}{2} l_x q_x^{C*} q_x^{A*} - \frac{1}{6} l_x q_x^{B*} q_x^{C*} q_x^{A*} \right)$$

$$q_x^A = q_x^{A*} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (q_x^{B*} + q_x^{C*}) + \frac{1}{3} q_x^{B*} q_x^{C*} \right\} \qquad (3.2.7)$$

が得られる。q_x^B , q_x^C についても同様の式ができる。

4重脱退表ではさらに複雑に考えねばならないが、結果のみ示すと

$$q_x^A = q_x^{A*} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (q_x^{B*} + q_x^{C*} + q_x^{D*}) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3} (q_x^{B*} q_x^{C*} + q_x^{B*} q_x^{D*} + q_x^{C*} q_x^{D*}) - \frac{1}{4} q_x^{B*} q_x^{C*} q_x^{D*} \right\} \qquad (3.2.8)$$

である。 q_x^B , q_x^C , q_x^D についても同様の式ができる。

(3.2.6)、(3.2.7)、(3.2.8) は複雑な式であるが、通常 q を3個以上掛けた項は極めて小さいので（3重脱退表で代表して）

$$q_x^A \fallingdotseq q_x^{A*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{B*} - \frac{1}{2} q_x^{C*} \right) \qquad (3.2.9)$$

あるいは

$$q_x^A \fallingdotseq q_x^{A*} \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{B*} \right) \left(1 - \frac{1}{2} q_x^{C*} \right) \qquad (3.2.10)$$

でよい近似式となる。

式 (3.2.6) ～ (3.2.10) によって、それぞれの脱退原因ごとの絶対確率 q_x^{A*} 等が与えられている時に、q_x^A 等を計算して多重脱退表を作成することができる。

逆に多重脱退表が先に与えられていて q_x^A 等が判っている時に、q_x^{A*} 等を求めるには、(3.2.9) から近似的に

$$q_x^{A*}=\frac{q_x^A}{1-\frac{1}{2}q_x^B-\frac{1}{2}q_x^C}=\frac{a_x}{l_x-\frac{1}{2}b_x-\frac{1}{2}c_x} \qquad (3.2.11)$$

とすることができるが、この式は独立に次のように考えて導くこともできる。すなわち上記の条件 (1)、(2) が満足されていると、t において B 脱退する者 $b_x\varDelta t$ 中年度内に A 脱退するであろう者は $b_x\varDelta t\, q_x^{A*}$ $(1-t)$であるから、b_x中年度内に A 脱退するであろう者の数は

$$\int_0^1 b_x q_x^{A*}(1-t)\,dt=\frac{1}{2}b_x q_x^{A*} \qquad (3.2.12)$$

と考えることができる。これを用いて近似的に

$$l_x q_x^{A*}=a_x+\frac{1}{2}b_x q_x^{A*}+\frac{1}{2}c_x q_x^{A*} \qquad (3.2.13)$$

と考えれば、これを解いて (3.2.11) が得られる。

次に (1) の仮定があれば

$$\begin{aligned} p_x^{*}&=p_x^{A*}p_x^{B*}p_x^{C*}\\ &=(1-q_x^{A*})(1-q_x^{B*})(1-q_x^{C*}) \end{aligned} \qquad (3.2.14)$$

となるべきであるが、(3.2.4) の右辺に (3.2.7) を代入してこの式を確かめることができる。

多重脱退表についても第 2 章§ 4 の死力に類似した**脱退力**あるいは瞬間脱退率を考えることができる。l_x 人中 (x は整数と限らなくてもよい) 次の $\varDelta t$ 期間内に脱退原因 A , B , C により脱退する者の数をそれぞれ ${}_{\varDelta t}a_x$, ${}_{\varDelta t}b_x$, ${}_{\varDelta t}c_x$ とすると

$$l_x - l_{x+\Delta t} = {}_{\Delta t}a_x + {}_{\Delta t}b_x + {}_{\Delta t}c_x \tag{3.2.15}$$

となる。今単一死亡表の時のように

$$\mu_x^A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{l_x} \frac{{}_{\Delta t}a_x}{\Delta t} \tag{3.2.16}$$

を原因 A による脱退力（瞬間脱退率）等と定義しよう。またこの場合の μ_x を（2.4.1）のように定義すると（3.2.15）より

$$\mu_x = \mu_x^A + \mu_x^B + \mu_x^C \tag{3.2.17}$$

である。また l_{x+t} のうち Δt の区間内に A 脱退する者の数は

$${}_{\Delta t}a_{x+t} = l_{x+t}\,\mu_{x+t}^A\,\Delta t$$

であり、従って

$$a_x = \int_0^1 l_{x+t}\,\mu_{x+t}^A\,dt \tag{3.2.18}$$

次に第2章§6におけるように多重脱退表が定常状態の開集団を表わすと考えることもできる。その場合、任意のある時点において年齢が x と $x+1$ との間にある者の総数 L_x は（2.6.4）と同様に

$$L_x \fallingdotseq \frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})$$

となり、従って（3.2.1）を用いて

$$L_x \fallingdotseq l_x - \frac{a_x}{2} - \frac{b_x}{2} - \frac{c_x}{2} \tag{3.2.19}$$

となる。またある観察年度において x 歳と $x+1$ 歳との間の A 脱退の総数は（2.6.8）と同様に a_x となり、これと L_x との比すなわち**中央脱退率**が

$$m_x^A = \frac{a_x}{\frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})} \tag{3.2.20}$$

等によって定義される。(3.2.19) と (3.2.2) を用いて

$$m_x^A = \frac{a_x}{l_x - \dfrac{a_x}{2} - \dfrac{b_x}{2} - \dfrac{c_x}{2}}$$

$$= \frac{q_x^A}{1 - \dfrac{q_x^A}{2} - \dfrac{q_x^B}{2} - \dfrac{q_x^C}{2}} \qquad (3.2.21)$$

等となり、これによりもとの脱退率との関係が与えられる。逆に m_x^A , m_x^B , m_x^C から q_x^A 等を求める時には、まず q_x^{A*} 等との関係を先に求めるとよい。すなわち (3.2.11) と (3.2.19) により

$$q_x^{A*} = \frac{a_x}{l_x - \dfrac{b_x}{2} - \dfrac{c_x}{2}} = \frac{a_x}{L_x + \dfrac{a_x}{2}} = \frac{a_x}{\dfrac{a_x}{m_x^A} + \dfrac{a_x}{2}}$$

$$= \frac{2\,m_x^A}{2 + m_x^A} \qquad (3.2.22)$$

となる。これは (2.6.16) と同じ形である。q_x^{A*} 等から q_x^A 等を求めるには (3.2.7) または (3.2.9) によればよい。そうすれば観察から L_x , a_x , b_x , c_x が定められる時に多重脱退表の作成が可能となる。

また生命保険契約の集団のように、開集団であっても、集団の構成要素の1件1件について契約時点と消滅時点とを確認できる場合には、統計から直接に q_x^A 等を計算することができる。すなわち観察期間を数年にわたってとることとした場合に、ある契約の x 歳に始まる保険年度がまるまる観察期間に入っておれば、その契約は l_x に算入する。そしてそれらのうちから1年以内に発生した A 脱退、B 脱退、C 脱退の件数を数えて、それぞれを a_x , b_x , c_x とすれば、(3.2.2) によって

q_x^A , q_x^B , q_x^C が計算される。第2章§6のレキシスの図を用いて説明すれば、例えば観察期間が $x+\tau$ から $x+\tau+3$ までであると、線分 AG を通過する生命線の数を l_x とし、矩形 $AGFC$ の中で発生する消滅点の数を原因別に a_x , b_x , c_x とする。

最後に、主集団と同時に特定の副集団の脱退残存状況を合わせ考えて保険料の計算を行うことがあるので、そのことに触れておこう。そこでも例示的に、主集団は脱退残存の状況が（3.2.1）で表わされるようなものであり、そのうち B 脱退者の副集団は次のような脱退残存状況を示すと仮定する。すなわちこの副集団の人数は主集団からの脱退者の加入により増加すると同時に、「A 脱退」および「C 脱退とは別の D 脱退」により減少するとする。（3.2.1）に対応してこの副集団の人数を表わす式を書くと

$$l_{x+1}^B = l_x^B + b_x - a_x^B - d_x^B \tag{3.2.23}$$

となる。ここに l_x^B はこの副集団の x 歳者の人数であり、a_x^B , d_x^B は x 歳でこの副集団から A 脱退、D 脱退する者の数である。

この副集団からの A 脱退率、D 脱退率はそれぞれ

$$q_x^{BA} = \frac{a_x^B}{l_x^B} \quad , \quad q_x^{BD} = \frac{d_x^B}{l_x^B}$$

であるが、これらの絶対脱退率 q_x^{BA*} , q_x^{BD*} を考えてみよう。この場合（3.2.1）と異なるのは（3.2.23）の式中に b_x という増加要因が含まれていることであるが、この増加は1年を通じて一様に行われるので、（3.2.12）のときと同様にして、a_x^B 中に含まれるが $l_x^B\, q_x^{BA*}$ には含まれない者の数は $\frac{1}{2} b_x q_x^{BA*}$ である。従ってこの時は（3.2.13）にあたる式は

$$l_x^B q_x^{BA*} = a_x - \frac{1}{2} b_x q_x^{BA*} + \frac{1}{2} d_x^B q_x^{BA*} \qquad (3.2.24)$$

となり、その結果次式が得られる。

$$q_x^{BA*} = \frac{a_x^B}{l_x^B + \frac{1}{2} b_x - \frac{1}{2} d_x^B} \qquad (3.2.25)$$

§3　死亡解約脱退残存表

前節で述べた多重脱退表が実際に保険料の計算に用いられる例は、後に第１３章、第１６章等で取り上げるが、本章では死亡に解約がからんだ場合のみを一つの応用例として示しておく。

生命保険契約等では、死亡のほかに解約（失効等を含める）によって契約が消滅することが多い。従って解約も含めて脱退状況を考察する必要が生じることが少なくないが、その時には同一年齢者の集団に対する２重脱退表が用いられる。それは前節のモデルで $a_x = d_x$ ， $b_x = w_x$ （ w_x は x 歳と $x+1$ 歳の間での１年間の解約数）， $c_x = 0$ 　としたものである。すなわち残存者数が

$$l_{x+1} = l_x - d_x - w_x \qquad (3.3.1)$$

で表わされるような脱退表である。この２重脱退表から得られる死亡率 $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ ，　解約率 $q_x^W = \dfrac{w_x}{l_x}$ のうち死亡率は単一生命表における死亡率とは同じでない。この時は前節で述べた**絶対死亡率** q_x^* が単一生命表における死亡率に該当する。それは（3.2.11）より

$$q_x^* = \frac{d_x}{l_x - \frac{w_x}{2}} = \frac{q_x}{1 - \frac{q_x^W}{2}} \qquad (3.3.2)$$

によって計算される。　$l_x - \dfrac{w_x}{2}$ は死亡に関する**経過契約**と言われる。

解約した契約はその半分だけが死亡危険にさらされたと考えられる。

(3.3.2) は経験生命表の作成に当たって応用される。生命保険契約では、契約日における被保険者の直近の満年齢をその被保険者に付与して、保険料等の保険価格を計算するが、今そのような契約は全部本当にその満年齢で契約されたと考えておく。そして前節の終わりで述べたように観察期間を数年に亙ってとり、ある契約の y 歳に始まる保険年度がまるまる観察期間に入っておればその契約は l_y に算入し、そしてそれらのうちからの当該保険年度内の死亡数 d_y と解約数 w_y とを数え、(3.3.2) によって経験死亡率 q_y^* を算定する。このことを第2章§6のレキシスの図を用いて詳しく説明してみよう。この場合横軸は契約年度を、縦軸は契約からの経過年数を表わすものと読み替え、まず同一満年齢の加入者ばかりで1枚のレキシスの図をつくると考える。その時例えば観察期間が図の $x+\tau$ から $x+\tau+3$ までであると、線分 AG を満 y 歳で通過する生命線を数えて $l_y^{(1)}$ とし、一方矩形 $AGFC$ 内における死亡点および解約点を数えてそれぞれ $d_y^{(1)}$ および $w_y^{(1)}$ とする。このような観察をすべての加入年齢について行なって、y 歳についてのそれらの和すなわち $l_y=l_y^{(1)}+l_y^{(2)}+\cdots\cdots$, $d_y=d_y^{(1)}+d_y^{(2)}+\cdots\cdots\cdots$, $w_y=w_y^{(1)}+w_y^{(2)}+\cdots\cdots$ を用いて、(3.3.2) によって q_x^* を算定する。ただしこのように q_x^* を出しても、国民生命表の場合と同様に通常は補整が必要であり、補整した上で経験生命表が作成される。

またある契約群団全体（所属員の年齢がまちまちでもよい）の1年間の経験死亡率を算出するときにも (3.3.2) と同じ考え方でできる式が用いられる。l_x の代わりにこの群団の年始総件数 A をとり、1年間の死亡件数を D ,死亡以外の原因による減少件数を W とすると、年末の

総件数は（3.3.1）のように $B=A-D-W$ となる。

$W=A-D-B$ としてこれを（3.3.2）に入れると、この群団の死亡率は

$$q=\frac{D}{A-\frac{W}{2}}$$

$$=\frac{D}{\frac{A+B+D}{2}} \tag{3.3.3}$$

となる。ここで $\dfrac{A+B+D}{2}$ が経過契約件数である。また件数でなく、A，B，D に保険金額合計を使用することがあるが、その時は件数死亡率に対して金額死亡率という。

もしこの群団が開集団で新契約による増加が入っていると、1年間の新契約件数を N として $B=A+N-D-W$ となり、（3.2.25）で考えた時のように

$$q=\frac{D}{A+\frac{N}{2}-\frac{W}{2}}$$

となるが、$N-W=B-A+D$ であるのでやはり（3.3.3）が得られる。

第3章　練習問題

（1）　式（3.2.8）を導け。

（2）　（2.4.13）にならって（3.2.16）の μ^{A}_{x+t} を用いて絶対脱退率が

$$q_x^{A*} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu^{A}_{x+t}\ dt} \qquad \text{等}$$

で与えられるとする。今 A，B，C の3脱退とも1年を通じて一様に発生する、すなわち（3.2.15）の右辺における各項が

$${}_{\Delta t}a_{x+t} = a_x \Delta t \qquad \text{等}$$

で表わされるとすると、上記に定義した q_x^{A*} が近似的に（3.2.11）の右辺に等しくなることを証明せよ。

（3）　未婚女子の集団が結婚と死亡とにより減少して行く2重脱退残存表を考え、また副集団をつくる既婚女子（寡婦を含む）は死亡のみにより減少するとする。そのような2重脱退残存表が表わす定常人口について

（a）　30歳と31歳の間の未婚女子の数は、30歳と31歳の間の既婚女子の数の $\dfrac{1}{2}$ である。

（b）　30歳の女子の中央死亡率は0.005である。

（c）　30歳の未婚女子が31歳に達するまで未婚のままで死亡する確率は0.0038である。

（d）　30歳の既婚女子が31歳に達するまでに死亡する確率は0.0055である。

そのとき、次の率を求めよ

（A） 30歳の未婚女子の中央結婚率

（B） 30歳の既婚女子の中央死亡率

（4） 死亡解約脱退残存表における生存者数が $l_x = a - bx$ という直線で表わされ、かつ各年齢における解約率 q_x^w が死亡率 q_x の n 倍であるとすると、絶対死亡率は

$$q_x^* = 1 - \frac{l_x - k_1 b}{l_x - k_2 b}$$

ただし $k_1 = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$， $k_2 = \dfrac{n}{2(n+1)}$

で表わされることを証明せよ。

（5） ある生命保険会社の個人死亡保険について、ある年度の保険成績が次のとおりであった。

	件数	金額
年始現在	15,905,000 件	10,384,800 百万円
年末現在	16,087,000	11,378,100
年度内死亡	50,089	27,366

件数死亡率および金額死亡率を求めよ。

（6） ある生命保険会社のある保険契約群団について、年始保有件数が621,270件、1年間の死亡件数が1,226件、1年間の解約失効件数が8,318件であった。解約失効以外の増減はないとして、この群団の経験

死亡率および経験解約失効率を求めよ。

第４章　純保険料

§1　計算の基礎

生命保険契約の価格に関する計算では、第１に保険金支払事由の発生する率（死亡率等）が必要である。それらは採用した生命表あるいは脱退残存表によって与えられるか、もしくはそれから導くことができる。死亡あるいは生存を保険金支払事由とする契約では、採用した生命表の示す死亡率を**予定死亡率**とよぶ。

第２には、計算に当たっては常に金銭の授受される時点までの利息を考慮することにするので、利息の計算に使用する利率が必要である。これを**予定利率**とよぶ。

第３には、保険制度の運営に必要な経費をあらかじめ考えておいて、それを保険料に組み入れる。このような経費を保険金額あるいは保険料に対しどれくらいの割合とするかを定めたものを**予定事業費率**とよぶ。

予定死亡率（あるいはその他の事故発生率の予定）、予定利率および予定事業費率を総称して**計算の基礎**という。生命保険契約は長期に亘るものが多いので、計算の基礎として予定した３つの率が、将来経験する実績では予定どおりにならず大きくはずれる恐れがある。そのため将来の変動に備えて、これらは通常安全めに設定される。すなわち現状に比べて予定死亡率はやや高め（死亡保険の場合）に、予定利率はやや低めに、また予定事業費率はやや高めに設定される。

３つの計算の基礎のうちの予定事業費率を除いて、予定死亡率（また

はその他の事故発生率）と予定利率とから計算した保険料を**純保険料**という。また予定事業費率に基づいて計算される保険料の部分を**付加保険料**という。両者を合わせたものが保険契約者の払い込む**営業保険料**である。

純保険料 ＋ 付加保険料 ＝ 営業保険料

保険数理の理論的な面では、純保険料とそれに関連した責任準備金等の計算式が主として扱われるが、そのように予定死亡率と予定利率だけで計算したり理論を進めるものを純保険数理という。本書ではまず純保険数理を展開して、その後に種々の実際問題に入ることとする。

なかでも、被保険者が１人で、単純な生命表を計算の基礎とする場合が基本的なものであり、実際問題への応用も最も多い。（この場合を第１２章で述べる連合生命と特に区別するときには、**単生命**と称する）
本書ではまずこの場合について詳論し、その後で営業保険料の問題や、複雑な被保険者集団（被保険者が２人以上であるとか、死亡以外の脱退原因を考慮する場合等）についての保険数理に入ることとする。

以後第４章～第６章では、保険料といえば純保険料を指すものとする。

§2　生存保険の一時払保険料

保険契約締結の際にのみそれを払込み、以後払込む必要のない保険料を**一時払保険料**という。すなわち大勢の契約者がこの金額を払込み、保険会社がそれを予定利率どおりに運用すれば、予定どおりに保険事故が起こった場合に、約束の保険金を支払って過不足なく終了するものである。
従って一時払保険料のことを**保険現価**、あるいは略して単に「○○保険の現価」と呼ぶこともある。

まず**生存保険**をとりあげるが、これは被保険者が契約時から一定期間

後まで生存した場合に一定額の保険金（生存保険金という）が支払われる保険である。x 歳で加入した被保険者が n 年後に生存する場合に保険金1を支払う保険の一時払純保険料は $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ で表わされる。（添字 $_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ は、x 歳の加入者の死亡と保険期間 n の終了とを比較して、後者が先に起こることを意味する。　$_nE_x$ という記号が使用されることもある）今予定した生命表の生存者数 l_x 人が同時にこの保険に加入したとすると、払込まれた保険料の総額は $l_x A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ であり、それを予定利率 i で n 年間利殖したものは $l_x A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}(1+i)^n$ となる。この額を l_x 人中の n 年後の生存者 l_{x+n} 人に1ずつ分配して過不足がないならば

$$l_x A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}(1+i)^n = l_{x+n}$$

であるから、これを解いて $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ が得られる。すなわち（2.2.1）を用いて

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{4.2.1}$$

$$= v^n\,{}_np_x \tag{4.2.2}$$

この式は、n 年後に支払う金額1の保険金の契約時における現価 v^n に事故発生率 $_np_x$ を掛けたものと解することができる。これは保険現価を表わしており、一時払保険料の計算ではこのように保険現価として考えることが多い。

今計算を簡単にするために

$$D_x = v^x l_x \tag{4.2.3}$$

という記号を導入すると、（4.2.1）で分母と分子に v^x を掛けて

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} \tag{4.2.4}$$

と書くことができる。通常生命表にはよく使用される数個の利率につい

てすべての年齢 x に対して D_x を計算した表が添付されており、それを用いて計算を迅速に行うことができる。（付録3参照）期間 n の代わりに y 歳になった時生存保険金を支払うという条件である場合は、n の代わりに $y-x$ を用いればよい。

実際上はここに述べたような単純な形で生存保険が販売されることは稀である。途中の死亡に対してもなにがしかの給付（例えば既払保険料の返還）をすることが多いが、それについては後で述べることとする。そのような変形に対し、ここで述べた本来の形を特に区別する場合は、純生存保険と呼ぶ。

なお生存保険に関しては、低めの死亡率が安全な予定死亡率である。生存者数を多く見積もっておけば、支払保険金を多めに見積もることになるからである。

§3　生命年金（年払）

第1章§5では確定年金の計算に関する種々の公式を挙げたが、本節では**生命年金**に関するそれらを考えてみよう。まず年1回支払の年金を考えるが、その現価（**年金現価**）とは、契約時にその金額を徴収して利殖して行けば約定したすべての年金を支払って過不足なく終了することのできる金額である。従ってそれは年金契約の一時払純保険料ということもできる。

（1）終身年金

被保険者が生存するかぎり所定金額の年金を支払うものを**終身年金**というが、これには**期末払**と**期始払**の2種がある。前者は毎年度の終わりに年金を支払うものであり、後者は毎年度の始めに年金を支払うものである。今後断りのないかぎり年金額は1であるとして、まず期末払を考

えよう。第１年度の終わりに支払う金額１の契約時の現価は（4.2.2）あるいは（4.2.4）より　$v\,p_x=\dfrac{D_{x+1}}{D_x}$　であり、第２年度末に支払う金額１の現価は $v^2\,{}_2p_x=\dfrac{D_{x+2}}{D_x}$ であり、以下同様のことが繰り返せる。従って毎年の支払額の現価の総計すなわち年金の現価を a_x で表わすと

$$a_x=v\,p_x+v^2\,{}_2p_x+\cdots\cdots+v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1}p_x \tag{4.3.1}$$

$$=\frac{1}{D_x}(D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+D_{\omega-1}) \tag{4.3.2}$$

となる。（${}_{\omega-x}p_x=0$ である）今すべての年齢 x についてあらかじめ

$$N_x=D_x+D_{x+1}+\cdots\cdots+D_{\omega-1} \tag{4.3.3}$$

が計算されていると

$$a_x=\frac{N_{x+1}}{D_x} \tag{4.3.4}$$

と表わすことができる。（付録３参照）

期始払終身年金の現価は $\ddot{a}_x$ で表わすが、これについても全く同様に次の式ができる。

$$\ddot{a}_x=1+vp_x+\cdots\cdots+v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1}p_x \tag{4.3.5}$$

$$=\frac{1}{D_x}(D_x+D_{x+1}+\cdots\cdots+D_{\omega-1}) \tag{4.3.6}$$

$$=\frac{N_x}{D_x} \tag{4.3.7}$$

（２）有期生命年金

年金を支給する期間が終身でなく、あらかじめ定められた一定の期間である場合を**有期生命年金**という。期間 n 年の有期生命年金の現価を、

期末払では $a_{x:\overline{n|}}$、期始払では $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ で表わす。これらについても（１）の場合と同様に考えて

$$a_{x:\overline{n|}} = vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots\cdots + v^n{}_np_x \tag{4.3.8}$$

$$= \frac{1}{D_1}(D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots + D_{x+n}) \tag{4.3.9}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \tag{4.3.10}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + v\,p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x \tag{4.3.11}$$

$$= \frac{1}{D_x}(D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots D_{x+n-1}) \tag{4.3.12}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{4.3.13}$$

が得られる。((4.3.8), (4.3.11) を (1.5.4), (1.5.3) と見比べよ)

また年齢が y 歳になるまで支払う年金の場合には期間 n の代わりに $y-x$ を用いる。(4.3.8) と (4.3.11) とから次の諸式が容易に証明される。

$$a_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - 1 + v^n{}_np_x \tag{4.3.14}$$

$$a_{x:\overline{n-1|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - 1 \tag{4.3.15}$$

$$a_{x:\overline{n|}} = vp_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n|}} \tag{4.3.16}$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + vp_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}} \tag{4.3.17}$$

（３）据置年金

生命年金においても**即時開始年金**と**据置年金**とがある。((1.5.13) 等を参照) 据置期間を f とし、(1.5.13) 等のようにこれまで述べた生命年金の記号の左下に $f|$ をつけて据置年金を表わすことにすると

$$_{f|}a_x = \sum_{t=f+1}^{\infty} v^t\,{}_tp_x = \sum_{t=f+1}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+f+1}}{D_x} \tag{4.3.18}$$

$$ {}_{f|}\ddot{a}_x = \sum_{t=f}^{\infty} v^t\,{}_tp_x = \sum_{t=f}^{\infty} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+f}}{D_x} \tag{4.3.19} $$

$$ {}_{f|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=f+1}^{f+n} v^t\,{}_tp_x = \sum_{t=f+1}^{f+n} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+f+1} - N_{x+f+n+1}}{D_x} \tag{4.3.20} $$

$$ {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=f}^{f+n-1} v^t\,{}_tp_x = \sum_{t=f}^{f+n-1} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+f} - N_{x+f+n}}{D_x} \tag{4.3.21} $$

さらに次の諸公式は、証明も容易であり、それぞれの表わす意味も容易に解釈できるので、読者で試みられたい。

$$ {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overset{1}{\overline{f|}}}\ \ddot{a}_{x+f:\overline{n|}} = v^f\,{}_fp_x\ \ddot{a}_{x+f:\overline{n|}} \tag{4.3.22} $$

$$ {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{f+n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{f|}} \tag{4.3.23} $$

$$ {}_{f|}a_x = {}_{f+1|}\ddot{a}_x \tag{4.3.24} $$

$$ {}_{f|}a_{x:\overline{n|}} = {}_{f+1|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{4.3.25} $$

$$ {}_{f|}\ddot{a}_x = {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + {}_{f+n|}\ddot{a}_x \tag{4.3.26} $$

（４）保証期間付生命年金

生命年金では、年金開始後いくらもたたずに死亡したため年金を殆どあるいは僅かしか受けることができなかった人を救済するため、初めの何年間かは生死に関係のない確定年金を支給し、それ以後は通常の生命年金とする場合がある。これが**保証期間付生命年金**で、確定年金を支給する期間を保証期間とよぶ。x 歳の受給者に対し g 年の保証期間付でその後 n 年の有期生命年金を支給する期始払年金では、その現価は

$$ \ddot{a}_{\overline{g|}} + {}_{g|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{4.3.27} $$

となる。

最後に生命年金の予定死亡率選定についての注意を述べる。生命年金では生存が支払の条件であるので、予定より生存が多ければ損失が発生

し、少なければ剰余が出る。死亡率で言えば、死亡の実績が予定より低いと損失が発生する。従って生存保険の場合と同様に、予定死亡率は低めに設定して、やや多い年金支払を考えておく方が経営上安全である。

§4　生命年金（年 k 回支払の場合）

第1章§6の確定年金の場合と同様に、1年を k 回に分け毎回金額 $\dfrac{1}{k}$ ずつを支払う生命年金を考えることができる。（年金年額で1）その現価の記号は、確定年金の場合と同様に右肩に(k)を入れて表わす。例えば年 k 回払の期始払 f 年据置 n 年有期年金であれば、${}_{f|}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ とする。それを与える式は、例えば $f=0$ であれば、（4.3.11）と同様に

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}=\frac{1}{k}\left(1+v^{\frac{1}{k}}\,{}_{\frac{1}{k}}p_x+v^{\frac{2}{k}}\,{}_{\frac{2}{k}}p_x+\cdots\cdots+v^{n-\frac{1}{k}}\,{}_{n-\frac{1}{k}}p_x\right)$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{t=0}^{nk-1}v^{\frac{t}{k}}\,{}_{\frac{t}{k}}p_x \qquad (4.4.1)$$

である。（（1.6.3）と比較せよ）$a^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ なら（4.4.1）で $\sum_{t=1}^{nk}$ とすればよいし、${}_{f|}\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ ならば $v^{\frac{t}{k}}\,{}_{\frac{t}{k}}p_x$ のかわりに $v^{f+\frac{t}{k}}\,{}_{f+\frac{t}{k}}p_x$ を用いればよい。また n が整数でなくても $\dfrac{1}{k}$ の倍数であれば、やはり式（4.4.1）は成立する。

整数値 n に対して（4.4.1）を実際に計算するには、通常 $v^s\,{}_sp_x$ が x と s の整数値についてのみしか判らないので、中間のそれらの値は近似計算によらざるを得ない。そのために第2章§3（3）で述べた近似を利用する。t の区間〔0，1〕で $f(t)=v^t\,{}_tp_x$ が（2.3.5）のような3次曲線で近似されるとしよう。その時はまず

$$f(0)=1, \qquad f(1)=v\,p_x$$

であるから、（2.3.1）により

$$\overline{f_1}(t) = 1 - (1 - v\,p_x)t$$

である。また（2.4.9）を用いて

$$f'(t) = (\log v)\,v^t\,{}_tp_x - v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}$$

であり、（1.3.3）より $\log v = -\delta$ であるから

$$f'(t) = -v^t\,{}_tp_x(\delta + \mu_{x+t})$$

$$f'(0) = -(\delta + \mu_x)$$

$$f'(1) = -v\,p_x(\delta + \mu_{x+1})$$

となる。従ってこの場合の（2.3.5）は

$$\overline{f_3}(t) = \{1 - (1 - v\,p_x)t\} + \beta_1 t - \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$$

$$\beta_1 = \{(1 - v\,p_x) - (\delta + \mu_x)\}$$

$$\beta_2 = \{3(1 - v\,p_x) - 2(\delta + \mu_x) - v\,p_x(\delta + \mu_{x+1})\}$$

$$\beta_3 = \{2(1 - v\,p_x) - (\delta + \mu_x) - v\,p_x(\delta + \mu_{x+1})\}$$

となる。これは $f(t)$ のよい近似と考えられるので、〔0，1〕内の中間点 $\frac{s}{k}$ では $f\left(\frac{s}{k}\right) = v^{\frac{s}{k}}\,{}_{\frac{s}{k}}p_x$ のかわりに $\overline{f_3}\left(\frac{s}{k}\right)$ を用いることにすると

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{1|}} = \frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1} v^{\frac{s}{k}}\,{}_{\frac{s}{k}}p_x$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{k}\Big[\Big\{\sum_{s=0}^{k-1} 1 - (1 - v\,p_x)\sum_{s=0}^{k-1}\frac{s}{k}\Big\}$$

$$+ \beta_1\sum_{s=0}^{k-1}\frac{s}{k} - \beta_2\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{s}{k}\right)^2 + \beta_3\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{s}{k}\right)^3\Big]$$

となる。　ここで

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{s}{k} = \frac{1}{k^2}\,\frac{(k-1)k}{2} = \frac{k-1}{2k}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{s}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^3}\,\frac{(k-1)k(2k-1)}{6} = \frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}$$

$$\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}\left(\frac{s}{k}\right)^3=\frac{1}{k^4}\ \frac{(k-1)^2k^2}{4}=\frac{(k-1)^2}{4k^2}$$

を用いると

$$\ddot{a}_{x:\overline{1|}}^{(k)} \fallingdotseq \left\{1-\frac{k-1}{2k}(1-vp_x)\right\}$$
$$+\left\{(1-vp_x)-(\delta+\mu_x)\right\}\frac{k-1}{2k}$$
$$-\left\{3(1-vp_x)-2(\delta+\mu_x)-vp_x(\delta+\mu_{x+1})\right\}\frac{(k-1)(2k-1)}{6k^2}$$
$$+\left\{2(1-vp_x)-(\delta+\mu_x)-vp_x(\delta+\mu_{x+1})\right\}\frac{(k-1)^2}{4k^2}$$

となるが、さらに右辺第２項以下を整理すると

$$\ddot{a}_{x:\overline{1|}}^{(k)} \fallingdotseq \left\{1-\frac{k-1}{2k}(1-vp_x)\right\}$$
$$-\frac{k^2-1}{12k^2}\left\{\delta(1-vp_x)+(\mu_x-vp_x\mu_{x+1})\right\} \qquad (4.4.2)$$

となる。この式の右辺で第１項にとどめた場合は区間〔０，１〕で $v^t\ {}_tp_x$ を直線で近似した場合にあたり、第２項を加えた場合はそれを３次曲線で近似した場合にあたる。次に n が整数の場合に $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(k)}$ を求めよう。(4.4.1) の右辺を初めから k 項ずつまとめて n 個に区分けし、

${}_{t+\frac{s}{k}}p_x={}_tp_x\ {}_{\frac{s}{k}}p_{x+t}$ に留意すると

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(k)}=\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}v^{\frac{s}{k}}\ {}_{\frac{s}{k}}p_x+\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}vp_x v^{\frac{s}{k}}\ {}_{\frac{s}{k}}p_{x+1}$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}v^2\ {}_2p_x v^{\frac{s}{k}}\ {}_{\frac{s}{k}}p_{x+2}+\cdots+\frac{1}{k}\sum_{s=0}^{k-1}v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x v^{\frac{s}{k}}\ {}_{\frac{s}{k}}p_{x+n-1}$$
$$=\ddot{a}_{x:\overline{1|}}^{(k)}+vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{1|}}^{(k)}+v^2\ {}_2p_x\ \ddot{a}_{x+2:\overline{1|}}^{(k)}+\cdots+v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x\ \ddot{a}_{x+n-1:\overline{1|}}^{(k)}$$

となるが、$\ddot{a}_{x+t:\overline{1|}}^{(k)}$ のそれぞれに (4.4.2) を用いると

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(k)} \doteqdot \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_x \left[\left\{1-\frac{k-1}{2k}\left(1-v\,p_{x+t}\right)\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{k^2-1}{12k^2}\left\{\delta\left(1-v\,p_{x+t}\right)+\left(\mu_{x+t}-v\,p_{x+t}\,\mu_{x+t+1}\right)\right\}\right]$$

となる。ここで ${}_tp_x\,p_{x+t}={}_{t+1}p_x$ を用いてさらに整理すると

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(k)} \doteqdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\frac{k-1}{2k}\left(1-v^n\,{}_np_x\right)$$
$$-\frac{k^2-1}{12k^2}\left\{\delta\left(1-v^n\,{}_np_x\right)+\left(\mu_x-v^n\,{}_np_x\,\mu_{x+n}\right)\right\} \quad (4.4.3)$$

となる。$v^n\,{}_np_x$ のかわりに $\dfrac{D_{x+n}}{D_x}$ を入れて表わしてもよい。この式の第２項までが t の整数値で切った各区間で $v^t\,{}_tp_x$ を直線で近似した場合の式であり、第３項を加えたものは、接続点で滑らかになる３次曲線で近似した場合の式である。第３項は通常極めて小さいので、第２項にとどめて近似計算が行われることが多い。

$a_{x:\overline{n|}}^{(k)}$ については、(4.3.14) およびそれと類似の式

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=a_{x:\overline{n|}}+\left(1-v^n\,{}_np_x\right)$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(k)}=a_{x:\overline{n|}}^{(k)}+\frac{1}{k}\left(1-v^n\,{}_np_x\right)$$

を (4.4.3) に入れて

$$a_{x:\overline{n|}}^{(k)}=a_{x:\overline{n|}}+\frac{k-1}{2k}\left(1-v^n\,{}_np_x\right)-\beta \quad (4.4.4)$$

となる。ただし β は (4.4.3) 右辺の第３項である。

終身年金の場合は $n\to\infty$ として次のような式が得られる。

$$\ddot{a}_x^{(k)}=\ddot{a}_x-\frac{k-1}{2k}-\beta' \quad (4.4.5)$$

$$a_x^{(k)}=a_x+\frac{k-1}{2k}-\beta' \quad (4.4.6)$$

ただし　　$\beta' = \dfrac{k^2-1}{12k^2}(\delta+\mu_x)$

なおこのような近似方法は、後章でたびたび現れる $\sum v^t\,{}_tp_x^*$ という形の年金、例えば連生共存年金や就業不能関連の年金において同様に適用することができる。

§5　生命年金（連続支払の場合）

第１章§７の確定年金の場合のように、生命年金でも連続支払の場合が考えられる。それは前節の年 k 回払の場合で $k \to \infty$ としたものであるが、例えば n 年有期生命年金 $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ であれば（4.4.1）で $k \to \infty$ として

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} a^{(k)}_{x:\overline{n}|}$$

$$= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt \tag{4.5.1}$$

という式が与えられる。この式は n が整数でなく任意の実数である場合にも成立する。数値計算をするには近似式を用いるが（4.4.3）あるいは（4.4.4）で $k \to \infty$ とすればよいから、n が整数のとき

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1-v^n\,{}_np_x) - \bar{\beta} \tag{4.5.2}$$

$$\fallingdotseq a_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2}(1-v^n\,{}_np_x) - \bar{\beta} \tag{4.5.3}$$

ただし　　$\bar{\beta} = \dfrac{1}{12}\{\delta(1-v^n\,{}_np_x)+(\mu_x - v^n\,{}_np_x\,\mu_{x+n})\}$

である。あるいは和半をとり

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|}\right) - \bar{\beta} \tag{4.5.4}$$

としてもよい近似となる。終身年金では

$$\bar{a}_x \doteqdot \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \bar{\beta}' \tag{4.5.5}$$

$$\doteqdot a_x + \frac{1}{2} - \bar{\beta}' \tag{4.5.6}$$

$$\doteqdot \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_x + a_x\right) - \bar{\beta}' \tag{4.5.7}$$

ただし　$\bar{\beta}' = \dfrac{1}{12}(\delta + \mu_x)$

である。なお各年金の意味から

$$a_{x:\overline{n}|} < a^{(k)}_{x:\overline{n}|} < \bar{a}_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{4.5.8}$$

となることは明らかであろう。これは（1.7.12）と類似の関係であるが、$x = 40$ について、第5回生命表，$i = 0.055$，$n = 10$，$k = 2$ の場合にこれを計算すると

$$7.454 < 7.561 < 7.669 < 7.776 < 7.884$$

となる。

また（1.3.3）および（2.4.11）より

$$v^t = e^{-\delta t} = e^{-\int_0^t \delta ds}$$

$$_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

であるから

$$v^t\,_tp_x = e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s}) ds} \tag{4.5.9}$$

となる。これを（4.5.1）に入れると

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s})\, ds} dt \tag{4.5.10}$$

という表現が得られる。 $\bar{a}$ が a に近く、また δ が i に近く、μ が q に近いことを考えると、この式から「生命年金現価では、死亡率が $\frac{1}{1000}$ 低下することと利率が 0.1% 低下することは、その影響がほぼ同じである」ことが推測される。

第４章　練習問題（１）

（１）　$a_x < \dfrac{1}{i}$，　$a_x^{(k)} < \dfrac{1}{i^{(k)}}$，　$\bar{a}_x < \dfrac{1}{\delta}$　を証明せよ。

（２）　$q_x < q_{x+t}$（$t = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）であるとき

$$a_x < \frac{p_x}{q_x + i}, \qquad \ddot{a}_x < \frac{1 + i}{q_x + i}$$

となることを証明せよ。

（３）　$i = 0.05$ のとき

$$\ddot{a}_{20:\overline{10|}} = 8.0678, \quad \ddot{a}_{21:\overline{9|}} = 7.4317, \quad \ddot{a}_{22:\overline{8|}} = 6.7619$$

である。 $l_{20} = 98{,}095$ を与えて l_{21} および l_{22}を求めよ。

（４）　$\dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_x} > \dfrac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}}{\ddot{a}_{x+1}} > \dfrac{\ddot{a}_{x+2:\overline{n-2|}}}{\ddot{a}_{x+2}} > \cdots\cdots > \dfrac{1}{\ddot{a}_{x+n-1}}$

を証明せよ。

（５）　k を小さな正定数として、２つの生命表の死亡率の間に

$$q'_x = q_x - \frac{k}{\ddot{a}_{x+1}} \qquad (0 \leq x \leq \omega - 2)$$

という関係があるとする。ただし

$$q_{\omega-1} = 1, \qquad q'_{\omega-1} = 1 - \frac{k}{1 - vk}, \qquad q'_{\omega} = 1$$

としておく。その時には

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}'_x (1 - vk) \qquad (0 \leq x < \omega - 1)$$

となることを証明せよ。

（6）　x 歳の被保険者に対し、3年後開始で12年間確定年金を支払い、その後は彼が生存する限り支払う年額1の年金の現価を表わす式を書け。

（7）　付録の第5回全会社表の D_x, N_x の表を用い、利率が最初の10年間は6％，次の10年間は5.75％，最後の10年間は5.5％である場合の、50歳開始、期始払30年の有期生命年金の現価を計算せよ。

（8）　x 歳の者が即時開始、期始払で年額1の終身年金を受ける。彼は受けた年金を利率 i で利殖し、死亡した年度の年末に遺族が受け取れるようにしておいた。遺族の受け取る金額の平均値を求めよ。

（9）　（a）現在50歳の男性が300万円を生命保険会社に支払って、半年毎の期末払終身年金を受取ることにした。第5回全会社表、5.5％により毎回受取る金額を計算せよ。ただし付加保険料はないとする。

（b）この人が60歳での年金を受けた直後に将来は3月毎に受取りたいと申し出た。今後毎回受取る金額はいくらになるか。

（10）

$$a_x^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} {}_{\frac{i}{k}|}\ddot{a}_x$$

を証明し、ついで ${}_{\frac{i}{k}|}\ddot{a}_x \fallingdotseq \dfrac{k-i}{k}\ddot{a}_x + \dfrac{i}{k}a_x$ と考えて

$$a_x^{(k)} \fallingdotseq a_x + \frac{k-1}{2k}$$

を導け。

（１１）　１年を通じて死亡が一様に起こると仮定し、さらに

$$v^{\frac{t}{k}} \doteqdot 1 - \frac{t}{k} i \qquad (1 \leq t \leq k)$$

と仮定して $a^{(k)}_{x:\overline{1|}}$ を求めよ。またその結果を用いて

$$a^{(k)}_x \doteqdot a_x + \frac{k-1}{2k} - \frac{k^2-1}{6k^2} i$$

となることを証明せよ。

（１２）　${}_{\frac{1}{2k}|}\ddot{a}^{(k)}_x \doteqdot a_x + \frac{1}{2}$　を証明せよ。

（１３）　$\bar{a}_{x:\overline{n|}} - a^{(k)}_{x:\overline{n|}} \doteqdot \frac{1}{2k}(1 - v^n {}_n p_x)$　を証明せよ。

（１４）　負債額 S を年 k 回払で毎期末同額ずつ n 年間で返済するが、債務者が死亡すれば次期以降返済を免除される。x 歳の債務者に対し毎期の返済額をどのように定めればよいか。

（１５）　$l_{x+t} = l_x(1 - bt) \qquad (0 \leq t \leq n)$

であるときに、$\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ はどうなるか。

（１６）　μ_x が年齢に関係なく定数 c に等しいときには

(a)　$\bar{a}_x = \dfrac{1}{c+\delta}$

(b)　$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{s^n - 1}{\log s} \qquad (s = ve^{-c})$

となることを証明せよ。

（１７）　次式を証明せよ。

（ａ）　$\dfrac{d}{dt}\left({}_{t}p_{x}\ \mathring{e}_{x+t}\right) = -\ {}_{t}p_{x}$

（ｂ）　$\displaystyle\int_{0}^{\infty} v^{t}\ {}_{t}p_{x}\ \mathring{e}_{x+t}\,dt = \frac{1}{\delta}\left(\mathring{e}_{x} - \bar{a}_{x}\right)$

（（ａ）については第２章 練習問題（１）の（１６）を用いる）

§6　定期保険の一時払保険料（保険金年末支払の場合）

定期保険とは、被保険者が契約日から一定期間内に死亡した場合に一定額の保険金（死亡保険金）が支払われる保険である。生存保険に対比して**死亡保険**とも言われる。保険金支払の時点をいつにするかによって計算の方法が異なるが、本節ではまず死亡が発生した年度の年末に保険金が支払われる場合をとりあげる。

x 歳の被保険者が n 年以内に死亡した場合に保険金1を死亡の年度末に支払う定期保険の一時払純保険料は $A^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ で表わされる。（添字 ${}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ は、x 歳の加入者の死亡と保険期間 n の終了とを比べて、前者が先に起こることを意味する。${}_{|n}A_x$ という記号を使用することもある）まず $n=1$（1年定期保険）とすると、契約時点で $A^{\,1}_{x:\overline{1}|}$ を l_x 人から徴収し、それを利殖して1年内に死亡した d_x 人について1年後に1ずつ支払うようにするのであるから、$l_x A^{\,1}_{x:\overline{1}|}(1+i)=d_x$ を解いて $A^{\,1}_{x:\overline{1}|}$ が得られる。すなわち

$$A^{\,1}_{x:\overline{1}|}=v\,\frac{d_x}{l_x} \tag{4.6.1}$$

$$=v\,q_x \tag{4.6.2}$$

となる。計算を簡単にするため

$$C_x=v^{x+1}d_x$$

という記号を導入すると、(4.6.1) の分母と分子に v^x を掛け、さらに (4.2.3) を用いて

$$A^{\,1}_{x:\overline{1}|}=\frac{C_x}{D_x} \tag{4.6.3}$$

とすることができる。D_x と同様に C_x もすべての年齢 x に対して計算されて生命表に添付されているので、それを用いれば計算が迅速に行われる。

一般の n 年定期保険の場合には、第1年度に死亡する者 d_x について支払う総額の現価が $v\,d_x$ であり、第2年度に死亡する者について支払う総額の現価が $v^2\,d_{x+1}$ であり、以下同様なことが繰り返せる。従って一時払保険料は

$$l_x\,A^{\,1}_{x:\overline{n|}} = v\,d_x + v^2\,d_{x+1} + \cdots\cdots + v^n\,d_{x+n-1}$$

を解いたもので、(2.2.5) を用いると

$$A^{\,1}_{x:\overline{n|}} = v\,q_x + v^2\,{}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n\,{}_{n-1|}q_x \tag{4.6.4}$$

となる。 ${}_{f|}q_x = \dfrac{d_{x+f}}{l_x}$ の分母と分子に v^x を掛けて整頓すると

$$A^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\left(C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+n-1}\right) \tag{4.6.5}$$

となる。さらにすべての年齢について、あらかじめ

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{\omega-1}$$

が計算されていると、次のように簡略な表現ができる。

$$A^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{4.6.6}$$

据置期間 f 年を経過した後の n 年間の死亡者について保険金を支払う定期保険では

$$\begin{aligned}
{}_{f|}A^{\,1}_{x:\overline{n|}} &= \sum_{t=f}^{f+n-1} v^{t+1}\,{}_{t|}q_x = A_{x:\overset{1}{\overline{f|}}}\ A^{\,1}_{x+f:\overline{n|}} \\
&= \frac{D_{x+f}}{D_x}\ \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_{x+f}} \\
&= \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_x}
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

定期保険で $n=\omega-x$ としたものが**終身保険**であるが、その場合は一時払保険料は A_x で表わされ

$$A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} v^{t+1}\ {}_{t|}q_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{4.6.8}$$

となる。また据置終身保険では次のようになる。

$${}_{f|}A_x = A_{x:\overline{f|}}^{\ 1}\ A_{x+f} = \frac{M_{x+f}}{D_x} \tag{4.6.9}$$

なお $A_{x:\overline{n|}}^{\ 1}$ は次のように $\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ と関係づけることができる。すなわち（2.2.6）によって ${}_{t|}q_x = {}_tp_x\ q_{x+t}$ として

$$A_{x:\overline{n|}}^{\ 1} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x\ q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}\ {}_tp_x(1-p_{x+t})$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} (v\ v^t\ {}_tp_x - v^{t+1}\ {}_{t+1}p_x)$$

$$= v\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} \tag{4.6.10}$$

$$= v\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - (\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - 1 + v^n\ {}_np_x)$$

$$= 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - v^n\ {}_np_x \tag{4.6.11}$$

（4.6.10）は次のように解釈される。すなわち、右辺の第1項は各年度の始めに被保険者が生存していればその年度末に1を支払う年金の現価であり、第2項は各年度末に被保険者が生存していれば1を支払う年金の現価である。両者の差は各年度の死亡者について年度末に1を支払う契約の現価であるから、左辺すなわち n 年定期保険の一時払保険料となる。

§7　定期保険の一時払保険料（保険金年 k 回支払の場合）

本章§4の生命年金の場合にしたように、1年を k 個に等分して各 $\dfrac{1}{k}$ 年間の死亡者についてその期末に死亡保険金を支払うような定期保険を考えてみよう。(例えば $k=4$ ならば3月毎に、直前3月間の死亡に

対する保険金が支払われる）n 年定期保険の場合、その一時払純保険料を $A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$ で表わすことにすると

$$A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}=\frac{1}{l_x}\left\{ v^{\frac{1}{k}}\left(l_x-l_{x+\frac{1}{k}}\right)+v^{\frac{2}{k}}\left(l_{x+\frac{1}{k}}-l_{x+\frac{2}{k}}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+v^{n}\left(l_{x+n-\frac{1}{k}}-l_{x+n}\right)\right\}$$
$$=v^{\frac{1}{k}}\left(1-{}_{\frac{1}{k}}p_x\right)+v^{\frac{2}{k}}\left({}_{\frac{1}{k}}p_x-{}_{\frac{2}{k}}p_x\right)$$
$$+\cdots\cdots+v^{n}\left({}_{n-\frac{1}{k}}p_x-{}_{n}p_x\right) \tag{4.7.1}$$

となる。n が整数でなくても $\dfrac{1}{k}$ の倍数であれば（4.7.1）は成立する。

この場合（4.6.10）および（4.6.11）と類似した次のような式をつくることができる。すなわち（4.4.1）を用い、また（1.2.9）から得られる $k\left(1-v^{\frac{1}{k}}\right)=d^{(k)}$ を用いると

$$A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}=v^{\frac{1}{k}}\left\{1+v^{\frac{1}{k}}\,{}_{\frac{1}{k}}p_x+\cdots\cdots+v^{n-\frac{1}{k}}\,{}_{n-\frac{1}{k}}p_x\right\}$$
$$-\left\{v^{\frac{1}{k}}\,{}_{\frac{1}{k}}p_x+v^{\frac{2}{k}}\,{}_{\frac{2}{k}}p_x+\cdots\cdots+v^{n}\,{}_{n}p_x\right\}$$
$$=k\,v^{\frac{1}{k}}\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}-k\,a^{(k)}_{x:\overline{n}|} \tag{4.7.2}$$
$$=k\,v^{\frac{1}{k}}\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}-\left\{k\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}-1+v^{n}\,{}_{n}p_x\right\}$$
$$=1-d^{(k)}\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}-v^{n}\,{}_{n}p_x \tag{4.7.3}$$

この式によって、整数値 n について $A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$ を計算する必要があれば、（4.4.3）で近似計算した $\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ をここに代入してそれを行うことができる。

あるいは次のようにして $A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$ から近似計算することもできる。すなわちまず $A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{1}|}$ について計算するが、その際支払期日 $\dfrac{1}{k}$，$\dfrac{2}{k}$，・・・・，1 の平均値 $\dfrac{1}{k}\;\dfrac{k(k+1)}{2}\div k=\dfrac{k+1}{2k}$ の時点で１年間の全死亡契約の保険金が支払われると考える。従って

$$A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{1}|}\doteqdot v^{\frac{k+1}{2k}}\;\frac{d_x}{l_x}$$

とする。第2年度以降にも同様の考え方をすると

$$A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \fallingdotseq v^{\frac{k+1}{2k}-1}\left(v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + \cdots\cdots + v^n\frac{d_{x+n-1}}{l_x} \right)$$

$$= (1+i)^{\frac{k-1}{2k}}\ A_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \qquad (4.7.4)$$

が得られる。これが極めてよい近似であることは次節の $k = \infty$ の場合から類推される。

（ $k = 1$ の場合は（4.7.4）の両辺が等しくて誤差は0であり、一方 $k = \infty$ の場合も次節で見るように誤差は極めて小さい）

§8　定期保険の一時払保険料（保険金即時支払の場合）

前節の分割期末払の場合で $k \to \infty$ とした極限の場合が保険金即時支払の場合である。（2.4.9）より

$$-\Delta\,{}_tp_x = {}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\Delta t$$

とすることができるので、（4.7.1）の極限としてこの場合の一時払純保険料をもとめると

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \lim_{k\to\infty} A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \sum v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,\Delta t$$

$$= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt \qquad (4.8.1)$$

となる。（4.7.3）で $k \to \infty$ とすれば

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = 1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} - v^n\,{}_np_x \qquad (4.8.2)$$

が得られるが、（2.4.9）と（4.5.1）を用いて、次のように部分積分によってこれを直接証明することもできる。

$$\bar{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \int_0^n v^t\left(-\frac{d\,{}_tp_x}{dt}\right)dt$$

$$= \left[- v^t {}_t p_x \right]_0^n + \int_0^n (\log v) v^t {}_t p_x \, dt$$

$$= 1 - v^n {}_n p_x + (\log v) \int_0^n v^t {}_t p_x \, dt$$

$$= 1 - v^n {}_n p_x - \delta \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

従って近似値（4.5.2）または（4.5.3）を用いて $\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ の計算をすることができるが、通常は前節の（4.7.4）で $k \to \infty$ とした場合、すなわち

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq (1 + i)^{\frac{1}{2}} A^{\,1}_{x:\overline{n}|} \tag{4.8.3}$$

によって計算する。これは（4.6.4）を入れて書き直すと

$$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq v^{\frac{1}{2}} q_x + v^{1\frac{1}{2}} {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^{n-\frac{1}{2}} {}_{n-1|}q_x \tag{4.8.4}$$

となり、各年度の中央で、その年度の死亡契約全部の支払を行っていることを表わしている。

これが（4.8.1）と殆ど差異がないことを見るために、$\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{1}|}$ に第２章§３の（４）を適用してみる。そこで扱われた関数を $f(t) = v^t$, $g(t) = {}_t p_x \, \mu_{x+t}$ とすると、

$\int_0^1 f(t) \, g(t) \, dt = \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{1}|}$ 　を　$v^{\frac{1}{2}} \int_0^1 g(t) \, dt = v^{\frac{1}{2}} q_x$ で近似する場合の誤差として（2.3.7）すなわち

$$\frac{1}{6} \left\{ (1 - v^{\frac{1}{2}}) \mu_x - (v^{\frac{1}{2}} - v) p_x \, \mu_{x+1} \right\}$$

が得られる。$v^{\frac{1}{2}}$ と v が極めて１に近く、μ_x と $p_x \, \mu_{x+1}$ とが近いことを考えると、この誤差は $v^{\frac{1}{2}} q_x$ に比べて非常に小さいものであることが分かる。例えば $x = 50$ について第４回全会社表，$i = 6\%$ で計算してみると、$v^{\frac{1}{2}} q_x$ が0.0042931であるのに対し、この値は－0.00000167で無視できる。

従って $\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{1}|}$ と $v^{\frac{1}{2}} q_x$ とは今後混同して用いることにする。そうすれば（4.6.2）を簡略に表わしたときのように、記号

$$\bar{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}} d_x$$

を導入して、 $\bar{C}_x$ をすべての x についてあらかじめ計算しておけば、

$v^{\frac{1}{2}} q_x = v^{\frac{1}{2}} \dfrac{d_x}{l_x}$ の分母と分子に v^x を掛けて、計算に便利な式

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{1}|} = \frac{\bar{C}_x}{D_x} \qquad (4.8.5)$$

を得ることができる。また（4.8.2）より、

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = v^{\frac{1}{2}} q_x + (v\, p_x)(v^{\frac{1}{2}} q_{x+1}) + \cdots\cdots + (v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x)(v^{\frac{1}{2}} q_{x+n-1})$$

$$= \frac{\bar{C}_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x}\ \frac{\bar{C}_{x+1}}{D_{x+1}} + \cdots\cdots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x}\ \frac{\bar{C}_{x+n-1}}{D_{x+n-1}}$$

$$= \frac{1}{D_x} (\bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \cdots\cdots + \bar{C}_{x+n-1})$$

となる。この式から分かるように、保険金即時支払のときは常に年度の中央で全死亡が起こると考えればよい。次に(4.6.6)を得た時のように

$$\bar{M}_x = \bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \cdots\cdots + \bar{C}_{\omega-1}$$

という記号を導入して、あらかじめすべての x についてこれを計算しておけば、(4.6.6) に類似の

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{D_x} \qquad (4.8.6)$$

が得られる。記号の定義から

$$\bar{C}_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} C_x, \qquad \bar{M}_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} M_x \qquad (4.8.7)$$

であるので、(4.6.6) と (4.8.6) の比較から再び (4.8.3) が得られる。

また (4.6.7)，(4.6.8)，(4.6.9) と同じように、f 年据置 n 年定期保険、終身保険、f 年据置終身保険のそれぞれにつき次の式が得られる。

$$_{f|}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{\bar{M}_{x+f} - \bar{M}_{x+f+n}}{D_x} \qquad (4.8.8)$$

$$\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_x}{D_x} \qquad (4.8.9)$$

$$_{f|}\bar{A}_x = \frac{\bar{M}_{x+f}}{D_x} \quad . \qquad (4.8.10)$$

なお支払時点から分かるように

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} < A^{(k)1}_{x:\overline{n|}} < \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} \qquad (4.8.11)$$

である。これは（4.7.4）,（4.8.3）からも得られる。

§9　養老保険の一時払保険料

養老保険は生存保険と定期保険との組合わせであって、被保険者が所定の保険期間内に死亡するか、または保険期間終了時点で生存している場合に、一定額の保険金を支払うものである。従って**生死混合保険**とよぶこともある。（保険種類を生存保険と死亡保険の二つに大別するときは死亡保険に入れられる）

保険金額1で死亡保険金年末支払の場合の一時払純保険料は $A_{x:\overline{n|}}$ で表わされるが、（4.6.4）と（4.2.2）から

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n|}} &= v\, q_x + v^2\, {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n\, {}_{n-1|}q_x + v^n\, {}_n p_x \qquad (4.9.1) \\ &= A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \end{aligned}$$

である。あるいは（4.6.6）と（4.2.4）を用いて表わすと

$$A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \qquad (4.9.2)$$

である。据置期間があれば

$$ {}_{f|}A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n} + D_{x+f+n}}{D_x} \tag{4.9.3} $$

となることも容易に確かめられる。

また（4.6.11），（4.6.10）から分かるように

$$ A_{x:\overline{n|}} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{4.9.4} $$

$$ = v\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n-1|}} \tag{4.9.5} $$

となる。（4.9.4）には次のような解釈が与えられる。：今利率 i で1なる金額を銀行に預け、すぐにそのうちから d（$= 1 - v = \dfrac{i}{1+i}$）なる金額を引き出す。残金は1年後に $(1-d)(1+i) = 1$ に戻っているが、そこでまた d を引き出す。このようなことを繰り返して行って、もし n 年間の間に死亡があれば、その年末に1を引き出して終わりにし、死亡がなければ n 年後に1を引き出して終わりにする。これを契約時点の現価でみれば

$$ 1 = d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}} $$

となり、（4.9.4）が得られる。あるいは（4.9.4）を

$$ d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 - A_{x:\overline{n|}} \tag{4.9.6} $$

と書き直して（1.5.19）と比べると：死亡または満期時に支払う1のかわりに、現時点で1を支払った場合の利息の損失は $d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ である。

死亡保険金が年 k 回支払のとき、あるいは即時支払のときも、同様の定義ができ、同様の式が得られる。それぞれの式の証明を試みるのは冗長になるので読者の演習に委ねることとするが、次式が基本的な関係である。

$$ A^{(k)}_{x:\overline{n|}} = A^{(k)\,1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} $$

$$ \bar{A}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} $$

$$= \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{4.9.7}$$

また f 年据置で即時支払のときは次式が得られる。

$${}_{f|}\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{M}_{x+f} - \bar{M}_{x+f+n} + D_{x+f+n}}{D_x} \tag{4.9.8}$$

さらに（4.7.3），（4.8.2）より次式を導くこともできる。

$$A^{(k)}_{x:\overline{n}|} = 1 - d^{(k)}\ \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} \tag{4.9.9}$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} \tag{4.9.10}$$

なお、先に終身保険は定期保険で $n \to \infty$ とした場合と言ったが、養老保険で $n \to \infty$ とした場合と考えることもできる。従って（4.9.4），（4.9.5），（4.9.9），（4.9.10）は終身保険についても成立し、次式が得られる。

$$A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x \tag{4.9.11}$$

$$= v\,\ddot{a}_x - a_x \tag{4.9.12}$$

$$A^{(k)}_x = 1 - d^{(k)}\,\ddot{a}^{(k)}_x \tag{4.9.13}$$

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\,\bar{a}_x \tag{4.9.14}$$

最後に（4.8.11）の各項に $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ を加えると

$$A_{x:\overline{n}|} < A^{(k)}_{x:\overline{n}|} < \bar{A}_{x:\overline{n}|} \tag{4.9.15}$$

となることが分かる。この不等式の各項の大きさの差を考えてみよう。まず（4.7.4）より

$$A^{(k)}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} = A^{(k)}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} - A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$$

$$\fallingdotseq \frac{k-1}{2k}\,i\,A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} \tag{4.9.16}$$

となり、同様に（4.8.3）から

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} \doteqdot \frac{i}{2} A^{1}_{x:\overline{n}|} \qquad (4.9.17)$$

となる。(4.9.17) は、養老保険の保険金即時支払では年末支払に比べて全死亡者に対し平均して死亡保険金1に対する半年分の利息 $\frac{i}{2}$ を余分に支払っている、ことを意味している。

§10　計算基数

これまでに定義した記号 D , N , C , M , $\bar{C}$, $\bar{M}$ は**計算基数**と呼ばれる。これらは、一時払保険料のみでなく年払保険料や責任準備金等の各種保険価格について、その計算を簡略にする便利なものなので、ここで整理して述べておく。生命表と利率が与えられたとき、これらは

$$D_x = v^x l_x \qquad (4.10.1)$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{\omega-1} \qquad (4.10.2)$$

$$C_x = v^{x+1} d_x \qquad (4.10.3)$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{\omega-1} \qquad (4.10.4)$$

$$\bar{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}} d_x \qquad (4.10.5)$$

$$\bar{M}_x = \bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \cdots\cdots + \bar{C}_{\omega-1} \qquad (4.10.6)$$

によって計算される。D_0 , D_1 ,……, $D_{\omega-1}$ が計算されていると、終わりから順次加えて $N_{\omega-1}$, $N_{\omega-2}$, ……, N_0 が計算できる。M_x と $\bar{M}_x$ についても同様である。さらに

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \cdots\cdots + N_{\omega-1} \qquad (4.10.7)$$

$$R_x = M_x + M_{x+1} + \cdots\cdots + M_{\omega-1} \qquad (4.10.8)$$

$$\bar{R}_x = \bar{M}_x + \bar{M}_{x+1} + \cdots\cdots + \bar{M}_{\omega-1} \qquad (4.10.9)$$

という計算基数も導入されている。これらは次節で述べるようなやや複雑な保険種類の計算で利用される。

選択表を計算の基礎に用いるときは、選択期間内では $t = 0, 1, 2, \cdot\cdot\cdot\cdot$ に対し

$$D_{[x]+t} = v^x\, l_{[x]+t}$$

$$C_{[x]+t} = v^{x+1}\, d_{[x]+t}\,, \qquad \overline{C}_{[x]+t} = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_{[x]+t}$$

等とし、選択期間を過ぎれば

$$D_{[x]+t} = D_{x+t}\,, \qquad C_{[x]+t} = C_{x+t}\,, \qquad \overline{C}_{[x]+t} = \overline{C}_{x+t}$$

等として計算をしておき、さらにこれらを用いて N ，M ，$\overline{M}$ 等を上記に準じて計算しておいて使用する。しかし簡単に述べるため今後の諸式はすべて総合表使用の場合とする。選択表のときは、上記の基数を用いて総合表の場合に準じて式を作ればよい。巻末に第4回全会社表（男）について、利率が 5.5%，6%，6.25% の場合のこれらの計算基数の表を掲載した。

なお

$$C_x = v^{x+1}\, d_x = v^{x+1}\,(\, l_x - l_{x+1})$$

であるから、死亡に関する基数と生存に関する基数との間には

$$C_x = v\, D_x - D_{x+1} \tag{4.10.10}$$

という関係がある。これを（4.10.4）に入れて（4.10.2）を用いると

$$M_x = v\, N_x - N_{x+1} \tag{4.10.11}$$

という関係もできる。この式を（4.6.6）に入れて（4.3.13），（4.3.10）を用いると

$$A^{\ 1}_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{v(\, N_x - N_{x+n}\,)}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$= v\, \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}$$

となり、再び（4.6.10）が証明される。従ってこれを変形した（4.9.5）あるいは（4.9.4）も再び証明されている。

第4章　練習問題（2）

（1）　$p_x = \dfrac{1-(1+i)A_x}{1-A_{x+1}}$,　$q_x = \dfrac{(1+i)A_x - A_{x+1}}{1-A_{x+1}}$
を証明せよ。

（2）　$x+t$ 歳における死亡率だけを大きくして $q'_{x+t} = q_{x+t} + c$
とすれば、そのような死亡表を用いて計算した A'_x については

$$A'_x = A_x + c\, v^{t+1}\, {}_tp_x (1 - A_{x+t+1})$$

となることを証明せよ。

（3）　次式を証明せよ。

（a）　$$\frac{A_{x+n} - A_x}{1-A_x} + \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x} = 1$$

（b）　$$\frac{1}{i} - \frac{a_{x:\overline{n}|}}{d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$$

（c）　$$\frac{v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|}} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}$$

（4）　式（4.6.10）の解釈にならって、式（4.7.2）

$$\overset{(k)}{A}{}^{1}_{x:\overline{n}|} = k\, v^{\frac{1}{k}}\, \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} - k\, a^{(k)}_{x:\overline{n}|}$$

を解釈せよ。

（5）　μ_x が年齢に関係なく定数 c に等しいときには

$$\bar{A}_x = c\,\bar{a}_x = \frac{c}{c+\delta}$$

となることを証明せよ。

（6）　$\mu_{x+t} > \mu_x$（$t > 0$）であれば

$$\bar{a}_x < \frac{1}{\mu_x + \delta}$$

となることを証明せよ。

（7）　次式を証明せよ。

（a）　$$\frac{d\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{dx} = \mu_x\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} - \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$$

（b）　$$\frac{d\,\bar{a}_x}{dx} = \bar{a}_x(\mu_x + \delta) - 1$$

（c）　$$\frac{d\,\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{dx} = \delta(\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - \mu_x\,\bar{a}_{x:\overline{n}|})$$

（d）　$$\frac{d\,\bar{A}_x}{dx} = \bar{A}_x(\mu_x + \delta) - \mu_x$$

（8）　$\dfrac{d}{dx}(l_x\,\bar{a}_x) = -\,l_x\,\bar{A}_x$　を証明せよ。

（9）　付録の第５回全会社表，利率5.5％の計算基数表を用い、最初の10年間の死亡に対しては保険金１を即時に支払い、次の10年間の死亡に対しては保険金２を即時に支払い、最後の10年間の死亡に対しては保険金３を即時に支払うような定期保険に30歳の男子が加入する場合の一

時払保険料を求めよ。

（１０）　$D_x > \bar{M}_x > M_x$　を証明せよ。

（１１）　次式を証明せよ。

（a）　$M_x = D_x - d\,N_x$

（b）　$\dfrac{1}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}\,v^{n-t-1} + D_{x+n}\right) = v^n$

（c）　$\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}\,A_{x+t} = l_x\,a_x$

（１２）　$\ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{1}{D_x}\sum_{t=1}^{n-1} C_{x+t-1}\,\ddot{a}_{\overline{n-t|}}$　を証明せよ。

（１３）

$$\frac{1}{D_x\,\ddot{s}_{\overline{n|}}}\left(C_x\,\ddot{s}_{\overline{1|}} + C_{x+1}\,\ddot{s}_{\overline{2|}} + \cdots\cdots + C_{x+n-1}\,\ddot{s}_{\overline{n|}}\right)$$

$$= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} - \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

を証明せよ。

§１１　変動年金および保険金変動保険の一時払保険料

変動年金とは、これまでのように支払われる年金額が毎回一定でなく、あらかじめ定められた規則に従って変動するものである。（第１章 §８参照）また**保険金変動保険**とは、死亡保険金が一定でなく、死亡の起こる年度によって変動するものである。前節に挙げた記号 S_x および R_x（あるいは $\overline{R}_x$）がこれらに関する計算に利用される。次にいくつかの例をあげよう。

（１）　x 歳の被保険者に対する期始払年金で、年金額が第１年度に１、第２年度に２、というように毎年１ずつ増加するいわゆる期始払**累加年金**を考えよう。この年金の現価（一時払純保険料）は第１章§８の場合と同様に $I\ddot{a}$ という記号を用いて表わされる。年金支払期間を n とすると

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^t\,{}_tp_x$$

$$= \frac{1}{D_x}(D_x + 2D_{x+1} + \cdots\cdots + nD_{x+n-1})$$

$$= \frac{1}{D_x}\{(N_x - N_{x+n}) + (N_{x+1} - N_{x+n}) + \cdots\cdots + (N_{x+n-1} - N_{x+n})\}$$

$$= \frac{1}{D_x}(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}) \qquad (4.11.1)$$

となる。期末払のときは、同様に

$$(Ia)_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}(S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}) \qquad (4.11.2)$$

となることが容易に確かめられる。またここで $n \to \infty$ とすれば、終

身年金の場合の式が得られる。

$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x} \tag{4.11.3}$$

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \tag{4.11.4}$$

（2）　x 歳の被保険者に対する期始払年金で、第1年度の年金額が n、第2年度のそれが $n-1$ で、以下毎年1ずつ減少する、いわゆる期始払**累減年金**を考えよう。その現価を表わすには $D\ddot{a}$ という記号を用いる。年金支払期間を n とすると

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\{nD_x + (n-1)D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1}\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{(N_x - N_{x+n}) + (N_x - N_{x+n-1}) + \cdots\cdots + (N_x - N_{x+1})\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1})\} \tag{4.11.5}$$

（3）　（1）と同じ累加年金であるが、年金額が n に到達した後は n のまま終身続く年金は、その現価が $(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x$ で表わされ

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}(D_x + 2D_{x+1} + \cdots\cdots + nD_{x+n-1} + nD_{x+n} + \cdots\cdots)$$

$$= \frac{1}{D_x}(N_x + N_{x+1} + \cdots\cdots + N_{x+n-1})$$

$$= \frac{1}{D_x}(S_x - S_{x+n}) \tag{4.11.6}$$

（４）　（２）と同じ累減年金であるが、年金額が１に到達した後は１のまま終身続く年金は、その現価が $(D_{\overline{n|}}\ \ddot{a})_x$ で表わされ

$$(D_{\overline{n|}}\ \ddot{a})_x=\frac{1}{D_x}\{n\,D_x+(n-1)D_{x+1}+\cdots\cdots+D_{x+n-1}+D_{x+n}+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\{N_x+(N_x-N_{x+n-1})+(N_x-N_{x+n-2})+\cdots\cdots+(N_x-N_{x+1})\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\{\,n\,N_x-(S_{x+1}-S_{x+n})\,\} \qquad (4.11.7)$$

（５）　x 歳の被保険者が、第１年度に死亡する場合は保険金１を、第２年度に死亡する場合は保険金２を支払い、以下同様に死亡に対する保険金が毎年１ずつ増加する、いわゆる**累加定期保険**を考えよう。保険金年末支払で保険期間 n 年の場合の一時払保険料を$(I\,A)^{1}_{x:\overline{n|}}$で表わすと、(4.6.4) と同様にして

$$(I\,A)^{1}_{x:\overline{n|}}=\sum_{t=1}^{n} tv^t\,{}_{t-1|}q_x$$

$$=\frac{1}{D_x}(\,C_x+2\,C_{x+1}+\cdots\cdots+n\,C_{x+n-1}\,)$$

$$=\frac{1}{D_x}\{(M_x-M_{x+n})+(M_{x+1}-M_{x+n})+\cdots\cdots+(M_{x+n-1}-M_{x+n})\}$$

$$=\frac{1}{D_x}(\,R_x-R_{x+n}-n\,M_{x+n}) \qquad (4.11.8)$$

保険金即時支払であれば、R とMのかわりに$\overline{R}$と$\overline{M}$を用いて

$$(I\overline{A})^{1}_{x:\overline{n|}}=\frac{1}{D_x}(\,\overline{R}_x-\overline{R}_{x+n}-n\,\overline{M}_{x+n}) \qquad (4.11.9)$$

である。また累加終身保険では　$n \rightarrow \infty$　として

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}\ , \qquad (I\bar{A})_x = \frac{\bar{R}_x}{D_x} \tag{4.11.10}$$

（６）　第１年度の死亡保険金がn、第２年度のそれが $n-1$ で、以下毎年１ずつ減少し、第n年度で１となる、いわゆる**累減定期保険**の一時払保険料は

$$(DA)^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}\{\, n\,C_x + (n-1)\,C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+n-1}\,\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{\, n\,M_x - (R_{x+1} - R_{x+n+1})\} \tag{4.11.11}$$

（７）　（５）の場合のような累加保険であるが、死亡保険金がnに到達した後はnのまま継続する終身保険の一時払保険料を$(I_{\overline{n|}}\,A)_x$とすると

$$(I_{\overline{n|}}\,A)_x = \frac{1}{D_x}\,(\,C_x + 2\,C_{x+1} + \cdots\cdots + n\,C_{x+n-1} + n\,C_{x+n} + \cdots\cdots)$$

$$= \frac{1}{D_x}\,(\,M_x + M_{x+1} + \cdots\cdots + M_{x+n-1})$$

$$= \frac{1}{D_x}\,(\,R_x - R_{x+n}) \tag{4.11.12}$$

（８）　（６）の場合のように死亡保険金が累減するが、それが１に到達した後は１のまま継続する終身保険の一時払保険料は

$$(D_{\overline{n|}}A)_x=\frac{1}{D_x}\{n\,C_x+(n-1)C_{x+1}+\cdots\cdots+C_{x+n-1}+C_{x+n}+\cdots\cdots\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\{M_x+(M_x-M_{x+n-1})+(M_x-M_{x+n-2})+\cdots\cdots+(M_x-M_{x+1})\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\{\,n\,M_x-(R_{x+1}-R_{x+n})\}\tag{4.11.13}$$

（９）　(4.11.9) の $(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}$ は保険金即時支払であるが、第 t 年度内の死亡に対しすべて同一の額 t とした場合のものである。これに対し死亡保険金も連続的に変化させて、契約時からの経過 t（ただし1年未満の端数もそのまま用いる）で死亡した者には保険金 t を即時に支払う場合、その一時払保険料を $(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}$ で表わすと

$$(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}=\int_0^n t\,v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}\,dt\tag{4.11.14}$$

となる。　これについては次のような近似値が得られる。すなわち

$$(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}=\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1(t+s)\,v^{t+s}\,{}_{t+s}p_x\,\mu_{x+t+s}\,ds$$

とし、(2.3.6) を導いたときのように s の区間〔 0, 1 〕で $t+s$ を中間値 $t+\frac{1}{2}=t+1-\frac{1}{2}$ で近似することにすると

$$(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}\fallingdotseq\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1\left(t+1-\frac{1}{2}\right)v^{t+s}\,{}_{t+s}p_x\,\mu_{x+t+s}\,ds$$

$$\fallingdotseq\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\,v^{t+\frac{1}{2}}\int_0^1{}_{t+s}p_x\,\mu_{x+t+s}\,ds-\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1 v^{t+s}\,{}_{t+s}p_x\,\mu_{x+t+s}\,ds$$

$$=(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}-\frac{1}{2}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\tag{4.11.15}$$

§１２　生命年金現価の確率論的表示

保険金年末支払のn年満期養老保険の一時払保険料は（4.9.1）

$$A_{x:\overline{n|}} = v\,q_x + v^2{}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n{}_{n-1|}q_x + v^n{}_np_x \quad (4.12.1)$$

で与えられるが、今 $q_x + {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x + {}_np_x = 1$ であることに注目すると、これは第t年度の死亡に対する支払金の現価 v^t（t＝1, 2, ・・・, n）およびn年後生存に対する支払金の現価 v^n にそれぞれの発生確率を掛けたものの和である。すなわち $A_{x:\overline{n|}}$ は支払金の現価を一つの確率変数とみたときの平均値である。同様に（4.6.4）を

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = v\,q_x + v^2{}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n{}_{n-1|}q_x + 0\,{}_np_x \quad (4.12.2)$$

と書けば、$A^{1}_{x:\overline{n|}}$ も支払金の現価を確率変数とみたときの平均値を表わす。

生命年金についても、そのようにこれを支払金の現価の平均値とみることができる。例えば期始払n年有期年金では

第１年度の死亡に対する支払総額の現価		$\ddot{a}_{\overline{1|}}$
第２年度	〃	$\ddot{a}_{\overline{2|}}$
・	・	・
・	・	・
・	・	・
第n年度	〃	$\ddot{a}_{\overline{n|}}$
n年後の生存に対する支払総額の現価		$\ddot{a}_{\overline{n|}}$

であるのに対し、それぞれの発生確率は q_x, ${}_{1|}q_x$, ………, ${}_{n-1|}q_x$,

${}_{n}p_x$ であるが、この確率を用いて平均値を求めると、それが生命年金現価となる。すなわち

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{1}|}\, q_x + \ddot{a}_{\overline{2}|}\, {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_{n-1|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\, {}_{n}p_x \qquad (4.12.3)$$

$$(\, q_x + {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x + {}_{n}p_x = 1\,)$$

となる。これが（4.3.11）に等しいことは次のようにして証明される。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= 1\, q_x + (1+v)\, {}_{1|}q_x + (1+v+v^2)\, {}_{2|}q_x \\
&\qquad + \cdots\cdots + (1+v+\cdots\cdots+v^{n-1})(\, {}_{n-1|}q_x + {}_{n}p_x) \\
&= (\, q_x + {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x + {}_{n}p_x) \\
&\qquad + v\,(\, {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + {}_{n-1|}q_x + {}_{n}p_x) \\
&\qquad + \cdots\cdots \\
&\qquad + v^{n-1}(\, {}_{n-1|}q_x + {}_{n}p_x) \\
&= 1 + v\, p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\, {}_{n-1}p_x
\end{aligned}$$

期末払についても同様に

$$a_{x:\overline{n}|} = 0\, q_x + a_{\overline{1}|}\, {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + a_{\overline{n-1}|}\, {}_{n-1|}q_x + a_{\overline{n}|}\, {}_{n}p_x \qquad (4.12.4)$$

となることが証明され、これは一つの平均値を表わしている。

ところで（1.5.19）により $d\,\ddot{a}_{\overline{t}|} = 1 - v^t$ であるので、(4.12.3)に入れると

$$\begin{aligned}
d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= (1-v)q_x + (1-v^2)\, {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + (1-v^n)\, {}_{n-1|}q_x + (1-v^n)\, {}_{n}p_x \\
&= 1 - (\, v\, q_x + v^2\, {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^n\, {}_{n-1|}q_x + v^n\, {}_{n}p_x)
\end{aligned}$$

となるが、(4.12.1）によればこれは $1 - A_{x:\overline{n}|}$ に等しいから、これによって再び（4.9.4）が得られた。

（4.12.3）と同様の平均値としての表現を $\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ について求めると

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{nk} \ddot{a}^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}}|}\, \frac{l_{x+\frac{t-1}{k}} - l_{x+\frac{t}{k}}}{l_x} + \ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|}\, \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (4.12.5)$$

となる。また連続年金では

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{t|}}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt + \bar{a}_{\overline{n|}}\ {}_np_x \tag{4.12.6}$$

となる。(1.7.2) より $\bar{a}_{\overline{t|}} = \dfrac{1-v^t}{\delta}$ であるので

$$\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n (\ 1 - v^t\ )\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt + (\ 1 - v^n\ )\ {}_np_x$$

となるが、ここで (2.4.7) と (4.8.1), (4.2.2) を用いると

$$\begin{aligned}\delta\,\bar{a}_{x:\overline{n|}} &= (\ {}_nq_x + {}_np_x\ ) - (\ \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overset{\ 1}{\overline{n|}}}\ )\\ &= 1 - \bar{A}_{x:\overline{n|}}\end{aligned}$$

となり、再び (4.9.10) が得られる。

§13　完全年金

期末払生命年金ではあるが、期中の死亡に対しては前期末から死亡までの端数期間に比例した額を支払う年金を**完全年金**という。記号は $\mathring{a}$ で表わす。

例えば年 k 回期末払の n 年有期完全年金の場合は

$$\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}} = a^{(k)}_{x:\overline{n|}} + \alpha \tag{4.13.1}$$

と書け、ここに α は期中の死亡に対して支払う端数の年金である。すなわち期間〔 $\dfrac{t}{k}$ ， $\dfrac{t+1}{k}$ 〕内にある時点 $\dfrac{t}{k} + s$ ($0 < s < \dfrac{1}{k}$) における死亡に対する端数年金は s で、その時点における死亡者の割合は ${}_{\frac{t}{k}+s}p_x\ \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\ ds$ であるので

$$\alpha = \sum_{t=0}^{nk-1} \int_0^{\frac{1}{k}} s\ v^{\frac{t}{k}+s}\ {}_{\frac{t}{k}+s}p_x\ \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\ ds \tag{4.13.2}$$

である。個々の積分について、(2.3.6) におけるように s の中間値 $\dfrac{1}{2k}$ を与えて積分の近似値とすると

$$\alpha \fallingdotseq \sum_{t=0}^{nk-1} \frac{1}{2k} \int_0^{\frac{1}{k}} v^{\frac{t}{k}+s} {}_{\frac{t}{k}+s}p_x \, \mu_{x+\frac{t}{k}+s} \, ds$$

$$= \frac{1}{2k} \int_0^n v^t \, {}_tp_x \, \mu_{x+t} \, dt$$

$$= \frac{1}{2k} \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} \qquad (4.13.3)$$

となる。すなわち全死亡に対して $\dfrac{1}{2k}$ を与える定期保険の一時払保険料を期末払年金現価に加えればよいことになる。さらに誤差を確かめるために、(4.13.2) の右辺の個々の積分について誤差をとると

$$\int_0^{\frac{1}{k}} \left(s - \frac{1}{2k}\right) v^{\frac{t}{k}+s} {}_{\frac{t}{k}+s}p_x \, \mu_{x+\frac{t}{k}+s} \, ds$$

であるが、ここで $s = \dfrac{u}{k}$ とおくと

$$\int_0^1 \left(\frac{u}{k} - \frac{1}{2k}\right) v^{\frac{t+u}{k}} {}_{\frac{t+u}{k}}p_x \, \mu_{x+\frac{t+u}{k}} \, \frac{1}{k} du$$

となる。この値は (2.3.7) を用いると

$$\fallingdotseq \frac{1}{k} \frac{1}{6} \left\{ \left(0 - \frac{1}{2k}\right) v^{\frac{t}{k}} {}_{\frac{t}{k}}p_x \, \mu_{x+\frac{t}{k}} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k}\right) v^{\frac{t+1}{k}} {}_{\frac{t+1}{k}}p_x \, \mu_{x+\frac{t+1}{k}} \right\}$$

$$\fallingdotseq \frac{-1}{12k^2} \left\{ v^{\frac{t}{k}} {}_{\frac{t}{k}}p_x \, \mu_{x+\frac{t}{k}} - v^{\frac{t+1}{k}} {}_{\frac{t+1}{k}}p_x \, \mu_{x+\frac{t+1}{k}} \right\}$$

となる。これを t について 0 から $nk-1$ までの和をとると

$$\alpha - \frac{1}{2k} \bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq \frac{-1}{12k^2} \left(\mu_x - v^n \, {}_np_x \, \mu_{x+n}\right) \qquad (4.13.4)$$

を得る。 この式を使って (4.13.1) に戻ると

$$\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} \doteqdot a^{(k)}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2k}\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{12k^2}(\mu_x - v^n\,{}_np_x\,\mu_{x+n}) \qquad (4.13.5)$$

というさらに細かい近似式ができる。右辺第３項が小さいとして第２項にとどめることも多い。 $k=1$ の場合が年払の完全年金である。

終身年金の場合は $n\to\infty$ として次式ができる。

$$\mathring{a}^{(k)}_x = a^{(k)}_x + \frac{1}{2k}\bar{A}_x - \frac{1}{12k^2}\mu_x \qquad (4.13.6)$$

次に（1.7.10）でみた確定年金での $i\,a_{\overline{n}|} = \delta\,\bar{a}_{\overline{n}|}$ という関係が、生命年金ではよい近似で $i\,\mathring{a}_{x:\overline{n}|} = \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ という形で成立することを示そう。（4.13.1），（4.13.2）で与えられる $\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$ の定義に対し、（4.12.4）と（2.4.6）とを用いると、$a_{\overline{0}|}=0$ として

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} a_{\overline{t}|}\ {}_{t|}q_x + a_{\overline{n}|}\ {}_np_x + \sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1 s v^{t+s}\ {}_{t+s}p_x\ \mu_{x+t+s}\,ds$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1 (a_{\overline{t}|} + s v^{t+s})\ {}_{t+s}p_x\ \mu_{x+t+s}\,ds + a_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

と表わされる。一方（4.12.6）より

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1}\int_0^1 \bar{a}_{\overline{t+s}|}\ {}_{t+s}p_x\ \mu_{x+t+s}\,ds + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x$$

であるが、ここで（1.7.2），（1.7.10）より

$$\bar{a}_{\overline{t+s}|} = \bar{a}_{\overline{t}|} + \frac{v^t - v^{t+s}}{\delta} = \frac{i}{\delta}a_{\overline{t}|} + \frac{v^{t+s}}{\delta}\left[(1+i)^s - 1\right]$$

$$\doteqdot \frac{i}{\delta}\,a_{\overline{t}|} + \frac{v^{t+s}}{\delta}\,si$$

$$= \frac{i}{\delta}\,(a_{\overline{t}|} + s v^{t+s})$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta}\, a_{\overline{n}|}$$

であるので、上の2式の各項の比較から $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{i}{\delta}\,\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$　すなわち

$$i\,\mathring{a}_{x:\overline{n}|} = \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|} \tag{4.13.7}$$

が得られる。従って（4.9.10）から

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - i\,\mathring{a}_{x:\overline{n}|} \tag{4.13.8}$$

も成立する。この式は $1 = i\,\mathring{a}_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}$ と書いて次のように解釈される。：x 歳の被保険者から預かった金額1を利率 i で彼が死亡するまで投資し、毎年利息 i を支払うとともに、死亡時には端数期間に比例した利息と元金を返す。また n 年間の生存者には毎年の利息 i と満期時に残った元金を返すことにすると、それでちょうど預かり金が清算される。

第4章　練習問題（3）

（1）　$(IA)_{x:\overline{n}|} = (IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + n\,A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1}$　とすれば

$$(IA)_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d\,(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明せよ。((4.9.4) の類似)

（2）　前問の結果を用い、$q_x < q_{x+t}$　$(t = 1, 2, \cdots\cdots)$ であるときは

$$(I\ddot{a})_x < \frac{\ddot{a}_x}{v\,q_x + d} < \left(\frac{1+i}{q_x+i}\right)^2$$

$$(Ia)_x < \frac{\ddot{a}_x\,p_x}{q_x+i} < \frac{p_x(1+i)}{(q_x+i)^2}$$

となることを証明せよ。(本章 練習問題(1)の(2)参照)

（3）　$q_x < q_{x+1} < q_{x+2} < \cdot\cdot\cdot\cdot$　であるときには

$$\frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明せよ。(第1章 練習問題(2)の(7)の類似)

（4）　第 t 年度 $(1 \leqq t \leqq n)$ の死亡には保険金 $(1+r)^t$ を死亡の年度末に支払い、n 年後の生存には保険金 $(1+r)^n$ を支払う n 年満期の保険の一時払保険料は、利率を $j = \dfrac{i-r}{1+r}$ として計算した養老保険の一時払保険料 $A^{[j]}_{x:\overline{n}|}$ に等しいことを証明せよ。

（5）　第 t 年度（ $1 \leqq t \leqq n$ ）の死亡には保険金 $\ddot{a}_{\overline{t m}|}$ を死亡の年度末に支払い、 n 年後の生存には保険金 $\ddot{a}_{\overline{n m}|}$ を支払う n 年満期の保険では、一時払保険料は

$$\frac{1}{d}\left(A_{x:\overline{n}|}-A'_{x:\overline{n}|}\right)$$

という形で表わされることを証明せよ。ここに A' はある利率で計算した一時払保険料である。

（6）　第 t 年度（ $1 \leqq t \leqq n$ ）に年額 t の年金を k 回に分割して期始払で支払う生命年金の現価を $(I\ddot{a})^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ とすれば

$$(I\ddot{a})^{(k)}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}-\frac{k-1}{2k}\left(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-nA_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right)$$

となることを示せ。

（7）　年 k 回払の期始払年金で、年金額が毎回 $\frac{t}{k}$ ずつ増えるもの、すなわち経過が $\frac{1}{k}$ （ $0 \leqq t \leqq nk-1$ ）における年金額が $\frac{t+1}{k}$ となる年金の現価 $(I\ddot{a}^{(k)})_{x:\overline{n}|}$ を表わす式を書け。また、そこで $k \to \infty$ とした連続累加年金 $(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$ を表わす式を書け。

（8）　$(\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}+nA_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}=(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}$ とすれば

$$(\bar{I}\bar{A})_{x:\overline{n}|}=\bar{a}_{x:\overline{n}|}-\delta(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明せよ。((4.9.14) の類似)

（9）　前問の結果を用い $\mu_x < \mu_{x+t}$ （ $t>0$ ）であるときは

$$(\bar{I}\bar{a})_x < \frac{\bar{a}_x}{\mu_x + \delta} < \left(\frac{1}{\mu_x + \delta}\right)^2$$

となることを証明せよ。（本章 練習問題（２）の（６）参照）

（１０）　次式を証明せよ。

$$\frac{d\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{di} = -\,v\,(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$$

$$\frac{d\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{d\delta} = -\,(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$$

（１１）　$\dfrac{d}{dx}(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|} = \mu_x(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|} - (\bar{I}\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|}$　を証明せよ。

（１２）　$\dfrac{d}{dx}(\bar{I}\bar{A})_x = -\bar{A}_x + (\delta + \mu_x)(\bar{I}\bar{A})_x$　を証明せよ。

（１３）　（ａ）（4.12.1）によれば $A_{x:\overline{n}|}$ はある確率変数の平均値であるが、この確率変数の分散は

$$\sigma^2(A_{x:\overline{n}|}) = A^{[2]}_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明せよ。ただし $A^{[2]}_{x:\overline{n}|}$ は（4.12.1）の右辺で v のかわりに v^2 を用いた値である。

（ｂ）平均値 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ が（4.12.3）の右辺で与えられるような確率変数の分散は

$$\sigma^2(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{d^2}\,\sigma^2(A_{x:\overline{n}|})$$

となることを証明せよ。

（１４）　（4.5.1）を変形して（4.12.6）を導け。

（１５） 現在65歳の男子に半年毎に10万円の終身年金が支払われている。年金受取人が、これを３月毎に受取るとともに、死亡の場合には端数期間の比例部分を追給されるような年金に変更することを希望した。第５回全会社表，5.5％によって、３月毎に支払われる新しい年金額を計算せよ。

（１６） (4.13.7) の類似として、よい近似で

$$i^{(k)}\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \delta\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明せよ。

（１７） 前問の結果を用い、次の近似式を証明せよ。

$$\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq \left(1 - \frac{i^{(k)}}{2k}\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq v^{\frac{1}{2k}}\ \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

§１４　年払保険料（平準の場合）

ここまでに述べた保険料はすべて契約時に一時に払込む保険料であったが、ここで毎年の始めに払込むいわゆる年払保険料について計算の仕方を考えてみよう。通常は毎年の始めに同一額の保険料が会社に払込まれる。（**平準保険料**という）今、その額をPとすると、会社に収入されるすべての保険料の現価は$P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$となる。（契約者からみれば、保険料は被保険者の生存するかぎり支払い、死亡すれば以後は支払わないので、会社にPという生命年金を支払うことになるからである）一方保険給付の現価はこれまでに説明した一時払保険料に等しくなる。両者が等しくなるようなPであれば、予定死亡率,予定利率どうり進行した場合保険期間終了時に過不足なく終わる筈である。このように契約の時点でみて収支の現価を等しくするという考えかたを**収支相等の原則**という。以下この原則に基づいて各種保険種類の年払平準保険料を導いてみよう。（なお本節では、一時払保険料や生命年金現価を計算基数で表わすときに、いちいち元の式の番号をあげて引用することは繁雑になるのでしない。読者で復習をかねて探されたい）

（１）　生存保険

x歳契約、保険期間および保険料払込期間が同じn年（これを**全期払込**という）、保険金額１の場合の年払平準保険料を$P(A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})$あるいは$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$で表わすと、収支相等の原則から

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

であり、従って

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{4.14.1}$$

$$= \frac{\dfrac{D_{x+n}}{D_x}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.14.2}$$

となる。保険料払込期間mが保険期間 nより小さいとき（これを**短期払込**という）は、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ のかわりに $\ddot{a}_{x:\overline{m|}}$ を用いればよいから、年払平準保険料を ${}_mP_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ で表わすと、

$${}_mP_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} \tag{4.14.3}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{4.14.4}$$

（２）　確定日払保険

これは、保険期間経過後に被保険者の生死に関係なく一定額を支払うことが約束され、一方保険料は被保険者の生存中払込まれるものである。

保険金１の現価は v^n であるので、その年払保険料を $P(v^n)$ とすれば

$$P(v^n)\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = v^n$$

従って

$$P(v^n) = \frac{v^n}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{4.14.5}$$

（３）　生命年金

m年払込で、m年後開始，年金年額１の期始払 n年有期生命年金（従って払込中の死亡者には年金は支給されない）の年払保険料を

$P({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|})$で表わすと

$$P({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

であるから

$$P({}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.14.6}$$

$$= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{4.14.7}$$

となる。ただしこの保険料は年金年額1に対するものである。このような仕方で各種の複雑な年金の年払保険料を計算することができるが、次に一例のみ挙げておく。

上例で年金がg年保証期間付終身年金であり、かつ年k回支払である場合に、年払保険料をPとすれば

$$P = \frac{v^m {}_mp_x \ddot{a}^{(k)}_{\overline{g}|} + {}_{m+g|}\ddot{a}^{(k)}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.14.8}$$

（4）　定期保険および終身保険

n年定期保険で保険金1が保険年度末に支払われる場合の年払保険料を $P^{1}_{x:\overline{n}|}$ とすれば

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{4.14.9}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.14.10}$$

であり、m年払込の場合は

$${}_mP^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.14.11}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{4.14.12}$$

となる。また保険料は年払であるが保険金は即時支払ということも実際によく行われるが、その時には記号Pの代わりに$\bar{P}$を用いる。計算では一時払保険料として$\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$を用いればよい。従って$m$年払込では

$$_m\bar{P}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.14.13}$$

$$= \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}. \tag{4.14.14}$$

終身保険では、定期保険の式で$n \to \infty$とすればよい。例えば保険金即時支払のm年払込終身保険では

$$_m\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\bar{M}_x}{N_x - N_{x+m}} \tag{4.14.15}$$

となり、普通終身保険では次のようになる。

$$\bar{P}_x = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{\bar{M}_x}{N_x} \tag{4.14.16}$$

（５）　自然保険料

１年定期保険は（４）の特別の場合で、例えば保険金即時支払であると年払保険料は

$$\bar{P}^{\ 1}_{x:\overline{1}|} = \bar{A}^{\ 1}_{x:\overline{1}|} = \frac{\bar{C}_x}{D_x} = v^{\frac{1}{2}}\, q_x \tag{4.14.17}$$

となる。被保険者が生存するかぎり毎年この保険料を用いて契約を更改して継続すれば、n年定期保険と同じ効果が期待される。このような保険料を**自然保険料**という。 例えば$x = 50$，$n = 10$とし、第５回全会

社表，6％を用いると、毎年の自然保険料は、保険金1に対し50歳で0.00429，51歳で0.00480，．．．．，58歳で0.00861，59歳で0.00924となる。一方 $\bar{P}^{\,1}_{50:\overline{10}|}$ は0.00635であり、自然保険料が初期に低く、後期に高いのを均した形になっている。高年齢で自然保険料が禁止的に高くなるような場合に備えて、あらかじめ実際に必要とする額より多く取っておくのが平準保険料の一つの効用である。

なお毎年更新の1年定期保険は次のような利用もされている。第1は**信用生命保険**で、これは債務者が死亡しても債務が完済されるように、債務者を被保険者とし、毎年更新でその年の債務残高を保険金額として1年定期保険を契約するものである。長期債務で貸付元金の返済が少しずつ継続して行われる場合には、それに応じて保険金額は毎年小さくなる。

第2は米国で行われている**ユニバーサル保険**である。これは、あらかじめ死亡保険金額を定めるとともに、契約者は保険と別勘定で積立金を毎年積立てることとし、“死亡保険金額 － 積立金額”を毎年更新の1年定期保険の保険金額として、それに必要な定期保険料を積立金中から支出するものである。積立金の運用利率が生命保険の予定利率より高いと、契約者は同一金額の保障を小さい負担で得られる。（これに関しては、後の第4章 練習問題（4）の（3）を参照されたい）

（6）　養老保険

保険金年末支払のときは保険金額1に対し

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (4.14.18)$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.14.19}$$

$$= P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overset{\ 1}{\overline{n}|}} \tag{4.14.20}$$

このように養老保険では、一時払保険料の場合と同様に年払保険料においても定期保険と生存保険の和と考えることができる。なお（4.9.4）を（4.14.18）に用いると、次の式が得られる。

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d \tag{4.14.21}$$

養老保険のその他の場合についても同様の方法で年払平準保険料の算式が導かれる。例えば保険金即時支払でm年払込（$m < n$）のときは

$${}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.14.22}$$

$$= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{4.14.23}$$

最後に、$\overline{P}_{x:\overline{n}|}$ と $P_{x:\overline{n}|}$ との差の程度を見ておくと、（4.9.17）を用いて

$$\overline{P}_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \left(\overline{A}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} \right)$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \frac{i}{2} A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$$

$$= \frac{i}{2} P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} \tag{4.14.24}$$

（７）　保険金変動保険

§１１で述べた各種の変動年金や保険金変動保険について年払平準保

険料をもとめる際にも、収支相等の原則に基づいて行われる。例えば§11(5)で述べたような保険金累加定期保険で保険金が即時支払であり、かつ保険料払込期間が $m\ (<n)$ 年であるとすると、その年払平準保険料は

$$P=\frac{(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$$

$$=\frac{\bar{R}_x-\bar{R}_{x+n}-n\bar{M}_{x+n}}{N_x-N_{x+m}} \qquad (4.14.25)$$

§15　年払保険料(保険料変動の場合)

前節の平準保険料は保険料が毎年同額のものであったが、それがあらかじめ定められた規則に従って毎年変動するとき**保険料変動保険**という。

その場合の保険料の計算をいくつかの例によって示そう。ここでも収支相等の原則によってつくられた式から保険料の計算式が導かれる。

(1)　保険料が第1年度に P_i，第2年度に $2P_i$ というように毎年 P_i ずつ増加する n 年満期養老保険で保険金即時支払のときには、収入保険料の現価は§11(1)の期始払累加年金 $(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$ を用いて $P_i(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$ で表わされる。従って

$$P_i(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}=\bar{A}_{x:\overline{n|}}$$

より

$$P_i=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}} \qquad (4.15.1)$$

(2)　(1)と同じ養老保険であるが、保険料が第1年度 nP_d，第2年度 $(n-1)P_d$ というように毎年 P_d ずつ減少する場合には、§11

（２）の $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ を用いて

$$P_d(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}=\bar{A}_{x:\overline{n}|}$$

より

$$P_d=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}} \qquad (4.15.2)$$

（３）　保険金即時支払の終身保険で、保険料が $P_{\overline{5}|i}$ に始まって初めの５年間は毎年 $P_{\overline{5}|i}$ ずつ増加し、６年目以降は $5P_{\overline{5}|i}$ で継続する場合は、§１１（３）の $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x$ を用いて

$$P_{\overline{5}|i}=\frac{\bar{A}_x}{(I_{\overline{5}|}\ddot{a})_x} \qquad (4.15.3)$$

（４）　（３）と同じ終身保険で、保険料が $5P_{\overline{5}|d}$ に始まって初めの５年間は毎年 $P_{\overline{5}|d}$ ずつ減少し、６年目以降は $P_{\overline{5}|d}$ で継続する場合は、§１１（４）の $(D_{\overline{n}|}\ddot{a})_x$ を用いて

$$P_{\overline{5}|d}=\frac{\bar{A}_x}{(D_{\overline{5}|}\ddot{a})_x} \qquad (4.15.4)$$

（５）　§１１（７）に述べたような10年累加終身保険（保険金即時支払）で、かつ保険料が上記の（３）に述べたような５年逓増である場合は、第１年度の保険料を P とすると、第１年度の保険金額１に対して

$$P=\frac{(I_{\overline{10}|}\bar{A})_x}{(I_{\overline{5}|}\ddot{a})_x} \qquad (4.15.5)$$

§１６　保険料返還付保険

本章§２の終わりに述べたように、生存保険と称するときでも期間中の死亡に対しなにがしかの給付を行うことが多い。例えばn年の生存保険で、第t年度の死亡に対し生存保険金の$\dfrac{t}{n}$を支払う保険があるが、その場合は年払平準保険料をPとすると、本章§１１（５）で扱った記号を用いて収支相等の原則を表わす式は

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{n}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

となる。従って

$$P = \frac{\dfrac{1}{n}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{4.16.1}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{n}(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}) + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{4.16.2}$$

次に第t年度の死亡に対して既払込保険料すなわち平準営業保険料のt倍を返還するという契約もよく行われる。ここでは計算の原理を理解するために、純保険料のt倍を返還する場合の平準純保険料を求めることにする。(後に第７章§４で営業保険料返還の場合を取り上げる）純保険料のt倍返還の場合は、上例の$\dfrac{1}{n}$の代わりにPを用いればよいから

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \tag{4.16.3}$$

より

$$P = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}} \tag{4.16.4}$$

$$= \frac{D_{x+n}}{(N_x - N_{x+n}) - (R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})} \qquad (4.16.5)$$

となる。既払込平準保険料に年 j %の利息（予定利率 i と異なるものでもよい）を付けて返還する契約では $\ddot{s}'_{\overline{t}|} = \sum_{r=1}^{t} (1+j)^r$ として

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \{ P\ddot{s}'_{\overline{1}|}\, vq_x + P\ddot{s}'_{\overline{2}|}\, v^2{}_{1|}q_x + \cdots\cdots + P\ddot{s}'_{\overline{n}|}\, v^n{}_{n-1|}q_x \} + A_{x:\overline{n}|}^{\ 1} \qquad (4.16.6)$$

より

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \sum_{t=1}^{n} \ddot{s}'_{\overline{t}|}\, v^t{}_{t-1|}q_x} \qquad (4.16.7)$$

となる。$j = i$ の場合には、(1.5.11) より分母における $\ddot{s}'_{\overline{t}|}v^t$ を $\ddot{a}_{\overline{t}|}$ で置き換えることができ、さらに (4.12.3) を用いれば分母は $\ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x$ となる。

次に保険料返還付保険の一例として、条件付保険の特殊な型を考えよう。**条件付保険**とは、疾病等のために死亡危険が標準者よりも高い者に対する保険契約である。死亡危険が一時的のものであれば、その期間保険金額を削減したり、あるいは一時的に特別保険料を徴収して、そのような契約の引受けが行われるが、死亡危険が全保険期間にわたり高い場合には、一般に標準者の死亡率 q_x を割増した $(1+\alpha)q_x$ を用いて新たな死亡表をつくっておき、それを使って保険料を計算する。

$1+\alpha$ を100倍したものを**死亡指数**と呼び、例えば $\alpha = 0.5$ の場合は死亡指数150という。その時の養老保険の一時払保険料，年金現価，年払保険料等を $A_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)}$, $P_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)}$ 等で表わせば

$$P_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)}} \qquad (4.16.8)$$

であって、$P_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} - P_{x:\overline{n}|}$ がこの契約に対する**特別保険料**である。(一

般に $P_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} > P_{x:\overline{n}|}$ となることは第6章§3で述べる）

さてそのような条件付保険で、もし被保険者が満期まで生存した場合には、満期保険金支払に加えて徴収した特別保険料を返還するという契約があったとしよう。その場合の年払保険料 P^R，および特別保険料 $P^R - P$（P は標準者の養老保険保険料とする）は、収支相等の式

$$P^R \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} = A_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} + n(P^R - P)\, A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{(1+\alpha)}$$

より、次のようになる。

$$P^R = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} - n\,PA_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{(1+\alpha)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} - n\,A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{(1+\alpha)}} \tag{4.16.9}$$

$$P^R - P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} - P\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(1+\alpha)} - n\,A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}^{(1+\alpha)}} \tag{4.16.10}$$

第４章　練習問題（４）

（１）　被保険者の年齢 x，保険期間 30年で、満期まで生存すれば満期保険金を支払い、契約から10年以内に死亡すれば満期保険金の３倍の死亡保険金を支払い、次の10年以内に死亡すれば２倍の死亡保険金を支払い、最後の10年間内に死亡すれば満期保険金と同額の死亡保険金を支払う。（死亡保険金即時支払）また保険料は20年間支払うとしたとき、満期保険金１に対する一時払保険料および年払保険料を計算基数を用いて表わせ。

（２）　$P^{1}_{x:\overline{2|}} = \dfrac{A^{1}_{x:\overline{1|}} + A^{1}_{x+1:\overline{1|}}}{2}$ のとき、q_x と q_{x+1} との関係を求めよ。

（３）　第１章§１３で述べたように、n 年かかって目標額１を積立てるためには毎年始に $P_{\overline{n|}} = \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$ を積立てねばならない。その時 t 年後の元利合計は（1.13.13）のように $\dfrac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$ となる。いまもし第 t 年度に死亡すれば目標額との差額 $1 - \dfrac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$ を年度末に支払うような定期保険（保険金変動）に加入して死亡時にも目標額が達成されるようにした。定期保険の予定利率が定期積金の利率と同じであるとして、この保険の一時払保険料 $A'^{1}_{x:\overline{n|}}$ および年払保険料 $P'^{1}_{x:\overline{n|}}$ はどんな形になるか。（本章 練習問題（２）の（１３）の応用）

またこの年払保険料と養老保険の年払保険料とを比較せよ。

（４）　前問における t 年後の元利合計は（1.13.15）によれば

$1-\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$ とも書け、その時点での目標額との差は $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$ とも書ける。これを用いて前問と同じ定期保険の年払保険料を計算すると

$$\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

となることを証明せよ。

(5)　(1.13.5) の $P_{\overline{n}|}$ を用いると

$$P_{x:\overline{n}|}-P_{\overline{n}|}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

となることを証明し、前々問と前問における年払保険料が一致することを確認せよ。

(6)　(a)　$a_x=13.257$,　$A_x=0.19304$

(b)　$a_x=13.164$,　$P_x=0.04147$

(c)　$A_x=0.19414$,　$P_x=0.00927$

を与えて、それぞれの場合の予定利率を求めよ。

(7)　$P_x=0.01662$,　$a_x=17.155$,　$p_x=0.99229$ を与えて A_{x+1} を求めよ。

(8)　ある計算基礎によれば、x 歳の被保険者の保険金100万円の終身保険(保険金年末支払)の一時払純保険料は324,000円であり、年払純保険料は16,210円である。また10年後から純保険料を半分にするような場合の最初の10年間の純保険料は22,830円である。同じ計算基礎による場合、この被保険者に対する保険金100万円の10年満期養老保険の一時

払純保険料はいくらになるか。

（９）　（ａ）x 歳の被保険者の終身保険（保険金１で年末支払）について変動年払保険料をとったところ、最初の５年間を0.04とし、それ以後を0.02とすることもできるし、また最初の５年間を0.0475とし、それ以後を0.0175とすることもできる。平準保険料とすればいくらになるか。

（ｂ）　${}_{5}P_x$ はいくらになるか。

（ｃ）　$P_{x:\overline{5}|}$ を d の項で表わせ。

（１０）　n 年の全期払定期保険であるが、毎年度末に支払われる死亡保険金は、第１年度末の１から始まって毎年 α ずつ増えて第 t 年度末では $1+(t-1)\alpha$ になるとする。また保険料は第１年度の P から毎年 β ずつ減少して第 t 年度では $P-(t-1)\beta$ になるとする。このような P を計算基数で表わせ。

（１１）　x 歳契約, 保険期間 n 年の場合の年払保険料が

（ａ）　養老保険については40.5‰

（ｂ）　満期保険金倍額支払の養老保険については死亡保険金に対し70‰

（ｃ）　死亡の場合に既払込保険料を返還する生存保険については満期保険金に対し36‰

であった。死亡に対し既払込保険料の $\dfrac{2}{3}$ を返還する生存保険の年払保険料はいくらになるか。

（１２）　30歳男子の30年満期の保険で、保険期間の終わりに被保険者

が生存している時には100万円を支払い、保険期間の途中で被保険者が死亡した時には、既払込保険料を5.5％の利率で死亡した年度の年度末まで利殖した金額と20万円とのいずれか大きい方をその年度末に支払うものがある。第５回全会社表，5.5％によってこの保険の年払純保険料を計算せよ。（本章 練習問題（２）の（１３）の結果を利用する）

§１７　分割払保険料，連続払保険料

半年払，３月払，月払のように１年を数回に分けて保険料を払込むいわゆる**分割払保険料**については、２つの考え方ができる。第１は、あくまでも年払が基準であり、分割払はそれを k 回に分けて繰り延べ払い込むものにすぎないとする考え方である。このように考えて算出される保険料を**分割賦払保険料**という。基準の年払保険料を P, 分割賦払保険料の年額を $P^{[k]}$ とすると、

$$P = P^{[k]}\ \ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|} \tag{4.17.1}$$

でなければならない。(1.6.23) を用いると

$$P^{[k]} - P \fallingdotseq \frac{k-1}{2k}\, d\, P^{[k]} \tag{4.17.2}$$

となる。この保険料差額は年払保険料の一部が遅れて払込まれるための利息の損失の補塡分を表わす。それは次のようにしても理解される。すなわち第２回目の分割保険料による利息の損失を年始の時点で考えると $\dfrac{1}{k}P^{[k]}\dfrac{1}{k}d$ であり、（(1.1.6) 参照）第３回目のそれは $\dfrac{1}{k}P^{[k]}\dfrac{2}{k}d$ であり、それらが $\dfrac{1}{k}P^{[k]}\dfrac{k-1}{k}d$ まで続くから、それらの和をとると

$$\frac{1}{k}P^{[k]}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\cdots\cdots+\frac{k-1}{k}\right)d$$

$$= \frac{k-1}{2k}\, d\, P^{[k]}$$

となる。分割賦払保険料の場合は年払を基準とするので、保険年度の途中で死亡のあった契約からはその年度に属する保険料の未収分を徴収しなければならない。

これに対し、第2の考え方では、半年とか、3月とか、1月とかをそれ自身単位の保険期間と考える。従って死亡契約から年度の未収保険料を徴収することはない。この考え方で算出される保険料を**分割払真保険料**という。その場合の保険料の年額を $P^{(k)}$（保険金を単位保険期間の期末で支払う場合）または $\overline{P}^{(k)}$（保険金即時支払）で表わすと、m を保険料払込期間として

$$P^{(k)} = \frac{A^{(k)}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.17.3}$$

$$\overline{P}^{(k)} = \frac{\overline{A}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{m}|}} \tag{4.17.4}$$

である。ここに $A^{(k)}$ あるいは $\overline{A}$ はその保険種類の一時払保険料を表わす。特に全期払養老保険では、（4.9.9）を用いて（4.14.21）と類似の次の式が得られる。

$$\begin{aligned} P^{(k)}_{x:\overline{n}|} &= \frac{A^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}} \\ &= \frac{1}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}} - d^{(k)} \end{aligned} \tag{4.17.5}$$

さて（4.9.16）を用いると

$$\begin{aligned} &P^{(k)}_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} - P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\ &\quad = A^{(k)}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq \frac{k-1}{2k}\, i\, A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} \end{aligned}$$

であり、従って

$$P^{(k)}_{x:\overline{n}|}\ \frac{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - P_{x:\overline{n}|} = \frac{k-1}{2k}\, i\, P^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$$

となる。一方（4.4.3）と（4.6.11）より

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{k-1}{2k}(1 - v^n {}_n p_x)$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{k-1}{2k}(A^{1}_{x:\overline{n|}} + d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}})$$

$$\frac{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = 1 - \frac{k-1}{2k}(P^{1}_{x:\overline{n|}} + d) \qquad (4.17.6)$$

となるので、これを上の式に入れると

$$P^{(k)}_{x:\overline{n|}}\left\{1 - \frac{k-1}{2k}(P^{1}_{x:\overline{n|}} + d)\right\} - P_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq \frac{k-1}{2k}\, i\, P^{1}_{x:\overline{n|}}$$

$$P^{(k)}_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}}$$

$$\fallingdotseq \frac{k-1}{2k} P^{(k)}_{x:\overline{n|}} P^{1}_{x:\overline{n|}} + \frac{k-1}{2k} d P^{(k)}_{x:\overline{n|}} + \frac{k-1}{2k}\, i\, P^{1}_{x:\overline{n|}} \qquad (4.17.7)$$

という式ができ、この式の右辺の各項は次のように解釈される。先ず第1項は、死亡契約から死亡した保険年度の未収保険料を徴収しないための割増し分と考えられる。最初の $\frac{1}{k}$ 年の死亡契約から徴収もれとなるその年度の保険料は $(k-1)\frac{1}{k}P^{(k)}_{x:\overline{n|}}$ であり、次の $\frac{1}{k}$ 年の死亡契約からのそれは $(k-2)\frac{1}{k}P^{(k)}_{x:\overline{n|}}$ であり、以下同様に続いて最後の $\frac{1}{k}$ 年のそれは $0 \times \frac{1}{k}P^{(k)}_{x:\overline{n|}}$ である。今死亡が1年を通じて一様に発生すると考えると各 $\frac{1}{k}$ 年には1年間の死亡の $\frac{1}{k}$ ずつが発生するので、徴収もれとなる保険料の平均値は

$$\frac{1}{k}\left\{\frac{k-1}{k} + \frac{k-2}{k} + \cdots\cdots + \frac{1}{k}\right\} P^{(k)}_{x:\overline{n|}} = \frac{k-1}{2k} P^{(k)}_{x:\overline{n|}}$$

である。これをすべての死亡契約からの平均的な徴収もれ保険料と考えれば、全保険期間での徴収もれ金額を全契約から平準保険料で回収する

には $\dfrac{k-1}{2k} P^{(k)}_{x:\overline{n|}} P^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$ があればよい。次に右辺第2項は、すでに(4.17.2) の説明で述べたように、年払保険料が分割されて遅れて払込まれるための利息の損失分を表わす。右辺第3項は、保険金の支払期日が $\dfrac{1}{k}$ 年度末であるため、年度末の場合に比べて利息の損失となる部分を表わす。そのことは第1項の意味を考えた時の $P^{(k)}_{x:\overline{n|}}$ の代わりに i としてみれば理解できる。

次に保険金即時支払について同様の差額を求めてみよう。この時は

$$\overline{P}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \overline{A}_{x:\overline{n|}} = \overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}}$$

$$\fallingdotseq \overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}} \left\{ \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{k-1}{2k} \left(A^{\ 1}_{x:\overline{n|}} + d\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \right) \right\}$$

であるから

$$\overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}} - \overline{P}_{x:\overline{n|}}$$

$$\fallingdotseq \frac{k-1}{2k} \overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}}\ P^{\ 1}_{x:\overline{n|}} + \frac{k-1}{2k} d\,\overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}} \tag{4.17.8}$$

となる。右辺の第1項と第2項はそれぞれ（4.17.7）の場合と同じ意味をもつ。またこの場合は保険金が即時支払で、両者とも同じであるので（4.17.7）の第3項に当たるものはない。

これまで述べた諸式で $k \to \infty$とすれば、理論上のものとして保険料連続支払の場合が得られる。この時は $P^{(\infty)}$ と $\overline{P}^{(\infty)}$ との区別がなくなる。後者で表示することにすると、例えば n 年満期養老保険の場合は

$$\overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n|}} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}}}{\overline{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{4.17.9}$$

$$= \frac{1}{\overline{a}_{x:\overline{n|}}} - \delta \tag{4.17.10}$$

であり、さらにm年払込（$m \ < \ n$）であれば次式となる。

$$
{}_m\overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\overline{a}_{x:\overline{m}|}} \qquad (4.17.11)
$$

なお保険価格の大小を表わす関係として既に（4.5.8）と（4.9.15）を示したが、養老保険の年払保険料ではこれら二つの大小関係の組合わせとして

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{P} \arrow[dl, "(4.14.24)"'] & & \overline{P}^{(k)} \arrow[ll, "(4.17.8)"'] \arrow[dl] & & \overline{P}^{(\infty)} \arrow[ll] \\
P & & P^{(k)} \arrow[ll, "(4.17.7)"] & & &
\end{tikzcd}
\qquad (4.17.12)
$$

という関係ができる。矢印の右側の方が左側より大きく、矢印の上に記した番号の式でその差が与えられる。（番号のない矢印については読者でその差を考えられたい）

§１８　確率論的にみた収支相等の原則

本章§１２で　$A_{x:\overline{n}|}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$　等を確率変数の平均値と見ることができることを述べたが、同様の考え方から収支相等の原則とは「ある確率変数の平均値を０にすることである」と解釈することができる。n年満期養老保険で保険金年末支払の場合を例に説明してみよう。保険事故が発生して契約が消滅するまでの会社とある一人の契約者との金銭上のやりとりを契約時点における現価で考えることとし、会社がその契約者に支払う金額から、会社がその契約者から収入する金額を差し引けば、（年払平準保険料がPであるとして）差額は

第１年度に被保険者が死亡する場合には		$v - P\ddot{a}_{\overline{1}|}$
第２年度	〃	$v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2}|}$
・	・	・

・　　　　・　　　　・

第n年度　　　〃　　　$v^n - P\ddot{a}_{\overline{n|}}$

n年後に被保険者が生存している場合には　$v^n - P\ddot{a}_{\overline{n|}}$

である。右端の算式はこの取引で会社が蒙る損失を表わしている。（経過年数の長い年度ではマイナスになるが、その時は会社の利得）損失のそれぞれの値が発生する確率は q_x, ${}_{1|}q_x$, ……, ${}_{n-1|}q_x$, ${}_np_x$ であり、§１２で述べたようにこれらの確率の和は１であるから、会社の損失は一つの確率変数とみることができる。そして会社と契約者との取引を公平にするためにこの確率変数の平均値を０にすればよい、と考えるのが確率論的に解釈した収支相等の原則である。事実そのようにすると

$$(v - P\ddot{a}_{\overline{1|}})q_x + (v^2 - P\ddot{a}_{\overline{2|}})\,{}_{1|}q_x + \cdots\cdots$$
$$+ (v^n - P\ddot{a}_{\overline{n|}})\,{}_{n-1|}q_x + (v^n - P\ddot{a}_{\overline{n|}})\,{}_np_x = 0 \qquad (4.18.1)$$

であるが、(4.12.1), (4.12.3) により左辺は $A_{x:\overline{n|}} - P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ となり、収支相等の原則を示す式

$$A_{x:\overline{n|}} = P\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

が得られる。

第4章　練習問題（5）

（1）　40歳契約、10年満期の満期保険金倍額支払養老保険において死亡保険金は100万円の即時支払であるとする。計算基礎を第5回全会社表，5.75％とし、半年払純保険料を分割賦払保険料および分割払真保険料のそれぞれの考え方によって求めよ。

（2）

$$P^{(k)}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq \frac{P_{x:\overline{n|}} + \dfrac{k-1}{2k}\, i P^{1}_{x:\overline{n|}}}{1 - \dfrac{k-1}{2k}\left(P^{1}_{x:\overline{n|}} + d\right)}$$

を証明せよ。

（3）　$\dfrac{d}{dx}\,\overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n|}} = \left(\overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n|}} + \delta\right)\left(\overline{P}^{1\,(\infty)}_{x:\overline{n|}} - \mu_x\right)$　を証明せよ。

（4）　$\dfrac{d}{dx}\,log\left(l_x \overline{a}_x\right) = -\,\overline{P}^{(\infty)}_x$　を証明せよ。

第５章　責任準備金（純保険料式）

§1　純保険料式責任準備金の概念

保険会社と、同一保険種類、同一年齢の多くの被保険者との間で、ある時点で一時払保険料（ここでは純保険料とする）の授受があった場合を考えると、会社はそれを受け入れた時点から利殖を続けて受入金を増やして行くとともに、期間途中の保険金等の支払事由（死亡等）の発生があればその中から死亡保険金等を支払いながら満期まで経過し、満期時に残金で満期保険金等を支払って取引関係が終了する。

また年払保険料あるいは分割払保険料で契約がなされている場合には、定期的に入ってくる保険料とそれに対する利息収入とがある一方で期間途中の保険金等の支払がある。通常は期間の途中ではそれまでの収入の方が支出より大きくて、会社には差額が留保されている。

このように保険期間の途中で会社が所有しているべき理論的な金額の存在が予想されるが、これを**責任準備金**と呼んでいる。責任準備金には第8章で述べるような種々の変形が考えられているが、本章では最も基本的な型、すなわち純保険料とそれを計算した二つの計算基礎に基づくいわゆる**純保険料式責任準備金**を考える。

計算に当たっては次のような前提をおくこととする。

① 責任準備金の利殖や保険金等の支払は、純保険料を計算した際の予定利率および予定死亡率のとおりに実現するとする。

② 責任準備金を計算する時点での契約者への支払については、死亡保

険金等の死亡に関するものは支払われたものと考え、一方生存給付金等の生存者に対するものはまだ支払われていない状態にあるとして、計算を行う。

③　その時点で収入すべき保険料があれば、それは収入されていない状態で計算を行う。

（生存給付金等の支払および保険料の収入は責任準備金計算の時点直後に行われると考える。）

これらの前提に立って、本章では主として養老保険についての責任準備金の計算を扱うが、それ以外の保険種類についても計算の原理は全く同じである。

計算には過去法および将来法という二つの方法が用いられる。**過去法による責任準備金**とは、責任準備金計算時点までの過去の収入の総終価から過去の支出の総終価を差し引いた残額を、生存者1人当たりに求めた額である。**将来法による責任準備金**とは、将来の支出に備えて留保しておくべき額すなわち将来の支出の総現価から将来の収入の総現価を差し引いた残額を、生存者1人当たりに求めた額である。どちらで計算しても結果が同じになることは次節以下の事例でたびたび検証するが、§5では最も一般的にこれを証明する。

§2　一時払保険の責任準備金

保険金額1に対する一時払保険料が A であるときの t 年経過後の責任準備金を一般に ${}_tV(A)$ で表わすことにする。例えば保険金即時支払の定期保険であれば ${}_tV(\bar{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}})$ で表わし、保険金年末支払の養老保険であれば ${}_tV(A_{x:\overline{n|}})$ で表わす。後者について考えてみよう。同時に契約し

た同一保険期間、同一契約年齢の契約群団に対し、t 年後の時点で会社が保有する金額の生存者１人当たりが ${}_tV(A_{x:\overline{n|}})$ であるので

$$l_{x+t}\ {}_tV(A_{x:\overline{n|}}) = l_x A_{x:\overline{n|}}(1+i)^t - \{d_x(1+i)^{t-1} + d_{x+1}(1+i)^{t-2} + \cdots\cdots + d_{x+t-1}\}$$

が成立する。両辺に v^{x+t} を掛けて整理すると

$${}_tV(A_{x:\overline{n|}}) = \frac{1}{D_{x+t}}\{D_x A_{x:\overline{n|}} - (C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+t-1})\}$$

$$= \frac{D_x}{D_{x+t}} A_{x:\overline{n|}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad (5.2.1)$$

これが過去法による責任準備金の算式である。次に将来法による算式を考えると、一時払保険料の場合は契約時点以後に保険料の収入がないので、t 年経過後の時点でみた将来支払の保険金の現価、すなわち

$${}_tV(A_{x:\overline{n|}}) = A_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (5.2.2)$$

が責任準備金となる。両者が一致することは、(4.9.2) を用いて次のように証明される。

$$(5.2.1) = \frac{D_x}{D_{x+t}} \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} = A_{x+t:\overline{n-t|}}$$

保険金即時支払の場合の責任準備金 ${}_tV(\bar{A}_{x:\overline{n|}})$ の計算では、上記の A, C, M の代わりに $\bar{A}$, $\bar{C}$, $\bar{M}$ を用いればよい。

また第４章§３の始めに述べたように、$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ は n 年有期期始払生命年金の一時払純保険料である。このような一時払年金契約の t 年経過後の責任準備金を ${}_tV(\ddot{a}_{x:\overline{n|}})$ とすれば、前節で述べた計算上の仮定②を考

慮して、過去法では

$$l_{x+t}\ {}_tV(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = l_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1+i)^t$$
$$-\{l_x(1+i)^t + l_{x+1}(1+i)^{t-1} + \cdots\cdots + l_{x+t-1}(1+i)\}$$

より

$${}_tV(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \frac{1}{D_{x+t}}\{D_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+t-1})\}$$

$$= \frac{D_x}{D_{x+t}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad (5.2.3)$$

となり、将来法では将来支払に必要な年金の現価として

$${}_tV(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \qquad (5.2.4)$$

となる。両者の等しいことは（4.3.13）を用いて次のように証明される。

$$(5.2.3) = \frac{D_x}{D_{x+t}}\ \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

$$= \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} = \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

なお、(5.2.3), (5.2.4) は年金年額1について計算されたものであることを注意しておく。

§3　年払保険の責任準備金

保険金額1に対する年払平準（純）保険料がPである保険のt年経過後の責任準備金（詳しくは平準純保険料式責任準備金）を一般に${}_tV(P)$で表わすが、${}_tV(P^{1}_{x:\overline{n}|})$, ${}_tV(P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1})$, ${}_tV(P_{x:\overline{n}|})$については略して${}_tV^{1}_{x:\overline{n}|}$, ${}_tV_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$, ${}_tV_{x:\overline{n}|}$という記号が用いられる。また保険金即時支払のときは${}_tV(\overline{P}_{x:\overline{n}|})$等の代わりに${}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}$等が用いられる。

養老保険について過去法で責任準備金を求めると、§1における計算

上の仮定③を考慮して、前節の始めと同様に考えて

$$l_{x+t}\ {}_tV_{x:\overline{n|}}$$
$$= P_{x:\overline{n|}}\{l_x(1+i)^t + l_{x+1}(1+i)^{t-1} + \cdots\cdots + l_{x+t-1}(1+i)\}$$
$$-\{d_x(1+i)^{t-1} + d_{x+1}(1+i)^{t-2} + \cdots\cdots + d_{x+t-1}\}$$

という算式ができる。両辺に v^{x+t} を掛けて整理すると

$$ {}_tV_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_{x+t}}\{P_{x:\overline{n|}}(D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+t-1})$$
$$-(C_x + C_{x+1} + \cdots\cdots + C_{x+t-1})\}$$
$$= \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}P_{x:\overline{n|}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}. \qquad (5.3.1)$$

また将来法では、将来支払の現価から将来収入の現価を引いたものが責任準備金であるので

$$ {}_tV_{x:\overline{n|}} = A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (5.3.2)$$

となる。両者が一致することは次のように証明される。すなわち

$$(5.3.1) = \frac{1}{D_{x+t}}\{P_{x:\overline{n|}}(N_x - N_{x+n} - N_{x+t} + N_{x+n})$$
$$-(M_x - M_{x+n} + D_{x+n}) + (M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n})\}$$

となるが、(4.14.19) より

$$P_{x:\overline{n|}}(N_x - N_{x+n}) = M_x - M_{x+n} + D_{x+n}$$

であるので

$$(5.3.1) = \frac{1}{D_{x+t}}\{(M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}) - P_{x:\overline{n|}}(N_{x+t} - N_{x+n})\}$$

$$= A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

保険金即時支払のときも同様の式をつくり、証明ができて

$$ {}_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}\bar{P}_{x:\overline{n|}} - \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+t}}{D_{x+t}} \qquad (5.3.3)$$

$$= \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{P}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{5.3.4}$$

一般に過去法によるよりも将来法による方が考えやすい。例えば保険金即時支払のm年払込n年満期養老保険の責任準備金は${}_tV({}_m\bar{P}_{x:\overline{n|}})$または${}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n|}}$で表わされるが、将来法であればその意味から算式を次のように直ちに書くことができる。

$$ {}^m_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} = \begin{cases} \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - {}_m\bar{P}_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} & (t < m) \\ \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} & (t \geq m) \end{cases} \tag{5.3.5}$$

次に、保険金年末支払の場合は（4.9.4）の$A = 1 - d\ddot{a}$あるいは（4.14.21）の$P = \dfrac{1}{\ddot{a}} - d$を用いて${}_tV_{x:\overline{n|}}$を次のように変形することができる。

$${}_tV_{x:\overline{n|}} = A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$= 1 - (P_{x:\overline{n|}} + d)\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{5.3.6}$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{5.3.7}$$

$$= \frac{A_{x+t:\overline{n-t|}} - A_{x:\overline{n|}}}{1 - A_{x:\overline{n|}}} \tag{5.3.8}$$

$$= \frac{P_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{x:\overline{n|}}}{P_{x+t:\overline{n-t|}} + d} \tag{5.3.9}$$

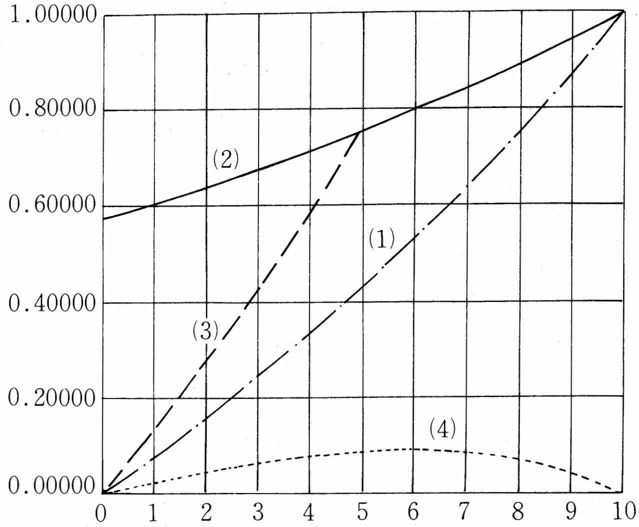
ここで理解を深めるために、代表的な保険種類についてtの推移に伴う責任準備金のグラフを描いてみよう。いま$x = 30$, $n = 10$, $m = 5$保険金即時支払として第5回全会社表, $i = 5.75\%$を用いて計算すると次のような表ができる。

t	(1) ${}_t\overline{V}_{30:\overline{10}\rceil}$	(2) ${}_tV(\overline{A}_{30:\overline{10}\rceil})$	(3) ${}^5_t\overline{V}_{30:\overline{10}\rceil}$	(4) ${}_t\overline{V}^{\,1}_{30:\overline{10}\rceil}$
0	0	(0.57367)	0	0
1	0.07651	0.60629	0.13472	0.00022
2	0.15747	0.64080	0.27729	0.00045
3	0.24312	0.67731	0.42816	0.00065
4	0.33376	0.71597	0.58785	0.00079
5	0.42964	0.75685	0.75685	0.00088
6	0.53111	0.80010	0.80010	0.00091
7	0.63851	0.84589	0.84589	0.00085
8	0.75219	0.89435	0.89435	0.00070
9	0.87261	0.94573	0.94573	0.00043
10	1.00000	1.00000	1.00000	0
$\overline{P}$	0.073117		0.128117	0.0010462

ただし表の（４）欄は定期保険の責任準備金すなわち将来法で示せば

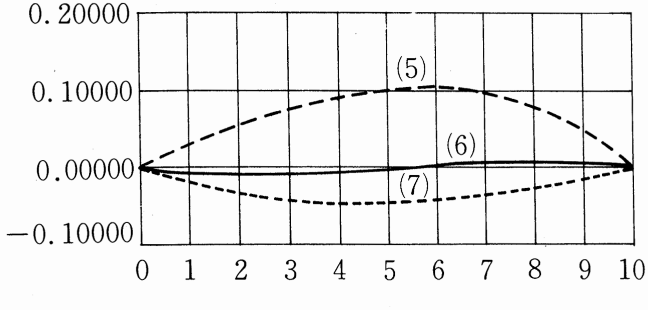
$$ {}_t\overline{V}^{\,1}_{x:\overline{n}\rceil} = \overline{A}^{\,1}_{x+t:\overline{n-t}\rceil} - \overline{P}^{\,1}_{x:\overline{n}\rceil}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\rceil} \qquad (5.3.10)$$

という式で $x=30$, $n=10$ としたものである。また ${}_0V(\overline{A}_{30:\overline{10}\rceil})$ における括弧内の数字は保険料収入直後の責任準備金というべき $\overline{A}_{30:\overline{10}\rceil}$ を表わしている。この表の責任準備金をグラフで示すと次のようになる（ただし(4)についてはグラフの形が判るように $\overline{V}$ の値を拡大している）。



表あるいはグラフで見られるように、養老保険では10年経過後に責任準備金が1となるが、それを用いて満期保険金1を支払って契約関係が終わる。定期保険では満期保険金が0であるので満期時の責任準備金も0でよい。定期保険では、通常初期の間は平準保険料が自然保険料よりも大きく（第4章§14（5）参照)、その差額を会社が留保して、後に平準保険料が自然保険料よりも小さくなった時に留保分を取り崩して補填していく状態が、グラフから読み取れる。

自然保険料が年齢とともに増加するときは、定期保険の責任準備金は次頁の図の（5）のグラフのように常に正値をとっているが、年齢とともに減少することがあると、図の（6）（7）のグラフのように負値となることがある。



なお、${}_t\overline{V}_{x:\overline{n|}}$と${}_tV_{x:\overline{n|}}$との差はごく小さいものであるが、(4.9.17) と (4.14.24) とを用いて、それを近似的に求めることができる。

$$
\begin{aligned}
&{}_t\overline{V}_{x:\overline{n|}} - {}_tV_{x:\overline{n|}} \\
&\quad = (\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - A_{x+t:\overline{n-t|}}) - (\overline{P}_{x:\overline{n|}} - P_{x:\overline{n|}})\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \\
&\quad \doteqdot \frac{i}{2}A^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{i}{2}P^{\ 1}_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \\
&\quad = \frac{i}{2}\,{}_tV^{\ 1}_{x:\overline{n|}} \qquad (5.3.11)
\end{aligned}
$$

${}_tV^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$が正であれば${}_t\overline{V}_{x:\overline{n|}} > {}_tV_{x:\overline{n|}}$となり、負であれば${}_t\overline{V}_{x:\overline{n|}} < {}_tV_{x:\overline{n|}}$となるが、一般に$\frac{i}{2}$も${}_tV^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$も小さい（前掲の表の（４）欄を見よ）ので、差は極めて小さいものである。

これまでは比較的単純な保険種類についての純保険料式責任準備金について述べたが、保険金変動保険や保険料変動保険のような複雑な保険種類についてもその責任準備金を導くことができる。その場合、過去法によっても将来法によっても本節冒頭に述べたのと同じ考え方をして式をつくることができる。二つの方法で立てた式が一致することは、後に

§5で一般的に証明する。練習問題でやや複雑な保険種類のいくつかを取り上げているので試みられたい。

最後に、前章§12で$A_{x:\overline{n}|}$，$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$等を確率変数の平均値とみたように、${}_tV_{x:\overline{n}|}$等もある確率変数の平均値とみることができることを示そう。前章§18では、会社と契約者との将来の取引の現価を契約時点で考えて一つの確率変数をつくったが、これを経過tの時点で考えることにする。その時点で、将来の会社の支払と収入との差額すなわち取引上会社が蒙る損失を現価で考えると

第$t+1$年度に被保険者が死亡する場合には		$v-P\ddot{a}_{\overline{1}|}$
第$t+2$年度	〃	$v^2-P\ddot{a}_{\overline{2}|}$
・	・	・
・	・	・
第n年度	〃	$v^{n-t}-P\ddot{a}_{\overline{n-t}|}$
第n年度末に被保険者が生存している場合には		$v^{n-t}-P\ddot{a}_{\overline{n-t}|}$

となる。かつそれぞれの場合が発生する確率は

$$q_{x+t},\quad {}_{1|}q_{x+t},\quad \cdots\cdots\cdots\quad ,{}_{n-t-1|}q_{x+t},\quad {}_{n-t}p_{x+t}$$

であり、これらの確率の和は1であるから、会社が将来蒙る損失は一つの確率変数である。会社はその平均値を責任準備金として保有すればよいと考えると

$$\begin{aligned}{}_tV_{x:\overline{n}|} = \sum_{s=1}^{n-t}(v^s-P\ddot{a}_{\overline{s}|})\,{}_{s-1|}q_{x+t}\\ +(v^{n-t}-P\ddot{a}_{\overline{n-t}|})\,{}_{n-t}p_{x+t}\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

となるが、この右辺は（4.18.1）の場合と同じように

$A_{x+t:\overline{n-t}|}-P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ となる。すなわち（5.3.2）が得られた。

第５章　練習問題（１）

（１）　50歳契約100歳満期養老保険（保険金即時支払）について

（ａ）　t 年経過後の純保険料式責任準備金を将来法で書き、さらにそれを計算基数で表わせ。

（ｂ）　第５回全会社表，５％によって $t=1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 20, 21, 30, 31, 40, 41, 45, 46, 47, 48, 49$ について純保険料式責任準備金を計算せよ。

（２）　${}_tV_x = 1-(1-{}_1V_x)(1-{}_1V_{x+1})\cdots\cdots(1-{}_1V_{x+t-1})$

を証明せよ。

（３）　$P_{x:\overline{n}|} = {}_tV_{x:\overline{n}|}\,P_{x:\overline{t}|} + (1-{}_tV_{x:\overline{n}|})P^{1}_{x:\overline{t}|}$　　$(1 \leq t \leq n)$

を証明せよ。

（４）　${}_tV_x = \dfrac{P_x - P^{1}_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}}$　　を証明せよ。

（５）　${}_tV_x = 0.19$，$P_x = 0.02$，$P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} = 0.072$ のとき、$P^{1}_{x:\overline{t}|}$およびび $P_{x:\overline{t}|}$を求めよ。

（６）$\ddot{a}_x + \ddot{a}_{x+2t} = 2\ddot{a}_{x+t}$ であるとき、${}_tV_{x+t}$ と ${}_{2t}V_x$ とを ${}_tV_x$ の項で表わせ。

（７）　正整数 l , m , n（ $l < m < n$ とする）に対し

$$1 - A_{x+m:\overline{n-m}|} = A_{x+l:\overline{n-l}|} - A_{x:\overline{n}|}$$
$$= A_{x+m:\overline{n-m}|} - A_{x+l:\overline{n-l}|}$$

が成立しているとき、${}_{l}V_{x:\overline{n}|}$ および ${}_{m-l}V_{x+l:\overline{n-l}|}$ の数値を求めよ。

（８）　$t < m < n$ について

$${}_{t}^{m}V_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}\ {}_{t}V_{x:\overline{m}|} + (1 - A_{x:\overline{n}|})\ {}_{t}V_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明せよ。

（９）　$m < n$ のとき

$${}_{t}V_{x:\overline{m}|} - {}_{t}V_{x:\overline{n}|} = (P_{x:\overline{m}|} - P_{x:\overline{n}|})\,\ddot{s}_{x:\overline{t}|}$$
$$\ddot{s}_{x:\overline{t}|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

を証明し、その意味を説明せよ。

（１０）　いかなる保険種類でも、平準純保険料の保険料払込期間を短縮すれば、平準純保険料式責任準備金は高くなることを証明せよ。

（１１）　二つの生命表の死亡率の間に、第４章　練習問題（１）の（５）で述べたような関係があるときは、終身保険の責任準備金に関し

$${}_{t}V_x' = {}_{t}V_x$$

となることを証明せよ。

（１２）　ある選択生命表によって、選択期間の死亡率とそれに続く終局表の死亡率とが与えられている。選択表を使用して養老保険（保険金

年末支払）の平準純保険料と純保険料式責任準備金を計算し、また一方で終局表のみを使用してそれらを計算したとする。その場合、選択期間経過後の両者の責任準備金を比較すると、選択表の場合の方が終局表の場合よりも高いことを証明せよ。(第6章 §3参照)

（１３）　n 年満期養老保険（保険金年末支払）で予定利率を変えずに予定死亡率だけを変えて計算した場合、純保険料式責任準備金を比較すると

$$ {}_tV'_{x:\overline{n|}} = {}_tV_{x:\overline{n|}} \qquad (0 \leq t \leq r \leq n-2) $$

となったが、そのときには k を定数として

$$ q'_{x+t} = q_{x+t} - \frac{k}{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}} \qquad (0 \leq t \leq r-1) $$

であることを示せ。

（１４）　40歳加入の20年払込40年満期の養老保険があり、保険金は、60歳以前の死亡については3000万円、60歳を超す死亡および満期については1000万円で、死亡即時支払である。この保険の平準純保険料と10年経過後の責任準備金とを第5回全会社表，5.5%によって計算せよ。

（１５）　保険料が年払全期払込で、被保険者の死亡に際しては、死亡保険金として満期保険金に既払込保険料を加えたものを即時に支払う保険がある。その平準純保険料および純保険料式責任準備金を表わす式を書け。

（１６）　x 歳の被保険者に対し、年金開始年齢 y 歳から g 年保証期間付終身年金を半年毎の期始払で開始する。また保険料は y 歳到達まで年

払で払込むものとし、払込期間中の死亡に対しては既払込保険料を死亡直後に返還する。

このような保険契約について、年金年額１に対する平準純保険料および整数年数経過後の純保険料式責任準備金を表わす式を書け。

（１７）　x 歳加入、n 年満期で、被保険者が死亡すればその直後の契約応当日から満期まで毎年１の確定年金を支払う保険を全期払で契約した。平準純保険料および純保険料式責任準備金を表わす式を書け。

（１８）　25年満期養老保険（保険金１で年末支払）の年払純保険料を、最初の５年は普通終身保険の平準純保険料と同一とし、以後の20年間は純保険料を増額して当初５年間の不足額を補うようにした。その時

（ａ）　後の20年間に払込むべき毎年の保険料を定めよ。

（ｂ）　過去法および将来法によって、この保険の10年経過後の責任準備金の式を書き、両者が一致することを証明せよ。

（ｃ）　通常の25年満期養老保険の５年経過後の責任準備金と普通終身保険のそれとの差を求めよ。またその差額を後の20年間に生存者から年賦で毎年同額ずつ徴収して回収する場合の年賦金を求め、年賦金と（ａ）の結果とを比較せよ。

（１９）　予定利率が、最初の k 年間は i ％で、以後は j ％であるとき、m 年払込終身保険の年払平準純保険料および純保険料式責任準備金を表わす式を書け。

（２０）　平均値 ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ が（5.3.12）の右辺で与えられるような確率変

数の分散は

$$\sigma^2({}_tV_{x:\overline{n|}}) = \frac{\sigma^2(A_{x+t:\overline{n-t|}})}{d^2\,\ddot{a}^2_{x:\overline{n|}}} = \frac{\sigma^2(A_{x+t:\overline{n-t|}})}{(1-A_{x:\overline{n|}})^2}$$

となることを証明せよ。ただし$\sigma^2(A_{x+t:\overline{n-t|}})$は第４章　練習問題（３）の（１３）で与えたものである。

§4　分割払保険の責任準備金

分割賦払保険料の場合は、各年度末（すなわち t が整数のとき）の責任準備金は年払の場合と同じである。経過に端数がある場合の責任準備金については後に述べる。(第１１章 §4 参照)

分割払真保険料の場合については、まず保険金を分割期間の期末に支払う場合（（4.17.3）参照）をとり、t 年経過後の責任準備金
${}_tV(P^{(k)}_{x:\overline{n}|})$ を ${}_tV^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ と書くことにすると、将来法により

$$ {}_tV^{(k)}_{x:\overline{n}|} = A^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{(k)}_{x:\overline{n}|}\,\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{5.4.1} $$

である。この式は t に $\dfrac{1}{k}$ の倍数の端数がある場合にも成立する。　この式はまた（4.9.9),（4.17.5）を用いて（5.3.6）等に準じた変形が可能である。すなわち

$$ {}_tV^{(k)}_{x:\overline{n}|} = 1 - (P^{(k)}_{x:\overline{n}|} + d^{(k)})\,\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{5.4.2} $$

$$ = 1 - \frac{\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.4.3} $$

$$ = \frac{A^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|} - A^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{1 - A^{(k)}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.4.4} $$

$$ = \frac{P^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{P^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|} + d^{(k)}} \tag{5.4.5} $$

となる。この責任準備金と ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ との差を求めると、(5.3.7),（5.4.3）を用いて

$$ {}_tV^{(k)}_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}} \tag{5.4.6} $$

となるが、(4.17.6）を用いると

$$\frac{\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}}=\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\left\{1-\dfrac{k-1}{2k}\left(P_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}+d\right)\right\}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\left\{1-\dfrac{k-1}{2k}\left(P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}+d\right)\right\}}$$

となる。この右辺中 $\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ を除いた部分は近似的に

$$1-\frac{k-1}{2k}\left(P_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}+d\right)+\frac{k-1}{2k}\left(P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}+d\right)$$

$$=1-\frac{k-1}{2k}\left(P_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}-P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\right)$$

となるので

$$\frac{\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}}=\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left\{1-\frac{k-1}{2k}\left(P_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}-P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\right)\right\}\qquad(5.4.7)$$

となり、結局

$${}_tV^{(k)}_{x:\overline{n}|}-{}_tV_{x:\overline{n}|}\fallingdotseq\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ \frac{k-1}{2k}\left(\frac{A_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}-P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\right)$$

$$=\frac{k-1}{2k}\ \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(A_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t}|}-P_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right)$$

$$=\frac{k-1}{2k}\ \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ {}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\qquad(5.4.8)$$

となる。従って ${}_tV_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$ が正の場合には ${}_tV^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ が ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ より大きく、負の場合には ${}_tV^{(k)}_{x+\overline{n}|}$ が ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ より小さい。しかしいずれにしてもこの差はもとの ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ に比べて極めて小さい。なお（4.14.21）により（5.4.8）において $\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ の代わりに $(P_{x:\overline{n}|}+d)$ としてもよい。

次に保険金即時支払の場合には、責任準備金 ${}_tV(\bar{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}})$を ${}_t\bar{V}^{(k)}_{x:\overline{n|}}$ と書くことにすると、将来法により

$$ {}_t\bar{V}^{(k)}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (5.4.9)$$

を得る。この責任準備金と（5.3.4）の ${}_t\bar{V}_{x:\overline{n|}}$との差を求めると

$$ {}_t\bar{V}^{(k)}_{x:\overline{n|}} - {}_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} = \bar{P}_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:n-t} - \bar{P}^{(k)}_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

$$= \bar{A}_{x:\overline{n|}}\left(\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \frac{\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n|}}} \right)$$

となるが、右辺の括弧内は（5.4.6）の右辺と同じであるから、（5.4.8）により結局次式が得られる。

$$ {}_t\bar{V}^{(k)}_{x:\overline{n|}} - {}_t\bar{V}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq \bar{A}_{x:\overline{n|}}\left({}_tV^{(k)}_{x:\overline{n|}} - {}_tV_{x:\overline{n|}} \right)$$

$$= \frac{k-1}{2k}\bar{P}_{x:\overline{n|}}\;{}_tV^{1}_{x:\overline{n|}} \qquad (5.4.10)$$

分割払の極限の場合として保険料連続払込が考えられることは既に幾度か述べたが、その場合の責任準備金 ${}_tV(P^{(\infty)}_{x:\overline{n|}})$ を ${}_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n|}}$ と書くと、（5.4.1）より

$$ {}_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n|}} = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - P^{(\infty)}_{x:\overline{n|}}\,\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (5.4.11)$$

となる。この式は区間〔 0, n 〕内のすべての t について成立する。（4.9.10),（4.17.11）を用いて変形すると

$$ {}_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n|}} = 1 - \left(P^{(\infty)}_{x:\overline{n|}} + \delta \right)\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (5.4.12)$$

$$= 1 - \frac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\bar{a}_{x:\overline{n|}}} \qquad (5.4.13)$$

$$= \frac{\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \bar{A}_{x:\overline{n|}}}{1-\bar{A}_{x:\overline{n|}}} \qquad (5.4.14)$$

$$= \frac{P^{(\infty)}_{x+t:\overline{n-t}|} - P^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}}{P^{(\infty)}_{x+t:\overline{n-t}|} + \delta} \tag{5.4.15}$$

となる。これらは（5.4.2）～（5.4.5）で $k\to\infty$ としても得られる。

（4.17.12）に類似した関係を責任準備金についてつくると

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{V} \arrow[dl, "(5.3.11)"'] & & \bar{V}^{(k)} \arrow[ll, "(5.4.10)"'] \arrow[dl] & & V^{(\infty)} \arrow[ll] \\
V & & V^{(k)} \arrow[ll, "(5.4.8)"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{5.4.16}$$

という関係になる。矢印の上に記した番号の式で両端の責任準備金の差が表わされる。ただしこの場合の大小関係は、${}_tV^{1}_{x:\overline{n}|}$ の正負によってほぼ定まり、それが正の場合は矢印の右側の方が左側よりたいていの場合大きく、負の場合は矢印の左側の方が右側よりたいていの場合大きい。（番号のない矢印については読者でその差を考えられたい。）

§5　過去法と将来法の一致

ここで過去法による責任準備金と将来法によるそれとが一致することを極めて一般的な場合について証明してみよう。

保険期間を n とし（ただし年金保険の場合で保険期間終了後に年金支払期間が継続する場合には、最終の年金支払時点まで含めて n とする）、区間〔0, n〕を $w+1$ 個の時点 $t_0(=0)$, t_1, t_2, ……, $t_w(=n)$ に分割する。（ただし t_i は区間〔0, n〕におけるすべての整数値を含むものとする）そして時点 t_i では保険料 P_i が払込まれるとし（P_i はその都度異なるものであってもよいし、短期払込保険の払込終了後や年金開始後のような場合は $P_i=0$ と考えればよい）、また満期保険金、生

存給付金、年金のような生存者に対する給付 E_i が行われるとする。（生存給付のない時点では $E_i = 0$ と考えればよい）さらに区間〔t_{i-1}, t_i〕における死亡に対してはその区間中のある時点 s_i（$s_i = t_i$ もありうる）で死亡に対する給付 S_i が行われるとする。（死亡給付のない時点では $S_i = 0$ と考える）

そのとき時刻 0 において成立する収支相等の式は

$$\sum_{i=0}^{w-1} P_i\, v^{t_i}\, \frac{l_{x+t_i}}{l_x}$$

$$= \sum_{i=1}^{w} S_i\, v^{s_i}\, \frac{l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}}{l_x} + \sum_{i=1}^{w} E_i\, v^{t_i}\, \frac{l_{x+t_i}}{l_x} \tag{5.5.1}$$

である。また時刻 t_r における過去法による責任準備金は

$$\begin{aligned} {}_{t_r}V' = \frac{1}{l_{x+t_r}} \Biggl\{ & \sum_{i=0}^{r-1} P_i\, l_{x+t_i} (1+i)^{t_r - t_i} \\ & - \sum_{i=1}^{r} S_i (l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i})(1+i)^{t_r - s_i} \\ & - \sum_{i=1}^{r-1} E_i\, l_{x+t_i} (1+i)^{t_r - t_i} \Biggr\} \end{aligned} \tag{5.5.2}$$

であり、一方将来法による責任準備金は

$$\begin{aligned} {}_{t_r}V'' = \frac{1}{l_{x+t_r}} \Biggl\{ & \sum_{i=r+1}^{w} S_i (l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i})\, v^{s_i - t_r} \\ & + \sum_{i=r}^{w} E_i\, l_{x+t_i}\, v^{t_i - t_r} - \sum_{i=r}^{w-1} P_i\, l_{x+t_i}\, v^{t_i - t_r} \Biggr\} \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

である。ところで（5.5.1）で両辺に l_x を掛けた後、さらに両辺に $(1+i)^{t_r}$ を掛けると

$$\sum_{i=0}^{r-1} P_i (1+i)^{t_r-t_i} l_{x+t_i} + \sum_{i=r}^{w-1} P_i v^{t_i-t_r} l_{x+t_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} S_i (1+i)^{t_r-s_i} (l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i}) + \sum_{i=r+1}^{w} S_i v^{s_i-t_r} (l_{x+t_{i-1}} - l_{x+t_i})$$

$$+ \sum_{i=1}^{r-1} E_i (1+i)^{t_r-t_i} l_{x+t_i} + \sum_{i=r}^{w} E_i v^{t_i-t_r} l_{x+t_i}$$

となる。右辺第１項と第３項を左辺に移し、左辺第２項を右辺に移して、両辺を l_{x+t_r} で割ると ${}_{t_r}V' = {}_{t_r}V''$ が得られる。

§6　責任準備金の再帰式および純保険料の分解

保険金年末支払の養老保険の一時払純保険料 $A_{x:\overline{n|}}$ は（4.9.1）で与えられるが、右辺を変形すれば

$$A_{x:\overline{n|}} = v\,q_x + v\,p_x A_{x+1:\overline{n-1|}} \tag{5.6.1}$$

とすることができる。この両辺に $l_x(1+i)$ を掛ければ

$$l_x A_{x:\overline{n|}} (1+i) - d_x = l_{x+1} A_{x+1:\overline{n-1|}} \tag{5.6.2}$$

となる。（5.2.2）により $A_{x+1:\overline{n-1|}}$ はこの保険の１年後の責任準備金であるから、この式は、l_x 人から集めた一時払純保険料を１年間利殖し、死亡した d_x 人の各々に保険金１を支払い、残額を生存した l_{x+1} 人の１人当たりにしたものが１年後の責任準備金であることを示している。

（5.6.1）で x，n の代わりに $x+t-1$，$n-t+1$（$t=1, 2, \cdots\cdots, n$）を用いると

$$A_{x+t-1:\overline{n-t+1|}} - v\,q_{x+t-1} = v\,p_{x+t-1} A_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{5.6.3}$$

となるが、これは $t-1$ 年後の責任準備金と t 年後の責任準備金についても同様の関係があることを示している。

次にこのような関係が保険料年払のときにどうなるか考えてみよう。

(5.6.2) を解釈したときのように考えると、第 $t-1$ 年度末の生存者の責任準備金 ${}_{t-1}V_{x:\overline{n|}}$ に収入した保険料 $P_{x:\overline{n|}}$ を加えて１年間利殖し、それから死亡に対する支払額を差し引いて残額を生存者１人当たりにすると ${}_{t}V_{x:\overline{n|}}$ となる筈であるから

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overline{n|}})(1+i)-d_{x+t-1}=l_{x+t}\,{}_{t}V_{x:\overline{n|}} \qquad (5.6.4)$$

この両辺を $l_{x+t-1}(1+i)$ で割ると、(5.6.3) に対応する式として

$${}_{t-1}V_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overline{n|}}-v\,q_{x+t-1}=vp_{x+t-1}\,{}_{t}V_{x:\overline{n|}} \qquad (5.6.5)$$

が得られる。この式は責任準備金を与える式を変形しても導くことができる。すなわち (5.3.2), (5.6.3), (4.3.17) を用いると

$$\begin{aligned}{}_{t-1}V_{x:\overline{n|}} &= A_{x+t-1:\overline{n-t+1|}}-P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1|}}\\ &= v\,q_{x+t-1}+v\,p_{x+t-1}A_{x+t:\overline{n-t|}}-P_{x:\overline{n|}}(1+v\,p_{x+t-1}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})\\ &= v\,q_{x+t-1}-P_{x:\overline{n|}}+v\,p_{x+t-1}(A_{x+t:\overline{n-t|}}-P_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})\end{aligned}$$

となり、右辺第３項の括弧内は ${}_{t}V_{x:\overline{n|}}$ であるから、右辺の第１項と第２項を左辺に移せば (5.6.5) が得られる。(5.6.3) や (5.6.5) のように相続く責任準備金の間の関係を示す式を**責任準備金の再帰式**と呼んでいる。

定期保険や終身保険、さらにはもっと複雑な保険種類についても (5.6.5) と同様の再帰式を確かめることができるが、最も一般的にこれを述べると: $t-1$ 年後の責任準備金を ${}_{t-1}V$、その時点で払込む保険料を ${}_{t}P$（すなわち第 t 年度の保険料で、毎年異なるものであってもよい)、 t 年後の責任準備金を ${}_{t}V$ として、それらの間には

$${}_{t-1}V+{}_{t}P-E_{t-1}-v\,q_{x+t-1}\,S_t=v\,p_{x+t-1}\,{}_{t}V \qquad (5.6.6)$$

$$(\;t\;=1,\;2,\;\cdots\cdot,\;n\;)$$

という関係が成立する。ここに E_{t-1} は $t-1$ 年後の生存者に支払う給付であり、S_t は第 t 年度の死亡に対してその年度末に支払う給付であり、

いずれも毎年の金額が異なるものであってもよい。

保険金即時支払のときの再帰公式も（5.6.5）を式の変形で導いたときのようにして、これを求めることができる。すなわち

$$
\begin{aligned}
{}_{t-1}\overline{V}_{x:\overline{n|}} &= \overline{A}_{x+t-1:\overline{n-t+1|}} - \overline{P}_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1|}} \\
&= v^{\frac{1}{2}}q_{x+t-1} + v\,p_{x+t-1}\,\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \overline{P}_{x:\overline{n|}}(1 + v\,p_{x+t-1}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}) \\
&= v^{\frac{1}{2}}q_{x+t-1} - \overline{P}_{x:\overline{n|}} + v\,p_{x+t-1}(\overline{A}_{x+t:\overline{n-t|}} - \overline{P}_{x:\overline{n|}}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})
\end{aligned}
$$

より

$$
{}_{t-1}\overline{V}_{x:\overline{n|}} + \overline{P}_{x:\overline{n|}} - v^{\frac{1}{2}}q_{x+t-1} = v\,p_{x+t-1}\;{}_{t}\overline{V}_{x:\overline{n|}} \qquad (5.6.7)
$$

となる。

次に再帰式（5.6.5）において、

$$
v\,q_{x+t-1} = \frac{C_{x+t-1}}{D_{x+t-1}}, \quad v\,p_{x+t-1} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t-1}}
$$

として、これを変形すると

$$
{}_{t}V_{x:\overline{n|}} = \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}}({}_{t-1}V_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}}) - \frac{C_{x+t-1}}{D_{x+t}} \qquad (5.6.8)
$$

という式が得られる。この式をみて分かるように、計算基数表からあらかじめすべての年齢について

$$
u_x = \frac{D_x}{D_{x+1}}, \quad k_x = \frac{C_x}{D_{x+1}}, \quad \left(\overline{k}_x = \frac{\overline{C}_x}{D_{x+1}}\right)
$$

を計算しておけば、これらを用いて $t = 1$, ${}_{0}V_{x:\overline{n|}} = 0$から始めて（5.6.8）を繰り返し用いて ${}_{1}V$, ${}_{2}V$, ……… と順次すべての ${}_{t}V_{x:\overline{n|}}$ を計算することができる。ファクラー（ D. P. Fackler ）が考案したので、（5.6.8）を**ファクラーの再帰式**といい、u_x , k_x を**ファクラーの累積因数**という。保険金即時支払のときのそれは（5.6.7）より

$$ {}_t\overline{V}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_{x+t-1}}{D_{x+t}}\left({}_{t-1}\overline{V}_{x:\overline{n}|} + \overline{P}_{x:\overline{n}|} \right) - \frac{\overline{C}_{x+t-1}}{D_{x+t}} \qquad (5.6.9) $$

となる。

次に $p_{x+t-1} = 1 - q_{x+t-1}$ を用いて（5.6.5）を変形すると

$$ P_{x:\overline{n}|} = v\, q_{x+t-1}(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}) + (v\, {}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}) \qquad (5.6.10) $$

となるが、右辺の第1項を第 t 年度における**危険保険料**といい、第2項をその年度における**貯蓄保険料**という。右辺第1項中の $1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}$ は**危険保険金**といい、その契約の被保険者が死亡した場合に被保険者群団にかかる正味の負担額である。危険保険料はそれを保険金額とみたときの1年定期保険の保険料になる。いいかえれば全契約から集めた危険保険料を1年利殖しておき、死亡契約のもっている責任準備金をそれに加えれば、必要な死亡保険金が充足される。また第2項の貯蓄保険料は、これを年初の責任準備金 ${}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ に加え1年利殖するとちょうど年度末に責任準備金 ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ となる。（5.6.10）を**保険料の分解式**という。なお上式から分かるように危険保険料、貯蓄保険料とも保険年度毎にその値が異なるので、第 t 年度（払込時点で言えば $t-1$ ）におけるそれぞれを ${}_tP^r$ ， ${}_tP^s$ と表示する。（右肩の添字 r ，s はドイツ語の Risikoprämie，Sparprämie の頭文字）ただし平準保険料の場合は両者の和は常に同じで、平準保険料に一致し $P = {}_tP^r + {}_tP^s$ である。

一時払保険、または短期払込保険の払込済契約については、（5.6.3）より

$$ 0 = v\, q_{x+t-1}(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}) + (v\, {}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}) \qquad (5.6.11) $$

という関係が得られる。この第1項を危険保険料、第2項を貯蓄保険料と呼ぶこともある。

また一般的に ${}_{t-1}V$ と ${}_tV$ とが（5.6.6）によって関係づけられるような場合では、この式を書き換えると

$$ {}_tP = \{ v\, q_{x+t-1} (S_t - {}_tV) + E_{t-1} \} + \{ v\, {}_tV - {}_{t-1}V \} \qquad (5.6.12) $$

となるが、ここで右辺の第1項が ${}_tP$ 中の危険保険料 ${}_tP^r$ であり、第2項が貯蓄保険料 ${}_tP^s$ である。ただし第1項から時刻 $t-1$ の直後に支払う生存給付金 E_{t-1} を除いたもの、すなわち死亡危険に備える部分のみを危険保険料と称することもある。

保険金即時支払のときに保険料の分解を示す式は、（5.6.7）で

$p_{x+t-1} = 1 - q_{x+t-1}$ として得られる

$$ \overline{P}_{x:\overline{n|}} = v^{\frac{1}{2}} q_{x+t-1} (1 - v^{\frac{1}{2}}\, {}_t\overline{V}_{x:\overline{n|}}) + (v\, {}_t\overline{V}_{x:\overline{n|}} - {}_{t-1}\overline{V}_{x:\overline{n|}}) \qquad (5.6.13) $$

である。右辺の第1項が危険保険料、第2項が貯蓄保険料を表わす。

なお危険保険料、貯蓄保険料とも常に正であるとは限らない。例えば純粋の生存保険では、（5.6.12）で $S_t = 0,\ E_{t-1} = 0$ として分かるように、危険保険料が負である。これは死亡者の責任準備金が生存者群団の資金に繰り入れられるためである。逆に定期保険で本章§3の図の（5）のような責任準備金曲線となる場合は、満期の近く（少なくとも第 n 年度）で貯蓄保険料がマイナスになる。それは、保険料だけでは死亡保険金の支払に不足する分を責任準備金を取崩して補塡するからである。

§7　再帰式を利用する保険料の計算

前節で（5.6.5）から導かれた（5.6.8）を書き直すと

$$ D_{x+t}\ {}_tV_{x:\overline{n|}} = D_{x+t-1} ({}_{t-1}V_{x:\overline{n|}} + P_{x:\overline{n|}}) - C_{x+t-1} $$

となるが、$t = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に関するこの式の和をとると

$$\sum_{t=1}^{n} D_{x+t}\ {}_tV_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} D_{x+t-1}\ {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} \sum_{t=1}^{n} D_{x+t-1} - \sum_{t=1}^{n} C_{x+t-1}$$

となる。左辺と右辺にある$D_{x+t}\ {}_tV_{x:\overline{n}|}$のうち共通なものを消して整理すると

$$D_{x+n}\ {}_nV_{x:\overline{n}|} = D_x\ {}_0V_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|}(N_x - N_{x+n}) - (M_x - M_{x+n})$$

であるが、このうち${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$，${}_nV_{x:\overline{n}|} = 1$が分かっているから

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

が得られる。すなわち（4.14.19）が再び得られた。

このように一般には（5.6.6）で与えられる相続くn個の責任準備金に関する関係式から逆に保険料を計算することが可能であり、それをうまく利用できる場合がある。一例として次のような場合をとりあげよう。保険金年末支払の終身保険に特約をつけて、契約からn年以内に被保険者が死亡すれば、その年度末に通常の死亡保険金に責任準備金を付加して支払うこととし、その対価としてn年間に特別保険料を平準で徴収することにした。このような場合の特別保険料を計算してみよう。普通終身保険の平準保険料に特別保険料を加えた額をP'とし、n年以内の責任準備金を${}_tV'$とすると、（5.6.6）で$E_{t-1} = 0$，$S_t = 1 + {}_tV'$とした式が成立し

$${}_{t-1}V' + P' - v\,q_{x+t-1}(1 + {}_tV') = v(1 - q_{x+t-1})\,{}_tV' \qquad (5.7.1)$$

となる。従って

$${}_{t-1}V' + P' - v\,q_{x+t-1} = v\ {}_tV'$$

となるが、この両辺にv^{t-1}を掛けて、$t = 1, 2, \cdots\cdots, n$について加えると

$$\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\ {}_{t-1}V' + P'\sum_{t=1}^{n} v^{t-1} - \sum_{t=1}^{n} v^{t}\, q_{x+t-1} = \sum_{t=1}^{n} v^{t}\ {}_{t}V'$$

となる。両辺の $v^t\ {}_tV'$ について共通なものを消し、かつ ${}_0V' = 0$，${}_nV' = {}_nV_x$（普通終身保険の責任準備金）を用いると

$$P' = \frac{v^n\ {}_nV_x + (1+i)^x (M'_x - M'_{x+n})}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

ただし　　$M'_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^{x+t}\ q_{x+t-1}$

となる。この保険料から普通終身保険の保険料を引いたものが求める特別保険料である。

第５章　練習問題（２）

（１）　$x = 50$，$n = 20$ の養老保険に関し、第５回全会社表，5.5％の基礎によって、$k = 2$，$t = 5$ および 10 につき諸保険価格を計算して、次の不等式を確かめよ。

（ａ）　A についての関係（4.9.15）

（ｂ）　P についての関係（4.17.12）

（ｃ）　V についての関係（5.4.16）

（２）　次式を証明せよ。

（ａ）　$$\frac{d}{dt}\ {}_tV_x^{(\infty)} = \frac{\bar{A}_{x+t} - \mu_{x+t}\,\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}$$

（ｂ）　$$\frac{d}{dx}\ {}_tV_x^{(\infty)} = -\ \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}(\mu_{x+t} - \mu_x) + \frac{{}_tV_x^{(\infty)}}{\bar{a}_x}$$

（３）　${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = v - P_{x:\overline{n}|}$　　を証明せよ。

（４）　保険金年末支払、保険料全期払込の養老保険の責任準備金について、次の再帰式を証明せよ。

$$1 - {}_{t+1}V_{x:\overline{n}|} = u_{x+t}\{(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}) - (P_{x:\overline{n}|} + d)\}$$

ただし $0 \leqq t \leqq n-1$ ，$u_{x+t} = \dfrac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}$ とする。

（５）　（ａ）　最も一般的な形の将来法の責任準備金の式（5.5.3）で、時間の区切りを１年ごととすると

$$_tV = \frac{1}{l_{x+t}} \left\{ \sum_{i=t+1}^{n} S_i (l_{x+i-1} - l_{x+i}) v^{i-t} + \sum_{i=t}^{n} E_i \, l_{x+i} \, v^{i-t} - \sum_{i=t}^{n-1} P_i \, l_{x+i} \, v^{i-t} \right\}$$

となるが、この式から責任準備金の再帰式（5.6.6）を導け。（P_t は $_{t+1}P$に当たることに留意のこと）

（b）　逆に（5.6.6）から上記の将来法による責任準備金の式および過去法によるそれが導かれることを証明せよ。

（6）　死亡保険金（保険金年末支払）が変動する n 年満期養老保険があり、第 t 年度の死亡保険金は S_t、満期保険金は E_n であるとする。そのとき $t(0 \leqq t \leqq n)$ における責任準備金が

$$_tV'_{x:\overline{n}|} = 1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t}} - (P + d)\ddot{a}_{x+t}$$

で表わされるための必要十分条件を求めよ。ただし θ_x は t に関係なく契約年齢 x にのみ依存する値である。

（7）　保険金が逓減し、保険料は平準年払である m 年払込 n 年定期保険があり、第 t 年度の死亡保険金 S_t が条件

$$S_1 q_x > S_2 q_{x+1} > \cdots\cdots > S_n q_{x+n-1}$$

を満たしているとする。

この時第1年度末の責任準備金 ${}_1^{m}V^{\prime 1}_{x:\overline{n}|}$ が正であれば、すべての保険年度末で ${}_t^{m}V^{\prime 1}_{x:\overline{n}|}$ が正となることを証明せよ。

（8）　（5.5.3）で時間の区切りを $\frac{1}{k}$ 年とすると、各 $\frac{1}{k}$ 年度末の将

来法による責任準備金は

$$
{}_{\frac{t}{k}}V^{(k)} = \frac{1}{l_{x+\frac{t}{k}}} \left\{ \sum_{i=t+1}^{nk} S_{\frac{i}{k}} (l_{x+\frac{i-1}{k}} - l_{x+\frac{i}{k}}) v^{\frac{i}{k}-\frac{t}{k}} + \sum_{i=t}^{nk} E_{\frac{i}{k}} l_{x+\frac{i}{k}} v^{\frac{i}{k}-\frac{t}{k}} - \sum_{i=t}^{nk-1} P_{\frac{i}{k}} l_{x+\frac{i}{k}} v^{\frac{i}{k}-\frac{t}{k}} \right.
$$

$$
(t = 0, 1, 2, \cdots\cdots, nk-1)
$$

となる。この式から $\frac{1}{k}$ 年ごとの責任準備金の再帰式を導け。

（９）　前問で得られた再帰式で $k \to \infty$ とすると微分方程式

$$
\frac{d\,{}_tV^{(\infty)}}{dt} = (\mu_{x+t} + \delta)\,{}_tV^{(\infty)} + P_t^{(\infty)} - E_t - \mu_{x+t} S_t
$$

が得られることを証明せよ。（ **Thiele の微分方程式**という）ただし $P_t^{(\infty)}$ は区間〔 t ， $t+\varepsilon$ 〕の間に収入される保険料の総額が $P_t^{(\infty)}\varepsilon$ であることを意味し、E_t も同様の意味である。

またこの微分方程式を解釈せよ。

（１０）　問題（２）の（ａ）の結果を用い保険金即時支払、保険料瞬間払の終身保険について

$$
\frac{d}{dt}\,{}_tV_x^{(\infty)} = (\mu_{x+t} + \delta)\,{}_tV_x^{(\infty)} + P_x^{(\infty)} - \mu_{x+t}
$$

となることを証明せよ。（すなわち前問の微分方程式が成立する）

（１１）　本章 練習問題（１）の（１）の（ｂ）の結果を用いて、50歳契約100歳満期養老保険の $t = 1, 2, 3, 4, 5, 11, 21, 31, 41, 46, 47, 48, 49, 50$ について ${}_t\overline{P}^{r}$ および ${}_t\overline{P}^{s}$ を計算せよ。

（１２）　（ａ）　生存保険の平準保険料 $P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ を危険保険料と貯蓄保険料に分解せよ。

（ｂ）　(5.6.11) にならって、一時払込、期始払年金の第 t 年度における危険保険料および貯蓄保険料を定めよ。

（１３）　保険金年末支払の養老保険において第 t 年度における危険保険料を ${}_tP^r$ とすれば

$$\frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} {}_tP^r\, v^t}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} v^t} = P_{x:\overline{n|}} - P_{\overline{n|}}$$

となることを証明せよ。ただし $P_{\overline{n|}}$ は (1.13.5) で与えられるものである。

（１４）　普通終身保険の危険保険料は

$$\varDelta^2\,\ddot{a}_{x+t-1} > i\,\varDelta\,\ddot{a}_{x+t-1} \qquad (t=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

のときは、経過年数の増加とともに常に増大することを証明せよ。ただし

$$\varDelta\,\ddot{a}_{x+t-1} = \ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_{x+t-1}$$

$$\varDelta^2\,\ddot{a}_{x+t-1} = \varDelta\,\ddot{a}_{x+t} - \varDelta\,\ddot{a}_{x+t-1}$$

である。

（１５）　平準保険料と年度末の責任準備金との間に

$$({}_{t-1}V + P)(1+i) - \frac{t}{n}\,q_{x+t-1} = p_{x+t-1}\ {}_tV \qquad (1 \leq t \leq n)$$

$${}_0V = 0\,,\qquad {}_nV = 1$$

という関係があるとき、P の算式を求めよ。

（１６）　n 年間の生存保険で、死亡すればその保険年度末に責任準備金を支払う場合、平準年払保険料はどうなるか。

（１７）　n 年間の生存保険で、生存すれば保険金 2 を支払い、死亡すればその保険年度末に保険金 1 と責任準備金を加えた額を支払う場合、平準年払保険料はどうなるか。ただし $q_{x+t} = 0.002(1+i)^t$ となるような特殊な死亡表を使用したとする。

（１８）　保険料一時払の生存保険で、期間途中の死亡に対しては責任準備金の 3 割を即時に支払うとする。一時払保険料としていくらを徴収しておけばよいか。(問題（９）の微分方程式の応用)

第６章　計算基礎の変更

（初めて生命保険数学を学ばれる読者は本章を飛ばしても差し支えない）

§1　予備定理

予定利率あるいは予定死亡率、ときには予定脱退率が変更されたとき、保険料、責任準備金等の保険価格はどのように変化するであろうか。

この問題は古くから多くのアクチュアリーの関心を呼び、いろいろな手法を用いて多くの研究がなされている。（例えば、文献〔1〕下巻 第８章 参照）計算が筆算かそろばんか、せいぜい手回し計算機でしか行えなかった時代では、計算基礎の変更が保険価格に及ぼす影響を知っておき、またその影響の程度を計測する簡単な方法を考案しておくことは、実用的にも重要なことであった。しかしコンピューターが発達した現在では、変更された計算基礎に基づいて必要な保険価格を全部計算し直すことも容易であり、計算の結果を直接元の値と比較して、影響の程度を知ることができる。

従って現在ではこの問題は実用性を失っているが、しかしいちいち計算をすることなく、どのような条件下で正負どちらの影響が現れるかを調べてみるのは理論的に興味があり、また、およその状況を頭に入れておくことはアクチュアリーとして必要なことである。

まず始めに予備として、Steffensen，Jensen 等が得た一般的な不等式を本章の記述に適した形で述べておく。

定理：三つの実数列

$$f_1\ ,\ f_2\ ,\cdots\cdots\cdots,f_n$$

$$g_1\ ,\ g_2\ ,\cdots\cdots\cdots,g_n\quad\left(g_j\geq 0\ ,\ \sum_{j=1}^{n} g_j>0\right)$$

$$h_1\ ,\ h_2\ ,\cdots\cdots\cdots,h_n\quad\left(h_j\geq 0\ ,\ \sum_{j=1}^{n} h_j>0\right)$$

があり

$$f_1\geq f_2\geq\cdots\cdots\cdots\geq f_n \tag{6.1.1}$$

であるとする。そのとき

（１）

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{j=1}^{t} g_j\geq\sum_{j=1}^{t} h_j\quad(t<n)\\[2ex]\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j=\sum_{j=1}^{n} h_j\end{array}\right\} \tag{6.1.2}$$

であると

$$\sum_{j=1}^{n} f_j\,g_j\geq\sum_{j=1}^{n} f_j\,h_j \tag{6.1.3}$$

（２）

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{t} g_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j}\geq\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{t} h_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} h_j}\quad(t<n) \tag{6.1.4}$$

であると

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j\,g_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} g_j}\geq\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_j\,h_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} h_j} \tag{6.1.5}$$

（３）　$h_j>0\ (j=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ n)$ で

$$\frac{g_1}{h_1}\geq\frac{g_2}{h_2}\geq\cdots\cdots\cdots\geq\frac{g_n}{h_n} \tag{6.1.6}$$

であると

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} f_j\, g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} f_j\, h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j} \tag{6.1.7}$$

証明　：

（1）
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} f_j\, g_j &= f_1 g_1 + f_2\{(g_1+g_2)-g_1\} \\ &\quad + f_3\{(g_1+g_2+g_3)-(g_1+g_2)\} + \cdots\cdots\cdots \\ &\quad + f_n\{(g_1+g_2+\cdots\cdots+g_n)-(g_1+g_2+\cdots\cdots+g_{n-1})\} \\ &= g_1(f_1-f_2)+(g_1+g_2)(f_2-f_3) \\ &\quad + \cdots\cdots + (g_1+g_2+\cdots\cdots+g_{n-1})(f_{n-1}-f_n) \\ &\quad + (g_1+g_2+\cdots\cdots+g_n)f_n\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} f_j\, g_j - \sum_{j=1}^{n} f_j\, h_j \\ &= (f_1-f_2)(g_1-h_1)+(f_2-f_3)\{(g_1+g_2)-(h_1+h_2)\} \\ &\quad + \cdots\cdots + (f_{n-1}-f_n)\{\sum_{j=1}^{n-1} g_j - \sum_{j=1}^{n-1} h_j\} \\ &\quad + f_n\{\sum_{j=1}^{n} g_j - \sum_{j=1}^{n} h_j\}\end{aligned}$$

仮定（6.1.1）および（6.1.2）により、右辺の最終項は0であり、それ以外の項も正または0であるから、（6.1.3）が成立する。

（2）　$\dfrac{g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j}$　，　$\dfrac{h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j}$　を g_j' および h_j' とすれば、（6.1.4）により g_j' および h_j' について（6.1.2）が成立する。従って（6.1.3）で g_j，h_j のかわりに g_j'，h_j' としたものが成立し、それは（6.1.5）である。

（３）
$$\left(\sum_{j=1}^{t} g_j\right)\left(\sum_{s=1}^{n} h_s\right)-\left(\sum_{j=1}^{t} h_j\right)\left(\sum_{s=1}^{n} g_s\right)$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{t} g_j\right)\left(\sum_{s=t+1}^{n} h_s\right)-\left(\sum_{j=1}^{t} h_j\right)\left(\sum_{s=t+1}^{n} g_s\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{t}\sum_{s=t+1}^{n}\left(g_j h_s - h_j g_s\right)$$

であるが、最後の式の括弧の中で $s > j$ であるから、仮定（6.1.6）により、どの項も正または０である。従って最初の式が正または０となり、それは（6.1.4）が成立することを示している。その時は（6.1.5）と同じ（6.1.7）が成立する。

証明の過程から、（6.1.1）の不等号の向きが逆になった場合、すなわち

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots\cdots\cdots \leq f_n \tag{6.1.8}$$

であると、結果の式（6.1.3），（6.1.5），（6.1.7）において不等号の向きが逆になった式が成立することは明らかであろう。また同じく証明の過程から分かるが、（6.1.1）における $\geqq$ がすべて $>$ である時に、（6.1.3），（6.1.5），（6.1.7）で等号が成立するのは、条件（6.1.2），（6.1.4），（6.1.6）におけるすべての $\geqq$ が $=$ となる場合のみであり、かつその場合に限る。

次にこの定理の簡単な応用として、$t < n$ のとき不等式

$$\frac{\ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} > \frac{\ddot{a}_{\overline{t|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} > \frac{t}{n} \tag{6.1.9}$$

が成立することを示そう。定理の（３）において

$$g_j = \begin{cases} 1 & (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots,\ t) \\ 0 & (j = t+1,\ \cdots\cdots\cdots,\ n) \end{cases}$$

$$h_j = 1 \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$f_j = v^{j-1} \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

とすると、条件（6.1.1）と（6.1.6）が満足されるので、(6.1.7）が成立し

$$\frac{1 + v + \cdots\cdots + v^{t-1}}{t} > \frac{1 + v + \cdots\cdots + v^{n-1}}{n}$$

となる。これは（6.1.9）の第2の不等式である。また（3）において

$$g_j = \begin{cases} v^{j-1} & (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t) \\ 0 & (j = t + 1,\ \cdots\cdots,\ n) \end{cases}$$

$$h_j = v^{j-1} \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$f_j = {}_{j-1}p_x \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

とすると、やはり条件（6.1.1）と（6.1.6）が満足されるので

$$\frac{1 + v\,p_x + \cdots\cdots + v^{t-1}\ {}_{t-1}p_x}{1 + v + \cdots\cdots + v^{t-1}} > \frac{1 + v\,p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x}{1 + v + \cdots\cdots + v^{n-1}}$$

となる。これは（6.1.9）の第1の不等式である。

第６章　練習問題（１）

（１）　(1.5.4) を n が整数でない場合にも拡張して、正数 t に対し

$$a_{\overline{t}|} = \frac{1 - v^t}{i}$$

と定義する。(2.5.2) で与えられる平均余命　$e_x = p_x + {}_2p_x + {}_3p_x + \cdots\cdots$ を用いると

$$a_{\overline{e_x}|} > a_x$$

となることを証明せよ。

（２）　(1.13.7) を n が整数でない場合にも拡張して、正数 t に対し $A_{\overline{t}|} = v^t$ と定義する。そのとき

$$A_{\overline{1+e_x}|} < A_x$$

となることを証明せよ。

（３）　§1の定理の（１）の類似として次のことを証明せよ。ある区間〔a , b〕で定義された三つの関数 $f(t)$　,　$g(t)$　,　$h(t)$ があり

　（ⅰ）　$f(t)$ は単調非増大で微分可能

　（ⅱ）　$g(t) \geqq 0$ で、かつ $\int_a^b g(t)\,dt$ が存在して正

　（ⅲ）　$h(t) \geqq 0$ で、かつ $\int_a^b h(t)\,dt$ が存在して正

であるが、さらに

$$\int_a^x g(t)\,dt \geq \int_a^x h(t)\,dt \qquad (a < x < b)$$

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b h(t)\,dt$$

であると

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt \geq \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt$$

（4）　問題（3）の結果を用い、問題（1）および（2）にならって

$$\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|} > \bar{a}_x \quad \text{および} \quad A_{\overline{\mathring{e}_x}|} < \bar{A}_x$$

を証明せよ。ただし $\mathring{e}_x$ は（2.5.5）で与えられ、それを用いて $\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$ は（1.7.2）で与えられる。また $A_{\overline{\mathring{e}_x}|} = v^{\mathring{e}_x}$ とする。

（5）　（6.1.9）によれば

$$1 = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{\overline{1}|}} \geq \frac{\ddot{a}_{x:\overline{2}|}}{\ddot{a}_{\overline{2}|}} \geq \cdots\cdots\cdots \geq \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{\overline{n-1}|}} \geq \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} \geq \cdots\cdots\cdots$$

であるが、累加年金に関して

$$1 = \frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{1}|}} \leq \frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{2}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{2}|}} \leq \cdots\cdots\cdots$$

$$\leq \frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}} \leq \frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \leq \cdots\cdots\cdots$$

となることを証明せよ。

（6）　$\dfrac{(I\ddot{a})_{\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} < \dfrac{n+1}{2}$ ，　$\dfrac{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \dfrac{n+1}{2}$

を証明せよ。（第1章 練習問題（2）の（7）および 第4章 練習問題（3）の（3）を参照）

§2　予定利率の変更

予定利率を上げる場合を考えてみよう。(下げる場合は結果が逆になる) 予定利率 i を上げて $i'(>i)$ とすると $v' = \dfrac{1}{1+i'}$ は $v = \dfrac{1}{1+i}$ より小さい。従って

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^{j-1} \ {}_{j-1}p_x \tag{6.2.1}$$

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^{j} \ {}_{j-1|}q_x = \sum_{j=1}^{n} v^{j} \ {}_{j-1}p_x \ q_{x+j-1} \tag{6.2.2}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{j=1}^{n} v^{j} \ {}_{j-1}p_x \ q_{x+j-1} + v^{n} \ {}_{n}p_x \tag{6.2.3}$$

において v の代わりに v' を入れた $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$, $A'^{1}_{x:\overline{n}|}$, $A'_{x:\overline{n}|}$ はすべて元の値より小さくなる。すなわち予定利率を上げれば、これらの保険価格は小さくなる。

ここで前節の定理の応用として、$t<n$ について

$$\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \geq \frac{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.2.4}$$

となることを証明しよう。前節の定理の(3)を利用するが、そこで

$$g_j = \begin{cases} v^{j-1} \ {}_{j-1}p_x & (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t) \\ 0 & (j=t+1,\ \cdots\cdots,\ n) \end{cases}$$

$$h_j = v^{j-1} \ {}_{j-1}p_x \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

とすると、明らかに条件(6.1.6)が満足される。また

$$f_j = \left(\frac{v'}{v}\right)^{j-1} \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

は、$\dfrac{v'}{v} < 1$ より単調減少数列であるから、(6.1.7)が成立して

$$\frac{\sum_{j=1}^{t}\left(\frac{v'}{v}\right)^{j-1} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{t} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{v'}{v}\right)^{j-1} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}$$

これを書き直せば

$$\frac{\sum_{j=1}^{t} v'^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{n} v'^{j-1}\ {}_{j-1}p_x} \geq \frac{\sum_{j=1}^{t} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x} \qquad (6.2.5)$$

となり、これは（6.2.4）である。

次に予定利率を上げた場合の年払保険料への影響を調べる。前節の定理の（２）において

$$g_j = v'^{j-1}\ {}_{j-1}p_x \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

$$h_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x \qquad (j=1,\ 2\ ,\cdots\cdots,\ n)$$

と考えると、今証明した（6.2.5）はこの g_j ，h_j について条件（6.1.4）が満足されていることを示している。そこで

$$f_j = v\, q_{x+j-1} \qquad (j=1,2,\ \cdots\cdots,\ n) \qquad (6.2.6)$$

とし、その時に（6.1.8）に当たる条件

$$q_x \leq q_{x+1} \leq \cdots\cdots \leq q_{x+n-1} \qquad (6.2.7)$$

が満足されているとすると、（6.1.5）で不等号を逆にした場合が成立して

$$\frac{\left(\frac{v}{v'}\right)\sum_{j=1}^{n} v'^{j}\ {}_{j-1}p_x\, q_{x+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} v'^{j-1}\ {}_{j-1}p_x} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} v^{j}\ {}_{j-1}p_x\ q_{x+j-1}}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}$$

となり、従って（6.2.1），（6.2.2）を使って

$$\frac{v}{v'} P'^{\,1}_{x:\overline{n|}} \leq P^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

となるが、$\dfrac{v}{v'} > 1$ であるから、これより$P'^{\,1}_{x:\overline{n|}} < P^{\,1}_{x:\overline{n|}}$となる。また（6.2.6）の f_j の代わりに

$$f_j = \begin{cases} v\, q_{x+j-1} & (j = 1, 2, \cdots\cdots, n-1) \\ v & (j = n) \end{cases}$$

とすれば、養老保険についても

$$q_x \leq q_{x+1} \leq \cdots\cdots \leq q_{x+n-2} < 1 \qquad (6.2.8)$$

が成立するかぎり同じようにして$P'_{x:\overline{n|}} < P_{x:\overline{n|}}$となることが証明される。従って条件（6.2.7）あるいは（6.2.8）の成立する範囲、すなわち“死亡率が年齢とともに上昇するような年齢範囲では、定期保険でも養老保険でも、予定利率を上げた場合、年払保険料は減少する。”

責任準備金について調べるには、$t < n$ について

$$\frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n|}}} \geq \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \qquad (6.2.9)$$

がある条件下に成立することを示そう。$0 < t \leqq n-1$とし

$$g_j = \begin{cases} v^{j-1}\, {}_{j-1}p_{x+t} & (j = 1, 2, \cdots\cdots, n-t) \\ 0 & (j = n-t+1, \cdots\cdots, n) \end{cases}$$

$$h_j = v^{j-1}\, {}_{j-1}p_x \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とすると、

$$\frac{1}{1} \geq \frac{p_{x+t}}{p_x} \geq \frac{{}_2p_{x+t}}{{}_2p_x} \geq \cdots\cdots \geq \frac{{}_{n-t-1}p_{x+t}}{{}_{n-t-1}p_x} > 0 \qquad (6.2.10)$$

が成立するかぎり、条件（6.1.6）が満足される。その時

$$f_j = \left(\frac{v'}{v}\right)^{j-1} \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とすると、これは単調減少であるので（6.1.7）が成立し

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-t} v'^{j-1}\ {}_{j-1}p_{x+t}}{\sum_{j=1}^{n-t} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_{x+t}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} v'^{j-1}\ {}_{j-1}p_{x}}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_{x}}$$

となる。これは（6.2.9）が成立することを示している。（6.2.9）が成立すれば、これに（5.3.7）を用いれば

$$1 - {}_tV'_{x:\overline{n}|} \geq 1 - {}_tV_{x:\overline{n}|}$$

従って

$${}_tV'_{x:\overline{n}|} \leq {}_tV_{x:\overline{n}|}$$

である。一方すべての j と t について $p_{x+j} > p_{x+t+j}$ となる時、すなわち $q_{x+j} < q_{x+t+j}$ となる時には、条件（6.2.10）が満足され、従って結論として、“死亡率が年齢とともに上昇するような年齢範囲の養老保険では、予定利率が上がれば責任準備金は小さくなる。”

なお $t = n-1$ では、$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ を用いると

$${}_{n-1}V'_{x:\overline{n}|} - {}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} < 0$$

となるので、予定利率を上げれば、死亡率の水準に関係なく常に責任準備金は小さくなる。

§3　予定死亡率の変更

ここでは予定死亡率が減少する場合を調べるが、条件付保険のようにそれが増加する場合には結果の増減を逆にして考えればよい。

今対象とするすべての年齢で、元の死亡率 q_x に対し新しく採用した死亡率 q'_x のほうが小さくて

$$q'_x \leq q_x$$

であるとする。その時は $p_x = 1 - q_x$, ${}_jp_x = p_x p_{x+1} \cdots\cdots p_{x+j-1}$ より

$$p_x' \geq p_x \quad , \quad {}_jp_x' \geq {}_jp_x$$

となる。従って（6.2.1）の右辺で v は不変のまま ${}_{j-1}p_x$ の代わりに ${}_{j-1}p_x'$ を使用した $\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$ は元の $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ より大きくなり

$$\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} \geq \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \tag{6.3.1}$$

である。なお少なくとも一つの j で等号にならず $q'_{x+j} < q_{x+j}$ になれば（6.3.1）の $\geq$ は $>$ となる。

また死亡率が小さくなれば（6.2.4）に当たる式

$$\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \leq \frac{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \tag{6.3.2}$$

が成立することも前節と同様に証明される。ここでも証明には§１の定理の（３）を利用するが、そこで

$$g_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$h_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x' \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とすると

$$\frac{g_j}{h_j} \div \frac{g_{j+1}}{h_{j+1}} = \frac{{}_{j-1}p_x}{{}_{j-1}p_x'} \times \frac{{}_jp_x'}{{}_jp_x} = \frac{p'_{x+j-1}}{p_{x+j-1}} \geq 1$$

であるから条件（6.1.6）が満足される。そこで

$$f_j = \begin{cases} 1 & (j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t) \\ 0 & (j = t+1,\ \cdots\cdots,\ n) \end{cases}$$

とすると、（6.1.7）に当たる

$$\frac{\sum_{j=1}^{t} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x} \geq \frac{\sum_{j=1}^{t} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x'}{\sum_{j=1}^{n} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x'}$$

が得られ、これは（6.3.2）を表わしている。

次に（4.9.4）により $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ であるから、（6.3.1）より

$$A'_{x:\overline{n}|} \leq A_{x:\overline{n}|} \tag{6.3.3}$$

となる。また$P = \dfrac{A}{\ddot{a}}$であるので、(6.3.1) と (6.3.3) から

$$P'_{x:\overline{n}|} \leq P_{x:\overline{n}|} \tag{6.3.4}$$

が得られる。すなわち予定死亡率が小さくなれば、年金現価は大きくなり、一方養老保険の一時払保険料と年払保険料は小さくなる。

また (6.3.3) の左辺から $v^n\,{}_np'_x$ を引き、右辺からそれより小さな $v^n\,{}_np_x$ を引くと

$$A'^{\ 1}_{x:\overline{n}|} \leq A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} \tag{6.3.5}$$

となり、さらにこの式と (6.3.1) から

$$P'^{\ 1}_{x:\overline{n}|} \leq P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} \tag{6.3.6}$$

も得られる。

責任準備金については、§2と同様の方法を用いてもあまりよい結果を得られないので、別の手法を用いることにする。ここでは (5.3.7) から得られる

$${}_tV'_{x:\overline{n}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \tag{6.3.7}$$

に基づいて責任準備金の増減を調べることにするが、始めに簡単に判明するいくつかの場合を述べておこう。

(1)　$t = n - 1$ では、(6.3.1) を用いて

$$\frac{\ddot{a}_{x+n-1:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}'_{x+n-1:\overline{1}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} \geq 0$$

となるので、責任準備金は常に増加する。(§2の終わりの注意と対比せよ)

（２）　$0 < t < n$ とし

$$q'_{x+j} < q_{x+j} \qquad (0 \leq j \leq t-1)$$
$$q'_{x+j} = q_{x+j} \qquad (t \leq j \leq n-1)$$

である時、すなわち $x + t$ 歳以降の死亡率は変わらず、それ以前の死亡率のみ減少するとすれば、 $j \geq t$ では $\ddot{a}'_{x+j:\overline{n-j}|} = \ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}$ であるので、（6.3.7）より

$${}_jV'_{x:\overline{n}|} - {}_jV_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}\left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}\right) > 0$$

となる。従って $j \geq t$ で責任準備金は増加する。特に $t = 1$ の時、すなわち $q'_x < q_x$ で、その他の死亡率がすべて不変の時は、すべての j について責任準備金が増加する。

（３）　逆に $0 < t < n$ に対し

$$q'_{x+j} = q_{x+j} \qquad (0 \leq j \leq t-1)$$
$$q'_{x+j} < q_{x+j} \qquad (t \leq j \leq n-1)$$

となる時を調べよう。(4.3.22), (4.3.23) より

$$\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{j}|}}{v^j \ {}_jp_x}$$

となり、従って

$${}_jV_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = 1 - \frac{1}{v^j \ {}_jp_x} + \frac{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}{v^j \ {}_jp_x \ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

となるが、${}_jV'_{x:\overline{n}|}$ についても同様の式をつくり、両者を比べると、 $j \leq t$ では ${}_jp'_x = {}_jp_x$ ， $\ddot{a}'_{x:\overline{j}|} = a_{x:\overline{j}|}$ であるから（6.3.1）より

$${}_jV'_{x:\overline{n}|} - {}_jV_{x:\overline{n}|} = \frac{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}{v^j \ {}_jp_x}\left(\frac{1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) < 0$$

となる。すなわち $j \leq t$ で責任準備金は減少する。

特に $t = 1$ の時、すなわち $q'_x = q_x$ でその他の死亡率がすべて減少する場合は、1年経過後の責任準備金は減少する。

なお $t = n - 1$ の時は、

$$q'_{x+j} = q_{x+j} \quad (j \leq n-2), \quad q'_{x+n-1} < q_{x+n-1}$$

となるが、保険金年末支払の養老保険では q_{x+n-1} が保険価格に影響しないので、保険料も責任準備金も不変である。

（4）　（2）と（3）を組み合わせた場合、すなわち

$$1 \leq t_1 \leq t_2 - 1 \leq n - 2$$

であるような t_1，t_2 に対し

$$q'_{x+j} < q_{x+j} \quad (t_1 \leq j \leq t_2 - 1)$$

となる以外は、すべての j について $q'_{x+j} = q_{x+j}$ となる場合をとる。今与えられた条件を

$$q'_{x+j} \leq q_{x+j} \quad (j \leq t_2 - 1)$$
$$q'_{x+j} = q_{x+j} \quad (j \geq t_2)$$

とみると、（2）の場合と同じように $j \geq t_2$ で責任準備金は増加している。また与えられた条件を

$$q'_{x+j} = q_{x+j} \quad (j \leq t_1 - 1)$$
$$q'_{x+j} \leq q_{x+j} \quad (j \geq t_1)$$

とみると、（3）の場合と同じように $j \leq t_1$ で責任準備金は減少している。すなわち死亡率が減少する区間の前では責任準備金が減少し、後では責任準備金が増加する。（中間の区間で死亡率が増加する時は、責任準備金はその区間の前で増加し、後で減少する。）従って責任準備金の差額の正負はこの区間内で少なくとも1回逆転する。

（５）　（４）の特別の場合として、$t_1 = t_2 - 1$ の時、すなわちある一つの $j = t$ について

$$q'_{x+t} < q_{x+t}$$

となり、その他の j についてはすべて $q'_{x+j} = q_{x+j}$ となる場合をとると、責任準備金は $j \leq t$ で減少し、 $j \geq t + 1$ で増加する。

（２）および（３）より、経過年数の浅いところでの死亡率の減少は責任準備金を増加させ、長いところでの死亡率の減少は責任準備金を減少させる傾向のあることがうかがわれるが、一般的なある条件の下に責任準備金が増加することを証明することができる。記号を簡略にして、その証明をしてみよう。今二つの数列　b_j , b'_j （$j = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, n-1$）があり

$$1 > b_1 > b_2 > \cdots\cdots\cdots > b_{n-1} > 0 \tag{6.3.8}$$

$$1 > b'_1 > b'_2 > \cdots\cdots\cdots > b'_{n-1} > 0 \tag{6.3.9}$$

$$b'_j > b_j \tag{6.3.10}$$

であるとする。例えばここで

$$b_j = v\,p_{x+j-1}\ , \quad b'_j = v\,p'_{x+j-1} \tag{6.3.11}$$

とすれば、これら３式は“元の死亡率も変更後の死亡率も年齢とともに上昇し、かつ同一年齢では変更後の死亡率が元の死亡率より低い”ことを表わしている。この場合には

$$b_{j+1}\,b_{j+2} = v\,p_{x+j}\,v\,p_{x+j+1} = v^2\,{}_2p_{x+j}$$

等が得られるので、$j = 0, 1, 2, \cdot\cdot\cdot\cdot, n-2$ に対し

$$B_j = 1 + b_{j+1} + b_{j+1}\,b_{j+2} + \cdots\cdots\cdots + b_{j+1}\,b_{j+2}\cdots\cdots b_{n-1} \tag{6.3.12}$$

$$B'_j = 1 + b'_{j+1} + b'_{j+1}\,b'_{j+2} + \cdots\cdots\cdots + b'_{j+1}\,b'_{j+2}\cdots\cdots b'_{n-1} \tag{6.3.13}$$

とすると、$B_j = \ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}$ 等となり、さらに $B_{n-1} = B'_{n-1} = 1$ としてお

くと、(6.3.7) より

$$ {}_jV'_{x:\overline{n}|} - {}_jV_{x:\overline{n}|} = \frac{B_j}{B_0} - \frac{B'_j}{B'_0} \tag{6.3.14}$$

である。ここでは (6.3.11) のケースを離れて、一般的な場合と考えて (6.3.14) の右辺が正になる条件を調べよう。

まず (6.3.8), (6.3.9), (6.3.12), (6.3.13) および (6.3.10) より明らかに

$$B_0 > B_1 > B_2 > \cdots\cdots\cdots > B_{n-1} \tag{6.3.15}$$

$$B'_0 > B'_1 > B'_2 > \cdots\cdots\cdots > B'_{n-1} \tag{6.3.16}$$

$$B'_j > B_j \qquad (0 \leq j \leq n-2) \tag{6.3.17}$$

である。さて (6.3.11) のケースでは

$$\begin{aligned} b'_j - b_j &= v(p'_{x+j-1} - p_{x+j-1}) \\ &= v(q_{x+j-1} - q'_{x+j-1}) \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

は $x+j-1$ 歳における死亡率の低下に対応するものであるが、一般にこのような差 $b'_j - b_j$ が j とともに次第に大きくなって

$$b'_j - b_j \leq b'_{j+1} - b_{j+1} \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, n-2)$$

となる場合であっても

$$(b'_1 - b_1)B_1 > (b'_2 - b_2)B_2 > \cdots\cdots\cdots > (b'_{n-1} - b_{n-1})B_{n-1} \tag{6.3.19}$$

が満足されるときには

$$\frac{B_0}{B'_0} < \frac{B_1}{B'_1} < \frac{B_2}{B'_2} < \cdots\cdots\cdots < \frac{B_{n-2}}{B'_{n-2}} < \frac{B_{n-1}}{B'_{n-1}} = 1 \tag{6.3.20}$$

となることが証明される。(6.3.11) のケースではこの不等式は

$$\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} < \frac{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}'_{x+1:\overline{n-1}|}} < \cdots\cdots\cdots < \frac{\ddot{a}_{x+n-1:\overline{1}|}}{\ddot{a}'_{x+n-1:\overline{1}|}} = 1$$

に当たっている。条件 (6.3.19) の下に (6.3.20) を証明しよう。

(6.3.12), (6.3.13) より、$j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-2$ に対し

$$B_j = 1 + b_{j+1} B_{j+1}, \quad B'_j = 1 + b'_{j+1} B'_{j+1} \tag{6.3.21}$$

であるので

$$R_j = B'_j - B_j$$

とすると

$$R_j = (b'_{j+1} - b_{j+1}) B_{j+1} + b'_{j+1} R_{j+1} \tag{6.3.22}$$

である。さて (6.3.21) より

$$\begin{aligned} B_{j+1} B'_j - B'_{j+1} B_j &= B_{j+1}(1 + b'_{j+1} B'_{j+1}) - B'_{j+1}(1 + b_{j+1} B_{j+1}) \\ &= (b'_{j+1} - b_{j+1}) B_{j+1} B'_{j+1} - R_{j+1} \end{aligned} \tag{6.3.23}$$

であるが、これに条件 (6.3.19) を入れ (6.3.21) と (6.3.22) を用いると

$$\begin{aligned} &> (b'_{j+2} - b_{j+2}) B_{j+2} (1 + b'_{j+2} B'_{j+2}) \\ &\qquad - \{(b'_{j+2} - b_{j+2}) B_{j+2} + b'_{j+2} R_{j+2}\} \\ &= b'_{j+2} \{(b'_{j+2} - b_{j+2}) B_{j+2} B'_{j+2} - R_{j+2}\} \end{aligned}$$

となる。最後の式の括弧内は (6.3.23) と同じ形であるから、全く同様にして

$$> b'_{j+2} b'_{j+3} \{(b'_{j+3} - b_{j+3}) B_{j+3} B'_{j+3} - R_{j+3}\}$$

となり、これを繰り返せば結局

$$> b'_{j+2} b'_{j+3} \cdots\cdots b'_{n-1} \{(b'_{n-1} - b_{n-1}) B_{n-1} B'_{n-1} - R_{n-1}\}$$

となる。ここで $B_{n-1} = B'_{n-1} = 1$, $R_{n-1} = 0$ であるから (6.3.9), (6.3.10) よりこの式は 0 より大きい。従って

$$\frac{B_j}{B'_j} < \frac{B_{j+1}}{B'_{j+1}}$$

となり、(6.3.20) が証明された。(6.3.20) が成立すれば

$$B_j B'_0 - B'_j B_0 > 0$$

となり、(6.3.14) の右辺が0より大きいことになるが、それは (6.3.11) のケースでは責任準備金が増加することを表わしている。

以上で条件 (6.3.8), (6.3.9), (6.3.10), (6.3.19) が満足される時に責任準備金が増加することが分かったが、この条件 (6.3.19) はどのような場合に満足されるであろうか。まず

$$b_1' - b_1 = b_2' - b_2 = \cdots\cdots\cdots = b_{n-1}' - b_{n-1}$$

となる時は、(6.3.15) があるので (6.3.19) が満足される。(6.3.18) によればこれは各年齢における死亡率の低下が一定数である場合に当たる。従って (6.3.10) の条件がある時、すなわち死亡率が年齢とともに上昇している時に、各年齢の死亡率が一定数だけ減少する場合には、責任準備金は増加する。(4.5.10) に関して述べたように、死亡率が一定数だけ減少する場合と利率が低下した場合とは、$\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ に同じ影響を与えるので、$\bar{V} = 1 - \dfrac{\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$ に対する影響も同じである。従って前節の終わりに述べた事柄を死亡率低下の場合に当てはめると、上記の結果は予想されるものである。

次に

$$b_j' - b_j \geq b_{j+1}' - b_{j+1} \quad (j = 0, 1, \cdots\cdots\cdots, n-2)$$

の場合は当然 (6.3.19) が成立するので同じ結論が得られる。例えば

$$b_j' = (1+k)\,b_j \qquad (k > 0)$$

すなわち $q_{x+j-1} - q_{x+j-1}' = k\,p_{x+j-1}$ となる場合は、p_{x+j-1} が年齢とともに減少するので、このような場合に当たる。

条件 (6.3.19) は死亡率の低下が各年齢について同じであるか、年齢とともに大きくなっても僅かなものであることを示している。どの程度まで年齢とともに大きくなる場合かというと、次の場合が一つの目安となる。すなわち k を定数として、$j = 1, 2, \cdot\cdot\cdot\cdot, n-1$ に対し

$$q'_{x+j-1} = q_{x+j-1} - \frac{k}{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j|}}} \tag{6.3.24}$$

となる場合である。この時には（6.3.18）により

$$b'_j - b_j = v(q_{x+j-1} - q'_{x+j-1}) = \frac{vk}{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j|}}}$$

であり、$B_j = \ddot{a}_{x+j:\overline{n-j|}}$をこれに掛けると、すべての$j$について$(b'_j - b_j)B_j = vk$となり、（6.3.19）の各項がすべて等しくなる。従って（6.3.24）のような死亡率の低下状態までであれば、責任準備金は増加する。なお第5章 練習問題（1）の（13）の結果は（6.3.24）が ${}_tV'_{x:\overline{n|}} = {}_tV_{x:\overline{n|}}$ $(0 \leqq t \leqq n-2)$となるための必要条件であることを示している。

しかし死亡率の低下が年齢とともに極めて大きくなって行く場合を一般的に調べることは難しい。本節（3）の終わりに述べたように、初年度の死亡率のみ不変でその他の死亡率が低下すれば、第1年度末の責任準備金が減少することから類推すると、初年度の死亡率がごく僅か低下し、その他の死亡率が大きく低下する場合には、第1年度末の責任準備金は減少すると考えられる。本節（1）によれば、第$n-1$年度末の責任準備金は常に増加するから、このような場合は二つの責任準備金曲線は途中で少なくとも1回交錯する。

第６章　練習問題（２）

（１）　予定利率を上げた場合

$$\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}} > \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

となることを証明せよ。((6.1.9) を利用する) またこの式より

$$\frac{\ddot{a}'_x}{\ddot{a}_x} > \frac{d}{d'}$$

を証明せよ。

（２）　$\overline{a}_{x:\overline{n}|}$ ，$\overline{A}_{x:\overline{n}|}$ ，$P^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}$ ，${}_tV^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}$ について予定利率を上げた場合の影響を調べよ。(後の二つについては本章 練習問題（１）の（３）の結果を用いる)

（３）　第４章 練習問題（１）の（５）におけるように、x 歳以上のすべての年齢について

$$q'_{x+j-1} = q_{x+j-1} - \frac{k}{\ddot{a}_{x+j}} \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots\cdots)$$

という関係があるときには、条件 (6.3.19) が満足されることを証明せよ。(従って予定死亡率を q から q' へ変更すると、x 歳契約の養老保険の責任準備金は増加する)

練習問題解答

第１章　練習問題（１）

(1)　5,083,493円

(2)　７％

(3)　半年転化　0.0609，　３カ月転化　0.06136

　１カ月転化　0.06168，　瞬間転化　0.06184

(4)　1,412,974円

(5)　r 回の支払の各々に現在時点で等価な値は $S_1 v^{n_1}, S_2 v^{n_2}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$S_r v^{n_r}$ であるが、それらの和に一括支払の現価が等しくなればよいから

$$S_1 v^{n_1} + S_2 v^{n_2} + \cdots\cdots + S_r v^{n_r} = (S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_r) v^n$$

を解いて n が求まる。

$$n = \frac{log(\sum St) - log(\sum S_t v^{n_t})}{log(1+i)}$$

(6)　（1.2.5）で $k \to \infty$ とする。あるいは（1.3.2）より $i = e^{\delta} - 1$ とし、これに（1.1.10）を用いる。

(7)　（1.3.2），（1.1.9）より

$$\delta = k\, log(1 + \frac{i^{(k)}}{k}) = i^{(k)} - \frac{1}{2k} i^{(k)2} + \frac{1}{3k^2} i^{(k)3}$$

（1.3.4），（1.2.7），（1.1.9）より

$$\delta = \delta' = -\,log(1-d) = -\,k\,log(1 - \frac{d^{(k)}}{k})$$
$$= d^{(k)} + \frac{1}{2k} d^{(k)2} + \frac{1}{3k^2} d^{(k)3}$$

和半をとって、$i^{(k)}$，$d^{(k)}$ が近い値であることに注目すると

$$\delta \fallingdotseq \frac{i^{(k)} + d^{(k)}}{2}$$

(8)　(1.3.3) より $v^n = e^{-n\delta}$ であるから

$$\frac{dv^n}{d\delta} = -ne^{-n\delta} = -nv^n$$

$$\frac{dv^n}{di} = \frac{d\delta}{di}\ \frac{dv^n}{d\delta} = \frac{d\log(1+i)}{di}\cdot(-nv^n)$$

$$= \frac{1}{1+i}\cdot(-nv^n) = -nv^{n+1}$$

(9)　7.77%

第1章　練習問題（2）

(1)　7%の $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ を用いて $A\,\ddot{s}_{\overline{10}|} = 1000$万円 を解けば、 A = 676,425円。

(2)　問題(1)の毎年の積立額の4年後の元利合計は 676,425× $\ddot{s}_{\overline{4}|}$(7%)＝ 3,213,519円である。この額の6%による6年後の元利合計は $(1+0.06)^6$を掛けて 4,558,438円となる。1000万円とこの額との差額を6年間で積立てればよいから、積立額はこの差額を $\ddot{s}_{\overline{6}|}$(6%) で割って ＝735,959円。

(3)　$v^{95} = v^{50} \times v^{45} = 0.00394405$

$\ddot{a}_{\overline{95}|} = \ddot{a}_{\overline{50}|} + v^{50}\ddot{a}_{\overline{45}|} = 17.596988$

(4)　$\ddot{s}_{\overline{10}|}(1+i)^{20} + \frac{1}{2}\ddot{s}_{\overline{10}|}(1+i)^{10} + \frac{1}{4}\ddot{s}_{\overline{10}|}$，または $\frac{1}{4}$ が30年間、$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})$ が始め20年間、 $(1-\frac{1}{2})$ が始め10年間支払われるとして

$$\frac{1}{4}\ddot{s}_{\overline{30}|} + \frac{1}{4}\ddot{s}_{\overline{20}|}(1+i)^{10} + \frac{1}{2}\ddot{s}_{\overline{10}|}(1+i)^{20}$$ を計算して、54.6305

現価については、 $\ddot{a}_{\overline{10}|} + \frac{1}{2}v^{10}\ddot{a}_{\overline{10}|} + \frac{1}{4}v^{20}\ddot{a}_{\overline{10}|}$ または

$$\frac{1}{4}\ddot{a}_{\overline{30}|} + \frac{1}{4}\ddot{a}_{\overline{20}|} + \frac{1}{2}\ddot{a}_{\overline{10}|}$$ を計算して、 10.9613

(5)　求める年金の現価を a とすると

$$a = a_{\overline{10}|}(5\%) + v^{10}(5\%)\,a_{\overline{10}|}(4.5\%) + v^{10}(5\%)\,v^{10}(4.5\%)\,a_{\overline{10}|}(4\%)$$
$$= 15.7858$$

(6)　(1.8.4), (1.5.14), (1.5.18), (1.1.6)を用いて

$$(Ia)_{\overline{n}|} - a_{\overline{n}|} + n \cdot {}_{n|}a_{\infty} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i} - a_{\overline{n}|} + nv^n \frac{1}{i}$$

$$= a_{\overline{n}|}\left(\frac{1}{d} - 1\right) = \frac{a_{\overline{n}|}}{i}$$

第2式は第1式の左辺第2項を右辺に移し、(1.5.17)を用いればよい。

(7)　$$(I\ddot{a})_{\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{\overline{n+1}|} = \sum_{t=0}^{n}(t+1)v^t - \sum_{t=0}^{n} v^t = \sum_{t=1}^{n} tv^t = (Ia)_{\overline{n}|}$$

次に

$$(\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 = (1 + v + v^2 + \cdots\cdots + v^{n-1})(1 + v + v^2 + \cdots\cdots v^{n-1})$$

の右辺を展開した時、$n-1$より小さい t についての v^t の係数は $t+1$となるので

$$(\ddot{a}_{\overline{n}|})^2 > \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^t = (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$$

(8)　(1.6.3)(1.7.2)より、

$$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{7.5}|} = \frac{1 - v^{\frac{1}{2}} \cdot v^7}{d^{(4)}} = 6.12032$$

$$\bar{a}_{\overline{7.5}|} = \frac{1 - v^{\frac{1}{2}} \cdot v^7}{\delta} = 6.07596$$

(9)　$$a = \frac{1}{k}\left[\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{-2} + \cdots\cdots + \left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{-kn}\right]$$

であるが、(1.2.2)より

$$\left(1 + \frac{i^{(k)}}{k}\right)^{-1} = (1 + i)^{-\frac{1}{k}}$$

であるから、右辺を $(1+i)^{-\frac{1}{k}}$ の倍数で書きかえると、(1.6.4) で与えた $a^{(k)}_{\overline{n}|}$ の定義式となる。

第１章　練習問題（３）

(1)　この場合に（1 .10. 1）に相当する式をつくり、（1 . 6 .22）を用いると

$$89.5 = 100v^8 + 7.2a^{(2)}_{\overline{8}|} = 100v^8 + 7.2a^{(2)}_{\overline{1}|} \cdot \ddot{a}_{\overline{8}|}$$

金利計算表で右辺を計算すると、

$i_1 = 9.0\%$のとき　90.91465（A_1）

$i_2 = 9.5\%$のとき　88.41114（A_2）

これを（1 .10. 2）に入れて i を計算すると 0.0928。

(2)（a）　$x = 100v^5 + 7a_{\overline{5}|}$（8 %）= 96.0073円

（b）

(1) 年度	(2) 年始帳簿価格	(3) 帳簿価格に対する8%の利息	(4) 公債利息	(5) 評価益 (3)−(4)	(6) 年末帳簿価格 (2)+(5)
1	96.0073円	7.6806円	7.0000円	0.6806円	96.6879円
2	96.6879	7.7350	7.0000	0.7350	97.4229
3	97.4229	7.7938	7.0000	0.7938	98.2167
4	98.2167	7.8573	7.0000	0.8573	99.0740
5	99.0740	7.9259	7.0000	0.9259	99.9999

(3)　年 4 %，8 年間の年払返済と同じ返済表になるから、4 %の金利計算表を使用して、毎回の返済金は 1000万円÷$a_{\overline{8}|}$（4 %）= 1,485,278円 となる。これを用いて返済表を作成すると、

返済期	返済金中の利息	返済金中の返済元金	残存元金
1（$\frac{1}{2}$年後）	400,000円	1,085,278円	8,914,722円
2（ 1年後）	356,589	1,128,689	7,786,031
3（$1\frac{1}{2}$年後）	311,441	1,173,837	6,612,194
4（ 2年後）	264,488	1,220,790	5,391,404

5 ($2\frac{1}{2}$年後)	215,656	1,269,622	4,121,782
6 (3年後)	164,871	1,320,407	2,801,375
7 ($3\frac{1}{2}$年後)	112,055	1,373,223	1,428,152
8 (4年後)	57,126	1,428,152	0

(4) あとの5年間の年払返済金を R とすると

$2R\,a_{\overline{5}|} + R\,{}_{5|}a_{\overline{5}|} = R\,a_{\overline{5}|} + R\,a_{\overline{10}|} = 100$万円 であるから、

$R = 1{,}000{,}000 \div (\ddot{a}_{\overline{6}|} - 1 + \ddot{a}_{\overline{11}|} - 1) = 97{,}019$円

$2R = 194{,}038$円

(5)
$$(1+i)^t - \frac{1}{a_{\overline{n}|}}\,s_{\overline{t}|} = \frac{(1+i)^t a_{\overline{n}|} - s_{\overline{t}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

が借入金残高であるが、この分子は

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots\cdots + v^n, \qquad s_{\overline{t}|} = (1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + \cdots\cdots + 1$$

を用いると

$$v + v^2 + \cdots\cdots + v^{n-t} = a_{\overline{n-t}|}$$

となる。

(6) 毎月の返済金は $\dfrac{A+nAr}{12\,n}$。従って i については

$$A = \frac{A+nAr}{12n} \times 12 \times a_{\overline{n}|}^{(12)}$$

が成立する。整頓すると

$$n = (1+nr)\cdot a_{\overline{n}|}^{(12)} = (1+nr)\,\frac{1-v^n}{i^{(12)}}$$

$i^{(12)}$ を左辺に移し、(1.2.6)によって $i^{(12)}$ を、また(1.1.8)によって v^n を i^2 の項まで展開すると

$$n\left(i - \frac{11}{24}i^2\right) = (1+nr)\left[1 - \left\{1 - ni + \frac{n(n+1)}{2}\,i^2\right\}\right]$$

$$= (1+nr)\,ni\left(1 - \frac{n+1}{2}\,i\right)$$

$$1 - \frac{11}{24}\,i = (1+nr)\left(1 - \frac{n+1}{2}\,i\right)$$

右辺を展開し、 $nr\dfrac{n+1}{2}i$ がその他の項に比べて小さいとして省略すると、与えられた i の式となる。

(7)　(a) この人は毎期利息として８万円を支払い、また減債基金の積立のため

$$\frac{1,000,000}{s_{\overline{10|}}(6\%)}=75,868\text{円}$$

を支払うので、毎期の支払額はその合計155,868円である。従って

$$1,000,000=155,868\,a_{\overline{10|}}$$

となるような i が実利率である。§11で述べたような方法で i を求めると

$$i \fallingdotseq 0.0901$$

(b) 第６年度末における減債基金の積立額は

$$75,868\,\ddot{s}_{\overline{5|}}(6\%)=453,335\text{円}$$

であるので、これと元金との差額 546,665円にこの時に支払う利息80,000円を加えて、返せばよい。また

$$1,000,000=155,868\,a_{\overline{5|}}+626,665\,v^6$$

を満足するような i が求める実利率である。§11の方法で i を求めると

$$i \fallingdotseq 0.0846$$

(8)　(1.5.1)により $\dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}=\dfrac{d}{(1+i)^n-1}$ であり、(1.5.3)より

$\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}-d=\dfrac{d}{1-v^n}-d=\dfrac{dv^n}{1-v^n}$ である。後者の分母、分子に

$(1+i)^n$ を掛ければ、前者となる。

(9)

$$1-d(1+a_{\overline{n-1|}})=1-d\left(1+\frac{1-v^{n-1}}{i}\right)$$

ここに $\dfrac{1}{i}=\dfrac{v}{1-v}$ を用いると

$$=1-d\left\{1+\frac{v(1-v^{n-1})}{1-v}\right\}=1-d\,\frac{1-v^n}{1-v}$$

$1-v=d$ であるからこの右辺は $v^n=A_{\overline{n|}}$ に等しい。

(10)　(1.13.16) を用いると、

$$\left({}_{t}V_{\overline{n|}}^{(k)} + \frac{1}{k} P_{\overline{n|}}^{(k)} \right)(1+i)^{\frac{1}{k}} = P_{\overline{n|}}^{(k)} \left(\ddot{s}_{\overline{t|}}^{(k)} + \frac{1}{k} \right)(1+i)^{\frac{1}{k}}$$

$$= P_{\overline{n|}}^{(k)} \ \ddot{s}_{\overline{t+\frac{1}{k}|}}^{(k)} = {}_{t+\frac{1}{k}}V_{\overline{n|}}^{(k)}$$

(11)　(1.14.1) との類似で、

$$P = \frac{v^{10}(120\text{万})\,\ddot{a}_{\overline{15|}}^{(4)}}{12\,\ddot{a}_{\overline{10|}}^{(12)}} = 74{,}043^{\text{円}}$$

第２章　練習問題（１）

(1)　(a) 0.98896 (0.99216)

　(b) 0.03654 (0.02325)

　(c) 0.00381 (0.00210)

　(d) 0.02550 (0.01541)

(2)　(a) ${}_{n}p_x - {}_{n+1}p_x = {}_{n}p_x - {}_{n}p_x \cdot p_{x+n} = {}_{n}p_x\, q_{x+n}$ だから。

　(b) ${}_{n+m}p_x + {}_{n|m}q_x = {}_{n}p_x \cdot {}_{m}p_{x+n} + {}_{n}p_x \cdot {}_{m}q_{x+n} = {}_{n}p_x$

(3) $d_x = l_x - l_{x+1} = k(86 - x) - k(86 - x - 1) = k$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{k(85 - x)}{k(86 - x)} = \frac{85 - x}{86 - x}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{k}{k(86 - x)} = \frac{1}{86 - x}$$

(4)　(２．４．14)を用いると　$\mu_{20} = 0.001183$

　(２．４．15)を用いると　$\mu_{20} = 0.001194$

　(２．４．16)を用いると　$\mu_0 = 0.001565$

(5)　(a) $\mu_x \fallingdotseq \dfrac{d_{x-1} + d_x}{2\,l_x}$ において $\dfrac{d_{x-1}}{l_x} = \dfrac{d_{x-1}}{l_{x-1}} \cdot \dfrac{l_{x-1}}{l_x} = \dfrac{q_{x-1}}{p_{x-1}}$ である。

　(b) $\mu_x \fallingdotseq \dfrac{d_{x-1} + d_x}{2\,lx}$ と $q_x = \dfrac{d_x}{l_x} = \dfrac{d_x + d_x}{2\,l_x}$ とを比較せよ。

(6)　(a) 与えられた近似式を（２．４．13)に入れると、$p_x \fallingdotseq e^{-\mu_{x+\frac{1}{2}}}$ であるが、右辺を（１．１．10)により展開し、３次以上の項を省略すると

$$p_x \fallingdotseq 1 - \mu_{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\mu^2_{x+\frac{1}{2}}$$

この左辺が $1 - q_x$ に等しいから、与式が得られる。

　(b) 上の関係から $\mu_{x+\frac{1}{2}} = -\log p_x = -\log(1 - q_x)$ となるが、これを（１．１．９)により展開し、３次以上の項を省略すれば与式が得られる。

(7) (2.4.5)を用い、さらに $l_{x+t}\,\mu_{x+t} > l_x\mu_x$ を用いると

$$q_x = \frac{1}{l_x}\int_0^1 l_{x+t}\ \mu_{x+t}\,dt > \frac{1}{l_x}\int_0^1 l_x\ \mu_x\ dt = \mu_x\ .$$

(8) $q_{x-1} = \int_0^1 {}_tp_{x-1}\ \mu_{x-1+t}\quad dt < \int_0^1 \mu_x\,dt = \mu_x\ ,$

$$q_x\ = \int_0^1 {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt > \int_0^1 p_x\,\mu_x\ dt = p_x\mu_x\ .$$

(9) $q_x' = \mu'_{x+\frac{1}{2}}(1 - \frac{1}{2}\mu'_{x+\frac{1}{2}}) = 2\mu_{x+\frac{1}{2}}(1 - \mu_{x+\frac{1}{2}})$

$$2q_x = 2\mu_{x+\frac{1}{2}}(1 - \frac{1}{2}\mu_{x+\frac{1}{2}})$$

であるから　　$q_x' < 2q_x$

(10) (a) ${}_tp_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$, $q_{x+t} = \dfrac{d_{x+t}}{l_{x+t}}$ として左辺を書き直す。

(b) (2.4.10)より

$$\int_0^{\omega-x} {}_tp_x\ \mu_{x+t}\ dt = [-\,{}_tp_x\,]_0^{\omega-x} = -(0-1) = 1$$

(11) $\mu_x = -\dfrac{d\,log\,l_x}{d\,x}$ であるから

$$log\,l_x = \int \frac{-1}{a-x}\,dx = log(a-x) + log\,A$$

従って

$$l_x = A\,(a-x)\qquad (A\text{は定数})$$

この時は $\dfrac{1}{\mu_{x+\frac{1}{2}}} = a - x - \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{2\mu_{x+\frac{1}{2}}}{2+\mu_{x+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\dfrac{2}{\mu_{x+\frac{1}{2}}}+1} = \frac{2}{2(a-x)-1+1} = \frac{1}{a-x}$$

これは問題(3)ですでに得たように q_x に等しい。

(12) 前問と同じように

$$log\,l_x = \int \frac{-k}{a-x}\,dx = k\,log\,(a-x) + log\,A$$

であるから

$$l_x = A\,(a-x)^k$$

である。次に

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}\ \frac{(a-x-t)^k}{(a-x)^k}$$

であるから

$$\mathring{e}_x = \int_0^{a-x} {}_tp_x\,dt = \frac{1}{(a-x)^k}\left[\frac{-(a-x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^{a-x}$$

$$= \frac{(a-x)^{k+1}}{(k+1)(a-x)^k} = \frac{a-x}{k+1}$$

(13)　(2.5.9)で $l_{x+t}\,(0 \leq t \leq 1)$の近似3次曲線を得たのと同様の方法を $_{t+s}p_x\ (0 \leq s \leq 1)$ に用いれば

$$\begin{aligned}
{}_{t+s}p_x = {}& {}_tp_x - ({}_tp_x - {}_{t+1}p_x)\,s \\
& + \{({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) - {}_tp_x\,\mu_{x+t}\}\,s \\
& - \{3({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) - 2\,{}_tp_x\,\mu_{x+t} - {}_{t+1}p_x\,\mu_{x+t+1}\}\,s^2 \\
& + \{2({}_tp_x - {}_{t+1}p_x) - {}_tp_x\,\mu_{x+t} - {}_{t+1}p_x\,\mu_{x+t+1}\}\,s^3
\end{aligned}$$

が得られるから、ここで $s = \dfrac{1}{2}$ とすればよい。

(14)　男子については (2.5.1)より

$e_{20} = 5{,}560{,}119 \div 98{,}884 = 56.23$

(2.5.6)より　　$\mathring{e}_{20} = 56.73$

同様に　　$e_0 = 75.49$, $\mathring{e}_0 = 75.99$

$_{20}e_0 = e_0 - {}_{20}p_0\ e_{20} = 19.89$

$_{20}\mathring{e}_0 = \mathring{e}_0 - {}_{20}p_0\ \mathring{e}_{20} = 19.89$

女子については、男子と同様に計算して

$e_{20} = 62.08,$　　$\mathring{e}_{20} = 62.58$

$e_0 = 81.56,$　　$\mathring{e}_0 = 82.06$

$_{20}e_0 = 19.91,$　　$_{20}\mathring{e}_0 = 19.91$

(15)　(2.5.2)を用いると、

$$e_x = p_x + p_x \cdot p_{x+1} + p_x \cdot {}_2p_{x+1} + p_x \cdot {}_3p_{x+1} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= p_x + p_x\ e_{x+1}$$

(16)　$$\frac{d_t\, p_x}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{l_{x+t}}{l_x}\right) = \frac{l_x \dfrac{d\, l_{x+t}}{dx} - l_{x+t}\dfrac{d\, l_x}{dx}}{l_x^2}$$

であるが

$$\frac{d\, l_{x+t}}{dx} = \frac{d(x+t)}{dx}\ \frac{d\, l_{x+t}}{d(x+t)} = -\, l_{x+t}\ \mu_{x+t}$$

$$\frac{d\, l_x}{dx} = -\, l_x \mu_x$$

であるから

$$\frac{d\ {}_tp_x}{dx} = \frac{l_{x+t}}{l_x}(\mu_x - \mu_{x+t}) = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$$

次に

$$\frac{d\ \mathring{e}_x}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty \frac{d\ {}_tp_x}{dx}\, dt$$

$$= \int_0^\infty {}_tp_x\,(\mu_x - \mu_{x+t})\,dt = \mu_x\, \mathring{e}_x - 1$$

(問題(10) (b)　参照)

(17)　(2.5.11)を導いた過程における $\sum_{t=0}^{\omega-x-1}$ を $\sum_{t=0}^{n-1}$ におきかえて証明する。あるいは ${}_n\mathring{e}_x = \mathring{e}_x - {}_np_x\ \mathring{e}_{x+n}$ の右辺に (2.5.11)を入れてもよい。

(18)　(a) このときは

$$p_x \geq p_{x+1} \geq p_{x+2} \geq \cdots\cdots\cdots$$

であるから

$$e_x = p_x + p_x \cdot p_{x+1} + \cdots\cdots\cdots$$

$$e_{x+1} = p_{x+1} + p_{x+1} \cdot p_{x+2} + \cdots\cdots\cdots$$

の右辺の第 n 項どうしを比較して $e_x \geq e_{x+1}$ を得る。

(b) 問題(15)と(a)の結果を用いると

$$e_x = p_x + p_x e_{x+1} \leq p_x + p_x e_x$$

従って　$p_x \geq e_x(1-p_x) = e_x q_x$　となる。

(19)　$${}_tp_x \mu_{x+t} = -\frac{1}{l_x}\frac{d\,l_{x+t}}{dt} = a + bt$$

であるから

$$l_{x+t} = -l_x\left(k + at + \frac{b}{2}t^2\right)$$

$t=0$ としてわかるように $k=-1$ である。これより

$${}_tp_x = 1 - at - \frac{b}{2}t^2$$

従って

(a) $q_x = 1 - p_x = a + \dfrac{b}{2}$

(b) $\mu_{x+1} = \left[\dfrac{a+bt}{{}_tp_x}\right]_{t=1} = \dfrac{a+b}{1-a-\dfrac{b}{2}}$

(c) ${}_n\mathring{e}_x = \displaystyle\int_0^n {}_tp_x\,dt = n - \frac{a}{2}n^2 - \frac{b}{6}n^3$

第２章　練習問題（２）

(1)　（２．６．４）より　$L_{20}=\frac{1}{2}(l_{20}+l_{21})=98{,}825$

　（２．６．５）より　$T_{20}=\frac{1}{2}l_{20}+\sum_{x=21}^{105}l_x=5{,}609{,}561$

　同じく　$L_0=99{,}932$，$T_0=7{,}598{,}736$

(2)　この場合には　$T_0=100{,}000$　であり、また(２．６．11)より $l_0=1{,}378$ であるが、定常社会では、死亡者の平均年齢は０歳の平均余命に一致し、それは(２．６．13) で与えられるから、$100{,}000\div1{,}378=72.57$

(3)　(２．６．11)より$l_0=4{,}000$。さらに(２．６．２)、(２．６．３)のT_x, T_0を用いて $\frac{l_0}{T_0}=0.02$,　$\frac{T_0-T_{25}}{T_0}=0.4$。また(２．６．14)より

$\frac{T_0-T_{25}-25\,l_{25}}{l_0-l_{25}}=2.5$。以上が与えられた条件であり、これを解くと $l_0=4{,}000$，$T_0=200{,}000$，$T_{25}=120{,}000$，$l_{25}=3{,}111$。従って(２．６．13)より $\mathring{e}_0=50$であり、また $l_{25}=3{,}111$，$\frac{l_{25}}{T_{25}}=0.02593$である。

(4)　(a)毎年の加入者が $l_{40}(=96{,}850)$であれば、この団体の人数は(２．６．５) を用いて

$$T_{40}-T_{60}=\frac{1}{2}l_{40}+(l_{41}+\cdots\cdots+l_{59})+\frac{1}{2}l_{60}\,(=1{,}874{,}078)$$

である。従って毎年の加入者が10,000の場合は193,503。

(b)毎年の加入者が l_{40} とすれば、求める死亡者数は

$$\int_{40}^{50}\left[\int_0^{60-y}l_{y+t}\;\mu_{y+t}\;dt\right]dy\quad=\int_{40}^{50}\left[-l_{y+t}\right]_0^{60-y}dy=\int_{40}^{50}(\,l_y-l_{60})\,dy$$

$$=T_{40}-T_{50}-10\,l_{60}$$

一方、40歳から50歳の間にある人数は $T_{40}-T_{50}$であるのでこの割合は

$$\frac{T_{40}-T_{50}-10\,l_{60}}{T_{40}-T_{50}}=\frac{957{,}880.5-880{,}960}{957{,}880.5}=0.0803$$

(5)　毎年の出生数は、もとの定常状態に比べて 1.01倍、$(1.01)^2$倍、$(1.01)^3$倍となる。従って

1年目の終りの人口は　$(1.01)L_0+T_1$

2年目の終りの人口は　$(1.01)^2L_0+(1.01)L_1+T_2$

3年目の終りの人口は　$(1.01)^3L_0+(1.01)^2L_1+(1.01)L_2+T_3$

(6)　(*a*) もとの定常人口では児童数は $T_6-T_{12}=L_6+L_7+\cdots\cdots\cdots+L_{11}$ である。その時、出生数が増加し始めてから10年後には、増加し始めた年の出生者は、前問の答のようにその数が $1.01L_9$ になっている。他の年の出生者にも同様のことが言えるので、

$$(1.01)^4L_6+(1.01)^3L_7+(1.01)^2L_8+(1.01)L_9+L_{10}+L_{11}$$

が、10年後の児童数である。同様に20年後では、

$$(1.01)^{14}L_6+(1.01)^{13}L_7+\cdots\cdots\cdots+(1.01)^9L_{11}$$

が児童数である。最初の児童数が A であればこれらに $\dfrac{A}{T_6-T_{12}}$ を掛けて修正すればよい。

(*b*) もとの定常人口では、ある年に満12歳に到達する者の総数は l_{12} である。(本文のレキシスの図の線分 AD を通る生命線の数にあたる) 増加し始めた年の出生者は、12年後から13年後にかけて満12歳に到達し、その数は $1.01l_{12}$である。その他の年の出生者についても同様のことが言えるから

$$12\,l_{12}+1.01\,l_{12}+(1.01)^2l_{12}+\cdots\cdots\cdots+(1.01)^8l_{12}$$

が、20年後までの12歳到達者の総数である。設問に対しては、これに人口数による修正 $\dfrac{A}{T_6-T_{12}}$ を掛ければよい。

(7)　定常状態時：　$\dfrac{T_{65}}{T_{20}-T_{60}}$,

以下 r (< 1) の比で出生数が減少するとして、

30年後 ：　$\dfrac{T_{65}}{r^{10}L_{20}+r^9L_{21}+\cdots\cdots+rL_{29}+(T_{30}-T_{60})}$

60年後 ：　$\dfrac{T_{65}}{r^{40}L_{20}+r^{39}L_{21}+\cdots\cdots+rL_{59}}$

90年後 ： $\dfrac{r^{25}L_{65}+r^{24}L_{66}+\cdots\cdots+r\,L_{89}+T_{90}}{r^{70}L_{20}+r^{69}L_{21}+\cdots\cdots+r^{31}L_{59}}$

(8)　(2.6.17)の $P_x=\dfrac{2-m_x}{2+m_x}$ に m_{55} 等を入れると、$p_{55}=0.99260$, $p_{56}=0.99202$, $p_{57}=0.99141$, $p_{58}=0.99075$, $p_{59}=0.99003$ である。

$l_{56}=l_{55}\,p_{55}$ 等によって計算すれば、$l_{56}=29{,}778$, $l_{57}=29{,}540$, $l_{58}=29{,}286$, $l_{59}=29{,}015$, $l_{60}=28{,}726$

(9)
$$1>1-\frac{q_x}{2}>1-q_x$$
であるから
$$q_x<\frac{q_x}{1-\dfrac{q_x}{2}}<\frac{q_x}{1-q_x}$$
$$q_x<m_x<\frac{q_x}{p_x}$$

(10)　この時は $l_{x+t}=l_x-d_x t\ (0\leq t\leq 1)$ であるから

$$\mu_{x+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{l_{x+\frac{1}{2}}}\left[\frac{d\,l_{x+t}}{dt}\right]_{t=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{l_x-\dfrac{d_x}{2}}\times(-d_x)$$

$$m_x=\frac{d_x}{\int_0^1 l_{x+t}\quad dt}=\frac{d_x}{\left[l_x t-d_x\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1}$$

従って両者は等しい。

(11)
$$l_{60}=k\,s^{60}g^{C^{60}},\quad l_{70}=k\,s^{70}g^{C^{70}} \tag{1}$$
等から割算で
$$\frac{l_{70}}{l_{60}}=s^{10}g^{C^{60}(C^{10}-1)},\quad \frac{l_{80}}{l_{70}}=s^{10}g^{C^{70}(C^{10}-1)},\quad \frac{l_{90}}{l_{80}}=s^{10}g^{C^{80}(C^{10}-1)} \tag{2}$$
再び割算して
$$\frac{l_{80}}{l_{70}}\times\frac{l_{60}}{l_{70}}=g^{C^{60}(C^{10}-1)^2},\quad \frac{l_{90}}{l_{80}}\times\frac{l_{70}}{l_{80}}=g^{C^{70}(C^{10}-1)^2}$$

前者の左辺は 0.744154、後者の左辺は 0.386826 であるので対数をとると
$$c^{60}(c^{10}-1)^2\log_{10}g=-0.1283372$$
$$c^{70}(c^{10}-1)^2\log_{10}g=-0.4124843$$

割算をして

$$c^{10} = 3.21407 \tag{4}$$

さらに対数計算で c を求めると

$$c = 1.12384$$

次に(4)式を(3)に入れると

$$-0.1283372 = 1{,}102.3817 \times 4.902106 \times log_{10} g$$

$$log_{10} g = -0.0000237486$$

$$g = 0.999945$$

(2)式で対数をとると

$$10\ log_{10} s + c^{60}(c^{10}-1)\ log_{10} g = log_{10} \frac{l_{70}}{l_{60}} = -0.0696749$$

これより

$$log_{10} s = -0.00117105$$

$$s = 0.997307$$

(1)式で対数をとると

$$log_{10} k + 60\ log_{10} s + c^{60} log_{10} g = log_{10} l_{60} = 4.9449562$$

$$log_{10} k = 5.0413992$$

$$k = 110{,}001.7$$

(12)　第1の生命表で

$$\mu_x = BC^x\ ,\quad l_x = k\,g^{C^x}\ ,\quad log\,g = -\frac{B}{log\,C}$$

とすると

$${}_np_x^{(1)} = g^{C^x(C^n-1)}$$

である。第2の生命表では $\mu_x = 2\,BC^x$ であるので

$$log\,g' = -\frac{2\,B}{log\,C} = 2\,log\,g$$

であるような g' を用いて $l'_x = k'g'^{C^x}$ となり ${}_np_x^{(2)} = g'^{C^x} = g^{2C^x(C^n-1)}$

となる。すなわち第1の生命表で $2 = C^a$ となるような年齢 a を x に足せば

${}_np_x^{(2)} = {}_np_{x+a}^{(1)}$ となる。

第3章　練習問題

(1)　　（3．2．7）を導いた時のように、年度内に A 脱退のある前に B 脱退のある確率は $\frac{1}{2}q^{B*}q^{A*}$ であり、その B 脱退のある前に C 脱退のある確率は $\frac{1}{6}q^{C*}q^{B*}q^{A*}$ である。その C 脱退のある前に D 脱退のある確率は次のようにして求める。時刻 s までに C 脱退があり、それ以前に D 脱退が起っている確率は（3．2．7）を導いた過程のように $\frac{s^2}{2}q^{D*}q^{C*}$ である。従って時刻 t までに B 脱退があり、それまでに D, C の順で脱退のある確率は

$$\int_0^t \frac{s^2}{2}q^{D*}q^{C*}q^{B*}ds = \frac{t^3}{6}q^{D*}q^{C*}q^{B*}$$

また年度内に A 脱退があり、それまでに $D, C, B,$ の順で脱退がある確率は

$$\int_0^1 \frac{t^3}{6}q^{D*}q^{C*}q^{B*}q^{A*}dt = \frac{1}{24}q^{D*}q^{C*}q^{B*}q^{A*}$$

以上の諸確率を用いると

$$\begin{aligned} q^A = q^{A*} & \\ - \Big[& \frac{1}{2}q^{B*}q^{A*} - \Big(\frac{1}{6}q^{C*}q^{B*}q^{A*} - \frac{1}{24}q^{D*}q^{C*}q^{B*}q^{A*}\Big) \\ & \qquad - \Big(\frac{1}{6}q^{D*}q^{B*}q^{A*} - \frac{1}{24}q^{C*}q^{D*}q^{B*}q^{A*}\Big)\Big] \\ - \Big[& \frac{1}{2}q^{C*}q^{A*} - \Big(\frac{1}{6}\cdots\cdots - \frac{1}{24}\cdots\cdots\Big) - \Big(\frac{1}{6}\cdots\cdots - \frac{1}{24}\cdots\cdots\Big)\Big] \\ - \Big[& \frac{1}{2}q^{D*}q^{A*} - \Big(\frac{1}{6}\cdots\cdots - \frac{1}{24}\cdots\cdots\Big) - \Big(\frac{1}{6}\cdots\cdots - \frac{1}{24}\cdots\cdots\Big)\Big] \end{aligned}$$

これを整理すると（3．2．8）が得られる。

(2)　　${}_{\Delta t}a_{x+t} = a_x \cdot \Delta t$ であると（3．2．16）より

$$\mu^A_{x+t} = \frac{a_x}{l_{x+t}} = \frac{a_x}{l_x - t\,d_x}$$

ただし $d_x = a_x + b_x + c_x$ とする。その時は

$$\int_0^1 \mu^A_{x+t}\,dt = a_x\int_0^1 \frac{1}{l_x - t\,d_x}\,dt$$

$$= a_x \left[\frac{-1}{d_x} \cdot log(\, l_x - t\, d_x \,) \right]_0^1 = -\frac{a_x}{d_x} log \ \frac{l_x - d_x}{l_x}$$

$$1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x+t}^A \, dt} = 1 - (\, 1 - \frac{d_x}{l_x} \,)^{\frac{a_x}{d_x}}$$

$$\fallingdotseq \frac{a_x}{d_x} \cdot \frac{d_x}{l_x} - \frac{1}{2} \frac{a_x}{d_x} (\, \frac{a_x}{d_x} - 1 \,) (\, \frac{d_x}{l_x} \,)^2$$

$$= \frac{a_x}{l_x} - \frac{a_x(\, a_x - d_x \,)}{2 l_x^2}$$

$$= \frac{a_x}{l_x} (\, 1 + \frac{1}{2} \frac{b_x}{l_x} + \frac{1}{2} \frac{c_x}{l_x} \,)$$

これは（3．2．11)の右辺に近似的に等しい。

(3)　未婚女子に関する2重脱退表では、生存者数を $(\, sl \,)_x$, 1年間の結婚数を $(\, s\, m \,)_x$, 死亡者数を $(\, s\, d \,)_x$ で表わすと

$$(\, s\, l \,)_{x+1} = (\, s\, l \,)_x - (\, s\, m \,)_x - (\, s\, d \,)_x \qquad (1)$$

である。既婚女子副集団に関する生存者を $(\, m\, l \,)_x$ で表わすと、その間には、（3．2．23)のように

$$(\, m\, l \,)_{x+1} = (\, m\, l \,)_x + (\, s\, m \,)_x - (\, m\, d \,)_x \qquad (2)$$

という関係がある。30歳と31歳の間の定常人口を S とし、(a)～(d)の条件を式で表わすと

(a)
$$\frac{1}{2} \{ (\, s\, l \,)_{30} + (\, s\, l \,)_{31} \} = \frac{1}{3} S \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2} \{ (\, m\, l \,)_{30} + (\, m\, l \,)_{31} \} = \frac{2}{3} S \qquad (4)$$

(b)〔（3．2．20)を参考に〕

$$\frac{(\, s\, d \,)_{30} + (\, m\, d \,)_{30}}{S} = 0.005 \qquad (5)$$

(c)
$$\frac{(\, s\, d \,)_{30}}{(\, s\, l \,)_{30}} = 0.0038 \qquad (6)$$

(d)〔（3．2．25)で d_x^B のない場合に当り〕

$$\frac{(md)_{30}}{(ml)_{30}+\frac{1}{2}(sm)_{30}}=0.0055 \tag{7}$$

となる。これらから

$$(A)=\frac{(sm)_{30}}{\frac{1}{2}\{(sl)_{30}+(sl)_{31}\}}, \qquad (B)=\frac{(md)_{30}}{\frac{1}{2}\{(ml)_{30}+(ml)_{31}\}}$$

を求めるのがこの問題である。さて(2)より

$$\frac{1}{2}\{(ml)_{30}+(ml)_{31}\}=(ml)_{30}+\frac{1}{2}(sm)_{30}-\frac{1}{2}(md)_{30}$$

であり、この左辺は(4)により $\frac{2}{3}S$ に等しいから、このことを(7)に入れると

$$\frac{(md)_{30}}{\frac{2}{3}S+\frac{1}{2}(md)_{30}}=0.0055$$

これより $(md)_{30}=0.003677S$ となる。(5)より

$$(sd)_{30}=0.005S-(md)_{30}=0.001323S$$

これを(6)に入れると　$(sl)_{30}=0.348158S$

(3)に入れて　$(sl)_{31}=0.318509S$

これらを(1)に入れると　$(sm)_{30}=0.028326S$

この $(sm)_{30}$ と(3)より　$(A)=0.084978$

また $(md)_{30}$ の値と(4)より　$(B)=0.005516$

(4)　$q_x^w=nq_x$ より $w_x=nd_x$ となり、これを（3.3.1）に入れると、$l_{x+1}=l_x-(n+1)d_x$ である。従って $(n+1)d_x=l_x-l_{x+1}=b$ となり、これより $d_x=\frac{b}{n+1}$, $w_x=nd_x=\frac{n}{n+1}b$ となる。これらを（3.3.2）に入れると、与式が証明できる。

(5)　件数死亡率 $=0.00314$，金額死亡率 $=0.00252$

(6)

$$q_x^*=\frac{1,226}{621,270-\frac{8,318}{2}}=0.001987$$

$$q_x^{w*}=\frac{8,318}{621,270-\frac{1,226}{2}}=0.013402$$

第４章　練習問題（１）

(1)

$$a_x = vp_x + v^2\ {}_2p_x + \cdots\cdots + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x$$

$$< v + v^2 + \cdots\cdots + v^{\omega-x} + v^{\omega-x+1} + \cdots\cdots$$

$$= a_\infty = \frac{1}{i} \quad ((1.5.18)\text{をみよ})$$

$$a_x^{(k)} = \frac{1}{k}\left[v^{\frac{1}{k}}\ {}_{\frac{1}{k}}p_x + v^{\frac{2}{k}}\ {}_{\frac{2}{k}}p_x + \cdots\cdots + v^{\omega-x}\ {}_{\omega-x}p_x \right]$$

$$< \frac{1}{k}\left[v^{\frac{1}{k}} + v^{\frac{2}{k}} + \cdots\cdots + v^{\omega-x} + v^{\omega-x+\frac{1}{k}} + \cdots\cdots \right]$$

$$= a_\infty^{(k)} = \frac{1}{i^{(k)}} \quad ((1.6.18)\text{をみよ})$$

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\ {}_tp_x\ dt < \int_0^\infty v^t\ dt$$

$$= \bar{a}_\infty = \frac{1}{\delta} \quad ((1.7.6)\text{をみよ})$$

(2)　この時には $p_x > p_{x+t}$ $(t = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ となるので

$$a_x = vp_x + v^2\ {}_2p_x + v^3\ {}_3p_x + \cdots\cdots$$

$$= (v\,p_x) + (v\,p_x)(v\,p_{x+1}) + (v\,p_x)(v\,p_{x+1})(v\,p_{x+2}) + \cdots\cdots$$

$$< (v\,p_x) + (v\,p_x)^2 + (v\,p_x)^3 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{v\,p_x}{1 - v\,p_x} = \frac{p_x}{(1+i) - p_x} = \frac{p_x}{q_x + i}$$

次に（4.3.16）とこの不等式を用いると

$$\ddot{a}_x = \frac{a_x}{v\,p_x} < \frac{1+i}{q_x + i}$$

(3)　（4.3.17）を用いると $\ddot{a}_{20:\overline{10|}} = 1 + v\,p_{20} \cdot \ddot{a}_{21:\overline{9|}}$ であるから

$$p_{20} = \frac{(1+i)(\ddot{a}_{20:\overline{10|}} - 1)}{\ddot{a}_{21:\overline{9|}}} = 0.998586$$

従って　$l_{21} = l_{20}\,p_{20} = 97{,}956$

同様に計算して $l_{22} = 97,831$

(4)　(4.3.17)によれば、

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 1 + v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}}, \qquad \ddot{a}_x = 1 + v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1}$$

であるから

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \cdot \ddot{a}_{x+1} - \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}} \cdot \ddot{a}_x = \ddot{a}_{x+1} - \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1|}} > 0$$

となり、第1の不等式が成立する。

第2以下の不等式は全く同様に成立する。

(5)　先ず $x = \omega - 1$ については、$p_{\omega-1} = 0$, $\ddot{a}_{\omega-1} = 1$, $p'_{\omega-1} = \dfrac{k}{1 - vk}$

であるので、

$$\begin{aligned}\ddot{a}'_{\omega-1}(1 - vk) &= (1 + v\,p'_{\omega-1})(1 - vk) \\ &= \left(1 + \frac{vk}{1 - vk}\right)(1 - vk) = 1 - vk + vk \\ &= 1 \quad = \ddot{a}_{\omega-1}\end{aligned}$$

となり、与えられた式が成立する。従って $x+1$ の時に与式が成立している場合には、x の時にも与式が成立していることを言えば、$\omega - 2$ から年齢の低い方へ進む帰納法で与式が成立する。

さて

$$\ddot{a}_x = 1 + v\,p_x\,\ddot{a}_{x+1}, \qquad \ddot{a}'_x = 1 + v\,p'_x\,\ddot{a}'_{x+1}$$

であるから、$p_x = p'_x - \dfrac{k}{\ddot{a}_{x+1}}$ を用いて

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x - \ddot{a}'_x &= v\left(p'_x - \frac{k}{\ddot{a}_{x+1}}\right)\ddot{a}_{x+1} - v\,p'_x\,\ddot{a}'_{x+1} \\ &= -vk + v\,p'_x(\ddot{a}_{x+1} - \ddot{a}'_{x+1})\end{aligned}$$

帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}&= -vk + v\,p'_x(-vk\,\ddot{a}'_{x+1}) \\ &= -vk(1 + v\,p'_x\,\ddot{a}'_{x+1}) = -vk\,\ddot{a}'_x\end{aligned}$$

これで x についても与式が成立することが言えた。

(6)　$v^3\,\ddot{a}_{\overline{12|}} + v^{15}\,{}_{15}p_x\,\ddot{a}_{x+15}$

(7) $\ddot{a}_{50:\overline{10|}}+(v^{10}\ {}_{10}p_{50})\ddot{a}_{60:\overline{10|}}+(v^{10}\ {}_{10}p_{50})(v^{10}\ {}_{10}p_{60})\ddot{a}_{70:\overline{10|}}$

$$=\frac{N_{50}-N_{60}}{D_{50}}+\frac{D_{60}}{D_{50}}\cdot\frac{N_{60}-N_{70}}{D_{60}}+\frac{D_{60}}{D_{50}}\cdot\frac{D_{70}}{D_{60}}\cdot\frac{N_{70}-N_{80}}{D_{70}}$$

(6%)　(6%), (5.75%)　(6%), (5.75%), (5.5%)

$=13.28001$

(8) 第1年度に死亡する確率は q_x であり、その場合遺族が受けとる金額は $(1+i)$ である。第2年度に死亡する場合は、確率が ${}_{1|}q_x$ であり遺族が受けとる金額は $(1+i)+(1+i)^2$ である。以下同様であり、かつ $q_x+{}_{1|}q_x+{}_{2|}q_x+\cdots\cdots=1$ であるから、求める平均値は

$q_x(1+i)+{}_{1|}q_x\{(1+i)+(1+i)^2\}+{}_{2|}q_x\{(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3\}+\cdots\cdots$

$=(1+i)\{q_x+{}_{1|}q_x+{}_{2|}q_x+\cdots\cdots\}$

$+(1+i)^2\{{}_{1|}q_x+{}_{2|}q_x+\cdots\cdots\}$

$+(1+i)^3\{{}_{2|}q_x+{}_{3|}q_x+\cdots\cdots\}+\cdots\cdots$

$=(1+i)+(1+i)^2p_x+(1+i)^3\,{}_2p_x+\cdots\cdots$

(9) (a) $\dfrac{300万}{a_{50}^{(2)}}\times\dfrac{1}{2}$ が求める金額であるが、(4.4.6)によって $a_{50}^{(2)}$ を計算すると

$$a_{50}^{(2)}=\frac{N_{51}}{D_{50}}+\frac{1}{4}-\frac{3}{48}(\delta+\mu_{50})\quad=13.62233$$

従って求める金額は 110,113円。

(b) 新しく毎回受取る金額は

$$\frac{2\times110{,}113\times a_{60}^{(2)}}{a_{60}^{(4)}}\times\frac{1}{4}$$

であるが、(4.4.6)によって計算すると $a_{60}^{(2)}=11.33062$, $a_{60}^{(4)}=11.45463$ となるので、これらを上式に入れると、求める金額は 54,460円。

(10) $\ddot{a}_x^{(k)}=\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}v^{\frac{t}{k}}\ {}_{\frac{t}{k}}p_x$

であり、一方

$$\frac{1}{k}\cdot {}_{\frac{1}{k}|}\ddot{a}_x = \frac{1}{k} v^{\frac{1}{k}}\ {}_{\frac{1}{k}}p_x\,(1 + v\,p_{x+\frac{1}{k}} + v^2\ {}_2p_{x+\frac{1}{k}} + \cdots\cdots)$$

$$= \frac{1}{k}\,(v^{\frac{1}{k}}\ {}_{\frac{1}{k}}p_x + v^{1+\frac{1}{k}}\ {}_{1+\frac{1}{k}}p_x + v^{2+\frac{1}{k}}\ {}_{2+\frac{1}{k}}p_x + \cdots\cdots)$$

である。後者と同じように $\frac{1}{k}\cdot {}_{\frac{2}{k}|}\ddot{a}_x$ 等をつくり、それらを加えると前者に等しいことがわかる。

ついで、仮定より

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} {}_{\frac{i}{k}|}\ddot{a}_x \fallingdotseq \frac{1}{k}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{k-i}{k}\right)\ddot{a}_x + \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{k}\right)a_x\right\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\frac{(k-1)k}{2k}\ddot{a}_x + \frac{k(k+1)}{2k}a_x\right\}$$

$$= \frac{1}{2k}\{(k-1)(1+a_x) + (k+1)a_x\}$$

$$= a_x + \frac{k-1}{2k}$$

(11)　仮定により ${}_{\frac{t}{k}}p_x = 1 - \frac{t}{k}q_x$ であるので

$$a_{x:\overline{1|}}^{(k)} = \frac{1}{k}\{v^{\frac{1}{k}}\ {}_{\frac{1}{k}}p_x + v^{\frac{2}{k}}\ {}_{\frac{2}{k}}p_x + \cdots\cdots + v\,p_x\}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{v^{\frac{1}{k}}\left(1-\frac{1}{k}q_x\right) + v^{\frac{2}{k}}\left(1-\frac{2}{k}q_x\right) + \cdots\cdot + v\left(1-\frac{k}{k}q_x\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{k}(v^{\frac{1}{k}} + v^{\frac{2}{k}} + \cdots\cdot + v) - \frac{q_x}{k^2}(v^{\frac{1}{k}} + 2v^{\frac{2}{k}} + \cdots\cdots + kv)$$

$v^{\frac{t}{k}}$ に関する仮定をこれに入れると

$$= \frac{1}{k}\left\{k - \frac{k(k+1)}{2k}i\right\} - \frac{q_x}{k^2}\left\{\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k}i\right\}$$

$$= \left(1 - \frac{k+1}{2k}i\right) - q_x\left(\frac{k+1}{2k} - \frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2}i\right)$$

従って

$$a_x^{(k)} = a_{x:\overline{1}|}^{(k)} + v\, p_x\, a_{x+1:\overline{1}|}^{(k)} + v^2\ {}_2p_x\, a_{x+2:\overline{1}|}^{(k)} + \cdots\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{k+1}{2k} i\right) \ddot{a}_x - \left(\frac{k+1}{2k} - \frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2} i\right)(1+i) A_x$$

i^2 の項を省略して整頓すると

$$= \left(1 - \frac{k+1}{2k} i\right) \ddot{a}_x - \left(\frac{k+1}{2k} + \frac{k^2-1}{6k^2} i\right)(1 - d\,\ddot{a}_x)$$

$d = 1 - v \fallingdotseq i$ とし、かつ i^2 の項を省略すると

$$\fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{k+1}{2k} - \frac{k^2-1}{6k^2} i$$

$$= a_x + \frac{k-1}{2k} - \frac{k^2-1}{6k^2} i$$

(12) $$_{\frac{1}{2k}|}\ddot{a}_x^{(k)} \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_x^{(k)} + a_x^{(k)}\right)$$

と考えることができるが、（４．４．５）と（４．４．６）を用い、小さな第３項を省略すると

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\ddot{a}_x + a_x\right) = \frac{1}{2}\left(1 + a_x + a_x\right) = a_x + \frac{1}{2}$$

(13)　（４．５．３）から（４．４．４）を引き、微小な項 β および β' を省略する。

(14)　第１章§11の場合と同様に、毎期の返済額は $\dfrac{S}{k \cdot a_{x:\overline{n}|}^{(k)}}$

(15)　この場合は、${}_tp_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} = (1 - bt)$ となるので、（４．５．１）にこれを用いると

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t (1 - bt)\ dt$$

$$= \left[\frac{v^t}{\log v}(1 - bt)\right]_0^n - \int_0^n \frac{v^t}{\log v}(-b)\ dt$$

$$= \frac{v^n}{\log v}(1 - bn) - \frac{1}{\log v} + \frac{b}{\log v}\left[\frac{v^t}{\log v}\right]_0^n$$

$$= \frac{v^n}{-\delta}(1 - bn) - \frac{1}{-\delta} + \frac{b}{\delta^2}(v^n - 1)$$

$$= \frac{1}{\delta}\{1 - v^n(1 - bn) - \frac{b(1 - v^n)}{\delta}\}$$

(16) $\mu_x = c$ ならば $-\dfrac{d \log l_x}{dx} = c$, 従って $l_x = e^{-cx+k}$, ${}_tp_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} = e^{-ct}$ となり

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\, dt = \int_0^\infty (ve^{-c})^t\, dt = \left[\frac{(ve^{-c})^t}{\log(ve^{-c})}\right]_0^\infty = \frac{-1}{-\delta - c}$$

同様に $\quad \bar{a}_{x:\overline{n|}} = \left[\dfrac{(ve^{-c})^t}{\log(ve^{-c})}\right]_0^n = \dfrac{s^n - 1}{\log s}$

(17) (a) (2.4.9)と第2章練習問題(1)の(16)の結果を用いると

$$\frac{d}{dt}({}_tp_x\ \mathring{e}_{x+t}) = -\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\ \mathring{e}_{x+t} + {}_tp_x(\mu_{x+t}\ \mathring{e}_{x+t} - 1) = -\ {}_tp_x$$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mathring{e}_{x+t}\, dt = \left[\frac{v^t}{\log v}\ {}_tp_x\ \mathring{e}_{x+t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{v^t}{\log v}(-\ {}_tp_x)\, dt$

$$= -\frac{\mathring{e}_x}{\log v} + \frac{1}{\log v}\bar{a}_x = \frac{1}{\delta}(\mathring{e}_x - \bar{a}_x)$$

第４章　練習問題（２）

(1)（４．６．４）を用いると

$$(1+i)A_x=(1+i)(v\,q_x+v^2\,p_x\,q_{x+1}+v^3\,{}_2p_x\,q_{x+2}+\cdots\cdots)$$
$$=q_x+v\,p_x\,q_{x+1}+v^2\,{}_2p_x\,q_{x+2}+\cdots\cdots$$
$$1-(1+i)A_x=1-q_x-v\,p_x\,q_{x+1}-v^2\,{}_2p_x\,q_{x+2}\cdots\cdots$$
$$=p_x-p_x(vq_{x+1}+v^2\ p_{x+1}\,q_{x+2}+v^3\ {}_2p_{x+1}\,q_{x+3}+\cdots\cdots)$$
$$=p_x(1-A_{x+1})$$

これで p_x に関する式が証明された。q_x は $1-p_x$ から得られる。

(2)　$A'_x=v\,p_x+v^2\,p_x\,q_{x+1}+\cdots\cdots+v^{t+1}\,{}_tp_x\ \ q'_{x+t}+v^{t+2}\ \ {}_{t+1}p'_x\,q_{x+t+1}+\cdots\cdots$

$$A'_x-A_x=v^{t+1}\,{}_tp_x\,(q'_{x+t}-q_{x+t})+v^{t+2}\,q_{x+t+1}({}_{t+1}p'_x-{}_{t+1}p_x)+\cdots\cdots$$

ところで

$$q'_{x+t}-q_{x+t}=c,\quad p'_{x+t}-p_{x+t}=-c,$$
$${}_{t+k}p'_x-{}_{t+k}p_x={}_tp_x(p'_{x+t}-p_{x+t})\ \ {}_{k-1}p_{x+t+1}\ =-c\ {}_tp_x\ \ {}_{k-1}p_{x+t+1}$$

であるので

$$A'_x-A_x=c\,v^{t+1}\ {}_tp_x-c\,v^{t+1}\,{}_tp_x\sum_{k=1}^{\infty}v^k\ \ {}_{k-1}p_{x+t+1}\,q_{x+t+k}$$
$$=c\,v^{t+1}\ {}_tp_x\,(1-A_{x+t+1})$$

(3)　(*a*)　（４．９．11）を用いると

$$\frac{A_{x+n}-A_x}{1-A_x}+\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x}=\frac{d\,\ddot{a}_x-d\,\ddot{a}_{x+n}}{d\,\ddot{a}_x}+\frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x}=1$$

(*b*)　$d=i\,v$ であるから（４．６．10），（４．９．６）を用いると

$$\frac{1}{i}-\frac{a_{x:\overline{n}|}}{d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}}{i\,v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{1-A_{x:\overline{n}|}}$$

(*c*)　（４．６．10）より　$v\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}=A^{1}_{x:\overline{n}|}$　であり、また

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n}|}=1-v^n\ {}_np_x=1-A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$　である。

(4)　右辺の第1項 $kv^{\frac{1}{k}}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)}$ は、各 $\dfrac{1}{k}$ 年の始めに被保険者が生存していれば、その $\dfrac{1}{k}$ 年の終りに $k\times\dfrac{1}{k}=1$ を支払うような年金の現価であり、第2項 $k\,a_{x:\overline{n}|}^{(k)}$ は、各 $\dfrac{1}{k}$ 年の終りに被保険者が生存していれば1を支払うような年金の現価である。従って両者の差は各 $\dfrac{1}{k}$ 年の死亡者に対し、各 $\dfrac{1}{k}$ 年の終りに1を支払う契約の現価であり、それは $A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}^{(k)}$ に外ならない。

(5)　(4.8.1)と(4.5.1)より

$$\overline{A}_x=\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}\,dt=c\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \ dt=c\,\overline{a}_x$$

この式から得られる $\overline{a}_x$ を $\overline{A}_x=1-\delta\overline{a}_x$ の右辺に入れる。

(6)　(4.9.14), (4.8.1), (4.5.1)により

$$1-\delta\overline{a}_x=\overline{A}_x=\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \ \mu_{x+t}\ dt\ \ >\mu_x\int_0^\infty v^t\ {}_tp_x\ \ dt=\mu_x\,\overline{a}_x$$

より与式が得られる。

(7)　(*a*) 第2章練習問題(1)の(16)の結果を用いると

$$\frac{d\,\overline{a}_{x:\overline{n}|}}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^n v^t\ {}_tp_x\ dt\quad=\int_0^n v^t\ {}_tp_x(\ \mu_x-\mu_{x+t}\ )\,dt$$

$$=\mu_x\int_0^n v^t\ {}_tp_x\,dt-\int_0^n v^t\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\ dt$$

$$=\mu_x\ \ \overline{a}_{x:\overline{n}|}-\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$$

(*b*) ここで $n\rightarrow\infty$ とし、(4.9.14)を用いると

$$\frac{d\,\overline{a}_x}{dx}=\mu_x\,\overline{a}_x-\overline{A}_x=\mu_x\,\overline{a}_x-1+\delta\,\overline{a}_x$$

(*c*)　(*a*) の結果を用いると

$$\frac{d\,\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{dx}=\frac{d}{dx}(\,1-\delta\,\overline{a}_{x:\overline{n}|})=-\,\delta(\,\mu_x\,\overline{a}_{x:\overline{n}|}-\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}\,)$$

(*d*)　(*c*) で $n\rightarrow\infty$ とし、(4.9.14) を用いると

$$\frac{d\,\overline{A}_x}{dx}=-\delta(\,\mu_x\,\overline{a}_x-\overline{A}_x)\ \ =\delta\,\overline{A}_x-\mu_x(1-\overline{A}_x)$$

(8) $$\frac{d}{dx}(\, l_x \bar{a}_x \,) = \frac{d\, l_x}{dx}\, \bar{a}_x + l_x \frac{d\, \bar{a}_x}{dx}$$

の右辺で、(2 . 4 . 2) および前問 (b) の結果を用いると

$$= (-\, l_x \mu_x)\, \bar{a}_x + l_x(\, \bar{a}_x \mu_x + \bar{a}_x \delta - 1\,)$$

$$= l_x(\, \delta \bar{a}_x - 1\,) = -\, l_x \bar{A}_x$$

(9) $$\bar{A}^{\,1}_{30:\overline{10}|} + v^{10}\,{}_{10}p_{30}(\, 2\, \bar{A}^{\,1}_{40:\overline{10}|}) + v^{20}\,{}_{20}p_{30}(\, 3\, \bar{A}^{\,1}_{50:\overline{10}|})$$

$$= \frac{\bar{M}_{30} - \bar{M}_{40}}{D_{30}} + \frac{D_{40}}{D_{30}} \cdot \frac{2(\, \bar{M}_{40} - \bar{M}_{50})}{D_{40}} + \frac{D_{50}}{D_{30}} \cdot \frac{3(\, \bar{M}_{50} - \bar{M}_{60})}{D_{50}}$$

$$= \frac{1}{D_{30}} \{(\, \bar{M}_{30} - \bar{M}_{40}\,) + 2(\, \bar{M}_{40} - \bar{M}_{50}) + 3(\, \bar{M}_{50} - \bar{M}_{60}\,)\}$$

$$= 0.079664$$

(10) $v < 1$ であるから

$$D_x = v^x\, l_x = v^x(\, d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots\cdots)$$

$$> v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x + v^{x+1+\frac{1}{2}}\, d_{x+1} + v^{x+2+\frac{1}{2}}\, d_{x+2} + \cdots\cdots$$

$$= \bar{C}_x + \bar{C}_{x+1} + \bar{C}_{x+2} + \cdots\cdots = \bar{M}_x$$

第 2 の不等式は $\bar{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}}\, d_x > v^{x+1}\, d_x = C_x$ より明らかである。

(11) (a) (4 .10.11) より

$$M_x = v\, N_x - N_{x+1} = v\, N_x - (\, N_x - D_x)$$

$$= D_x - (\, 1 - v\,) N_x = D_x - d\, N_x$$

(b) (4 .10.10) より

$$\frac{1}{D_x}\left(\, \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} \quad v^{n-t-1} + D_{x+n}\right)$$

$$= \frac{1}{D_x} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} v^{n-t-1}(\, v\, D_{x+t} - D_{x+t+1}) + D_{x+n} \right\}$$

$$= \frac{1}{D_x} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} (\, v^{n-t}\, D_{x+t} - v^{n-t+1} D_{x+t-1}) + D_{x+n} \right\}$$

$$= \frac{v^n\, D_x}{D_x} = v^n$$

(c) $\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}\, A_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}\, \dfrac{M_{x+t}}{D_{x+t}}$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} (1+i)^{x+t} (v N_{x+t} - N_{x+t+1})$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \{(1+i)^{x+t-1} N_{x+t} - (1+i)^{x+t} N_{x+t+1}\}$$

$$= (1+i)^{x} N_{x+1} = l_x \frac{N_{x+1}}{v^x l_x} = l_x a_x$$

(12) $\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t - (1 + \sum_{t=1}^{n-1} v^t\ {}_tp_x)$

$$= \sum_{t=1}^{n-1} v^t (1 - {}_tp_x) = \sum_{t=1}^{n-1} v^t (q_x + {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + {}_{t-1|}q_x)$$

$$= q_x (v + v^2 + \cdots\cdots + v^{n-1}) + {}_{1|}q_x (v^2 + \cdots\cdots + v^{n-1})$$

$$+ \cdots\cdots + {}_{n-2|}q_x\, v^{n-1}$$

$$= \frac{v\, d_x}{l_x} \ddot{a}_{\overline{n-1}|} + \frac{v^2 d_{x+1}}{l_x} \ddot{a}_{\overline{n-2}|} + \cdots\cdots + \frac{v^{n-1} d_{x+n-2}}{l_x} \ddot{a}_{\overline{1}|}$$

$$= \frac{1}{D_x} \sum_{t=1}^{n-1} C_{x+t-1}\ \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$$

(13) (4 .10.10) を用いると

$$C_{x+t}\, \ddot{s}_{\overline{t+1}|} = D_{x+t}\, v\, \ddot{s}_{\overline{t+1}|} - D_{x+t+1}\ \ddot{s}_{\overline{t+1}|} = D_{x+t}\ s_{\overline{t+1}|} - D_{x+t+1} (s_{\overline{t+2}|} - 1)$$

従って

$$\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}\ \ddot{s}_{\overline{t+1}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (D_{x+t}\ s_{\overline{t+1}|} - D_{x+t+1}\ s_{\overline{t+2}|} + D_{x+t+1})$$

$$= D_x\ s_{\overline{1}|} - D_{x+n}\ s_{\overline{n+1}|} + (D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots + D_{x+n})$$

$$= (D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1}) - D_{x+n} (s_{\overline{n+1}|} - 1)$$

$$= (N_x - N_{x+n}) - D_{x+n}\ \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

この式を $D_x\, \ddot{s}_{\overline{n}|}$ で割ればよい。

第4章　練習問題（3）

(1)　(4.10.11)の $M_x = vN_x - N_{x+1}$ より

$$R_x = vS_x - S_{x+1} = (1-d)S_x - S_{x+1} = N_x - dS_x$$

となるので

$$(IA)^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{D_x}(R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})$$

$$= \frac{1}{D_x}(N_x - dS_x - N_{x+n} + dS_{x+n} - n(1-d)N_{x+n} - nN_{x+n+1})$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} - \frac{d(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n})}{D_x} - \frac{n(N_{x+n} - N_{x+n+1})}{D_x}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - d(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}} - n\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

第3項を左辺に移せば、与式が証明される。

(2)　前問によれば、

$$\ddot{a}_x - d(I\ddot{a})_x = (IA)_x = vq_x + 2v^2p_xq_{x+1} + \cdots\cdots$$

$$> vq_x(1 + 2vp_x + 3v^2{}_2p_x + \cdots\cdots)$$

$$= vq_x(I\ddot{a})_x$$

$$(I\ddot{a})_x < \frac{\ddot{a}_x}{vq_x + d} = \frac{1+i}{q_x+i}\ddot{a}_x$$

となるが、本章練習問題(1)の(2)の結果の $\ddot{a}_x < \dfrac{1+i}{q_x+i}$ をこれに用いれば第1の不等式が得られる。またこの結果を用いれば

$$(Ia)_x = (I\ddot{a})_x - \ddot{a}_x < \left(\frac{1+i}{q_x+i} - 1\right)\ddot{a}_x = \frac{p_x}{q_x+i}\ddot{a}_x$$

となり、さらにこの $\ddot{a}_x$ に上記の不等式を用いれば第2の不等式が得られる。

(3)　$(\ddot{a}_{x:\overline{n|}})^2 = (1 + vp_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x)(1 + vp_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x)$

の右辺を展開して $v^r (r=1,2,\cdots\cdots,n-1)$ の係数を求めると、

$${}_rp_x + p_x\;{}_{r-1}p_x + {}_2p_x\;{}_{r-2}p_x + \cdots\cdots + {}_{r-1}p_x\;p_x + {}_rp_x$$

であるが、与えられた仮定より

$$
\begin{aligned}
{}_{j}p_x \ \ {}_{r-j}p_x &= (p_x \ \ p_{x+1} \ \ \cdots\cdots \ \ p_{x+j-1})(p_x \ \ p_{x+1} \ \ \cdots\cdots \ \ p_{x+r-j-1}) \\
&> p_x \ \ p_{x+1} \ \ \cdots\cdots \ \ p_{x+j-1} \ \ p_{x+j} \cdot \cdots\cdots \ \ p_{x+r-1} = {}_{r}p_x
\end{aligned}
$$

であるので

$$
(\ddot{a}_{x:\overline{n}|})^2 > 1 + \sum_{r=1}^{n-1} (r+1) \ \ {}_{r}p_x \ \ v^r = (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}
$$

(4)　一時払保険料は

$$
\begin{aligned}
A = v\, q_x(1+r) + v^2 \ {}_{1|}q_x(1+r)^2 + \cdots\cdots \\
+ v^n \ {}_{n-1|}q_x(1+r)^n + v^n \ {}_{n}p_x(1+r)^n
\end{aligned}
$$

であるが、ここで $v(1+r) = \dfrac{1+r}{1+i}$ を改めて $v'(= \dfrac{1}{1+j})$ とみれば、すなわち

$$
j = \frac{1+i}{1+r} - 1 = \frac{i-r}{1+r}
$$

という j を用いれば

$$
A = v' q_x + v'^2 \ {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v'^n \ {}_{n-1|}q_x + v'^n \ {}_{n}p_x = A^{[j]}_{x:\overline{n}|}
$$

(5)　(1.5.3)より　$\ddot{a}_{\overline{tm}|} = \dfrac{1-v^{tm}}{d}$ であるので、一時払保険料は

$$
\begin{aligned}
A &= v\, q_x \ \ddot{a}_{\overline{m}|} + v^2 \ {}_{1|}q_x \ \ddot{a}_{\overline{2m}|} + \cdots\cdots + v^n \ {}_{n-1|}q_x \ \ddot{a}_{\overline{nm}|} + v^n \ {}_{n}p_x \ \ddot{a}_{\overline{nm}|} \\
&= \frac{1}{d}\left[v\, q_x(1-v^m) + v^2 \ {}_{1|}q_x(1-v^{2m}) + \cdots\cdots \right. \\
&\qquad \left. + v^n \ {}_{n-1|}q_x(1-v^{nm}) + v^n \ {}_{n}p_x(1-v^{nm}) \right] \\
&= \frac{1}{d}(A_{x:\overline{n}|} - A'_{x:\overline{n}|})
\end{aligned}
$$

となり、ここに

$$
A'_{x:\overline{n}|} = v^{m+1} q_x + v^{2(m+1)} \ {}_{1|}q_x + \cdots\cdots + v^{n(m+1)} \ {}_{n-1|}q_x + v^{n(m+1)} \ {}_{n}p_x
$$

である。これは $v' = v^{m+1}$ となるような利率を用いて計算した養老保険の一時払保険料である。

(6)　(4.4.2)において第3項を省略すれば

$$
\ddot{a}^{(k)}_{x+t:\overline{1}|} \fallingdotseq 1 - \frac{k-1}{2k}(1 - v\, p_{x+t})
$$

であるから

$$(I\ddot{a})^{(k)}_{x:\overline{n}|} = a^{(k)}_{x:\overline{1}|} + v\,p_x\ 2\,\ddot{a}^{(k)}_{x+1:\overline{1}|} + v^2\ {}_2p_x\ 3\,\ddot{a}^{(k)}_{x+2:\overline{1}|}$$

$$+ \cdots\cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x\ n\,\ddot{a}^{(k)}_{x+n-1:\overline{1}|}$$

$$= (1 + 2\,v\,p_x + 3\,v^2\ {}_2p_x + \cdots\cdots + n\,v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x)$$

$$- \frac{k-1}{2k}\{(1 - v\,p_x) + 2\,v\,p_x(1 - v\,p_{x+1})$$

$$+ 3\,v^2\ {}_2p_x(1 - v\,p_{x+2}) + \cdots\cdots + n\,v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x(1 - v\,p_{x+n-1})\}$$

$$= (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k}\{1 + v\,p_x + v^2\ {}_2p_x + \cdots\cdots$$

$$+ v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x - n\,v^n\ {}_np_x\}$$

$$= (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k}(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - n\,A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}})$$

(7) $$(I\ddot{a}^{(k)})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{nk-1} \frac{t+1}{k}\ v^{\frac{t}{k}}\ {}_{\frac{t}{k}}p_x$$

$$(\overline{I}\overline{a})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\ dt$$

(8) (2.4.10)を用いて部分積分を行なうと

$$(\overline{I}\overline{A})^{1}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t\ v^t\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\ dt$$

$$= \left[\,t\,v^t(-\,{}_tp_x)\right]_0^n - \int_0^n \{v^t + t(\log v)v^t\}(-\,{}_tp_x)\,dt$$

$$= -\,n\,v^n\ {}_np_x + \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt - \delta\int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\,dt$$

$$= -\,n\,A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + \overline{a}_{x:\overline{n}|} - \delta(\overline{I}\overline{a})_{x:\overline{n}|}$$

(9) 前問および(4.11.14)によれば

$$\overline{a}_x - \delta(\overline{I}\overline{a})_x = (\overline{I}\overline{A})_x = \int_0^\infty t\,v^t\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\ dt$$

$$> \mu_x\int_0^\infty t\ v^t\ {}_tp_x\ dt = \mu_x(\overline{I}\overline{a})_x\ ,$$

$$(\overline{I}\overline{a})_x < \frac{\overline{a}_x}{\mu_x + \delta}$$

となるが、さらに右辺の分子に、本章練習問題(2)の(6)の結果を用いれば、第2の不等式が得られる。

(10) $$\frac{d\,\overline{a}_{x:\overline{n}|}}{di} = \frac{d}{di}\int_0^n v^t\ {}_tp_x\,dt = \int_0^n \frac{d(1+i)^{-t}}{di}\ {}_tp_x\,dt$$

$$= \int_0^n (-\,t)(1+i)^{-t-1}\ {}_tp_x\,dt = -\,v\int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\ dt$$

$$= -v(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$$

$$\frac{d\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{d\delta} = \int_0^n \frac{d\,e^{-\delta t}}{d\delta}\ {}_tp_x\ dt = \int_0^n (-t)\,e^{-\delta t}\ {}_tp_x\,dt$$

$$= -\int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\,dt = -(\bar{I}\bar{a})_{x:\overline{n}|}$$

(11)　第２章練習問題(1)の(16)を用いると

$$\frac{d}{dx}\int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\,dt = \int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})\,dt$$

$$= \mu_x\int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\,dt - \int_0^n t\,v^t\ {}_tp_x\,\mu_{x+t}\ dt$$

(12)　練習問題(8)の式を用いると

$$\frac{d}{dx}(\bar{I}\bar{A})_x = \frac{d}{dx}\bar{a}_x - \delta\frac{d}{dx}(\bar{I}\bar{a})_x$$

右辺第１項には、本章練習問題(2)の(7)を用い、第２項には前問(11)の結果を用いると

$$= \bar{a}_x(\delta + \mu_x) - 1 - \delta\mu_x(\bar{I}\bar{a})_x + \delta(\bar{I}\bar{A})_x$$

$$= -(1 - \delta\bar{a}_x) + \mu_x\{\bar{a}_x - \delta(\bar{I}\bar{a})_x\} + \delta(\bar{I}\bar{A})_x$$

（４．９．14）と練習問題(8)の結果より

$$= -\bar{A}_x + \mu_x(\bar{I}\bar{A})_x + \delta(\bar{I}\bar{A})_x$$

(13)　(a) 確率論における分散を与える式

$$\sigma^2(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

をここで用いると、明らかに

$$\sigma^2(A_{x:\overline{n}|}) = \sum_{t=1}^n v^2\ {}_{t-1|}q_x + v^{2n}\ {}_np_x - A^2_{x:\overline{n}|}$$

$$= A^{[2]}_{x:\overline{n}|} - A^2_{x:\overline{n}|}$$

(b)　(4.12.3)で $a_{\overline{t|}} = \dfrac{1-v^t}{d}$ とし、上の関係を用いると

$$\sigma^2(\ddot{a}_{x:\overline{n|}}) = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1-v^t}{d}\right)^2 {}_{t-1|}q_x + \left(\frac{1-v^n}{d}\right)^2 {}_np_x - \ddot{a}^2_{x:\overline{n|}}$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[\sum_{t=1}^{n}(1-2v^t+v^{2t})\,{}_{t-1|}q_x + (1-2v^n+v^{2n})\;{}_np_x - (1-A_{x:\overline{n|}})^2\right]$$

$$= \frac{1}{d^2}\left[1-2A_{x:\overline{n|}} + A^{(2)}_{x:\overline{n|}} - 1 + 2A_{x:\overline{n|}} - A^2_{x:\overline{n|}}\right]$$

$$= \frac{1}{d^2}\sigma^2(A_{x:\overline{n|}})$$

(14)　部分積分を用い、かつ (2.4.9) を用いると

$$\int_0^n v^t\;{}_tp_x\,dt = \left[\frac{v^t}{\log v}\;{}_tp_x\right]_0^n - \int_0^n \frac{v^t}{\log v}(-{}_tp_x\,\mu_{x+t})\,dt$$

$$= \frac{v^n}{-\delta}\;{}_np_x - \frac{1}{-\delta} + \frac{1}{-\delta}\int_0^n v^t\;{}_tp_x\,\mu_{x+t}\;dt$$

(1.7.2)より $v^t = 1-\delta\,\overline{a}_{\overline{t|}}$ であるから

$$= -\frac{1}{\delta}\;{}_np_x + \overline{a}_{\overline{n|}}\;{}_np_x + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\int_0^n {}_tp_x\;\mu_{x+t}\;dt$$

$$+ \int_0^n \overline{a}_{\overline{t|}}\;{}_tp_x\;\mu_{x+t}\;dt$$

この中で $\dfrac{1}{\delta}$ のかかる項をまとめると

$$1 - {}_np_x - \int_0^n {}_tp_x\,\mu_{x+t}\;dt = 1 - {}_np_x - {}_nq_x = 0$$

となるので与式が得られる。

(15)　現在支払われている年金の65歳における現価は、年金年額を1として、(4.4.6)を用いて

$$a^{(2)}_{65} = \frac{N_{66}}{D_{65}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{48}\left(\delta + \frac{d_{64}+d_{65}}{2l_{65}}\right) = 9.908301$$

である。一方新しい完全年金の現価は、年金年額を1として、(4 .13. 6) と (4 . 4 . 6)とを用いて

$$\mathring{a}_{65}^{(4)} = \frac{N_{66}}{D_{65}} + \frac{3}{8} - \frac{15}{192}\left(\delta + \frac{d_{64}+d_{65}}{2l_{65}}\right)$$
$$+\frac{1}{8}\frac{\bar{M}_{65}}{D_{65}} - \frac{1}{192}\frac{d_{64}+d_{65}}{2l_{65}} = 10.089168$$

従って元の年金の年額が20万円ならば、新しい年金の毎回の支払額は

$$\frac{200,000 \times 9.908301}{10.089168} \times \frac{1}{4} = 49,104\text{円}$$

(16) $\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)}$ の定義式 (4 .13. 1), (4 .13. 2)に (4 .12. 5)に類似の $a_{x:\overline{n}|}^{(k)}$ を入れると

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)} = \sum_{t=0}^{nk-1} a_{\overline{\frac{t}{k}}|}^{(k)} \left({}_{\frac{t}{k}}p_x - {}_{\frac{t+1}{k}}p_x \right) + a_{\overline{n}|}^{(k)}\ {}_np_x$$
$$+\sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}} s\, v^{\frac{t}{k}+s}\ {}_{\frac{t}{k}+s}p_x\ \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\, ds$$

となる。(ただし $a_{\overline{0}|}^{(k)} = 0$ とする) (2 . 4 .10)より

$${}_{\frac{t}{k}}p_x - {}_{\frac{t+1}{k}}p_x = \int_0^{\frac{1}{k}} {}_{\frac{t}{k}+s}p_x\ \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\ ds$$

であるから

$$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)} = \sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}} \left(a_{\overline{\frac{t}{k}}|}^{(k)} + s\, v^{\frac{t}{k}+s} \right)\ {}_{\frac{t}{k}+s}p_x\ \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\ ds + a_{\overline{n}|}^{(k)}\ {}_np_x \qquad (1)$$

一方 (4 .12. 6)より

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{nk-1}\int_0^{\frac{1}{k}} \bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|}\ {}_{\frac{t}{k}+s}p_x\ \mu_{x+\frac{t}{k}+s}\ ds + \bar{a}_{\overline{n}|}\ {}_np_x \qquad (2)$$

である。ところで (1 . 7 . 2), (1 . 7 .10)より

$$\bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|} = \bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}}|} + \frac{v^{\frac{t}{k}} - v^{\frac{t}{k}+s}}{\delta} = \frac{i^{(k)}}{\delta} a_{\overline{\frac{t}{k}}|}^{(k)} + \frac{v^{\frac{t}{k}+s}}{\delta}\{(1+i)^s - 1\}$$

となるが、i^2 以上の項を省略すると、(1 . 2 . 6)を用いて

$$(1+i)^s-1 \fallingdotseq s\,i \fallingdotseq s\,i^{(k)}$$

従って

$$\bar{a}_{\overline{\frac{t}{k}+s}|} \fallingdotseq \frac{i^{(k)}}{\delta}\, a^{(k)}_{\overline{\frac{t}{k}}|} + \frac{i^{(k)}}{\delta}\, s v^{\frac{t}{k}+s} \qquad (3)$$

さらに（1．7．10）より

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{i^{(k)}}{\delta}\, a^{(k)}_{\overline{n}|} \qquad (4)$$

である。(3)，(4)を(2)に入れて(1)と比べれば

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} \fallingdotseq \frac{i^{(k)}}{\delta}\, \mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$$

となる。

(17)　前問より

$$\mathring{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\delta}{i^{(k)}}\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}$$

となるが、（1．3．2）と（1．1．9）により

$$\delta = k\,log\,(1+\frac{i^{(k)}}{k}) \fallingdotseq k\,\{\frac{i^{(k)}}{k} - \frac{i^{(k)2}}{2k^2}\}$$

$$\frac{\delta}{i^{(k)}} \fallingdotseq 1 - \frac{i^{(k)}}{2k}$$

これで第1の近似式が証明された。一方 $v=(1+i)^{-1}$ であるから、同じく（1．3．2）により

$$v^{\frac{1}{2k}} = (1+\frac{i^{(k)}}{k})^{(-k)\times\frac{1}{2k}} = (1+\frac{i^{(k)}}{k})^{-\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1 - \frac{i^{(k)}}{2k}$$

従って第2の近似式が証明された。

第４章　練習問題（４）

(1)　$$A'_{x:\overline{30|}} = \frac{1}{D_x}\{3(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+10}) + 2(\bar{M}_{x+10} - \bar{M}_{x+20}) + (\bar{M}_{x+20} - \bar{M}_{x+30} + D_{x+30})\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{2(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+10}) + (\bar{M}_{x+10} - \bar{M}_{x+20}) + (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+30} + D_{x+30})\}$$

$$_{20}P'_{x:\overline{30|}} = \frac{2(\bar{M}_x - \bar{M}_{x+10}) + (\bar{M}_{x+10} - \bar{M}_{x+20}) + (\bar{M}_x - \bar{M}_{x+30} + D_{x+30})}{N_x - N_{x+20}}$$

(2)　$$\frac{M_x - M_{x+2}}{N_x - N_{x+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}\right)$$ より

$$\frac{2(C_x + C_{x+1})}{D_x + D_{x+1}} = \frac{C_x D_{x+1} + C_{x+1} D_x}{D_x D_{x+1}}$$

$$2(C_x + C_{x+1}) D_x D_{x+1} = C_x D_x D_{x+1} + C_{x+1} D_x D_{x+1} + C_x D^2_{x+1} + C_{x+1} D^2_x$$

$$C_x D_x D_{x+1} + C_{x+1} D_x D_{x+1} = C_x D^2_{x+1} + C_{x+1} D_x^2$$

$$(D_x - D_{x+1})(C_x D_{x+1} - C_{x+1} D_x) = 0$$

ところで

$$D_x - D_{x+1} = v^x l_x - v^{x+1} l_{x+1} = v^x l_x (1 - v p_x) > 0$$

であるので

$$C_x D_{x+1} = C_{x+1} D_x, \quad \frac{C_x}{D_x} = \frac{C_{x+1}}{D_{x+1}}$$

より

$$q_x = q_{x+1}$$

(3)　$$A'^{\,1}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1|}q_x \left(1 - \frac{\ddot{s}_{\overline{t|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}\right) = A^1_{x:\overline{n|}} - \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{x+t-1}\,\ddot{s}_{\overline{t|}}}{D_x\,\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

本章練習問題(2)の(13)の結果を用いると

$$= A^1_{x:\overline{n|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= A_{x:\overline{n|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

年払保険料は

$$P'^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{A'^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = P_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}}$$

これを書き直すと

$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} + P'^{1}_{x:\overline{n|}}$$

となるが、これは(a)定期積立を行なって目標額との差額の定期保険に加入しても、(b)養老保険に加入しても、同効果であるとともに、毎年必要とする金額も同一であることを示している。

(4) $$P'^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \sum_{t=1}^{n} v^t \ {}_{t-1|}q_x \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} \quad (\text{ただし } \ddot{a}_{\overline{0|}} = 0)$$

$$= \frac{D_x}{N_x - N_{x+n}} \sum_{t=1}^{n} \frac{C_{x+t-1}}{D_x} \frac{\ddot{a}_{\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

$$= \frac{1}{(N_x - N_{x+n})\,\ddot{a}_{\overline{n|}}} \sum_{t=1}^{n-1} C_{x+t-1}\ \ddot{a}_{\overline{n-t|}}$$

(4 .10.10)を用いると

$$\sum_{t=1}^{n-1} C_{x+t-1}\ \ddot{a}_{\overline{n-t|}} = \sum_{t=1}^{n-1} \ddot{a}_{n-t}(v D_{x+t-1} - D_{x+t})$$

$$= v\,\ddot{a}_{\overline{n-1|}} D_x - (\ddot{a}_{\overline{n-1|}} - v\,\ddot{a}_{\overline{n-2|}}) D_{x+1} - (\ddot{a}_{\overline{n-2|}} - v\,\ddot{a}_{\overline{n-3|}}) D_{x+2}$$

$$- \cdots\cdots - (\ddot{a}_{\overline{2|}} - v\,\ddot{a}_{\overline{1|}}) D_{x+n-2} - \ddot{a}_{\overline{1|}} D_{x+n-1}$$

$$= v\,\ddot{a}_{\overline{n-1|}} D_x - (D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots + D_{x+n-2} + D_{x+n-1})$$

$$= (1 + v\,\ddot{a}_{\overline{n-1|}}) D_x - (D_x + D_{x+1} + \cdots\cdots + D_{x+n-1})$$

$$= \ddot{a}_{\overline{n|}} D_x - (N_x - N_{x+n})$$

従って

$$P'^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{D_x}{(N_x - N_{x+n})} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

(5) 第1章練習問題(3)の(8)の結果を用いると

$$P_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n|}}} = \left(\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - d\right) - \left(\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}} - d\right) = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} - \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n|}}}$$

(6)　(a)　(4.9.11)より $A_x = 1 - d\ddot{a}_x = 1 - \dfrac{i}{1+i}(1+a_x)$

これより　$i = \dfrac{1-A_x}{A_x + a_x} \fallingdotseq 0.06$

(b)　(4.14.21)より　$P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d = \dfrac{1}{1+a_x} - \dfrac{i}{1+i}$

これより　$i = \dfrac{1-(1+a_x)P_x}{a_x + (1+a_x)P_x} \fallingdotseq 0.03$

(c)　$A = 1 - d\ddot{a}$，$P = \dfrac{1}{\ddot{a}} - d$ より $\ddot{a}$ を消去すると

$$d = (1-A)(P+d), \qquad \frac{(1-A)P}{A} = d = \frac{i}{1+i}$$

これより　$i = \dfrac{(1-A)P}{A-(1-A)P} \fallingdotseq 0.04$

(7)　(4.3.16)より $\ddot{a}_{x+1} = \dfrac{a_x}{v\,p_x}$ であるから

$$A_{x+1} = 1 - d\,\ddot{a}_{x+1} = 1 - \frac{d\,a_x}{(1-d)\,p_x}$$

一方 $P_x = \dfrac{1}{1+a_x} - d$ より $d = \dfrac{1}{1+a_x} - P_x$ を計算すると

$d = 0.0384612$ となり、これを上記の式に入れると　$A_{x+1} = 0.30847$

(8)　$P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$ より $\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{10|}} + {}_{10|}\ddot{a}_x = \dfrac{A_x}{P_x} = 19.98766$

また　$P'_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{10|}} + \dfrac{1}{2}\,{}_{10|}\ddot{a}_x}$ より $\ddot{a}_{x:\overline{10|}} + \dfrac{1}{2}\,{}_{10|}\ddot{a}_x = \dfrac{A_x}{P'_x} = 14.19185$

これらより　$\ddot{a}_{x:\overline{10|}} = 8.39604$

次に $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$ より $d = \dfrac{1-0.324}{19.98766} = 0.03382$

従って　　$A_{x:\overline{10|}} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{10|}} = 0.71605$

保険金100万円ならば 716千円。

(9)　(a)　$P_x\,\ddot{a}_x = A_x = 0.04\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}} + 0.02\,{}_{5|}\ddot{a}_x$

$$= 0.0475\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}} + 0.0175\,{}_{5|}\ddot{a}_x$$

最後の等式から ${}_{5|}\ddot{a}_x = 3\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$ となるので

$$\ddot{a}_x = \ddot{a}_{x:\overline{5|}} + {}_{5|}\ddot{a}_x = 4\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$$

これを上式に入れると

$$4\,P_x\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}} = 0.04\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}} + 0.06\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}}$$

従って　　$P_x = 0.025$

(b)　${}_5P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} = \dfrac{0.1\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} = 0.1$

(c)　$P_x = \dfrac{1}{\ddot{a}_x} - d = \dfrac{1}{4\,\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} - d = 0.025$

より $\dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} = (0.025 + d) \times 4 = 0.1 + 4d$ となり

$$P_{x:\overline{5|}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{5|}}} - d = 0.1 + 3d$$

(10)　支出の現価は

$$\sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_{t-1|}q_x\{1 + (t-1)\alpha\} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + \alpha \sum_{t=1}^{n} (t-1)\,v^t\,{}_{t-1|}q_x$$

$$= A^{1}_{x:\overline{n|}} + \alpha(v\,p_x)\sum_{t=1}^{n-1} t\,v^t\,{}_{t-1|}q_{x+1}$$

$$= A^{1}_{x:\overline{n|}} + \alpha(v\,p_x)(IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1|}}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[(M_x - M_{x+n}) + \alpha\{R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1)M_{x+n}\}\right]$$

収入の現価は

$$\sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_x\{P - t\beta\} = P\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \beta(v\,p_x)\sum_{t=1}^{n-1} t\,v^{t-1}\,{}_tp_{x+1}$$

$$= P\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \beta(v\,p_x)(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1|}}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left[P(N_x - N_{x+n}) - \beta\{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)N_{x+n}\}\right]$$

両者を等しいとおくと

$$P=\frac{1}{N_x-N_{x+n}}\left[(M_x-M_{x+n})+\alpha\{R_{x+1}-R_{x+n}-(n-1)M_{x+n}\}\right.$$
$$\left.+\beta\{S_{x+1}-S_{x+n}-(n-1)N_{x+n}\}\right]$$

(11)　$(a)(b)(c)$のそれぞれを式で表わすと

$$P_{x:\overline{n|}}=P^{1}_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}=0.0405 \tag{1}$$

$$P^{1}_{x:\overline{n|}}+2P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}=0.07 \tag{2}$$

$$\frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}}=0.036 \tag{3}$$

これらから

$$P=\frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\dfrac{2}{3}(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}} \tag{4}$$

を求めればよい。(2)−(1)により

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}=\frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}=0.0295$$

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}=0.0295\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{5}$$

(5)を(3)に入れると

$$0.0295\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}=0.036\{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}\}$$

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}=\frac{0.0065}{0.036}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \tag{6}$$

(5), (6)を(4)に入れると

$$P=\frac{0.0295\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{0.0065}{0.036}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}=0.03354=33.54‰$$

(12)　求める純保険料をPとし、既払込保険料を5.5%の率で利値した額が20万円を超すのが第$k+1$年度末であるとすると、生存保険金を1として、収支相等の原則より

$$P\,\ddot{a}_{30:\overline{30}|} = A_{30:\overline{30}|}^{\ \ 1} + 0.2\,A^{1}_{30:\overline{k}|} + P\left\{ \frac{C_{30+k}}{D_{30}}\ddot{s}_{\overline{k+1}|} + \frac{C_{30+k+1}}{D_{30}}\ddot{s}_{\overline{k+2}|} + \cdots\cdots + \frac{C_{59}}{D_{30}}\ddot{s}_{\overline{30}|} \right\}$$

ところで本章練習問題(2)の(13)の結果を用いると

$$\frac{1}{D_{30}}\{ C_{30}\,\ddot{s}_{\overline{1}|} + C_{31}\,\ddot{s}_{\overline{2}|} + \cdots\cdots + C_{59}\,\ddot{s}_{\overline{30}|} \} = \ddot{a}_{30:\overline{30}|} - \frac{D_{60}}{D_{30}}\ddot{s}_{\overline{30}|}$$

$$\frac{1}{D_{30}}\{ C_{30}\,\ddot{s}_{\overline{1}|} + C_{31}\,\ddot{s}_{\overline{2}|} + \cdots\cdots + C_{30+k-1}\,\ddot{s}_{\overline{k}|} \} = \ddot{a}_{30:\overline{k}|} - \frac{D_{30+k}}{D_{30}}\ddot{s}_{\overline{k}|}$$

であるので、両者の差をとると、上記の式の右辺第３項の{ }内となり、それは

$$\frac{1}{D_{30}}\{ N_{30+k} - N_{60} + D_{30+k}\,\ddot{s}_{\overline{k}|} - D_{60}\,\ddot{s}_{\overline{30}|} \}$$

であるので、上記の式より

$$P = \frac{D_{60} + 0.2\,(M_{30} - M_{30+k})}{N_{30} - N_{30+k} - D_{30+k}\,\ddot{s}_{\overline{k}|} + D_{60}\,\ddot{s}_{\overline{30}|}}$$

となる。これを用いて先ず k を定めるのであるが、その条件は

$$P\,\ddot{s}_{\overline{k}|} < 0.2 < P\,\ddot{s}_{\overline{k+1}|}$$

となることである。第１の不等式を整理すれば

$$\{ D_{60} + 0.2\,v^{\frac{1}{2}}(\bar{M}_{30} - \bar{M}_{30+k}) + 0.2\,D_{30+k} \}\,\ddot{s}_{\overline{k}|} + 0.2N_{30+k} < 0.2(N_{30} + D_{60}\,\ddot{s}_{\overline{30}|})$$

となり、この不等式を満足する最大の k を求めればよい。利息表と計算基数表によってこの右辺を計算すれば121,926となり、一方左辺は

$k = 10$　のとき　116,104

$k = 11$　のとき　122,547

となる。従って $k = 10$ であり、その時の P は0.013149となる。生存保険金が100万円ならば 13,149円である。

第４章　練習問題（５）

(1)　死亡保険金１に対する年払純保険料は（4 .14.19) から類推できるように

$$\bar{P}=\frac{\bar{M}_{40}-\bar{M}_{50}+2D_{50}}{N_{40}-N_{50}}=0.145085$$

である。死亡保険金100万円に対しては145,085円となる。従って（4 .17. 1）より、（金利計算表の$\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|}$の値を用いて）

$$\bar{P}^{[2]}=\bar{P}\frac{1}{\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}|}}=\frac{145,085}{0.986218}=147,113\text{円}$$

次に死亡保険金１に対する半年払真保険料の年額は（4 .17. 4）により

$$\bar{P}^{(2)}=\frac{\dfrac{1}{D_{40}}(\bar{M}_{40}-\bar{M}_{50}+2D_{50})}{\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{10}|}}$$

であるが、$\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{10}|}$ を（4 . 4 . 3）の右辺第２項までによって求めると

$$\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{10}|}=\frac{N_{40}-N_{50}}{D_{40}}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{D_{50}}{D_{40}}\right)$$

であるから

$$\bar{P}^{(2)}=\frac{\bar{M}_{40}-\bar{M}_{50}+2D_{50}}{(N_{40}-N_{50})-0.25(D_{40}-D_{50})}=0.147172$$

である。死亡保険金100万円に対しては147,172円となる。

(2)　（4 . 9 .16) および（4 . 4 . 3）により、

$$P^{(k)}_{x:\overline{n}|}=\frac{A^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}}\fallingdotseq\frac{A_{x:\overline{n}|}+\dfrac{k-1}{2k}\,i\,A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-\dfrac{k-1}{2k}(1-v^{n}\,{}_{n}p_{x})}$$

右辺の分母、分子を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で割り（4 . 6 .11) を用いると

$$=\frac{P_{x:\overline{n}|}+\dfrac{k-1}{2k}\,i\,P^{1}_{x:\overline{n}|}}{1-\dfrac{k-1}{2k}\left(\dfrac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}+d\right)}$$

(3)　$\bar{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}=\dfrac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}-\delta$ であるから

$$\frac{d}{dx}\bar{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}=\frac{-1}{(\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}\cdot\frac{d\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}}{dx}$$

本章練習問題(2)の(7)によれば

$$=\frac{-1}{(\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2}(\mu_x\,\bar{a}_{x:\overline{n}|}-\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|})\quad=\quad\frac{1}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}(\bar{P}^{1\,(\infty)}_{x:\overline{n}|}-\mu_x)$$

$$=(\bar{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}+\delta)(\bar{P}^{1\,(\infty)}_{x:\overline{n}|}-\mu_x)$$

(4)　本章練習問題(2)の(8)の結果を用いると

$$\frac{d}{dx}log(l_x\bar{a}_x)=\frac{1}{l_x\bar{a}_x}\;\frac{d}{dx}(l_x\bar{a}_x)$$

$$=\frac{1}{l_x\bar{a}_x}(-l_x\bar{A}_x)=-\bar{P}^{(\infty)}_x$$

第５章　練習問題（１）

(1)　(a)　（４.14.８），（４.14.19）と同様に

$$\bar{P}_{50:\overline{50|}}=\frac{\bar{A}_{50:\overline{50|}}}{\ddot{a}_{50:\overline{50|}}}=\frac{\bar{M}_{50}-\bar{M}_{100}+D_{100}}{N_{50}-N_{100}}$$

であり、この $\bar{P}_{50:\overline{50|}}$ を用いて

$$ {}_t\bar{V}_{50:\overline{50|}}=\bar{A}_{50+t:\overline{50-t|}}-\bar{P}_{50:\overline{50|}}\ddot{a}_{50+t:\overline{50-t|}}$$

$$=\frac{\bar{M}_{50+t}-\bar{M}_{100}+D_{100}}{D_{50+t}}-\bar{P}_{50:\overline{50|}}\frac{N_{50+t}-N_{100}}{D_{50+t}}$$

(b) $\bar{P}_{50:\overline{50|}}$ =0.0188970 で、$\bar{V}$ は以下のとおりとなる。

t	V	t	${}_tV$
1	0.01538	30	0.61948
2	0.03108	31	0.64085
3	0.04722	40	0.80468
4	0.06378	41	0.81925
5	0.08074	45	0.87150
10	0.17238	46	0.88433
11	0.19234	47	0.89860
20	0.39034	48	0.91695
21	0.41361	49	0.94545

(2)　（５．３．７）により $1-{}_1V_x=\dfrac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x}$ 等が得られるので、

$$\text{右辺}=1-\frac{\ddot{a}_{x+1}}{\ddot{a}_x}\cdot\frac{\ddot{a}_{x+2}}{\ddot{a}_{x+1}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t-1}}$$

$$= 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = {}_tV_x$$

(3)　右辺 $= {}_tV_{x:\overline{n}|}(P_{x:\overline{t}|} - P^{1}_{x:\overline{t}|}) + P^{1}_{x:\overline{t}|}$

であるが、${}_tV_{x:\overline{n}|}$ に過去法による式（5．3．1）を入れると

$$= \left(\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} P_{x:\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}\right)\left(\frac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}\right) + \frac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}$$

$$= P_{x:\overline{n}|}$$

(4)　前問で $n \to \infty$ とせよ。

(5)　前問の結果より、

$$P^{1}_{x:\overline{t}|} = P_x - P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}\ {}_tV_x = 0.00632$$

従って

$$P_{x:\overline{t}|} = P^{1}_{x:\overline{t}|} + P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1} = 0.07832$$

(6)　$\dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - {}_tV_x$ を利用すると

$${}_tV_{x+t} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+2t}}{\ddot{a}_{x+t}} = 1 - \frac{2\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}}$$

$$= -1 + \frac{\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x+t}} = -1 + \frac{1}{1 - {}_tV_x} = \frac{{}_tV_x}{1 - {}_tV_x}\ .$$

$${}_{2t}V_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+2t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{2\ddot{a}_{x+t} - \ddot{a}_x}{\ddot{a}_x}$$

$$= 2\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}\right) = 2\,{}_tV_x$$

(7)　$A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$,　$A_{x+l:\overline{n-l}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|}$,

$A_{x+m:\overline{n-m}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$　を与式に入れ d で割ると

$$\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|} = \ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|} - \ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}$$

これより

$$\frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|}} = \frac{1}{2}\ ,\qquad \frac{\ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{2}{3}$$

従って

$$ {}_{l}V_{x:\overline{n}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1}{3} $$

$$ {}_{m-l}V_{x+l:\overline{n-l}|} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|}}{\ddot{a}_{x+l:\overline{n-l}|}} = \frac{1}{2} $$

(8)　(5.3.7)を用いると

$$ \text{右辺} = A_{x:\overline{n}|}\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right) + (1 - A_{x:\overline{n}|})\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) $$

$$ = -A_{x:\overline{n}|}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + 1 - (1 - A_{x:\overline{n}|})\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

$$ = -{}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + 1 - (d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|})\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

$$ = (1 - d\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}) - {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} $$

$$ = A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m}P_{x:\overline{n}|}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} = {}^{m}_{t}V_{x:\overline{n}|} $$

(9)　過去法による式（5.3.1)を ${}_{t}V_{x:\overline{m}|}$ と ${}_{t}V_{x:\overline{n}|}$ に用いると

$$ {}_{t}V_{x:\overline{m}|} - {}_{t}V_{x:\overline{n}|} = (P_{x:\overline{m}|} - P_{x:\overline{n}|})\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

となる。ところで

$$ \ddot{s}_{x:\overline{t}|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

$$ = \frac{v^x l_x + v^{x+1} l_{x+1} + \cdots\cdots + v^{x+t-1} l_{x+t-1}}{v^{x+t} l_{x+t}} $$

$$ = \frac{1}{l_{x+t}}\{l_x(1+i)^t + l_{x+1}(1+i)^{t-1} + \cdots\cdots + l_{x+t-1}(1+i)\} $$

は、各年度始の生存者から1ずつ払い込ませて t 年後まで利殖し、それを t 年後の生存者1人当りにした値である。($\ddot{s}_{\overline{t}|}$ の拡張)　従って与えられた式は、保険料差額のそのような終価が、責任準備金の差額となることを示している。

(10)　ある保険種類の給付を考え、契約から t 年後の時点における将来給付の現価を A_t とすると、払込年数が m 年の場合の平準保険料は ${}_mP = \dfrac{A_0}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}$ である。また責任準備金は

$$ {}_t^mV = \begin{cases} A_t - {}_mP \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} & t \leq m \\ A_t & t > m \end{cases} $$

である。払込年数が $l(<m)$ の場合も同様の式ができるが、今 $t \leq l$ について2つの責任準備金の差をとると

$$ {}_t^lV - {}_t^mV = {}_mP \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} - {}_lP \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{l-t|}} $$

$$ = A_0 \left(\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} - \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{l-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{l|}}} \right) $$

(　)の中を計算基数で表わすと

$$ (\quad) = \frac{D_x}{D_{x+t}} \left(\frac{N_{x+t} - N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} - \frac{N_{x+t} - N_{x+l}}{N_x - N_{x+l}} \right) $$

$$ = \frac{D_x}{D_{x+t}} \left(1 - \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+m}} - 1 + \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+l}} \right) $$

$$ = \frac{D_x (N_x - N_{x+t})}{D_{x+t}} \left(\frac{1}{N_x - N_{x+l}} - \frac{1}{N_x - N_{x+m}} \right) $$

$l < m$ であるから $N_x - N_{x+l} < N_x - N_{x+m}$ であり、従って最終項は正となり、${}_t^lV > {}_t^mV$ となる。$t > l$ の場合に ${}_t^lV \geq {}_t^mV$ となることは容易にわかる。

(11)　第4章練習問題(1)の(5)で述べたように、この時にはすべての年齢について

$$ \ddot{a}_x = \ddot{a}'_x (1 - vk) $$

となるので

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x} = 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t}(1 - vk)}{\ddot{a}'_x (1 - vk)} = 1 - \frac{\ddot{a}'_{x+t}}{\ddot{a}'_x} = {}_tV_x' $$

(12)　選択表の場合、記号の右肩に(I)をつけ、終局表の場合(II)をつけることにすると、選択期間内では、選択表の方が死亡率が低く、従って生存率が高いので、すべての t について ${}_tp_x^{(\mathrm{I})} > {}_tp_x^{(\mathrm{II})}$ となる。従って

$$\ddot{a}^{(\mathrm{I})}_{x:\overline{n}|} > \ddot{a}^{(\mathrm{II})}_{x:\overline{n}|}$$

さて（5．3．7）を用いれば

$${}_tV^{(\mathrm{I})}_{x:\overline{n}|} - {}_tV^{(\mathrm{II})}_{x:\overline{n}|} = \left(1 - \frac{\ddot{a}^{(\mathrm{I})}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(\mathrm{I})}_{x:\overline{n}|}}\right) - \left(1 - \frac{\ddot{a}^{(\mathrm{II})}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}^{(\mathrm{II})}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

であるが選択期間経過後は、両表による死亡率が等しいので、

$\ddot{a}^{(\mathrm{I})}_{x+t:\overline{n-t}|} = \ddot{a}^{(\mathrm{II})}_{x+t:\overline{n-t}|}$ である。従って

$${}_tV^{(\mathrm{I})}_{x:\overline{n}|} - {}_tV^{(\mathrm{II})}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}^{(\mathrm{I})}_{x+t:\overline{n-t}|}\left(\frac{1}{\ddot{a}^{(\mathrm{II})}_{x:\overline{n}|}} - \frac{1}{\ddot{a}^{(\mathrm{I})}_{x:\overline{n}|}}\right)$$

であるが、上記のような $\ddot{a}^{(\mathrm{I})}$と $\ddot{a}^{(\mathrm{II})}$の関係からこの右辺は正である。

(13)　${}_tV'_{x:\overline{n}|} = {}_tV_{x:\overline{n}|}$ ならば（5．3．7）により

$$\frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (0 \leq t \leq r)$$

従って c を定数として

$$\frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} = \cdots\cdots = \frac{\ddot{a}'_{x+r:\overline{n-r}|}}{\ddot{a}_{x+r:\overline{n-r}|}} = c$$

とすることができる。(ただし $r = n-1$ のときは、$\dfrac{\ddot{a}'_{x+n-1:\overline{1}|}}{\ddot{a}_{x+n-1:\overline{1}|}} = \dfrac{1}{1} = 1$ で

あり、$c=1$ に限るので、この場合は除外する。すなわち $r \leq n-2$ である)

この中の相続く2項について

$$c = \frac{\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}} = \frac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}} = \frac{1 + v\,p'_{x+t}\,\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}{1 + v\,p_{x+t}\,\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}}$$

$$(0 \leq t \leq r-1)$$

であることから

$$c\,(1+v\,p_{x+t}\,\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}})=1+v\,p'_{x+t}\cdot\ddot{a}'_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}$$

$$=1+v\,p'_{x+t}\,c\,\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}$$

$$c\,v\,(p_{x+t}-p'_{x+t})\,\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}=1-c$$

$p_{x+t}-p'_{x+t}=q'_{x+t}-q_{x+t}$ であるから $\dfrac{1-c}{c\,v}=k$ とすれば

$$q'_{x+t}-q_{x+t}=\frac{k}{\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1|}}}$$

(14)　生存保険金1に対する純保険料は

$$\bar{P}=\frac{3\,(\bar{M}_{40}-\bar{M}_{60})+(\bar{M}_{60}-\bar{M}_{80})+D_{80}}{N_{40}-N_{60}}=0.02253$$

である。また10年後の責任準備金は過去法で

$$_{10}\bar{V}=\frac{N_{40}-N_{50}}{D_{50}}\,\bar{P}-\frac{3\,(\bar{M}_{40}-\bar{M}_{50})}{D_{50}}=0.21059$$

である。従って生存保険金1000万円に対しては、それぞれ22万5300円および210万5900円となる。

(15)　この保険の契約時点では、(4.11.9)の記号を用いて

支出の現価 $=\bar{A}_{x:\overline{n|}}+\bar{P}(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}$

収入の現価 $=\bar{P}\,\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

であるので、両者を等しいとすると

$$\bar{P}=\frac{\bar{A}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-(I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n|}}}=\frac{\bar{M}_x-\bar{M}_{x+n}+D_{x+n}}{(N_x-N_{x+n})-(\bar{R}_x-\bar{R}_{x+n}-n\,\bar{M}_{x+n})}$$

責任準備金は将来法により

$$_{t}\bar{V}=\bar{A}_{x+t:\overline{n-t|}}+\bar{P}\,\{(t+1)\,\frac{\bar{C}_{x+t}}{D_{x+t}}+(t+2)\,\frac{\bar{C}_{x+t+1}}{D_{x+t}}$$

$$+ \cdots\cdots + n\frac{\overline{C}_{x+n-1}}{D_{x+t}}\} - \overline{P}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

このうち｛　｝の部分は

$$\{\quad\} = t \cdot \frac{\overline{M}_{x+t} - \overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}} + \frac{\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} - (n-t)\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}$$

$$= \frac{\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} + t\,\overline{M}_{x+t} - n\,\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}$$

であるので

$$_t\overline{V} = \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \overline{P}\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_{x+n} + t\,\overline{M}_{x+t} - n\,\overline{M}_{x+n}}{D_{x+t}}\right)$$

(16)　この保険の契約時点では、

支出の現価 $= v^{y-x}\,{}_{y-x}p_x\,(\ddot{a}^{(2)}_{\overline{g}|} + v^g\,{}_gp_y\,\ddot{a}^{(2)}_{y+g}) + \overline{P}\,(I\overline{A})^{\ 1}_{x:\overline{y-x}|}$

収入の現価 $= \overline{P}\ \ddot{a}_{x:\overline{y-x}|}$

であるので、両者を等しいとして解くと

$$\overline{P} = \frac{\dfrac{D_y}{D_x}\left(\ddot{a}^{(2)}_{\overline{g}|} + \dfrac{D_{y+g}}{D_y}\ \ddot{a}^{(2)}_{y+g}\right)}{\ddot{a}_{x:\overline{y-x}|} - (I\overline{A})^{\ 1}_{x:y-x}}$$

$$= \frac{D_y\,\ddot{a}^{(2)}_{\overline{g}|} + D_{y+g}\,\ddot{a}^{(2)}_{y+g}}{(N_x - N_y) - \{\overline{R}_x - \overline{R}_y - (y-x)\overline{M}_y\}}$$

責任準備金は三つの期間に分けて考えるが、先ず保険料払込中では、前問と同じように

$$_t\overline{V} = v^{y-x-t}\,{}_{y-x-t}p_{x+t}\,(\ddot{a}^{(2)}_{\overline{g}|} + v^g\,{}_gp_y\,\ddot{a}^{(2)}_{y+g})$$
$$-\overline{P}\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{y-x-t}|} - \frac{\overline{R}_{x+t} - \overline{R}_y + t\,\overline{M}_{x+t} - (y-x)\ \overline{M}_y}{D_{x+t}}\right)$$

年金開始後、保証期間中では、さらにこれを二つに分けて

生存者に対しては：$_t\overline{V} = \ddot{a}^{(2)}_{\overline{g-x-t+y}|} + {}_{g-x-t+y|}\ddot{a}^{(2)}_{y+g}$

死亡契約に対しては：$_t\overline{V} = \ddot{a}^{(2)}_{\overline{g-x-t+y}|}$

保証期間経過後では　$_t\bar{V} = \ddot{a}^{(2)}_{x+t}$

(17)　契約時点における支出の現価は

$$\sum_{s=0}^{n-1} v^{s+1}\ {}_{s|}q_x\ \ddot{a}_{\overline{n-s}|} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{C_{x+s}}{D_x}\ \ddot{a}_{\overline{n-s}|}$$

であるから

$$P = \frac{\sum_{s=0}^{n-1} C_{x+s}\ \ddot{a}_{\overline{n-s}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ D_x}$$

あるいは　$\ddot{a}_{\overline{n-t}|} = \dfrac{1-v^n}{d}$　であるから、分子は

$$\frac{1}{d}\left\{ \sum_{s=0}^{n-1} C_{x+s} - \sum_{s=0}^{n-1} v^{x+s+1} d_{x+s}\ v^{n-s} \right\}$$

$$= \frac{1}{d}\ \{ (M_x - M_{x+n}) - v^{x+n+1} (l_x - l_{x+n}) \}$$

$$= \frac{1}{d}\ \{ (M_x - M_{x+n}) - (v^{n+1} D_x - v\, D_{x+n}) \}$$

となる。従って $d = i\,v$ を用いて

$$P = \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \left\{ \frac{M_x - M_{x+n}}{i\,v\,D_x} - \frac{v^n D_x - D_{x+n}}{i\,D_x} \right\}$$

$$= \frac{1}{i\,v}\ P^{1}_{x:\overline{n}|} - \frac{v^n}{i\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{1}{i}\ P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

とも書ける。責任準備金は、将来法により生存契約に対しては

$$_tV = \sum_{s=0}^{n-t-1} \frac{C_{x+t+s}}{D_{x+t}}\ \ddot{a}_{\overline{n-t-s}|} - P\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

また死亡契約に対しては　$_tV = \ddot{a}_{\overline{n-t}|}$

(18) (a)後の20年間に払込むべき保険料をP^uとすれば、収支相等の原則より

$$A_{x:\overline{25}|} = P_x \ddot{a}_{x:\overline{5}|} + P^u{}_{5|}\ddot{a}_{x:\overline{20}|}$$

これを計算基数で表わし $P_x N_x = M_x$ を用いると

$$\frac{M_x - M_{x+25} + D_{x+25}}{D_x} = \frac{P_x(N_x - N_{x+5})}{D_x} + \frac{P^u(N_{x+5} - N_{x+25})}{D_x}$$

$$P^u = \frac{P_x N_{x+5} - M_{x+25} + D_{x+25}}{N_{x+5} - N_{x+25}}$$

(b)10後後の責任準備金は過去法によれば

$$\frac{1}{D_{x+10}}\{P_x(N_x - N_{x+5}) + P^u(N_{x+5} - N_{x+10}) - (M_x - M_{x+10})\}$$

将来法によれば

$$A_{x+10:\overline{15}|} - P^u \ddot{a}_{x+10:\overline{15}|}$$

$$= \frac{1}{D_{x+10}}\{(M_{x+10} - M_{x+25} + D_{x+25}) - P^u(N_{x+10} - N_{x+25})\}$$

(a)から得られる、

$$(P_x N_{x+5} - M_{x+25} + D_{x+25}) - P^u(N_{x+5} - N_{x+25}) = 0$$

を過去法の{ }内に加え、$P_x N_x = M_x$ を考えて整理すると、将来法の{ }内に一致する。

(c) 将来法で責任準備金を表わすと

$${}_5V_{x:\overline{25}|} - {}_5V_x = \frac{1}{D_{x+5}}\{(M_{x+5} - M_{x+25} + D_{x+25})$$

$$- P_{x:\overline{25}|}(N_{x+5} - N_{x+25})\} - \frac{1}{D_{x+5}}\{M_{x+5} - P_x N_{x+5}\}$$

この差額を以後の20年間の年賦金 P^r で償還するには、これを $P^r \ddot{a}_{x+5:\overline{20}|}$ に等しいとして

$$P^r(N_{x+5} - N_{x+25}) = (P_x N_{x+5} - M_{25} + D_{x+25}) - P_{x:\overline{25}|}(N_{x+5} - N_{x+25})$$

従って

$$P^r + P_{x:\overline{25}|} = \frac{P_x N_{x+5} - M_{25} + D_{x+25}}{N_{x+5} - N_{x+25}} = P^u$$

これは通常の25年満期養老保険の保険料にこの年賦金を加えたものが、(a)の保険料と同じであることを示している。

(19) 先ず $m \leq k$ の場合を考える。保険料を P とすると、契約時点で

支出の現価 $= A^{(i)}_{\overset{1}{x}:\overline{k|}} + v^k\ {}_kp_x\ A^{(j)}_{x+k} \qquad \left(v = \dfrac{1}{1+i} \right)$

収入の現価 $= P\ \ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{m|}}$

であるから

$$P = \frac{A^{(i)}_{\overset{1}{x}:\overline{k|}} + \dfrac{D^{(i)}_{x+k}}{D^{(i)}_x}\ A^{(j)}_{x+k}}{\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{m|}}}$$

責任準備金は、この P を用いて将来法により、保険料払込中は

$${}_tV = A^{(i)}_{\overset{1}{x+t}:\overline{k-t|}} + v^{k-t}\ {}_{k-t}p_{x+t}\ A^{(j)}_{x+k} - P\ \ddot{a}^{(i)}_{x+t:\overline{m-t|}}$$

($v^{k-t}\ {}_{k-t}p_{x+t}$ の代りに $\dfrac{D^{(i)}_{x+k}}{D^{(i)}_{x+t}}$ としてもよい)。保険料払済後では

$$\begin{cases} t \leq k \text{ のとき} & {}_tV = A^{(i)}_{\overset{1}{x+t}:\overline{k-t|}} + v^{k-t}\ {}_{k-t}p_{x+t}\ A^{(j)}_{x+k} \\ t > k \text{ のとき} & {}_tV = A^{(j)}_{x+t} \end{cases}$$

次に $m > k$ の場合を考える。保険料を P とすると、契約時点で

支出の現価 $= A^{(i)}_{\overset{1}{x}:\overline{k|}} + v^k\ {}_kp_x\ A^{(j)}_{x+k}$

収入の現価 $= P\left(\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{k|}} + v^k\ {}_kp_x\ \ddot{a}^{(j)}_{x+k:\overline{m-k|}} \right)$

であるから

$$P = \frac{A^{(i)}_{\overset{1}{x}:\overline{k|}} + \dfrac{D^{(i)}_{x+k}}{D^{(i)}_x}\ A^{(j)}_{x+k}}{\ddot{a}^{(i)}_{x:\overline{k|}} + \dfrac{D^{(i)}_{x+k}}{D^{(i)}_x}\ \ddot{a}^{(j)}_{x+k:\overline{m-k|}}}$$

責任準備金は、この P を用いて将来法により、保険料払込中では

$t \leq k$ のとき

$${}_tV = A^{(i)}_{\overset{1}{x+t}:\overline{k-t|}} + v^{k-t}\ {}_{k-t}p_{x+t}\ A^{(j)}_{x+k} - P\left(\ddot{a}^{(i)}_{x+t:\overline{k-t|}} + v^{k-t}\ {}_{k-t}p_{x+t}\ \ddot{a}^{(j)}_{x+k:\overline{m-k|}} \right)$$

$t > k$ のとき

$$ {}_tV = A^{(j)}_{x+t} - P\ \ddot{a}^{(j)}_{x+t:\overline{m-t|}} $$

保険料払済後では　${}_tV = A^{(j)}_{x+t}$

(20)　第4章練習問題(3)の(13)の解答中で最初に述べた分散の式を（5.3.12）に当てはめると

$$ \sigma^2({}_tV_{x:\overline{n|}}) = \sum_{s=1}^{n-t}(v^s - P\ddot{a}_{\overline{s|}})^2\ {}_{s-1|}q_{x+t} + (v^{n-t} - P\ddot{a}_{\overline{n-t|}})^2\ {}_{n-t}p_{x+t} - {}_tV^2_{x:\overline{n|}} $$

ここで

$$ (v^s - P\ddot{a}_{\overline{s|}})^2 = (v^s - P\frac{1-v^s}{d})^2 = \{(\frac{P}{d}+1)v^s - \frac{P}{d}\}^2 $$

$$ {}_tV^2_{x:\overline{n|}} = (A_{x+t:\overline{n-t|}} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})^2 = \{(\frac{P}{d}+1)A_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{P}{d}\}^2 $$

を用いると

$$ \sigma^2({}_tV_{x:\overline{n|}}) = (\frac{P}{d}+1)^2 A^{(2)}_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{2P}{d}(\frac{P}{d}+1)A_{x+t:\overline{n-t|}} + (\frac{P}{d})^2 $$

$$ -(\frac{P}{d}+1)^2 A^2_{x+t:\overline{n-t|}} + \frac{2P}{d}(\frac{P}{d}+1)A_{x+t:\overline{n-t|}} - (\frac{P}{d})^2 $$

$$ = (\frac{P}{d}+1)^2\{A^{(2)}_{x+t:\overline{n-t|}} - A^2_{x+t:\overline{n-t|}}\} $$

さらに

$$ \frac{P}{d}+1 = \frac{A_{x:\overline{n|}} + d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{1}{d\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} $$

$$ A^{(2)}_{x+t:\overline{n-t|}} - A^2_{x+t:\overline{n-t|}} = \sigma^2(A_{x+t:\overline{n-t|}}) $$　（前記問題(13)による）

であるから、与式が証明される。

第５章　練習問題（２）

(1)　省略

(2)　(a) 第４章練習問題(2)の(7)の(a)を用いると、そこで $n\to\infty$ として

$$\frac{d}{dt}\bar{a}_{x+t}=\mu_{x+t}\ \bar{a}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}$$

従って

$$\frac{d}{dt}\,{}_tV_x^{(\infty)}=\frac{d}{dt}\left(1-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}\right)=-\frac{\mu_{x+t}\ \bar{a}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}}{\bar{a}_x}$$

(b) 同じ前出の結果を用いると

$$\frac{d}{dx}\bar{a}_{x+t}=\mu_{x+t}\ \bar{a}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}$$

であるので

$$\frac{d}{dx}\,{}_tV_x^{(\infty)}=\frac{d}{dx}\left(1-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}\right)=-\frac{\dfrac{d\,\bar{a}_{x+t}}{dx}\ \bar{a}_x-\bar{a}_{x+t}\ \dfrac{d\,\bar{a}_x}{dx}}{(\bar{a}_x)^2}$$

$$=-\frac{(\mu_{x+t}\ \bar{a}_{x+t}-\bar{A}_{x+t})\bar{a}_x-\bar{a}_{x+t}(\mu_x\bar{a}_x-\bar{A}_x)}{(\bar{a}_x)^2}$$

$$=-\frac{\bar{a}_{x+t}(\mu_{x+t}-\mu_x)}{\bar{a}_x}+\frac{1}{\bar{a}_x}\left(\bar{A}_{x+t}-\frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}\ \bar{a}_{x+t}\right)$$

$$=-\frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}(\mu_{x+t}-\mu_x)+\frac{{}_tV_x^{(\infty)}}{\bar{a}_x}$$

(3)　(５．６．５)で $t=n$ とし、${}_nV=1$ を用いると

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overline{n|}}=v(q_{x+n-1}+p_{x+n-1})=v$$

(4)　(５．６．５)で t の代りに $t+1$ とした式

$${}_tV_{x:\overline{n|}}+P_{x:\overline{n|}}-v\,q_{x+t}=v\,p_{x+t}\ \ {}_{t+1}V_{x:\overline{n|}}$$

の両辺を、それぞれ $v\,p_{x+t}$ から引くと

$$v\,p_{x+t}(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})=v\,p_{x+t}-{}_tV_{x:\overline{n}|}-P_{x:\overline{n}|}-v\,q_{x+t}$$

となるが

$$v\,p_{x+t}+v\,q_{x+t}=v=1-d, \qquad v\,p_{x+t}=\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}}$$

であるので

$$\frac{D_{x+t+1}}{D_{x+t}}(1-{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|})=(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})-(P_{x:\overline{n}|}+d)$$

これより与えられた式が導かれる。

(5)　(*a*) この責任準備金の式を書き換えると

$$\begin{aligned}{}_tV=S_{t+1}\,q_{x+t}\,v+v\,p_{x+t}\,\frac{1}{l_{x+t+1}}\sum_{i=t+2}^{n}S_i\,(l_{x+i-1}-l_{x+i})\,v^{i-t-1}\\+E_t+v\,p_{x+t}\,\frac{1}{l_{x+t+1}}\sum_{i=t+1}^{n}E_i\,l_{x+i}\,v^{i-t-1}\\-P_t-v\,p_{x+t}\,\frac{1}{l_{x+t+1}}\sum_{i=t+1}^{n-1}P_i\,l_{x+i}\,v^{i-t-1}\end{aligned}$$

右辺の第2項，第4項，第6項の和は丁度 $v\,p_{x+t}\ {}_{t+1}V$ であるから、第1項，第3項，第5項を左辺に移すと、(5.6.6)で t のかわりに $t+1$ とした式が得られる。

(*b*)　(5.6.6)において、t を $i+1$ におきかえて、

$v\,p_{x+i}=\dfrac{D_{x+i+1}}{D_{x+i}}$，　$v\,q_{x+i}=\dfrac{C_{x+i}}{D_{x+i}}$　として整理すると

$$D_{x+i}\ {}_iV+D_{x+i}\,P_i-D_{x+i}\,E_i-C_{x+i}\,S_{i+1}=D_{x+i+1}\ {}_{i+1}V$$

この式を $i=t,\ t+1,\ \cdots\cdots,\ n-1$ について辺々加え､両辺の $D_{x+i}\ {}_iV$ で共通なものを消し、${}_nV=E_n$ に留意すると

$$D_{x+t}\ {}_tV+\sum_{i=t}^{n-1}D_{x+i}\,P_i-\sum_{i=t}^{n-1}D_{x+i}\,E_i-\sum_{i=t}^{n-1}C_{x+i}\,S_{i+1}=D_{x+n}\ E_n$$

これを整理すると､(*a*)で述べた将来法の式が得られる。

また上記の式を $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t-1$ について辺々加え、両辺の $D_{x+i}\ {}_iV$ で共通なものを消し、${}_0V=0$ に留意すると

$$\sum_{i=0}^{t-1}D_{x+i}\,P_i-\sum_{i=0}^{t-1}D_{x+i}\,E_i-\sum_{i=0}^{t-1}C_{x+i}\,S_{i+1}=D_{x+t}\ {}_tV$$

これを整理すると過去法の式が得られる。((5.5.2)と比較せよ)

(6)　必要なこと。：(5.6.6)において

$$ {}_{t-1}V' = 1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t-1}} - (P+d)\ddot{a}_{x+t-1} $$

$$ {}_{t}V' = 1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t}} - (P+d)\ddot{a}_{x+t} $$

とすると、$E_t = 0$ であるので

$$ 1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t-1}} - (P+d)\ddot{a}_{x+t-1} + P - v\,q_{x+t-1}\quad S_t $$

$$ = v\,p_{x+t-1}\left[1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t}} - (P+d)\ddot{a}_{x+t}\right] $$

ところで

$$ v\,p_{x+t-1}\frac{\theta_x}{D_{x+t}} = \frac{D_{x+t}}{D_{x+t-1}}\ \frac{\theta_x}{D_{x+t}} = \frac{\theta_x}{D_{x+t-1}} $$

$$ v\,p_{x+t-1}\,\ddot{a}_{x+t} = \ddot{a}_{x+t-1} - 1 $$

であるから

$$ 1 + P - v\,q_{x+t-1}\,S_t = v\,p_{x+t-1} + (P+d) $$

$$ S_t = \frac{1 - d - v\,p_{x+t-1}}{v\,q_{x+t-1}} = \frac{v\,(1 - p_{x+t-1})}{v\,q_{x+t-1}} = 1 $$

十分なこと。：$S_t = 1\ (1 \leq t \leq n)$のときには、過去法による責任準備金は(5.3.1)により

$$ {}_{t}V'_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}P - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

であるが、(4.10.11)と $1 - v = d$ を用いると

$$ M_{x+t} = v\,N_{x+t} - N_{x+t+1} = v\,N_{x+t} - (N_{x+t} - D_{x+t}) = D_{x+t} - d\,N_{x+t} $$

であるので

$$ {}_{t}V'_{x:\overline{n|}} = 1 + \frac{N_x P - M_x}{D_{x+t}} - (P+d)\ \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

$N_x P - M_x = \theta_x$ とすれば

$$= 1 + \frac{\theta_x}{D_{x+t}} - (P+d)\ddot{a}_{x+t}$$

(7)　先ず保険料払込中をとる。平準保険料を ${}_mP'^{1}_{x:\overline{n}|}$ とすると、(5.6.6)より、$1 \leq t \leq m$ で

$${}^{m}_{t-1}V'^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_mP'^{1}_{x:\overline{n}|} - v\, q_{x+t-1}\, S_t = v\, p_{x+t-1}\, {}^{m}_{t}V'^{1}_{x:\overline{n}|}\ .$$

特に $t=1$ とすれば、仮定より ${}_0V=0$, ${}_1V>0$ であるので

$${}_mP'^{1}_{x:\overline{n}|} > v\, q_x\, S_1$$

となり、従って仮定により、すべての t について

$${}_mP'^{1}_{x:\overline{n}|} > v\, q_{x+t}\, S_{t+1}$$

となる。従って上式で ${}^{m}_{t-1}V'^{1}_{x:\overline{n}|} > 0$ であれば左辺が正となり、その結果 ${}^{m}_{t}V'^{1}_{x:\overline{n}|} > 0$ となり、帰納法による証明ができる。

保険料払済後においては (5.6.6)は

$${}^{m}_{t-1}V'^{1}_{x:\overline{n}|} - v\, q_{x+t-1}\, S_t = v\, p_{x+t-1}\ {}^{m}_{t}V'^{1}_{x:\overline{n}|}$$

という形で成立するが、ここでもし ${}^{m}_{t-1}V'^{1}_{x:\overline{n}|} \leq 0$ となればこの式からそれ以後の $s\,(>t)$ についてすべて ${}^{m}_{s}V'^{1}_{x:\overline{n}|} < 0$ となり、それは ${}_nV=0$ に矛盾する。従って、すべての $t\,(m \leq t \leq n-1)$ について ${}^{m}_{t}V'^{1}_{x:\overline{n}|} > 0$ である。

(8)　問題(5)の場合と同様に変形する。すなわち

$$\begin{aligned}
{}_{\frac{t}{k}}V^{(k)} &= S_{\frac{t+1}{k}} \left(\frac{l_{x+\frac{t}{k}} - l_{x+\frac{t+1}{k}}}{l_{x+\frac{t}{k}}} \right) v^{\frac{1}{k}} \\
&\quad + v^{\frac{1}{k}} \frac{l_{x+\frac{t+1}{k}}}{l_{x+\frac{t}{k}}} \sum_{i=t+2}^{nk} S_{\frac{i}{k}} \frac{l_{x+\frac{i-1}{k}} - l_{x+\frac{i}{k}}}{l_{x+\frac{t+1}{k}}} v^{\frac{i}{k}-\frac{t+1}{k}} \\
&\quad + E_{\frac{t}{k}} + v^{\frac{1}{k}} \frac{l_{x+\frac{t+1}{k}}}{l_{x+\frac{t}{k}}} \sum_{i=t+1}^{nk} E_{\frac{i}{k}} \frac{l_{x+\frac{i}{k}}}{l_{x+\frac{t+1}{k}}} \quad v^{\frac{i}{k}-\frac{t+1}{k}} \\
&\quad - P_{\frac{t}{k}} + v^{\frac{1}{k}} \frac{l_{x+\frac{t+1}{k}}}{l_{x+\frac{t}{k}}} \sum_{i=t+1}^{nk-1} P_{\frac{i}{k}} \frac{l_{x+\frac{i}{k}}}{l_{x+\frac{t+1}{k}}} \quad v^{\frac{i}{k}-\frac{t+1}{k}}
\end{aligned}$$

この右辺の第2項，第4項，第6項の和は　$v^{\frac{1}{k}} \dfrac{l_{x+\frac{t+1}{k}}}{l_{x+\frac{t}{k}}}\ {}_{\frac{t+1}{k}}V^{(k)}$　であるから、

再帰式は

$$ {}_{\frac{t}{k}}V^{(k)} + P_{\frac{t}{k}} - E_{\frac{t}{k}} - v^{\frac{1}{k}} S_{\frac{t+1}{k}} \left(1 - {}_{\frac{1}{k}}p_{x+\frac{t}{k}} \right) = v^{\frac{1}{k}} \, {}_{\frac{1}{k}}p_{x+\frac{t}{k}} \quad {}_{\frac{t+1}{k}}V^{(k)} $$

(9)　前問の結果の再帰式で $\dfrac{t}{k}$ を改めて t と考え、$\dfrac{1}{k}$ をごく短い区間 ε と考えると

$$ {}_{t}V^{(\infty)} + P_t^{(\infty)}\,\varepsilon - E_t\ \varepsilon - v^{\varepsilon} S_{t+\varepsilon} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+\varepsilon}}{l_{x+t}} = v^{\varepsilon} \frac{l_{x+t+\varepsilon}}{l_{x+t}}\ {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} $$

ここで

$$ 右辺 = v^{\varepsilon}\ {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} - v^{\varepsilon} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+\varepsilon}}{l_{x+t}} \quad {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} $$

$$ = (1 - \varepsilon\, d^{(k)})\ {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} - v^{\varepsilon} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+\varepsilon}}{l_{x+t}} \quad {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} $$

であるから、上式を整理すると

$$ {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} - {}_{t}V^{(\infty)} = \varepsilon\, d^{(k)}\ {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} + v^{\varepsilon} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+\varepsilon}}{l_{x+t}} \quad {}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} $$

$$ + P_t^{(\infty)}\ \varepsilon - E_t\,\varepsilon - v^{\varepsilon} S_{t+\varepsilon} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+\varepsilon}}{l_{x+t}} $$

両辺を ε で割り

$$ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{{}_{t+\varepsilon}V^{(\infty)} - {}_{t}V^{(\infty)}}{\varepsilon} = \frac{d\ {}_{t}V^{(\infty)}}{dt}, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+\varepsilon}}{\varepsilon\ l_{x+t}} = \mu_{x+t} $$

$$ d^{(k)} \to \delta, \qquad v^{\varepsilon} \to 1 $$

に留意すると与えられた微分方程式が得られる。

(解釈)、左辺は〔t, $t + dt$〕における責任準備金の増加分であるが、それを分解すると、利息 ${}_{t}V^{(\infty)}\delta\, dt$,保険料 $P_t^{(\infty)} dt$ による増加と、生存保険金 $E_t\, dt$ および　死亡保険金 $S_t\ \mu_{x+t}\ \ dt$ の支払いによる減少と、死亡者の責任準備金積立を免れるための増加 ${}_{t}V^{(\infty)}\ \mu_{x+t}\ \ dt$ である。

(10) この場合、(4 .17.10)により $P_x^{(\infty)} = \dfrac{1}{\bar{a}_x} - \delta$ であり

また(5 . 4 .13)により $_tV_x^{(\infty)} = 1 - \dfrac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}$ であるので

$$右辺 = (\mu_{x+t} + \delta)(1 - \frac{\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}) + (\frac{1}{\bar{a}_x} - \delta) - \mu_{x+t}$$

$$= \frac{1}{\bar{a}_x}\{-(\mu_{x+t} + \delta)\bar{a}_{x+t} + 1\}$$

さらに (4 . 9 .14)によれば、

$$= \frac{1}{\bar{a}_x}(\bar{A}_{x+t} - \mu_{x+t} \quad \bar{a}_{x+t})$$

これは、問題(2)の(a)の結果により、左辺に等しい。

(11) (5 . 6 .13)から与えられる貯蓄保険料

$$_t\bar{P}^s = v \quad _t\bar{V}_{50:\overline{50|}} - {}_{t-1}\bar{V}_{50:\overline{50|}}$$

を、第5章練習問題(1)の(1)の(b)の解答にある表から先ず計算し、次いで危険保険料は $\bar{P}_{50:\overline{50|}}$ から $_t\bar{P}^s$ を引いて計算する。

t	$_t\bar{P}^r$	$_t\bar{P}^s$	t	${}^r{}_t\bar{P}^r$	$_t\bar{P}^s$
1	0.00425	0.01465	31	0.02805	−0.00915
2	0.00468	0.01422	41	0.04334	−0.02444
3	0.00501	0.01389	46	0.04818	−0.02928
4	0.00538	0.01352	47	0.04742	−0.02852
5	0.00578	0.01312	48	0.04421	−0.02531
11	0.00810	0.01080	49	0.03542	−0.01652
21	0.01533	0.00357	50	0.01197	0.00693

(12) (**a**) (5 . 6 . 6)で $E_{t-1} = 0$, $S_t = 0$ としたものが成立するから

$$_{t-1}V_{x:\overline{\frac{1}{n}|}} + P_{x:\overline{\frac{1}{n}|}} = v\,p_{x+t-1} \quad _tV_{x:\overline{\frac{1}{n}|}} = v(1 - q_{x+t-1})\,_tV_{x:\overline{\frac{1}{n}|}}$$

$$P_{x:\overline{\frac{1}{n}|}} = -v\,q_{x+t-1} \quad _tV_{x:\overline{\frac{1}{n}|}} + (v\,_tV_{x:\overline{\frac{1}{n}|}} - {}_{t-1}V_{x:\overline{\frac{1}{n}|}})$$

この第1項が危険保険料であり、第2項が貯蓄保険料である。(死亡者が残した責任準備金が保険群団に入るので、危険保険料はマイナスとなる)

(b) (5.2.4)により ${}_{t-1}V(\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = \ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|}$ であるので

$\ddot{a}_{x+t-1:\overline{n-t+1}|} = 1 + v\,p_{x+t-1}\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ に入れると

$$ {}_{t-1}V = 1 + v\,p_{x+t-1}\ {}_tV $$

がこの場合の(5.6.3)に当る。これから(5.6.11)の類似をつくると

$$ 0 = (1 - v\,q_{x+t-1}\ {}_tV) + (v\,{}_tV - {}_{t-1}V) $$

この第1項が危険保険料に、第2項が貯蓄保険料に当る。(5.6.12)の後で述べたように直後の年金支払1をはずして $-v\,q_{x+t-1}\ {}_tV$ を危険保険料と称する場合もある。

(13) (5.6.10)の右辺第1項が ${}_tP^r$ であるから両辺に v^t を掛けると

$$ v^t P_{x:\overline{n}|} = v^t\,{}_tP^r + v^{t+1}\,{}_tV_{x:\overline{n}|} - v^t\,{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} $$

これを $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について加えると

$$ P_{x:\overline{n}|}\ \sum_{t=1}^{n} v^t = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tP^r + v^{n+1}\ {}_nV_{x:\overline{n}|} - v\ {}_0V_{x:\overline{n}|} $$

${}_nV_{x:\overline{n}|} = 1$, ${}_0V_{x:\overline{n}|} = 0$ であるから、両辺を $\sum_{t=1}^{n} v^t$ で割ると

$$ \frac{\sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_tP^r}{\sum_{t=1}^{n} v^t} = P_{x:\overline{n}|} - \frac{v^{n+1}}{\sum_{t=1}^{n} v^t} $$

右辺第2項は (1.13.5)により $P_{\overline{n}|}$ である。

(14) (5.6.10)の右辺第1項が ${}_tP^r$ であるから

$$ {}_tP^r = P_x - (v\,{}_tV_x - {}_{t-1}V_x) $$

$$ (1+i)_tP^r = (1+i)P_x - {}_tV_x + (1+i)\,{}_{t-1}V_x $$

$$ = (1+i)P_x + i\ \ {}_{t-1}V_x - ({}_tV_x - {}_{t-1}V_x) $$

ところで

$$ {}_tV_x - {}_{t-1}V_x = \left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}\right) - \left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+t-1}}{\ddot{a}_x}\right) = \frac{-\Delta\,\ddot{a}_{x+t-1}}{\ddot{a}_x} $$

であるから

$$(1+i)\,{}_tP^r=(1+i)P_x+i\ \ {}_{t-1}V_x+\frac{\Delta\,\ddot{a}_{x+t-1}}{\ddot{a}_x}$$

同様に

$$(1+i)\,{}_{t+1}P^r=(1+i)P_x+i\ \ {}_tV_x+\frac{\Delta\,\ddot{a}_{x+t}}{\ddot{a}_x}$$

であるから

$$(1+i)({}_{t+1}P^r-{}_tP^r)=i\,(-\frac{\Delta\,\ddot{a}_{x+t-1}}{\ddot{a}_x})+\frac{\Delta^2\,\ddot{a}_{x+t-1}}{\ddot{a}_x}$$

従って $\Delta^2\,\ddot{a}_{x+t-1}>i\,\Delta\,\ddot{a}_{x+t-1}$ ならば ${}_{t+1}P^r>{}_tP^r$ である。

(15)　与えられた式の両辺に $v\,l_{x+t-1}$ を掛けると

$$l_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)-\frac{t}{n}v\,d_{x+t-1}=v\,l_{x+t}\ {}_tV$$

従って

$$D_{x+t-1}({}_{t-1}V+P)-\frac{t}{n}C_{x+t-1}=D_{x+t}\ \ {}_tV$$

これを $t=1$，2，…… n について合計すると

$$\sum_{t=1}^{n}D_{x+t-1}\ \ {}_{t-1}V+P\sum_{t=1}^{n}D_{x+t-1}-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}t\ \ C_{x+t-1}=\sum_{t=1}^{n}D_{x+t}\ \ {}_tV$$

両辺の $D_{x+t}\ \ {}_tV$ で共通なものを消し、${}_0V=0$，${}_nV=1$ に留意し、かつ(4.11.8)を参照すると

$$P(N_x-N_{x+n})=\frac{1}{n}(R_x-R_{x+n}-n\,M_{x+n})+D_{x+n}$$

$$P=\frac{\frac{1}{n}(R_x-R_{x+n}-n\,M_{x+n})+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

(これは(4.16.2)と同じである)

(16)　保険料を P として、(5.6.6)で $E_{t-1}=0$，$S_t={}_tV$ とすると

$${}_{t-1}V+P-v\,q_{x+t-1}\ \ {}_tV=v\,(1-q_{x+t-1})\,{}_tV$$

$${}_{t-1}V+P=v\ \ {}_tV$$

$$v^{t-1}\ \ {}_{t-1}V+v^{t-1}P=v^t\ {}_tV\qquad(t=1,2,\cdots\cdots,n)$$

この式をすべての t について加えて、両辺の $v^t\ {}_tV$ のうち共通のものを消すと

$${}_0V+P\sum_{t=1}^{n}v^{t-1}=v^n\ \ {}_nV$$

${}_0V=0$, ${}_nV=1$ であるから、これより

$$P=\frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

（これは、定期積金の毎年の掛金（1.13.5）に外ならない）

(17)　保険料を P として、（5.6.6）で $E_{t-1}=0$, $S_t=1+{}_tV$ とすると

$${}_{t-1}V+P-v\,q_{x+t-1}(1+{}_tV)=v\,(1-q_{x+t-1})\,{}_tV$$

$${}_{t-1}V+P-v\,q_{x+t-1}=v\ \ {}_tV$$

両辺に v^{t-1} を掛け、

$$v^t\,q_{x+t-1}=v^t(0.002)(1+i)^{t-1}=0.002\,v$$

を用いると

$$v^{t-1}\ \ {}_{t-1}V+v^{t-1}\ \ P-0.002\,v=v^t\ {}_tV$$

これを $t=1,2,\cdots\cdots,n$ について加え、両辺に共通する $v^t\ {}_tV$ を消すと

$${}_0V+\ddot{a}_{\overline{n}|}\ P-0.002\,nv=v^n\ {}_nV$$

${}_0V=0$, ${}_nV=2$ であるから

$$P=\frac{2\,v^n+0.002\,nv}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}\ .$$

(18)　この場合は問題(9)の微分方程式で $P_t^{(\infty)}=0$,（$t>0$）, $E_t=0$,

$S_t=0.3\ {}_tV^{(\infty)}$ であるから

$$\frac{d\ {}_tV^{(\infty)}}{dt}=(\mu_{x+t}+\delta)\,{}_tV^{(\infty)}-0.3\,\mu_{x+t}\ {}_tV^{(\infty)}$$

$$\frac{1}{{}_tV^{(\infty)}}\ \frac{d\ {}_tV^{(\infty)}}{dt}=\delta+0.7\,\mu_{x+t}$$

$$\left[\,log\ {}_tV^{(\infty)}\right]_0^n=\int_0^n(\delta+0.7\,\mu_{x+t})\,dt$$

${}_0V^{(\infty)}$ が一時払保険料 A であり、${}_nV^{(\infty)}=1$, また（2.4.11）により、

$\int_0^n \mu_{x+t}\ dt=-\,log\ {}_np_x$ であるので

$$-\,log\,A=\delta n+0.7(-\,log\ {}_np_x)=log\,e^{\delta n}-log\,({}_np_x)^{0.7}$$

$$A=e^{-\delta n}\,({}_np_x)^{0.7}=v^n({}_np_x)^{0.7}$$

第６章　練習問題（１）

(1)　定理の(1)を利用する。今〔e_x〕は e_x の整数部分を表わすとし、

e_x −〔e_x〕$=\varepsilon$　$(0 \leq \varepsilon < 1)$として

$$g_j = \begin{cases} 1 & 1 \leq j \leq [e_x] \\ \varepsilon & j = [e_x]+1 \\ 0 & [e_x]+1 < j \leq \omega - x \end{cases}$$

$$h_j = {}_jp_x \qquad 1 \leq j \leq \omega - x$$

とすると

$$\sum_{j=1}^{\omega-x} g_j = [e_x] + \varepsilon = e_x = \sum_{j=1}^{\omega-x} {}_jp_x = \sum_{j=1}^{\omega-x} h_j$$

であり、また ${}_jp_x < 1$ であるから

$$\sum_{j=1}^{t} g_j \geq \sum_{j=1}^{t} h_j \qquad (t \leq \omega - x)$$

が成立する。すなわち条件（６．１．２）が確められた。また

$$f_j = v^j \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots)$$

とすると、明らかに条件（６．１．１）が成立する。従って（６．１．３）が成立し

$$v + v^2 + \cdots\cdots + v^{[e_x]} + \varepsilon\ v^{[e_x]+1} > \sum_{i=1}^{\omega-x} v^j\ {}_jp_x = a_x$$

この式の左辺は $\dfrac{1 - v^{[e_x]}}{i} + \varepsilon v^{[e_x]+1}$ と書けるが、これは $a_{\overline{e_x|}} = \dfrac{1 - v^{e_x}}{i}$

より小さい。何故ならば後者から前者を引くと、

$$\frac{v^{[e_x]} - v^{e_x}}{i} - \varepsilon\, v^{[e_x]+1} = \frac{v^{[e_x]}}{i}[1 - v^{\varepsilon} - v\, i\, \varepsilon]$$

となるが、右辺のカッコ内は

$$(1 - v^{\varepsilon}) - (1 - v)\varepsilon \geq (1 - v) - (1 - v)\varepsilon \geq 0$$

である。従って $a_{\overline{e_x|}} > a_x$ である。

(2)　第１章練習問題(3)の(9)の解答から分るように、t が整数でなくても、一般に正数であれば $A_{\overline{t}|} = 1 - d(1 + a_{\overline{t-1}|})$ が成立するので

$$A_{\overline{1+e_x}|} = 1 - d(1 + a_{\overline{e_x}|})$$

一方（4.9.11）から

$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x = 1 - d(1 + a_x)$$

であるが、前問の結果から $a_{\overline{e_x}|} > a_x$ であるので、$A_{\overline{1+e_x}|} < A_x$ となる。なおいくつかの正数の算術平均が幾何平均より大きいことがわかっていればそれを利用してこの式を直接証明し、それから逆に問題(1)を証明することもできる。（文献の〔1〕上巻 P.218 参照）

(3)　$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \quad H(x) = \int_a^x h(t)\,dt$ とすると、

$G'(x) = g(x)$, $H'(x) = h(x)$ となり、$G(x)$, $H(x)$ は $g(x)$, $h(x)$ の不定積分を与える。また仮定により $G(a) = H(a) = 0$, $G(b) = H(b)$ である。従って部分積分を用いると

$$\int_a^b f(t)\ g(t)\ dt = \left[f(t)\ G(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)\ G(t)\ dt$$

$$= f(b)\ G(b) - \int_a^b f'(t)\ G(t)\ dt$$

$\int_a^b f(t)\ h(t)\ dt$ についても同様の式が出来るから、両者の差をとると

$$\int_a^b f(t)\ g(t)\ dt - \int_a^b f(t)\ h(t)\ dt$$

$$= f(b)\left[G(b) - H(b) \right] - \int_a^b f'(t)\left[G(t) - H(t) \right]\ dt$$

この式で右辺第１項は０であり、第２項では仮定により $f'(t) \leq 0$, $G(t) - H(t) \geq 0$ であるので、結局右辺は正となり証明が終る。

(4)　問題(3)において $a = 0$, $b = w - x$ とし、また

$$f(t) = v^t$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \mathring{e}_x \\ 0 & x > \mathring{e}_x \end{cases}$$

$$h(t) = {}_t p_x \qquad (0 < t < w - x)$$

とする。その時は ${}_t p_x < 1\ (0 < t)$ であるので、$0 < x \leq \mathring{e}_x$ では

$$\int_0^x g(t)\ dt > \int_a^x h(t)\ dt$$

であり、また

$$\int_0^{\mathring{e}_x} g(t)\, dt = \mathring{e}_x \quad (\mathring{e}_x < w - x)$$

$$\int_0^{\omega - x} h(t)\ dt = \mathring{e}_x$$

であるので、結局前問(3)における条件がすべて満足されることがわかる。

従って

$$\int_0^{\omega - x} v^t\, g(t)\ dt > \int_0^{\omega - x} v^t\ {}_t p_x\ dt$$

であるが、この式の左辺は（1．7．2）により $\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$ であり、右辺は（4．5．

により $\bar{a}_x$ である。これで第1の不等式が証明された。第1の不等式を

$$\bar{A}_{\overline{\mathring{e}_x}|} = v^{\mathring{e}_x} = 1 - \delta\, \bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x}|}$$

$$\bar{A}_x = 1 - \delta\, \bar{a}_x \quad ((4.9.14)\text{による})$$

に用いると、第2の不等式が証明される。

(5) $\quad f_j = j$ （単調増大関数）

$$g_j = \begin{cases} v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x & (j = 1, 2, \cdots\cdots, t) \\ 0 & (j > t) \end{cases}$$

$$h_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とすると、条件（6．1．6）が満足されるので、（6．1．7）で不等号を逆にしたものが成立し

$$\frac{1 + 2\,v\,p_x + \cdots\cdots + t\,v^{t-1}\ {}_{t-1}p_x}{1 + v\,p_x + \cdots\cdots + v^{t-1}\ {}_{t-1}p_x} \leq \frac{1 + 2\,v\,p_x + \cdots\cdots + n\,v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x}{1 + v\,p_x + \cdots\cdots + v^{n-1}\ {}_{n-1}p_x}$$

すなわち

$$\frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{t}|}} \leq \frac{(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \quad (t < n)$$

が成立する。

(6)
$$g_j = \frac{n+1}{2} \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

$$h_j = j \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とすると、

$$\sum_{j=1}^{t} g_j = \frac{(n+1)t}{2} > \frac{(t+1)t}{2} = \sum_{j=1}^{t} h_j \quad (t < n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_j = \frac{(n+1)n}{2} = \sum_{j=1}^{n} h_j$$

であるので条件（6．1．2）が満足される。ここで $f_j = v^{j-1}$ とすると（6．1．3）が成立して

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2}\right) v^{j-1} > \sum_{j=1}^{n} j\, v^{j-1}$$

となるが、これは第1の不等式を与えている。

$f_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x$ とすれば第2の不等式が得られる。

第6章　練習問題（2）

(1)
$$g_j = v^{j-1}\ {}_{j-1}p_x \qquad (j = 1, \cdots\cdots, n)$$

$$h_j = v^{j-1} \qquad (j = 1, \cdots\cdots, n)$$

とすると、（6．1．9）の第一の不等式は

$$\frac{\sum_{j=1}^{t} g_j}{\sum_{j=1}^{n} g_j} > \frac{\sum_{j=1}^{t} h_j}{\sum_{j=1}^{n} h_j}$$

が成立することを示している。これを条件（6．1．4）と見て $f_j = \left(\frac{v'}{v}\right)^{j-1}$ を用いると、（6．1．5）が成立し、それを書き直せば与えられた式となる。

後半は、（1．5．3）を用いて、得られた不等式で $n \to \infty$ とすればよい。

(2)　$v' < v$であるから、（4．5．1）により $\bar{a}'_{x:\overline{n}|} < \bar{a}_{x:\overline{n}|}$ である。また（4．8．1）を用いると、$\bar{A}'_{x:\overline{n}|} < \bar{A}_{x:\overline{n}|}$ となることがわかる。

その他については、練習問題(1)の(3)を用いて、§2本文中の年払の場合と全く平行的に論じ

$$\frac{\bar{a}'_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}'_{x:\overline{n}|}} \geq \frac{\bar{a}_{x:\overline{t}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$$

となること、および μ_{x+t} が増大する条件の下に、

$$\bar{P}'^{1\,(\infty)}_{x:\overline{n}|} \leq \bar{P}^{1\,(\infty)}_{x:\overline{n}|}, \quad \bar{P}'^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} \leq \bar{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}, \quad {}_t\bar{V}'^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} \leq {}_t\bar{V}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}$$

となることを証明することができる。読者で試みられたい。

(3)　この場合には、（6．3．11）の b_j について、

$$b'_j - b_j = v\,(\,q_{x+j-1} - q'_{x+j-1}\,) = \frac{v\,k}{\ddot{a}_{x+j}}$$

$$(\,b'_j - b_j\,)\,B_j = \frac{v\,k}{\ddot{a}_{x+j}}\quad \ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}$$

となる。従って

$$\frac{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}_{x+j}} > \frac{\ddot{a}_{x+j+1:\overline{n-j-1}|}}{\ddot{a}_{x+j+1}} \quad (\,j = 0\,,1\,,\cdots\cdots,\ n-2\,)$$

であれば、（6．3．19）が満足されるが、この不等式は第4章、練習問題(1)の(4)で、すでに成立することが証明されている。

付録 1

金利計算表

（常数表，複利表，複利現価表，年金終価表，年金現価表）

(1)　常

i	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	2.5 %
i	.005 000 00	.010 000 00	.015 000 00	.020 000 00	.025 000 00
$i^{(2)}$	.004 993 77	.009 975 12	.014 944 17	.019 900 99	.024 845 67
$i^{(4)}$	.004 990 65	.009 962 72	.014 916 36	.019 851 73	.024 768 99
$i^{(12)}$	.004 988 58	.009 954 46	.014 897 85	.019 818 98	.024 718 04
δ	.004 987 54	.009 950 33	.014 888 61	.019 802 63	.024 692 61
$(1+i)^{1/2}$	1.002 496 88	1.004 987 56	1.007 472 08	1.009 950 49	1.012 422 84
$(1+i)^{1/4}$	1.001 247 66	1.002 490 68	1.003 729 09	1.004 962 93	1.006 192 25
$(1+i)^{1/12}$	1.000 415 71	1.000 829 54	1.001 241 49	1.001 651 58	1.002 059 84
v	.995 024 88	.990 099 01	.985 221 67	.980 392 16	.975 609 76
$v^{1/2}$	.997 509 34	.995 037 19	.992 583 33	.990 147 54	.987 729 60
$v^{1/4}$	.998 753 89	.997 515 51	.996 284 77	.995 061 58	.993 845 86
$v^{1/12}$	.999 584 46	.999 171 15	.998 760 05	.998 351 14	.997 944 40
d	.004 975 12	.009 900 99	.014 778 33	.019 607 84	.024 390 24
$d^{(2)}$	.004 981 33	.009 925 62	.014 833 33	.019 704 91	.024 540 81
$d^{(4)}$	.004 984 43	.009 937 96	.014 860 94	.019 753 69	.024 616 55
$d^{(12)}$	.004 986 51	.009 946 21	.014 879 38	.019 786 30	.024 667 22
$\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1\rceil}}$	.998 754 67	.997 518 60	.996 291 67	.995 073 77	.993 864 80
$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{1\rceil}}$	.998 132 39	.996 279 43	.994 440 94	.992 616 72	.990 806 61
$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1\rceil}}$	.997 717 68	.995 453 89	.993 208 39	.990 980 94	.988 771 30
$\bar{a}_{\overline{1\rceil}}$	.997 510 37	.995 041 30	.992 592 50	.990 163 72	.987 754 69
$a^{(2)}_{\overline{1\rceil}}$	.996 267 11	.992 568 10	.988 902 50	.985 269 85	.981 669 68
$a^{(4)}_{\overline{1\rceil}}$	.996 888 61	.993 804 18	.990 746 36	.987 714 76	.984 709 05
$a^{(12)}_{\overline{1\rceil}}$	.997 303 09	.994 628 81	.991 976 87	.989 346 95	.986 738 78

3.0 %	3.5 %	4.0 %	4.5 %	5.0 %	i
.030 000 00	.035 000 00	.040 000 00	.045 000 00	.050 000 00	i
.029 778 31	.034 698 99	.039 607 81	.044 504 83	.049 390 15	$i^{(2)}$
.029 668 29	.034 549 78	.039 413 63	.044 259 96	.049 088 94	$i^{(4)}$
.029 595 24	.034 450 78	.039 284 88	.044 097 71	.048 889 49	$i^{(12)}$
.029 558 80	.034 401 43	.039 220 71	.044 016 89	.048 790 16	δ
1.014 889 16	1.017 349 50	1.019 803 90	1.022 252 42	1.024 695 08	$(1+i)^{1/2}$
1.007 417 07	1.008 637 45	1.009 853 41	1.011 064 99	1.012 272 23	$(1+i)^{1/4}$
1.002 466 27	1.002 870 90	1.003 273 74	1.003 674 81	1.004 074 12	$(1+i)^{1/12}$
.970 873 79	.966 183 57	.961 538 46	.956 937 80	.952 380 95	v
.985 329 28	.982 946 37	.980 580 68	.978 231 98	.975 900 07	$v^{1/2}$
.992 637 54	.991 436 52	.990 242 74	.989 056 10	.987 876 55	$v^{1/4}$
.997 539 80	.997 137 32	.996 736 94	.996 338 65	.995 942 41	$v^{1/12}$
.029 126 21	.033 816 43	.038 461 54	.043 062 20	.047 619 05	d
.029 341 44	.034 107 25	.038 838 65	.043 536 05	.048 199 85	$d^{(2)}$
.029 449 86	.034 253 92	.039 029 06	.043 775 59	.048 493 81	$d^{(4)}$
.029 522 43	.034 352 16	.039 156 69	.043 936 26	.048 691 11	$d^{(12)}$
.992 664 64	.991 473 19	.990 290 34	.989 115 98	.987 950 04	$\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}\rceil}$
.989 010 41	.987 227 96	.985 459 08	.983 703 60	.981 961 35	$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{1}\rceil}$
.986 579 24	.984 404 54	.982 246 96	.980 106 30	.977 982 34	$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}\rceil}$
.985 365 15	.982 994 85	.980 643 53	.978 310 95	.975 996 87	$\bar{a}_{\overline{1}\rceil}$
.978 101 53	.974 564 97	.971 059 57	.967 584 88	.964 140 51	$a^{(2)}_{\overline{1}\rceil}$
.981 728 86	.978 773 85	.975 843 69	.972 938 05	.970 056 59	$a^{(4)}_{\overline{1}\rceil}$
.984 152 06	.981 586 50	.979 041 84	.976 517 79	.974 014 09	$a^{(12)}_{\overline{1}\rceil}$

i	5.5 %	6.0 %	6.5 %	7.0 %	7.5 %
i	.055 000 00	.060 000 00	.065 000 00	.070 000 00	.075 000 00
$i^{(2)}$	.054 263 86	.059 126 03	.063 976 74	.068 816 09	.073 644 14
$i^{(4)}$	.053 900 70	.058 695 38	.063 473 14	.068 234 10	.072 978 40
$i^{(12)}$	.053 660 39	.058 410 61	.063 140 33	.067 849 74	.072 539 03
δ	.053 540 77	.058 268 91	.062 974 80	.067 658 65	.072 320 66
$(1+i)^{1/2}$	1.027 131 93	1.029 563 01	1.031 988 37	1.034 408 04	1.036 822 07
$(1+i)^{1/4}$	1.013 475 17	1.014 673 85	1.015 868 28	1.017 058 53	1.018 244 60
$(1+i)^{1/12}$	1.004 471 70	1.004 867 55	1.005 261 69	1.005 654 15	1.006 044 92
v	.947 867 30	.943 396 23	.938 967 14	.934 579 44	.930 232 56
$v^{1/2}$	.973 584 77	.971 285 86	.969 003 17	.966 736 49	.964 485 64
$v^{1/4}$	.986 703 99	.985 538 36	.984 379 58	.983 227 59	.982 082 30
$v^{1/12}$	.995 548 21	.995 156 03	.994 765 85	.994 377 64	.993 991 40
d	.052 132 70	.056 603 77	.061 032 86	.065 420 56	.069 767 44
$d^{(2)}$	.052 830 47	.057 428 28	.061 993 67	.066 527 02	.071 028 71
$d^{(4)}$	.053 184 03	.057 846 55	.062 481 66	.067 089 65	.071 670 80
$d^{(12)}$	.053 421 50	.058 127 67	.062 809 85	.067 468 27	.072 103 17
$\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}\rceil}$	.986 792 38	.985 642 93	.984 501 58	.983 368 24	.982 242 82
$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{1}\rceil}$	.980 232 18	.978 515 93	.976 812 42	.975 121 52	.973 443 06
$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}\rceil}$	.975 874 87	.973 783 68	.971 708 55	.969 649 31	.967 605 74
$\bar{a}_{\overline{1}\rceil}$	.973 701 06	.971 423 28	.969 163 29	.966 920 89	.964 695 85
$a^{(2)}_{\overline{1}\rceil}$	.960 726 03	.957 341 04	.953 985 15	.950 657 96	.947 359 10
$a^{(4)}_{\overline{1}\rceil}$	.967 199 01	.964 364 98	.961 554 21	.958 766 38	.956 001 20
$a^{(12)}_{\overline{1}\rceil}$	.971 530 48	.969 066 69	.966 622 48	.964 197 60	.961 791 79

8.0 %	8.5 %	9.0 %	9.5 %	10.0 %	i
.080 000 00	.085 000 00	.090 000 00	.095 000 00	.100 000 00	i
.078 460 97	.083 266 67	.088 061 30	.092 844 95	.097 617 70	$i^{(2)}$
.077 706 19	.082 417 58	.087 112 72	.091 791 74	.096 454 76	$i^{(4)}$
.077 208 36	.081 857 92	.086 487 88	.091 098 41	.095 689 69	$i^{(12)}$
.076 961 04	.081 579 99	.086 177 70	.090 754 36	.095 310 18	δ
1.039 230 48	1.041 633 33	1.044 030 65	1.046 422 48	1.048 808 85	$(1+i)^{1/2}$
1.019 426 55	1.020 604 40	1.021 778 18	1.022 947 94	1.024 113 69	$(1+i)^{1/4}$
1.006 434 03	1.006 821 49	1.007 207 32	1.007 591 53	1.007 974 14	$(1+i)^{1/12}$
.925 925 93	.921 658 99	.917 431 19	.913 242 01	.909 090 91	v
.962 250 45	.960 030 72	.957 826 29	.955 636 96	.953 462 59	$v^{1/2}$
.980 943 65	.979 811 57	.978 686 00	.977 566 86	.976 454 09	$v^{1/4}$
.993 607 10	.993 224 72	.992 844 25	.992 465 66	.992 088 94	$v^{1/12}$
.074 074 08	.078 341 01	.082 568 81	.086 757 99	.090 909 09	d
.075 499 10	.079 938 56	.084 347 43	.088 726 07	.093 074 82	$d^{(2)}$
.076 225 39	.080 753 70	.085 256 00	.089 732 56	.094 183 64	$d^{(4)}$
.076 714 78	.081 303 31	.085 868 99	.090 412 05	.094 932 68	$d^{(12)}$
.981 125 22	.980 015 36	.978 913 14	.977 818 48	.976 731 29	$\ddot{a}^{(2)}_{\overline{1}\vert}$
.971 776 89	.970 122 88	.968 480 87	.966 850 71	.965 232 28	$\ddot{a}^{(4)}_{\overline{1}\vert}$
.965 577 66	.963 564 87	.961 567 19	.959 584 43	.957 616 41	$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{1}\vert}$
.962 487 94	.960 296 96	.958 122 70	.955 964 96	.953 823 52	$\bar{a}_{\overline{1}\vert}$
.944 088 19	.940 844 85	.937 628 74	.934 439 49	.931 276 75	$a^{(2)}_{\overline{1}\vert}$
.953 258 37	.950 537 62	.947 838 66	.945 161 22	.942 505 01	$a^{(4)}_{\overline{1}\vert}$
.959 404 82	.957 036 45	.954 686 45	.952 354 60	.950 040 65	$a^{(12)}_{\overline{1}\vert}$

(2) 複　利　表

n \ i	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	2.5 %
1	1.005 000 00	1.010 000 00	1.015 000 00	1.020 000 00	1.025 000 00
2	1.010 025 00	1.020 100 00	1.030 225 00	1.040 400 00	1.050 625 00
3	1.015 075 13	1.030 301 00	1.045 678 38	1.061 208 00	1.076 890 63
4	1.020 150 50	1.040 604 01	1.061 363 55	1.082 432 16	1.103 812 89
5	1.025 251 25	1.051 010 05	1.077 284 00	1.104 080 80	1.131 408 21
6	1.030 377 51	1.061 520 15	1.093 443 26	1.126 162 42	1.159 693 42
7	1.035 529 40	1.072 135 35	1.109 844 91	1.148 685 67	1.188 685 75
8	1.040 707 04	1.082 856 71	1.126 492 59	1.171 659 38	1.218 402 90
9	1.045 910 58	1.093 685 27	1.143 389 98	1.195 092 57	1.248 862 97
10	1.051 140 13	1.104 622 13	1.160 540 83	1.218 994 42	1.280 084 54
11	1.056 395 83	1.115 668 35	1.177 948 94	1.243 374 31	1.312 086 66
12	1.061 677 81	1.126 825 03	1.195 618 17	1.268 241 79	1.344 888 82
13	1.066 986 20	1.138 093 28	1.213 552 44	1.293 606 63	1.378 511 04
14	1.072 321 13	1.149 474 21	1.231 755 73	1.319 478 76	1.412 973 82
15	1.077 682 74	1.160 968 96	1.250 232 07	1.345 868 34	1.448 298 17
16	1.083 071 15	1.172 578 64	1.268 985 55	1.372 785 71	1.484 505 62
17	1.088 486 51	1.184 304 43	1.288 020 33	1.400 241 42	1.521 618 26
18	1.093 928 94	1.196 147 48	1.307 340 64	1.428 246 25	1.559 658 72
19	1.099 398 58	1.208 108 95	1.326 950 75	1.456 811 17	1.598 650 19
20	1.104 895 58	1.220 190 04	1.346 855 01	1.485 947 40	1.638 616 44
21	1.110 420 06	1.232 391 94	1.367 057 83	1.515 666 34	1.679 581 85
22	1.115 972 16	1.244 715 86	1.387 563 70	1.545 979 67	1.721 571 40
23	1.121 552 02	1.257 163 02	1.408 377 15	1.576 899 26	1.764 610 68
24	1.127 159 78	1.269 734 65	1.429 502 81	1.608 437 25	1.808 725 95
25	1.132 795 58	1.282 432 00	1.450 945 35	1.640 605 99	1.853 944 10
26	1.138 459 55	1.295 256 31	1.472 709 53	1.673 418 11	1.900 292 70
27	1.144 151 85	1.308 208 88	1.494 800 18	1.706 886 48	1.947 800 02
28	1.149 872 61	1.321 290 97	1.517 222 18	1.741 024 21	1.996 495 02
29	1.155 621 97	1.334 503 88	1.539 980 51	1.775 844 69	2.046 407 39
30	1.161 400 08	1.347 848 92	1.563 080 22	1.811 361 58	2.097 567 58
31	1.167 207 08	1.361 327 40	1.586 526 42	1.847 588 82	2.150 006 77
32	1.173 043 12	1.374 940 68	1.610 324 32	1.884 540 59	2.203 756 94
33	1.178 908 33	1.388 690 09	1.634 479 18	1.922 231 40	2.258 850 86
34	1.184 802 88	1.402 576 99	1.658 996 37	1.960 676 03	2.315 322 13
35	1.190 726 89	1.416 602 76	1.683 881 32	1.999 889 55	2.373 205 19
36	1.196 680 52	1.430 768 78	1.709 139 54	2.039 887 34	2.432 535 32
37	1.202 663 93	1.445 076 47	1.734 776 63	2.080 685 09	2.493 348 70
38	1.208 677 25	1.459 527 24	1.760 798 28	2.122 298 79	2.555 682 42
39	1.214 720 63	1.474 122 51	1.787 210 25	2.164 744 77	2.619 574 48
40	1.220 794 24	1.488 863 73	1.814 018 41	2.208 039 66	2.685 063 84
41	1.226 898 21	1.503 752 37	1.841 228 68	2.252 200 46	2.752 190 43
42	1.233 032 70	1.518 789 89	1.868 847 12	2.297 244 47	2.820 995 20
43	1.239 197 86	1.533 977 79	1.896 879 82	2.343 189 36	2.891 520 08
44	1.245 393 85	1.549 317 57	1.925 333 02	2.390 053 14	2.963 808 08
45	1.251 620 82	1.564 810 75	1.954 213 01	2.437 854 21	3.037 903 28
46	1.257 878 92	1.580 458 85	1.983 526 21	2.486 611 29	3.113 850 86
47	1.264 168 32	1.596 263 44	2.013 279 10	2.536 343 52	3.191 697 13
48	1.270 489 16	1.612 226 08	2.043 478 29	2.587 070 39	3.271 489 56
49	1.276 841 61	1.628 348 34	2.074 130 46	2.638 811 79	3.353 276 80
50	1.283 225 81	1.644 631 82	2.105 242 42	2.691 588 03	3.437 108 72

$(1+i)^n$

3.0 %	3.5 %	4.0 %	4.5 %	5.0 %	i / n
1.030 000 00	1.035 000 00	1.040 000 00	1.045 000 00	1.050 000 00	1
1.060 900 00	1.071 225 00	1.081 600 00	1.092 025 00	1.102 500 00	2
1.092 727 00	1.108 717 88	1.124 864 00	1.141 166 13	1.157 625 00	3
1.125 508 81	1.147 523 00	1.169 858 56	1.192 518 60	1.215 506 25	4
1.159 274 07	1.187 686 31	1.216 652 90	1.246 181 94	1.276 281 56	5
1.194 052 30	1.229 255 33	1.265 319 02	1.302 260 12	1.340 095 64	6
1.229 873 87	1.272 279 26	1.315 931 78	1.360 861 83	1.407 100 42	7
1.266 770 08	1.316 809 04	1.368 569 05	1.422 100 61	1.477 455 44	8
1.304 773 18	1.362 897 35	1.423 311 81	1.486 095 14	1.551 328 22	9
1.343 916 38	1.410 598 76	1.480 244 28	1.552 969 42	1.628 894 63	10
1.384 233 87	1.459 969 72	1.539 454 06	1.622 853 05	1.710 339 36	11
1.425 760 89	1.511 068 66	1.601 032 22	1.695 881 43	1.795 856 33	12
1.468 533 71	1.563 956 06	1.665 073 51	1.772 196 10	1.885 649 14	13
1.512 589 72	1.618 694 52	1.731 676 45	1.851 944 92	1.979 931 60	14
1.557 967 42	1.675 348 83	1.800 943 51	1.935 282 44	2.078 928 18	15
1.604 706 44	1.733 986 04	1.872 981 25	2.022 370 15	2.182 874 59	16
1.652 847 63	1.794 675 55	1.947 900 50	2.113 376 81	2.292 018 32	17
1.702 433 06	1.857 489 20	2.025 816 52	2.208 478 77	2.406 619 23	18
1.753 506 05	1.922 501 32	2.106 849 18	2.307 860 31	2.526 950 20	19
1.806 111 23	1.989 788 86	2.191 123 14	2.411 714 02	2.653 297 71	20
1.860 294 57	2.059 431 47	2.278 768 07	2.520 241 16	2.785 962 59	21
1.916 103 41	2.131 511 58	2.369 918 79	2.633 652 01	2.925 260 72	22
1.973 586 51	2.206 114 48	2.464 715 54	2.752 166 35	3.071 523 76	23
2.032 794 11	2.283 328 49	2.563 304 16	2.876 013 83	3.225 099 94	24
2.093 777 93	2.363 244 98	2.665 836 33	3.005 434 46	3.386 354 94	25
2.156 591 27	2.445 958 56	2.772 469 78	3.140 679 01	3.555 672 69	26
2.221 289 01	2.531 567 11	2.883 368 58	3.282 009 56	3.733 456 32	27
2.287 927 68	2.620 171 96	2.998 703 32	3.429 699 99	3.920 129 14	28
2.356 565 51	2.711 877 98	3.118 651 45	3.584 036 49	4.116 135 60	29
2.427 262 47	2.806 793 70	3.243 397 51	3.745 318 13	4.321 942 38	30
2.500 080 35	2.905 031 48	3.373 133 41	3.913 857 45	4.538 039 49	31
2.575 082 76	3.006 707 59	3.508 058 75	4.089 981 04	4.764 941 47	32
2.652 335 24	3.111 942 35	3.648 381 10	4.274 030 18	5.003 188 54	33
2.731 905 30	3.220 860 33	3.794 316 34	4.466 361 54	5.253 347 97	34
2.813 862 45	3.333 590 45	3.946 088 99	4.667 347 81	5.516 015 37	35
2.898 278 33	3.450 266 11	4.103 932 55	4.877 378 46	5.791 816 14	36
2.985 226 68	3.571 025 43	4.268 089 86	5.096 860 49	6.081 406 94	37
3.074 783 48	3.696 011 32	4.438 813 45	5.326 219 21	6.385 477 29	38
3.167 026 98	3.825 371 71	4.616 365 99	5.565 899 08	6.704 751 15	39
3.262 037 79	3.959 259 72	4.801 020 63	5.816 364 54	7.039 988 71	40
3.359 898 93	4.097 833 81	4.993 061 45	6.078 100 94	7.391 988 15	41
3.460 695 89	4.241 257 99	5.192 783 91	6.351 615 48	7.761 587 56	42
3.564 516 77	4.389 702 02	5.400 495 27	6.637 438 18	8.149 666 93	43
3.671 452 27	4.543 341 60	5.616 515 08	6.936 122 90	8.557 150 28	44
3.781 595 84	4.702 358 55	5.841 175 68	7.248 248 43	8.985 007 79	45
3.895 043 72	4.866 941 10	6.074 822 71	7.574 419 61	9.434 258 18	46
4.011 895 03	5.037 284 04	6.317 815 62	7.915 268 49	9.905 971 09	47
4.132 251 88	5.213 588 98	6.570 528 24	8.271 455 57	10.401 269 65	48
4.256 219 44	5.396 064 59	6.833 349 37	8.643 671 07	10.921 333 13	49
4.383 906 02	5.584 926 86	7.106 683 35	9.032 636 27	11.467 399 79	50

n \ i	5.5 %	6.0 %	6.5 %	7.0 %	7.5 %
1	1.055 000 00	1.060 000 00	1.065 000 00	1.070 000 00	1.075 000 00
2	1.113 025 00	1.123 600 00	1.134 225 00	1.144 900 00	1.155 625 00
3	1.174 241 38	1.191 016 00	1.207 949 63	1.225 043 00	1.242 296 88
4	1.238 824 65	1.262 476 96	1.286 466 35	1.310 796 01	1.335 469 14
5	1.306 960 01	1.338 225 58	1.370 086 66	1.402 551 73	1.435 629 33
6	1.378 842 81	1.418 519 11	1.459 142 30	1.500 730 35	1.543 301 53
7	1.454 679 16	1.503 630 26	1.553 986 55	1.605 781 48	1.659 049 14
8	1.534 686 51	1.593 848 07	1.654 995 67	1.718 186 18	1.783 477 83
9	1.619 094 27	1.689 478 96	1.762 570 39	1.838 459 21	1.917 238 66
10	1.708 144 46	1.790 847 70	1.877 137 47	1.967 151 36	2.061 031 56
11	1.802 092 40	1.898 298 56	1.999 151 40	2.104 851 95	2.215 608 93
12	1.901 207 49	2.012 196 47	2.129 096 24	2.252 191 59	2.381 779 60
13	2.005 773 90	2.132 928 26	2.267 487 50	2.409 845 00	2.560 413 07
14	2.116 091 46	2.260 903 96	2.414 874 18	2.578 534 15	2.752 444 05
15	2.232 476 49	2.396 558 19	2.571 841 01	2.759 031 54	2.958 877 35
16	2.355 262 70	2.540 351 68	2.739 010 67	2.952 163 75	3.180 793 15
17	2.484 802 15	2.692 772 79	2.917 046 37	3.158 815 21	3.419 352 64
18	2.621 466 27	2.854 339 15	3.106 654 38	3.379 932 28	3.675 804 09
19	2.765 646 91	3.025 599 50	3.308 586 91	3.616 527 54	3.951 489 40
20	2.917 757 49	3.207 135 47	3.523 645 06	3.869 684 46	4.247 851 10
21	3.078 234 15	3.399 563 60	3.752 681 99	4.140 562 37	4.566 439 93
22	3.247 537 03	3.603 537 42	3.996 606 32	4.430 401 74	4.908 922 93
23	3.426 151 57	3.819 749 66	4.256 385 73	4.740 529 86	5.277 092 15
24	3.614 589 90	4.048 934 64	4.533 050 81	5.072 366 95	5.672 874 06
25	3.813 392 35	4.291 870 72	4.827 699 11	5.427 432 64	6.098 339 61
26	4.023 128 93	4.549 382 96	5.141 499 55	5.807 352 92	6.555 715 08
27	4.244 401 02	4.822 345 94	5.475 697 02	6.213 867 63	7.047 393 71
28	4.477 843 07	5.111 686 70	5.831 617 33	6.648 838 36	7.575 948 24
29	4.724 124 44	5.418 387 90	6.210 672 45	7.114 257 05	8.144 144 36
30	4.983 951 29	5.743 491 17	6.614 366 16	7.612 255 04	8.754 955 19
31	5.258 068 61	6.088 100 64	7.044 299 96	8.145 112 90	9.411 576 83
32	5.547 262 38	6.453 386 68	7.502 179 46	8.715 270 80	10.117 445 09
33	5.852 361 81	6.840 589 88	7.989 821 13	9.325 339 75	10.876 253 47
34	6.174 241 71	7.251 025 28	8.509 159 50	9.978 113 54	11.691 972 48
35	6.513 825 01	7.686 086 79	9.062 254 87	10.676 581 48	12.568 870 42
36	6.872 085 38	8.147 252 00	9.651 301 43	11.423 942 19	13.511 535 70
37	7.250 050 08	8.636 087 12	10.278 636 03	12.223 618 14	14.524 900 88
38	7.648 802 83	9.154 252 35	10.946 747 37	13.079 271 41	15.614 268 44
39	8.069 486 99	9.703 507 49	11.658 285 95	13.994 820 41	16.785 338 58
40	8.513 308 77	10.285 717 94	12.416 074 53	14.974 457 84	18.044 238 97
41	8.981 540 76	10.902 861 01	13.223 119 38	16.022 669 89	19.397 556 89
42	9.475 525 50	11.557 032 67	14.082 622 14	17.144 256 78	20.852 373 66
43	9.996 679 40	12.250 454 63	14.997 992 58	18.344 354 75	22.416 301 68
44	10.546 496 77	12.985 481 91	15.972 862 09	19.628 459 59	24.097 524 31
45	11.126 554 09	13.764 610 83	17.011 098 13	21.002 451 76	25.904 838 63
46	11.738 514 56	14.590 487 48	18.116 819 51	22.472 623 38	27.847 701 53
47	12.384 132 87	15.465 916 73	19.294 412 78	24.045 707 02	29.936 279 15
48	13.065 260 17	16.393 871 73	20.548 549 61	25.728 906 51	32.181 500 08
49	13.783 849 48	17.377 504 03	21.884 205 33	27.529 929 97	34.595 112 59
50	14.541 961 20	18.420 154 27	23.306 678 68	29.457 025 06	37.189 746 03

$(1+i)^n$

8.0 %	8.5 %	9.0 %	9.5 %	10.0 %	i / n
1.080 000 00	1.085 000 00	1.090 000 00	1.095 000 00	1.100 000 00	1
1.166 400 00	1.177 225 00	1.188 100 00	1.199 025 00	1.210 000 00	2
1.259 712 00	1.277 289 13	1.295 029 00	1.312 932 38	1.331 000 00	3
1.360 488 96	1.385 858 70	1.411 581 61	1.437 660 95	1.464 100 00	4
1.469 328 08	1.503 656 69	1.538 623 95	1.574 238 74	1.610 510 00	5
1.586 874 32	1.631 467 51	1.677 100 11	1.723 791 42	1.771 561 00	6
1.713 824 27	1.770 142 25	1.828 039 12	1.887 551 61	1.948 717 10	7
1.850 930 21	1.920 604 34	1.992 562 64	2.066 869 01	2.143 588 81	8
1.999 004 63	2.083 855 71	2.171 893 28	2.263 221 56	2.357 947 69	9
2.158 925 00	2.260 983 44	2.367 363 67	2.478 227 61	2.593 742 46	10
2.331 639 00	2.453 167 03	2.580 426 41	2.713 659 24	2.853 116 71	11
2.518 170 12	2.661 686 23	2.812 664 78	2.971 456 86	3.138 428 38	12
2.719 623 73	2.887 929 56	3.065 804 61	3.253 745 27	3.452 271 21	13
2.937 193 62	3.133 403 57	3.341 727 03	3.562 851 07	3.797 498 34	14
3.172 169 11	3.399 742 88	3.642 482 46	3.901 321 92	4.177 248 17	15
3.425 942 64	3.688 721 02	3.970 305 88	4.271 947 50	4.594 972 99	16
3.700 018 05	4.002 262 31	4.327 633 41	4.677 782 51	5.054 470 28	17
3.996 019 50	4.342 454 61	4.717 120 42	5.122 171 85	5.559 917 31	18
4.315 701 06	4.711 563 25	5.141 661 25	5.608 778 18	6.115 909 04	19
4.660 957 14	5.112 046 12	5.604 410 77	6.141 612 10	6.727 499 95	20
5.033 833 72	5.546 570 05	6.108 807 74	6.725 065 25	7.400 249 94	21
5.436 540 41	6.018 028 50	6.658 600 43	7.363 946 45	8.140 274 94	22
5.871 463 65	6.529 560 92	7.257 874 47	8.063 521 37	8.954 302 43	23
6.341 180 74	7.084 573 60	7.911 083 17	8.829 555 90	9.849 732 68	24
6.848 475 20	7.686 762 36	8.623 080 66	9.668 363 71	10.834 705 94	25
7.396 353 21	8.340 137 16	9.399 157 92	10.586 858 26	11.918 176 54	26
7.988 061 47	9.049 048 81	10.245 082 13	11.592 609 79	13.109 994 19	27
8.627 106 39	9.818 217 96	11.167 139 52	12.693 907 72	14.420 993 61	28
9.317 274 90	10.652 766 49	12.172 182 08	13.899 828 96	15.863 092 97	29
10.062 656 89	11.558 251 64	13.267 678 47	15.220 312 71	17.449 402 27	30
10.867 669 44	12.540 703 03	14.461 769 53	16.666 242 41	19.194 342 50	31
11.737 083 00	13.606 662 79	15.763 328 79	18.249 535 44	21.113 776 75	32
12.676 049 64	14.763 229 13	17.182 028 38	19.983 241 31	23.225 154 42	33
13.690 133 61	16.018 103 60	18.728 410 93	21.881 649 24	25.547 669 86	34
14.785 344 29	17.379 642 41	20.413 967 92	23.960 405 91	28.102 436 85	35
15.968 171 84	18.856 912 01	22.251 225 03	26.236 644 48	30.912 680 53	36
17.245 625 58	20.459 749 53	24.253 835 28	28.729 125 70	34.003 948 59	37
18.625 275 63	22.198 828 24	26.436 680 46	31.458 392 64	37.404 343 44	38
20.115 297 68	24.085 728 65	28.815 981 70	34.446 939 94	41.144 777 79	39
21.724 521 50	26.133 015 58	31.409 420 05	37.719 399 24	45.259 255 57	40
23.462 483 22	28.354 321 90	34.236 267 86	41.302 742 16	49.785 181 12	41
25.339 481 87	30.764 439 27	37.317 531 97	45.226 502 67	54.763 699 24	42
27.366 640 42	33.379 416 60	40.676 109 84	49.523 020 42	60.240 069 16	43
29.555 971 66	36.216 667 02	44.336 959 73	54.227 707 36	66.264 076 08	44
31.920 449 39	39.295 083 71	48.327 286 10	59.379 339 56	72.890 483 69	45
34.474 085 34	42.635 165 83	52.676 741 85	65.020 376 82	80.179 532 05	46
37.232 012 17	46.259 154 92	57.417 648 62	71.197 312 62	88.197 485 26	47
40.210 573 14	50.191 183 09	62.585 237 00	77.961 057 32	97.017 233 78	48
43.427 418 99	54.457 433 65	68.217 908 33	85.367 357 77	106.718 957 16	49
46.901 612 51	59.086 315 51	74.357 520 08	93.477 256 75	117.390 852 88	50

(3) 複 利 現 価 表

n \ i	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	2.5 %
1	.995 024 88	.990 099 01	.985 221 67	.980 392 16	.975 609 76
2	.990 074 50	.980 296 05	.970 661 75	.961 168 78	.951 814 40
3	.985 148 76	.970 590 15	.956 316 99	.942 322 33	.928 599 41
4	.980 247 52	.960 980 34	.942 184 23	.923 845 43	.905 950 64
5	.975 370 67	.951 465 69	.928 260 33	.905 730 81	.883 854 29
6	.970 518 08	.942 045 24	.914 542 19	.887 971 38	.862 296 87
7	.965 689 63	.932 718 05	.901 026 79	.870 560 18	.841 265 24
8	.960 885 20	.923 483 22	.887 711 12	.853 490 37	.820 746 57
9	.956 104 68	.914 339 82	.874 592 24	.836 755 27	.800 728 36
10	.951 347 94	.905 286 95	.861 667 23	.820 348 30	.781 198 40
11	.946 614 87	.896 323 72	.848 933 23	.804 263 04	.762 144 78
12	.941 905 34	.887 449 23	.836 387 42	.788 493 18	.743 555 89
13	.937 219 24	.878 662 60	.824 027 02	.773 032 53	.725 420 38
14	.932 556 46	.869 962 97	.811 849 28	.757 875 02	.707 727 20
15	.927 916 88	.861 349 47	.799 851 50	.743 014 73	.690 465 56
16	.923 300 37	.852 821 26	.788 031 04	.728 445 81	.673 624 93
17	.918 706 84	.844 377 49	.776 385 26	.714 162 56	.657 195 06
18	.914 136 16	.836 017 31	.764 911 59	.700 159 37	.641 165 91
19	.909 588 22	.827 739 92	.753 607 47	.686 430 76	.625 527 72
20	.905 062 90	.819 544 47	.742 470 42	.672 971 33	.610 270 94
21	.900 560 10	.811 430 17	.731 497 95	.659 775 82	.595 386 29
22	.896 079 71	.803 396 21	.720 687 63	.646 839 04	.580 864 67
23	.891 621 60	.795 441 79	.710 037 08	.634 155 92	.566 697 24
24	.887 185 67	.787 566 13	.699 543 92	.621 721 49	.552 875 35
25	.882 771 81	.779 768 44	.689 205 83	.609 530 87	.539 390 59
26	.878 379 91	.772 047 96	.679 020 52	.597 579 28	.526 234 72
27	.874 009 86	.764 403 92	.668 985 74	.585 862 04	.513 399 73
28	.869 661 55	.756 835 57	.659 099 25	.574 374 55	.500 877 78
29	.865 334 88	.749 342 15	.649 358 87	.563 112 31	.488 661 25
30	.861 029 73	.741 922 92	.639 762 43	.552 070 89	.476 742 69
31	.856 746 00	.734 577 15	.630 307 81	.541 245 97	.465 114 81
32	.852 483 58	.727 304 11	.620 992 92	.530 633 30	.453 770 55
33	.848 242 37	.720 103 07	.611 815 68	.520 228 73	.442 702 98
34	.844 022 26	.712 973 34	.602 774 07	.510 028 17	.431 905 34
35	.839 823 14	.705 914 20	.593 866 08	.500 027 61	.421 371 07
36	.835 644 92	.698 924 95	.585 089 74	.490 223 15	.411 093 72
37	.831 487 48	.692 004 90	.576 443 09	.480 610 93	.401 067 05
38	.827 350 73	.685 153 37	.567 924 23	.471 187 19	.391 284 92
39	.823 234 55	.678 369 67	.559 531 26	.461 948 22	.381 741 39
40	.819 138 86	.671 653 14	.551 262 32	.452 890 42	.372 430 62
41	.815 063 54	.665 003 11	.543 115 59	.444 010 21	.363 346 95
42	.811 008 50	.658 418 92	.535 089 25	.435 304 13	.354 484 83
43	.806 973 63	.651 899 92	.527 181 53	.426 768 75	.345 838 86
44	.802 958 84	.645 445 46	.519 390 67	.418 400 74	.337 403 76
45	.798 964 02	.639 054 92	.511 714 94	.410 196 80	.329 174 40
46	.794 989 07	.632 727 64	.504 152 65	.402 153 73	.321 145 76
47	.791 033 90	.626 463 01	.496 702 12	.394 268 36	.313 312 94
48	.787 098 41	.620 260 41	.489 361 70	.386 537 61	.305 671 16
49	.783 182 50	.614 119 21	.482 129 75	.378 958 44	.298 215 76
50	.779 286 07	.608 038 82	.475 004 68	.371 527 88	.290 942 21

$v^n=(1+i)^{-n}$

3.0 %	3.5 %	4.0 %	4.5 %	5.0 %	i \ n
.970 873 79	.966 183 57	.961 538 46	.956 937 80	.952 380 95	1
.942 595 91	.933 510 70	.924 556 21	.915 729 95	.907 029 48	2
.915 141 66	.901 942 71	.888 996 36	.876 296 60	.863 837 60	3
.888 487 05	.871 442 23	.854 804 19	.838 561 34	.822 702 47	4
.862 608 78	.841 973 17	.821 927 11	.802 451 05	.783 526 17	5
.837 484 26	.813 500 64	.790 314 53	.767 895 74	.746 215 40	6
.813 091 51	.785 990 96	.759 917 81	.734 828 46	.710 681 33	7
.789 409 23	.759 411 56	.730 690 21	.703 185 13	.676 839 36	8
.766 416 73	.733 730 97	.702 586 74	.672 904 43	.644 608 92	9
.744 093 91	.708 918 81	.675 564 17	.643 927 68	.613 913 25	10
.722 421 28	.684 945 71	.649 580 93	.616 198 74	.584 679 29	11
.701 379 88	.661 783 30	.624 597 05	.589 663 86	.556 837 42	12
.680 951 34	.639 404 15	.600 574 09	.564 271 64	.530 321 35	13
.661 117 81	.617 781 79	.577 475 08	.539 972 86	.505 067 95	14
.641 861 95	.596 890 62	.555 264 50	.516 720 44	.481 017 10	15
.623 166 94	.576 705 91	.533 908 18	.494 469 32	.458 111 52	16
.605 016 45	.557 203 78	.513 373 25	.473 176 39	.436 296 69	17
.587 394 61	.538 361 14	.493 628 12	.452 800 37	.415 520 65	18
.570 286 03	.520 155 69	.474 642 42	.433 301 79	.395 733 96	19
.553 675 75	.502 565 88	.456 386 95	.414 642 86	.376 889 48	20
.537 549 28	.485 570 90	.438 833 60	.396 787 43	.358 942 36	21
.521 892 50	.469 150 63	.421 955 39	.379 700 89	.341 849 87	22
.506 691 75	.453 285 63	.405 726 33	.363 350 13	.325 571 31	23
.491 933 74	.437 957 13	.390 121 47	.347 703 47	.310 067 91	24
.477 605 57	.423 146 99	.375 116 80	.332 730 60	.295 302 77	25
.463 694 73	.408 837 67	.360 689 23	.318 402 48	.281 240 73	26
.450 189 06	.395 012 24	.346 816 57	.304 691 37	.267 848 32	27
.437 076 75	.381 654 34	.333 477 47	.291 570 69	.255 093 64	28
.424 346 36	.368 748 15	.320 651 41	.279 015 02	.242 946 32	29
.411 986 76	.356 278 41	.308 318 67	.267 000 02	.231 377 45	30
.399 987 15	.344 230 35	.296 460 26	.255 502 41	.220 359 47	31
.388 337 03	.332 589 71	.285 057 94	.244 499 91	.209 866 17	32
.377 026 25	.321 342 71	.274 094 17	.233 971 21	.199 872 54	33
.366 044 90	.310 476 05	.263 552 09	.223 895 89	.190 354 80	34
.355 383 40	.299 976 86	.253 415 47	.214 254 44	.181 290 29	35
.345 032 43	.289 832 72	.243 668 72	.205 028 17	.172 657 41	36
.334 982 94	.280 031 61	.234 296 85	.196 199 21	.164 435 63	37
.325 226 15	.270 561 94	.225 285 43	.187 750 44	.156 605 36	38
.315 753 55	.261 412 50	.216 620 61	.179 665 49	.149 147 97	39
.306 556 84	.252 572 47	.208 289 04	.171 928 70	.142 045 68	40
.297 628 00	.244 031 37	.200 277 93	.164 525 07	.135 281 60	41
.288 959 22	.235 779 10	.192 574 93	.157 440 26	.128 839 62	42
.280 542 94	.227 805 90	.185 168 20	.150 660 54	.122 704 40	43
.272 371 78	.220 102 31	.178 046 35	.144 172 76	.116 861 33	44
.264 438 62	.212 65 24	.171 198 41	.137 964 37	.111 296 51	45
.256 736 53	.205 467 87	.164 613 86	.132 023 32	.105 996 68	46
.249 258 76	.198 519 68	.158 282 56	.126 338 10	.100 949 21	47
.241 998 80	.191 806 45	.152 194 76	.120 897 71	.096 142 11	48
.234 950 29	.185 320 24	.146 341 12	.115 691 58	.091 563 91	49
.228 107 08	.179 053 37	.140 712 62	.110 709 65	.087 203 73	50

(3) 複 利 現 価 表

n \ i	5.5 %	6.0 %	6.5 %	7.0 %	7.5 %
1	.947 867 30	.943 396 23	.938 967 14	.934 579 44	.930 232 56
2	.898 452 42	.889 996 44	.881 659 28	.873 438 73	.865 332 61
3	.851 613 66	.839 619 28	.827 849 09	.816 297 88	.804 960 57
4	.807 216 74	.792 093 66	.777 323 09	.762 895 21	.748 800 53
5	.765 134 35	.747 258 17	.729 880 84	.712 986 18	.696 558 63
6	.725 245 83	.704 960 54	.685 334 12	.666 342 22	.647 961 52
7	.687 436 81	.665 057 11	.643 506 21	.622 749 74	.602 754 90
8	.651 598 87	.627 412 37	.604 231 19	.582 009 10	.560 702 23
9	.617 629 26	.591 898 46	.567 353 23	.543 933 74	.521 583 47
10	.585 430 58	.558 394 78	.532 726 04	.508 349 29	.485 193 93
11	.554 910 50	.526 787 53	.500 212 24	.475 092 80	.451 343 19
12	.525 981 52	.496 969 36	.469 682 85	.444 011 96	.419 854 13
13	.498 560 68	.468 839 02	.441 016 76	.414 964 45	.390 561 98
14	.472 569 37	.442 300 96	.414 100 25	.387 817 24	.363 313 47
15	.447 933 05	.417 265 06	.388 826 52	.362 446 02	.337 966 02
16	.424 581 09	.393 646 28	.365 095 33	.338 734 60	.314 386 99
17	.402 446 53	.371 364 42	.342 812 51	.316 574 39	.292 453 02
18	.381 465 90	.350 343 79	.321 889 69	.295 863 92	.272 049 32
19	.361 579 06	.330 513 01	.302 243 84	.276 508 33	.253 069 13
20	.342 728 96	.311 804 73	.283 797 03	.258 419 00	.235 413 15
21	.324 861 58	.294 155 40	.266 476 08	.241 513 09	.218 988 97
22	.307 925 67	.277 505 10	.250 212 28	.225 713 17	.203 710 67
23	.291 872 67	.261 797 26	.234 941 11	.210 946 88	.189 498 30
24	.276 656 56	.246 978 55	.220 601 98	.197 146 62	.176 277 49
25	.262 233 70	.232 998 63	.207 138 01	.184 249 18	.163 979 06
26	.248 562 75	.219 810 03	.194 495 79	.172 195 49	.152 538 66
27	.235 604 50	.207 367 95	.182 625 15	.160 930 37	.141 896 43
28	.223 321 81	.195 630 14	.171 479 02	.150 402 21	.131 996 68
29	.211 679 44	.184 556 74	.161 013 16	.140 562 82	.122 787 61
30	.200 644 02	.174 110 13	.151 186 07	.131 367 12	.114 221 03
31	.190 183 90	.164 254 84	.141 958 75	.122 773 01	.106 252 12
32	.180 269 10	.154 957 40	.133 294 60	.114 741 13	.098 839 18
33	.170 871 19	.146 186 22	.125 159 25	.107 234 70	.091 943 43
34	.161 963 21	.137 911 53	.117 520 42	.100 219 34	.085 528 77
35	.153 519 63	.130 105 22	.110 347 81	.093 662 94	.079 561 64
36	.145 516 24	.122 740 77	.103 612 97	.087 535 46	.074 010 83
37	.137 930 08	.115 793 18	.097 289 17	.081 808 84	.068 847 29
38	.130 739 41	.109 238 85	.091 351 34	.076 456 86	.064 043 99
39	.123 923 62	.103 055 52	.085 775 90	.071 455 01	.059 575 80
40	.117 463 14	.097 222 19	.080 540 75	.066 780 38	.055 419 35
41	.111 339 47	.091 719 05	.075 625 12	.062 411 57	.051 552 88
42	.105 535 04	.086 527 40	.071 009 50	.058 328 57	.047 956 17
43	.100 033 22	.081 629 62	.066 675 59	.054 512 68	.044 610 39
44	.094 818 22	.077 009 08	.062 606 19	.050 946 43	.041 498 04
45	.089 875 09	.072 650 07	.058 785 15	.047 613 49	.038 602 83
46	.085 189 65	.068 537 81	.055 197 33	.044 498 59	.035 909 61
47	.080 748 49	.064 658 31	.051 828 48	.041 587 47	.033 404 28
48	.076 538 85	.060 998 40	.048 665 24	.038 866 79	.031 073 75
49	.072 548 67	.057 545 66	.045 695 06	.036 324 10	.028 905 82
50	.068 766 52	.054 288 36	.042 906 16	.033 947 76	.026 889 13

$v^n = (1+i)^{-n}$

8.0 %	8.5 %	9.0 %	9.5 %	10.0 %	i / n
.925 925 93	.921 658 99	.917 431 19	.913 242 01	.909 090 91	1
.857 338 82	.849 455 29	.841 679 99	.834 010 97	.826 446 28	2
.793 832 24	.782 908 10	.772 183 48	.761 653 85	.751 314 80	3
.735 029 85	.721 574 28	.708 425 21	.695 574 29	.683 013 46	4
.680 583 20	.665 045 42	.649 931 39	.635 227 67	.620 921 32	5
.630 169 63	.612 945 09	.596 267 33	.580 116 59	.564 473 93	6
.583 490 40	.564 926 35	.547 034 24	.529 786 84	.513 158 12	7
.540 268 88	.520 669 45	.501 866 28	.483 823 60	.466 507 38	8
.500 248 97	.479 879 68	.460 427 78	.441 848 03	.424 097 62	9
.463 193 49	.442 285 42	.422 410 81	.403 514 19	.385 543 29	10
.428 882 86	.407 636 33	.387 532 85	.368 506 11	.350 493 90	11
.397 113 76	.375 701 68	.355 534 73	.336 535 26	.318 630 82	12
.367 697 92	.346 268 83	.326 178 65	.307 338 13	.289 664 38	13
.340 461 04	.319 141 78	.299 246 47	.280 674 10	.263 331 25	14
.315 241 70	.294 139 89	.274 538 04	.256 323 37	.239 392 05	15
.291 890 47	.271 096 67	.251 869 76	.234 085 27	.217 629 14	16
.270 268 95	.249 858 69	.231 073 18	.213 776 51	.197 844 67	17
.250 249 03	.230 284 50	.211 993 74	.195 229 69	.179 858 79	18
.231 712 06	.212 243 78	.194 489 67	.178 291 95	.163 507 99	19
.214 548 21	.195 616 39	.178 430 89	.162 823 70	.148 643 63	20
.198 655 75	.180 291 60	.163 698 06	.148 697 44	.135 130 57	21
.183 940 51	.166 167 38	.150 181 71	.135 796 75	.122 845 97	22
.170 315 28	.153 149 65	.137 781 39	.124 015 30	.111 678 16	23
.157 699 34	.141 151 76	.126 404 94	.113 255 98	.101 525 60	24
.146 017 90	.130 093 78	.115 967 84	.103 430 12	.092 296 00	25
.135 201 76	.119 902 10	.106 392 51	.094 456 73	.083 905 45	26
.125 186 82	.110 508 85	.097 607 81	.086 261 85	.076 277 68	27
.115 913 72	.101 851 48	.089 548 45	.078 777 95	.069 343 35	28
.107 327 52	.093 872 33	.082 154 54	.071 943 33	.063 039 41	29
.099 377 33	.086 518 28	.075 371 14	.065 701 67	.057 308 55	30
.092 016 05	.079 740 35	.069 147 83	.060 001 53	.052 098 68	31
.085 200 05	.073 493 41	.063 438 38	.054 795 92	.047 362 44	32
.078 888 93	.067 735 86	.058 200 35	.050 041 93	.043 056 76	33
.073 045 31	.062 429 36	.053 394 81	.045 700 39	.039 142 51	34
.067 634 54	.057 538 58	.048 986 07	.041 735 52	.035 584 10	35
.062 624 58	.053 030 95	.044 941 35	.038 114 63	.032 349 18	36
.057 985 72	.048 876 45	.041 230 59	.034 807 88	.029 408 35	37
.053 690 48	.045 047 42	.037 826 23	.031 788 02	.026 734 86	38
.049 713 41	.041 518 36	.034 702 96	.029 030 15	.024 304 42	39
.046 030 93	.038 265 77	.031 837 58	.026 511 56	.022 094 93	40
.042 621 23	.035 267 99	.029 208 79	.024 211 47	.020 086 30	41
.039 464 11	.032 505 06	.026 797 06	.022 110 93	.018 260 27	42
.036 540 84	.029 958 58	.024 584 46	.020 192 63	.016 600 25	43
.033 834 11	.027 611 60	,022 554 55	.018 440 76	.015 091 13	44
.031 327 88	.025 448 48	.020 692 24	.016 840 87	.013 719 21	45
.029 007 30	.023 454 82	.018 983 71	.015 379 79	.012 472 01	46
.026 858 61	.021 617 34	.017 416 25	.014 045 47	.011 338 19	47
.024 869 08	.019 923 82	.015 978 21	.012 826 92	.010 307 45	48
.023 026 93	.018 362 97	.014 658 91	.011 714 08	.009 370 41	49
.021 321 23	.016 924 39	.013 448 54	.010 697 79	.008 518 55	50

n \ i	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	2.5 %
1	1.005 000 00	1.010 000 00	1.015 000 00	1.020 000 00	1.025 000 00
2	2.015 025 00	2.030 100 00	2.045 225 00	2.060 400 00	2.075 625 00
3	3.030 100 13	3.060 401 00	3.090 903 38	3.121 608 00	3.152 515 63
4	4.050 250 63	4.101 005 01	4.152 266 93	4.204 040 16	4.256 328 52
5	5.075 501 88	5.152 015 06	5.229 550 93	5.308 120 96	5.387 736 73
6	6.105 879 39	6.213 535 21	6.322 994 19	6.434 283 38	6.547 430 15
7	7.141 408 79	7.285 670 56	7.432 839 11	7.582 969 05	7.736 115 90
8	8.182 115 83	8.368 527 27	8.559 331 69	8.754 628 43	8.954 518 80
9	9.228 026 41	9.462 212 54	9.702 721 67	9.949 721 00	10.203 381 77
10	10.279 166 54	10.566 834 67	10.863 262 49	11.168 715 42	11.483 466 31
11	11.335 562 37	11.682 503 01	12.041 211 43	12.412 089 73	12.795 552 97
12	12.397 240 18	12.809 328 04	13.236 829 60	13.680 331 52	14.140 441 79
13	13.464 226 39	13.947 421 32	14.450 382 05	14.973 938 15	15.518 952 84
14	14.536 547 52	15.096 895 54	15.682 137 78	16.293 416 92	16.931 926 66
15	15.614 230 26	16.257 864 49	16.932 369 84	17.639 285 25	18.380 224 83
16	16.697 301 41	17.430 443 14	18.201 355 39	19.012 070 96	19.864 730 45
17	17.785 787 91	18.614 747 57	19.489 375 72	20.412 312 38	21.386 348 71
18	18.879 716 85	19.810 895 04	20.796 716 36	21.840 558 63	22.946 007 43
19	19.979 115 44	21.019 003 99	22.123 667 10	23.297 369 80	24.544 657 61
20	21.084 011 01	22.239 194 03	23.470 522 11	24.783 317 19	26.183 274 05
21	22.194 431 07	23.471 585 98	24.837 579 94	26.298 983 54	27.862 855 90
22	23.310 403 22	24.716 301 83	26.225 143 64	27.844 963 21	29.584 427 30
23	24.431 955 24	25.973 464 85	27.633 520 80	29.421 862 47	31.349 037 98
24	25.559 115 02	27.243 199 50	29.063 023 61	31.030 299 72	33.157 763 93
25	26.691 910 59	28.525 631 50	30.513 968 96	32.670 905 72	35.011 708 03
26	27.830 370 15	29.820 887 81	31.986 678 50	34.344 323 83	36.912 000 73
27	28.974 522 00	31.129 096 69	33.481 478 67	36.051 210 31	38.859 800 75
28	30.124 394 61	32.450 387 66	34.998 700 85	37.792 234 51	40.856 295 77
29	31.280 016 58	33.784 891 53	36.538 681 37	39.568 079 21	42.902 703 16
30	32.441 416 66	35.132 740 45	38.101 761 59	41.379 440 79	45.000 270 74
31	33.608 623 75	36.494 067 85	39.688 288 01	43.227 029 61	47.150 277 51
32	34.781 666 86	37.869 008 53	41.298 612 33	45.111 570 20	49.354 034 45
33	35.960 575 20	39.257 698 62	42.933 091 52	47.033 801 60	51.612 885 31
34	37.145 378 07	40.660 275 60	44.592 087 89	48.994 477 63	53.928 207 44
35	38.336 104 96	42.076 878 36	46.275 969 21	50.994 367 19	56.301 412 63
36	39.532 785 49	43.507 647 14	47.985 108 74	53.034 254 53	58.733 947 94
37	40.735 449 42	44.952 723 61	49.719 885 38	55.114 939 62	61.227 296 64
38	41.944 126 66	46.412 250 85	51.480 683 66	57.237 238 41	63.782 979 06
39	43.158 847 30	47.886 373 36	53.267 893 91	59.401 983 18	66.402 553 54
40	44.379 641 53	49.375 237 09	55.081 912 32	61.610 022 84	69.087 617 37
41	45.606 539 74	50.878 989 46	56.923 141 00	63.862 223 30	71.839 807 81
42	46.839 572 44	52.397 779 36	58.791 988 12	66.159 467 77	74.660 803 00
43	48.078 770 30	53.931 757 15	60.688 867 94	68.502 657 12	77.552 323 08
44	49.324 164 15	55.481 074 72	62.614 200 96	70.892 710 27	80.516 131 16
45	50.575 784 97	57.045 885 47	64.568 413 98	73.330 564 47	83.554 034 43
46	51.833 663 90	58.626 344 32	66.551 940 18	75.817 175 76	86.667 885 30
47	53.097 832 22	60.222 607 77	68.565 219 29	78.353 519 27	89.859 582 43
48	54.368 321 38	61.834 833 85	70.608 697 58	80.940 589 66	93.131 071 99
49	55.645 162 99	63.463 182 18	72.682 828 04	83.579 401 45	96.484 348 79
50	56.928 388 80	65.107 814 01	74.788 070 46	86.270 989 48	99.921 457 51

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$

3.0 %	3.5 %	4.0 %	4.5 %	5.0 %	i / n
1.030 000 00	1.035 000 00	1.040 000 00	1.045 000 00	1.050 000 00	1
2.090 900 00	2.106 225 00	2.121 600 00	2.137 025 00	2.152 500 00	2
3.183 627 00	3.214 942 88	3.246 464 00	3.278 191 13	3.310 125 00	3
4.309 135 81	4.362 465 88	4.416 322 56	4.470 709 73	4.525 631 25	4
5.468 409 88	5.550 152 18	5.632 975 46	5.716 891 66	5.801 912 81	5
6.662 462 18	6.779 407 51	6.898 294 48	7.019 151 79	7.142 008 45	6
7.892 336 05	8.051 686 77	8.214 226 26	8.380 013 62	8.549 108 88	7
9.159 106 13	9.368 495 81	9.582 795 31	9.802 114 23	10.026 564 32	8
10.463 879 31	10.731 393 16	11.006 107 12	11.288 209 37	11.577 892 54	9
11.807 795 69	12.141 991 92	12.486 351 41	12.841 178 79	13.206 787 16	10
13.192 029 56	13.601 961 64	14.025 805 46	14.464 031 84	14.917 126 52	11
14.617 790 45	15.113 030 30	15.626 837 68	16.159 913 27	16.712 982 85	12
16.086 324 16	16.676 986 36	17.291 911 19	17.932 109 37	18.598 631 99	13
17.598 913 89	18.295 680 88	19.023 587 64	19.784 054 29	20.578 563 59	14
19.156 881 30	19.971 029 71	20.824 531 14	21.719 336 73	22.657 491 77	15
20.761 587 74	21.705 015 75	22.697 512 39	23.741 706 89	24.840 366 36	16
22.414 435 37	23.499 691 30	24.645 412 88	25.855 083 70	27.132 384 67	17
24.116 868 44	25.357 180 50	26.671 229 40	28.063 562 46	29.539 003 91	18
25.870 374 49	27.279 681 81	28.778 078 58	30.371 422 77	32.065 954 10	19
27.676 485 72	29.269 470 68	30.969 201 72	32.783 136 80	34.719 251 81	20
29.536 780 30	31.328 902 15	33.247 969 79	35.303 377 95	37.505 214 40	21
31.452 883 70	33.460 413 73	35.617 888 58	37.937 029 96	40.430 475 12	22
33.426 470 22	35.666 528 21	38.082 604 12	40.689 196 31	43.501 998 87	23
35.459 264 32	37.949 856 69	40.645 908 29	43.565 210 15	46.727 098 82	24
37.553 042 25	40.313 101 68	43.311 744 62	46.570 644 60	50.113 453 76	25
39.709 633 52	42.759 060 24	46.084 214 40	49.711 323 61	53.669 126 45	26
41.930 922 52	45.290 627 34	48.967 582 98	52.993 333 17	57.402 582 77	27
44.218 850 20	47.910 799 30	51.966 286 30	56.423 033 16	61.322 711 91	28
46.575 415 71	50.622 677 28	55.084 937 75	60.007 069 66	65.438 847 50	29
49.002 678 18	53.429 470 98	58.328 335 26	63.752 387 79	69.760 789 88	30
51.502 758 52	56.334 502 47	61.701 468 67	67.666 245 24	74.298 829 37	31
54.077 841 28	59.341 210 05	65.209 527 42	71.756 226 28	79.063 770 84	32
56.730 176 52	62.453 152 40	68.857 908 51	76.030 256 46	84.066 959 38	33
59.462 081 81	65.674 012 74	72.652 224 86	80.496 618 00	89.320 307 35	34
62.275 944 27	69.007 603 18	76.598 313 85	85.163 065 81	94.836 322 72	35
65.174 222 59	72.457 869 30	80.702 246 40	90.041 344 27	100.628 138 86	36
68.159 449 27	76.028 894 72	84.970 336 26	95.138 204 76	106.709 545 80	37
71.234 232 75	79.724 906 04	89.409 149 71	100.464 423 98	113.095 023 09	38
74.401 259 73	83.550 277 75	94.025 515 70	106.030 323 06	119.799 774 24	39
77.663 297 53	87.509 537 47	98.826 536 33	111.846 687 60	126.839 762 95	40
81.023 196 45	91.607 371 28	103.819 597 78	117.924 788 54	134.231 751 10	41
84.483 892 34	95.848 629 28	109.012 381 69	124.276 404 02	141.993 338 66	42
88.048 409 11	100.238 331 30	114.412 876 96	130.913 842 20	150.143 005 59	43
91.719 861 39	104.781 672 90	120.029 392 04	137.849 965 10	158.700 155 87	44
95.501 457 23	109.484 031 45	125.870 567 72	145.098 213 53	167.685 163 66	45
99.396 500 95	114.350 972 55	131.945 390 43	152.672 633 14	177.119 421 85	46
103.408 395 98	119.388 256 59	138.263 206 04	160.587 901 63	187.025 392 94	47
107.540 647 85	124.601 845 57	144.833 734 29	168.859 357 20	197.426 662 59	48
111.796 867 29	129.997 910 16	151.667 083 66	177.503 028 28	208.347 995 72	49
116.180 773 31	135.582 837 02	158.773 767 00	186.535 664 55	219.815 395 50	50

n \ i	5.5 %	6.0 %	6.5 %	7.0 %	7.5 %
1	1.055 000 00	1.060 000 00	1.065 000 00	1.070 000 00	1.075 000 00
2	2.168 025 00	2.183 600 00	2.199 225 00	2.214 900 00	2.230 625 00
3	3.342 266 38	3.374 616 00	3.407 174 63	3.439 943 00	3.472 921 88
4	4.581 091 03	4.637 092 96	4.693 640 98	4.750 739 01	4.808 391 02
5	5.888 051 03	5.975 318 54	6.063 727 64	6.153 290 74	6.244 020 34
6	7.266 893 84	7.393 837 65	7.522 869 94	7.654 021 09	7.787 321 87
7	8.721 573 00	8.897 467 91	9.076 856 48	9.259 802 57	9.446 371 01
8	10.256 259 51	10.491 315 98	10.731 852 15	10.977 988 75	11.229 848 83
9	11.875 353 79	12.180 794 94	12.494 422 54	12.816 447 96	13.147 087 50
10	13.583 498 25	13.971 642 64	14.371 560 01	14.783 599 32	15.208 119 06
11	15.385 590 65	15.869 941 20	16.370 711 41	16.888 451 27	17.423 727 99
12	17.286 798 14	17.882 137 67	18.499 807 65	19.140 642 86	19.805 507 59
13	19.292 572 03	20.015 065 93	20.767 295 15	21.550 487 86	22.365 920 66
14	21.408 663 50	22.275 969 88	23.182 169 33	24.129 022 01	25.118 364 70
15	23.641 139 99	24.672 528 08	25.754 010 34	26.888 053 55	28.077 242 06
16	25.996 402 69	27.212 879 76	28.493 021 01	29.840 217 30	31.258 035 21
17	28.481 204 83	29.905 652 55	31.410 067 38	32.999 032 51	34.677 387 85
18	31.102 671 10	32.759 991 70	34.516 721 76	36.378 964 79	38.353 191 94
19	33.868 318 01	35.785 591 20	37.825 308 67	39.995 492 32	42.304 681 34
20	36.786 075 50	38.992 726 68	41.348 953 73	43.865 176 78	46.552 532 44
21	39.864 309 65	42.392 290 28	45.101 635 73	48.005 739 16	51.118 972 37
22	43.111 846 69	45.995 827 69	49.098 242 05	52.436 140 90	56.027 895 30
23	46.537 998 25	49.815 577 35	53.354 627 78	57.176 670 76	61.304 987 44
24	50.152 583 16	53.864 512 00	57.887 678 59	62.249 037 72	66.977 861 50
25	53.965 980 51	58.156 382 72	62.715 377 69	67.676 470 36	73.076 201 12
26	57.989 109 43	62.705 765 68	67.856 877 25	73.483 823 28	79.631 916 20
27	62.233 510 45	67.528 111 62	73.332 574 27	79.697 690 91	86.679 309 91
28	66.711 353 53	72.639 798 32	79.164 191 59	86.346 529 27	94.255 258 16
29	71.435 477 97	78.058 186 22	85.374 864 05	93.460 786 32	102.399 402 52
30	76.419 429 26	83.801 677 39	91.989 230 21	101.073 041 37	111.154 357 71
31	81.677 497 87	89.889 778 03	99.033 530 17	109.218 154 26	120.565 934 54
32	87.224 760 25	96.343 164 71	106.535 709 63	117.933 425 06	130.683 379 63
33	93.077 122 07	103.183 754 60	114.525 530 76	127.258 764 81	141.559 633 10
34	99.251 363 78	110.434 779 87	123.034 690 26	137.236 878 35	153.251 605 58
35	105.765 188 79	118.120 866 66	132.096 945 13	147.913 459 84	165.820 476 00
36	112.637 274 17	126.268 118 66	141.748 246 56	159.337 402 02	179.332 011 70
37	119.887 324 25	134.904 205 78	152.026 882 59	171.561 020 17	193.856 912 58
38	127.536 127 08	144.058 458 13	162.973 629 96	184.640 291 58	209.471 181 02
39	135.605 614 07	153.761 965 62	174.631 915 90	198.635 111 99	226.256 519 60
40	144.118 922 85	164.047 683 56	187.047 990 44	213.609 569 83	244.300 758 57
41	153.100 463 60	174.950 544 57	200.271 109 81	229.632 239 72	263.698 315 46
42	162.575 989 10	186.507 577 24	214.353 731 95	246.776 496 50	284.550 689 12
43	172.572 668 50	198.758 031 88	229.351 724 53	265.120 851 25	306.966 990 80
44	183.119 165 27	211.743 513 79	245.324 586 62	284.749 310 84	331.064 515 11
45	194.245 719 36	225.508 124 62	262.335 684 75	305.751 762 60	356.969 353 75
46	205.984 233 92	240.098 612 10	280.452 504 26	328.224 385 98	384.817 055 28
47	218.358 365 79	255.564 528 82	299.746 917 04	352.270 093 00	414.753 334 42
48	231.433 626 96	271.958 400 55	320.295 466 65	377.998 999 51	446.934 834 51
49	245.217 476 45	289.335 904 58	342.179 671 98	405.528 929 47	481.529 947 09
50	259.759 437 65	307.756 058 86	365.486 350 66	434.985 954 54	518.719 693 13

$\ddot{s}_{\overline{n}|}$

8.0 %	8.5 %	9.0 %	9.5 %	10.0%	i / n
1.080 000 00	1.085 000 00	1.090 000 00	1.095 000 00	1.100 000 00	1
2.246 400 00	2.262 225 00	2.278 100 00	2.294 025 00	2.310 000 00	2
3.506 112 00	3.539 514 13	3.573 129 00	3.606 957 38	3.641 000 00	3
4.866 600 96	4.925 372 83	4.984 710 61	5.044 618 33	5.105 100 00	4
6.335 929 04	6.429 029 52	6.523 334 56	6.618 857 07	6.715 610 00	5
7.922 803 36	8.060 497 02	8.200 434 68	8.342 648 49	8.487 171 00	6
9.636 627 63	9.830 639 27	10.028 473 80	10.230 200 09	10.435 888 10	7
11.487 557 84	11.751 243 61	12.021 036 44	12.297 069 10	12.579 476 91	8
13.486 562 47	13.835 099 32	14.192 929 72	14.560 290 67	14.937 424 60	9
15.645 487 46	16.096 082 76	16.560 293 39	17.038 518 28	17.531 167 06	10
17.977 126 46	18.549 249 79	19.140 719 80	19.752 177 52	20.384 283 77	11
20.495 296 58	21.210 936 03	21.953 384 58	22.723 634 38	23.522 712 14	12
23.214 920 30	24.098 865 59	25.019 189 19	25.977 379 65	26.974 983 36	13
26.152 113 93	27.232 269 16	28.360 916 22	29.540 230 72	30.772 481 69	14
29.324 283 04	30.632 012 04	32.003 398 68	33.441 552 63	34.949 729 86	15
32.750 225 69	34.320 733 06	35.973 704 56	37.713 500 13	39.544 702 85	16
36.450 243 74	38.322 995 38	40.301 337 97	42.391 282 65	44.599 173 13	17
40.446 263 24	42.665 449 98	45.018 458 39	47.513 454 50	50.159 090 45	18
44.761 964 30	47.377 013 23	50.160 119 64	53.122 232 67	56.274 999 49	19
49.422 921 44	52.489 059 36	55.764 530 41	59.263 844 78	63.002 499 44	20
54.456 755 16	58.035 629 40	61.873 338 15	65.988 910 03	70.402 749 39	21
59.893 295 57	64.053 657 90	68.531 938 58	73.352 856 49	78.543 024 33	22
65.764 759 22	70.583 218 82	75.789 813 05	81.416 377 85	87.497 326 76	23
72.105 939 95	77.667 792 42	83.700 896 23	90.245 933 75	97.347 059 43	24
78.954 415 15	85.354 554 78	92.323 976 89	99.914 297 45	108.181 765 38	25
86.350 768 36	93.694 691 93	101.723 134 81	110.501 155 71	120.099 941 91	26
94.338 829 83	102.743 740 75	111.968 216 94	122.093 765 51	133.209 936 11	27
102.965 936 22	112.561 958 71	123.135 356 46	134.787 673 23	147.630 929 72	28
112.283 211 11	123.214 725 20	135.307 538 55	148.687 502 18	163.494 022 69	29
122.345 868 00	134.772 976 84	148.575 217 02	163.907 814 89	180.943 424 96	30
133.213 537 44	147.313 679 87	163.036 986 55	180.574 057 31	200.137 767 45	31
144.950 620 44	160.920 342 66	178.800 315 34	198.823 592 75	221.251 544 20	32
157.626 670 07	175.683 571 79	195.982 343 72	218.806 834 06	244.476 698 62	33
171.316 803 68	191.701 675 39	214.710 754 65	240.688 483 30	270.024 368 48	34
186.102 147 97	209.081 317 80	235.124 722 57	264.648 889 21	298.126 805 33	35
202.070 319 81	227.938 229 81	257.375 947 60	290.885 533 69	329.039 485 86	36
219.315 945 40	248.397 979 35	281.629 782 88	319.614 659 39	363.043 434 45	37
237.941 221 03	270.596 807 59	308.066 463 34	351.073 052 03	400.447 777 89	38
258.056 518 71	294.682 536 24	336.882 445 04	385.519 991 97	441.592 555 68	39
279.781 040 21	320.815 551 82	368.291 865 10	423.239 391 21	486.851 811 25	40
303.243 523 42	349.169 873 72	402.528 132 96	464.542 133 37	536.636 992 37	41
328.583 005 30	379.934 312 99	439.845 664 92	509.768 636 04	591.400 691 61	42
355.949 645 72	413.313 729 59	480.521 774 77	559.291 656 47	651.640 760 77	43
385.505 617 38	449.530 396 61	524.858 734 50	613.519 363 83	717.904 836 85	44
417.426 066 77	488.825 480 32	573.186 020 60	672.898 703 40	790.795 320 54	45
451.900 152 11	531.460 646 15	625.862 762 45	737.919 080 22	870.974 852 59	46
489.132 164 28	577.719 801 07	683.280 411 07	809.116 392 84	959.172 337 85	47
529.342 737 42	627.910 984 16	745.865 648 07	887.077 450 16	1056.189 571 63	48
572.770 156 42	682.368 417 82	814.083 556 40	972.444 807 93	1162.908 528 80	49
619.671 768 93	741.454 733 33	888.441 076 47	1065.922 064 68	1280.299 381 68	50

n \ i	0.5 %	1.0 %	1.5 %	2.0 %	2.5 %
1	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00
2	1.995 024 88	1.990 099 01	1.985 221 67	1.980 392 16	1.975 609 76
3	2.985 099 38	2.970 395 06	2.955 883 42	2.941 560 94	2.927 424 15
4	3.970 248 14	3.940 985 21	3.912 200 42	3.883 883 27	3.856 023 56
5	4.950 495 66	4.901 965 55	4.854 384 65	4.807 728 70	4.761 974 21
6	5.925 866 33	5.853 431 24	5.782 644 97	5.713 459 51	5.645 828 50
7	6.896 384 41	6.795 476 47	6.697 187 17	6.601 430 89	6.508 125 36
8	7.862 074 04	7.728 194 53	7.598 213 96	7.471 991 07	7.349 390 60
9	8.822 959 24	8.651 677 75	8.485 925 08	8.325 481 44	8.170 137 17
10	9.779 063 92	9.566 017 58	9.360 517 32	9.162 236 71	8.970 865 53
11	10.730 411 86	10.471 304 53	10.222 184 55	9.982 585 01	9.752 063 93
12	11.677 026 73	11.367 628 25	11.071 117 79	10.786 848 05	10.514 208 71
13	12.618 932 07	12.255 077 47	11.907 505 21	11.575 341 22	11.257 764 60
14	13.556 151 31	13.133 740 07	12.731 532 22	12.348 373 75	11.983 184 97
15	14.488 707 77	14.003 703 04	13.543 381 50	13.106 248 77	12.690 912 17
16	15.416 624 65	14.865 052 52	14.343 233 01	13.849 263 50	13.381 377 73
17	16.339 925 02	15.717 873 78	15.131 264 05	14.577 709 31	14.055 002 66
18	17.258 631 86	16.562 251 27	15.907 649 31	15.291 871 88	14.712 197 72
19	18.172 768 02	17.398 268 58	16.672 560 89	15.992 031 25	15.353 363 63
20	19.082 356 24	18.226 008 50	17.426 168 37	16.678 462 01	15.978 891 34
21	19.987 419 15	19.045 552 97	18.168 638 79	17.351 433 34	16.589 162 29
22	20.887 979 25	19.856 983 13	18.900 136 73	18.011 209 16	17.184 548 57
23	21.784 058 96	20.660 379 34	19.620 824 37	18.658 048 20	17.765 413 24
24	22.675 680 55	21.455 821 13	20.330 861 45	19.292 204 12	18.332 110 48
25	23.562 866 22	22.243 387 26	21.030 405 37	19.913 925 60	18.884 985 83
26	24.445 638 03	23.023 155 70	21.719 611 20	20.523 456 47	19.424 376 42
27	25.324 017 94	23.795 203 66	22.398 631 72	21.121 035 76	19.950 611 14
28	26.198 027 80	24.559 607 59	23.067 617 46	21.706 897 80	20.464 010 87
29	27.067 689 36	25.316 443 16	23.726 716 71	22.281 272 36	20.964 888 66
30	27.933 024 23	26.065 785 30	24.376 075 58	22.844 384 66	21.453 549 91
31	28.794 053 97	26.807 708 22	25.015 838 01	23.396 455 55	21.930 292 59
32	29.650 799 97	27.542 285 37	25.646 145 82	23.937 701 52	22.395 407 41
33	30.503 283 55	28.269 589 47	26.267 138 74	24.468 334 82	22.849 177 96
34	31.351 525 92	28.989 692 55	26.878 954 42	24.988 563 55	23.291 880 94
35	32.195 548 18	29.702 665 89	27.481 728 49	25.498 591 72	23.723 786 28
36	33.035 371 32	30.408 580 09	28.075 594 58	25.998 619 33	24.145 157 34
37	33.871 016 24	31.107 505 04	28.660 684 31	26.488 842 48	24.556 251 07
38	34.702 503 72	31.799 509 94	29.237 127 40	26.969 453 41	24.957 318 12
39	35.529 854 45	32.484 663 30	29.805 051 63	27.440 640 60	25.348 603 04
40	36.353 089 00	33.163 032 98	30.364 582 88	27.902 588 83	25.730 344 43
41	37.172 227 86	33.834 686 11	30.915 845 20	28.355 479 24	26.102 775 05
42	37.987 291 41	34.499 689 22	31.458 960 79	28.799 489 45	26.466 122 00
43	38.798 299 91	35.158 108 14	31.994 050 04	29.234 793 58	26.820 606 83
44	39.605 273 54	35.810 008 06	32.521 231 57	29.661 562 33	27.166 445 69
45	40.408 232 38	36.455 453 52	33.040 622 23	30.079 963 07	27.503 849 45
46	41.207 196 40	37.094 508 44	33.552 337 18	30.490 159 87	27.833 023 86
47	42.002 185 47	37.727 236 08	34.056 489 83	30.892 313 60	28.154 169 62
48	42.793 219 37	38.353 699 09	34.553 191 95	31.286 581 96	28.467 482 55
49	43.580 317 78	38.973 959 49	35.042 553 65	31.673 119 57	28.773 153 71
50	44.363 500 28	39.588 078 71	35.524 683 39	32.052 078 01	29.071 369 47

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$

3.0 %	3.5 %	4.0 %	4.5 %	5.0 %	i / n
1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1
1.970 873 79	1.966 183 57	1.961 538 46	1.956 937 80	1.952 380 95	2
2.913 469 70	2.899 694 28	2.886 094 67	2.872 667 75	2.859 410 43	3
3.828 611 35	3.801 636 98	3.775 091 03	3.748 964 35	3.723 248 03	4
4.717 098 40	4.673 079 21	4.629 895 22	4.587 525 70	4.545 950 50	5
5.579 707 19	5.515 052 38	5.451 822 33	5.389 976 74	5.329 476 67	6
6.417 191 44	6.328 553 02	6.242 136 86	6.157 872 48	6.075 692 07	7
7.230 282 96	7.114 543 98	7.002 054 67	6.892 700 94	6.786 373 40	8
8.019 692 19	7.873 955 54	7.732 744 87	7.595 886 07	7.463 212 76	9
8.786 108 92	8.607 686 51	8.435 331 61	8.268 790 50	8.107 821 68	10
9.530 202 84	9.316 605 32	9.110 895 78	8.912 718 18	8.721 734 93	11
10.252 624 11	10.001 551 04	9.760 476 71	9.528 916 92	9.306 414 22	12
10.954 003 99	10.663 334 33	10.385 073 76	10.118 580 78	9.863 251 64	13
11.634 955 33	11.302 738 49	10.985 647 85	10.682 852 42	10.393 572 99	14
12.296 073 14	11.920 520 28	11.563 122 93	11.222 825 28	10.898 640 94	15
12.937 935 09	12.517 410 90	12.118 387 43	11.739 545 73	11.379 658 04	16
13.561 102 03	13.094 116 81	12.652 295 61	12.234 015 05	11.837 769 56	17
14.166 118 47	13.651 320 59	13.165 668 85	12.707 191 43	12.274 066 25	18
14.753 513 08	14.189 681 73	13.659 296 97	13.159 991 80	12.689 586 90	19
15.323 799 11	14.709 837 42	14.133 939 40	13.593 293 59	13.085 320 86	20
15.877 474 86	15.212 403 30	14.590 326 34	14.007 936 45	13.462 210 34	21
16.415 024 14	15.697 974 20	15.029 159 95	14.404 723 88	13.821 152 71	22
16.936 916 64	16.167 124 84	15.451 115 33	14.784 424 76	14.163 002 58	23
17.443 608 39	16.620 410 47	15.856 841 67	15.147 774 89	14.488 573 88	24
17.935 542 12	17.058 367 60	16.246 963 14	15.495 478 37	14.798 641 79	25
18.413 147 69	17.481 514 59	16.622 079 94	15.828 208 96	15.093 944 57	26
18.876 842 42	17.890 352 26	16.982 769 18	16.146 611 45	15.375 185 30	27
19.327 031 47	18.285 364 51	17.329 585 75	16.451 302 82	15.643 033 62	28
19.764 108 23	18.667 018 85	17.663 063 22	16.742 873 51	15.898 127 26	29
20.188 454 59	19.035 767 00	17.983 714 63	17.021 888 53	16.141 073 58	30
20.600 441 35	19.392 045 41	18.292 033 30	17.288 888 54	16.372 451 03	31
21.000 428 49	19.736 275 76	18.588 493 56	17.544 390 95	16.592 810 50	32
21.388 765 53	20.068 865 47	18.873 551 50	17.788 890 86	16.802 676 67	33
21.765 791 78	20.390 208 18	19.147 645 67	18.022 862 07	17.002 549 21	34
22.131 836 68	20.700 684 23	19.411 197 76	18.246 757 96	17.192 904 01	35
22.487 220 07	21.000 661 10	19.664 613 23	18.461 012 40	17.374 194 29	36
22.832 252 50	21.290 493 81	19.908 281 95	18.666 040 58	17.546 851 71	37
23.167 235 44	21.570 525 42	20.142 578 80	18.862 239 79	17.711 287 34	38
23.492 461 59	21.841 087 36	20.367 864 23	19.049 990 23	17.867 892 71	39
23.808 215 13	22.102 499 87	20.584 484 84	19.229 655 72	18.017 040 67	40
24.114 771 97	22.355 072 34	20.792 773 88	19.401 584 42	18.159 086 35	41
24.412 399 97	22.599 103 71	20.993 051 81	19.566 109 49	18.294 367 96	42
24.701 359 20	22.834 882 81	21.185 626 74	19.723 549 75	18.423 207 58	43
24.981 902 13	23.062 688 70	21.370 794 94	19.874 210 29	18.545 911 98	44
25.254 273 92	23.282 791 02	21.548 841 29	20.018 383 05	18.662 773 31	45
25.518 712 54	23.495 450 26	21.720 039 70	20.156 347 42	18.774 069 82	46
25.775 449 07	23.700 918 13	21.884 653 56	20.288 370 74	18.880 066 50	47
26.024 707 83	23.899 437 80	22.042 936 12	20.414 708 84	18.981 015 71	48
26.266 706 64	24.091 244 25	22.195 130 88	20.535 606 54	19.077 157 82	49
26.501 656 93	24.276 564 50	22.341 472 00	20.651 298 13	19.168 721 73	50

n \ i	5.5 %	6.0 %	6.5 %	7.0 %	7.5 %
1	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00
2	1.947 867 30	1.943 396 23	1.938 967 14	1.934 579 44	1.930 232 56
3	2.846 319 71	2.833 392 67	2.820 626 42	2.808 018 17	2.795 565 17
4	3.697 933 38	3.673 011 95	3.648 475 51	3.624 316 04	3.600 525 74
5	4.505 150 12	4.465 105 61	4.425 798 60	4.387 211 26	4.349 326 27
6	5.270 284 48	5.212 363 79	5.155 679 44	5.100 197 44	5.045 884 90
7	5.995 530 31	5.917 324 33	5.841 013 56	5.766 539 66	5.693 846 42
8	6.682 967 12	6.582 381 44	6.484 519 77	6.389 289 40	6.296 601 32
9	7.334 565 99	7.209 793 81	7.088 750 96	6.971 298 51	6.857 303 55
10	7.952 195 25	7.801 692 27	7.656 104 19	7.515 232 25	7.378 887 03
11	8.537 625 83	8.360 087 05	8.188 830 22	8.023 581 54	7.864 080 96
12	9.092 536 33	8.886 874 58	8.689 042 46	8.498 674 34	8.315 424 15
13	9.618 517 85	9.383 843 94	9.158 725 32	8.942 686 30	8.735 278 27
14	10.117 078 53	9.852 682 96	9.599 742 08	9.357 650 74	9.125 840 26
15	10.589 647 90	10.294 983 93	10.013 842 33	9.745 467 99	9.489 153 73
16	11.037 580 94	10.712 248 99	10.402 668 85	10.107 914 01	9.827 119 75
17	11.462 162 03	11.105 395 27	10.767 764 18	10.446 648 60	10.141 506 74
18	11.864 608 56	11.477 259 69	11.110 576 70	10.763 222 99	10.433 959 76
19	12.246 074 47	11.827 603 48	11.432 466 38	11.059 086 91	10.706 009 08
20	12.607 653 52	12.158 116 49	11.734 710 22	11.335 595 24	10.959 078 21
21	12.950 382 48	12.469 921 22	12.018 507 25	11.594 014 25	11.194 491 36
22	13.275 244 06	12.764 076 62	12.284 983 33	11.835 527 33	11.413 480 33
23	13.583 169 73	13.041 581 72	12.535 195 62	12.061 240 50	11.617 191 01
24	13.875 042 39	13.303 378 98	12.770 136 73	12.272 187 38	11.806 689 31
25	14.151 698 95	13.550 357 53	12.990 738 71	12.469 334 00	11.982 966 80
26	14.413 932 66	13.783 356 16	13.197 876 73	12.653 583 18	12.146 945 86
27	14.662 495 41	14.003 166 19	13.392 372 51	12.825 778 67	12.299 484 52
28	14.898 099 91	14.210 534 14	13.574 997 66	12.986 709 04	12.441 380 95
29	15.121 421 72	14.406 164 28	13.746 476 68	13.137 111 25	12.573 377 63
30	15.333 101 16	14.590 721 02	13.907 489 84	13.277 674 07	12.696 165 24
31	15.533 745 17	14.764 831 15	14.058 675 91	13.409 041 18	12.810 386 27
32	15.723 929 07	14.929 085 99	14.200 634 65	13.531 814 19	12.916 638 39
33	15.904 198 17	15.084 043 39	14.333 929 25	13.646 555 32	13.015 477 57
34	16.075 069 36	15.230 229 61	14.459 088 50	13.753 790 02	13.107 420 99
35	16.237 032 57	15.368 141 14	14.576 608 92	13.854 009 36	13.192 949 76
36	16.390 552 20	15.498 246 36	14.686 956 73	13.947 672 30	13.272 511 41
37	16.536 068 43	15.620 987 13	14.790 569 70	14.035 207 76	13.346 522 24
38	16.673 998 51	15.736 780 31	14.887 858 87	14.117 016 60	13.415 369 52
39	16.804 737 93	15.846 019 16	14.979 210 21	14.193 473 45	13.479 413 51
40	16.928 661 54	15.949 074 68	15.064 986 11	14.264 928 46	13.538 989 31
41	17.046 124 69	16.046 296 87	15.145 526 87	14.331 708 84	13.594 408 66
42	17.157 464 16	16.138 015 92	15.221 151 99	14.394 120 41	13.645 961 55
43	17.262 999 20	16.224 543 32	15.292 161 49	14.452 448 98	13.693 917 72
44	17.363 032 42	16.306 172 94	15.358 837 08	14.506 961 67	13.738 528 11
45	17.457 850 63	16.383 182 02	15.421 443 27	14.557 908 10	13.780 026 15
46	17.547 725 72	16.455 832 09	15.480 228 42	14.605 521 59	13.818 628 98
47	17.632 915 37	16.524 369 90	15.535 425 75	14.650 020 18	13.854 538 58
48	17.713 663 86	16.589 028 21	15.587 254 22	14.691 607 64	13.887 942 87
49	17.790 202 71	16.650 026 61	15.635 919 46	14.730 474 43	13.919 016 62
50	17.862 751 39	16.707 572 27	15.681 614 51	14.766 798 53	13.947 922 44

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$

8.0 %	8.5 %	9.0 %	9.5 %	10.0 %	i / n
1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1.000 000 00	1
1.925 925 93	1.921 658 99	1.917 431 19	1.913 242 01	1.909 090 91	2
2.783 264 75	2.771 114 27	2.759 111 19	2.747 252 98	2.735 537 19	3
3.577 096 99	3.554 022 37	3.531 294 67	3.508 906 83	3.486 851 99	4
4.312 126 84	4.275 596 66	4.239 719 88	4.204 481 12	4.169 865 45	5
4.992 710 04	4.940 642 08	4.889 651 26	4.839 708 79	4.790 786 77	6
5.622 879 66	5.553 587 17	5.485 918 59	5.419 825 38	5.355 260 70	7
6.206 370 06	6.118 513 52	6.032 952 84	5.949 612 22	5.868 418 82	8
6.746 638 94	6.639 182 97	6.534 819 11	6.433 435 81	6.334 926 20	9
7.246 887 91	7.119 062 64	6.995 246 89	6.875 283 85	6.759 023 82	10
7.710 081 40	7.561 348 06	7.417 657 70	7.278 798 03	7.144 567 11	11
8.138 964 26	7.968 984 39	7.805 190 55	7.647 304 14	7.495 061 01	12
8.536 078 02	8.344 686 07	8.160 725 28	7.983 839 40	7.813 691 82	13
8.903 775 94	8.690 954 90	8.486 903 92	8.291 177 53	8.103 356 20	14
9.244 236 98	9.010 096 68	8.786 150 39	8.571 851 63	8.366 687 46	15
9.559 478 69	9.304 236 58	9.060 688 43	8.828 175 00	8.606 079 51	16
9.851 369 16	9.575 333 25	9.312 558 19	9.062 260 28	8.823 708 64	17
10.121 638 11	9.825 191 94	9.543 631 37	9.276 036 78	9.021 553 31	18
10.371 887 14	10.055 476 44	9.755 625 11	9.471 266 47	9.201 412 10	19
10.603 599 20	10.267 720 22	9.950 114 78	9.649 558 42	9.364 920 09	20
10.818 147 41	10.463 336 61	10.128 545 67	9.812 382 12	9.513 563 72	21
11.016 803 16	10.643 628 21	10.292 243 73	9.961 079 56	9.648 694 29	22
11.200 743 66	10.809 795 59	10.442 425 44	10.096 876 31	9.771 540 26	23
11.371 058 95	10.962 945 24	10.580 206 83	10.220 891 61	9.883 218 42	24
11.528 758 28	11.104 097 00	10.706 611 77	10.334 147 59	9.984 744 02	25
11.674 776 19	11.234 190 78	10.822 579 60	10.437 577 70	10.077 040 02	26
11.809 977 95	11.354 092 88	10.928 972 11	10.532 034 43	10.160 945 47	27
11.935 164 77	11.464 601 74	11.026 579 92	10.618 296 29	10.237 223 16	28
12.051 078 49	11.566 453 21	11.116 128 37	10.697 074 23	10.306 566 51	29
12.158 406 01	11.660 325 54	11.198 282 91	10.769 017 56	10.369 605 91	30
12.257 783 34	11.746 843 82	11.273 654 04	10.834 719 24	10.426 914 47	31
12.349 799 39	11.826 584 16	11.342 801 87	10.894 720 76	10.479 013 15	32
12.434 999 44	11.900 077 57	11.406 240 25	10.949 516 68	10.526 375 59	33
12.513 888 37	11.967 813 43	11.464 440 60	10.999 558 61	10.569 432 36	34
12.586 933 67	12.030 242 79	11.517 835 41	11.045 259 01	10.608 574 87	35
12.654 568 22	12.087 781 37	11.566 821 48	11.086 994 53	10.644 158 97	36
12.717 192 79	12.140 812 33	11.611 762 82	11.125 109 16	10.676 508 16	37
12.775 178 51	12.189 688 78	11.652 993 42	11.159 917 04	10.705 916 51	38
12.828 868 99	12.234 736 20	11.690 819 65	11.191 705 06	10.732 651 37	39
12.878 582 40	12.276 254 57	11.725 522 61	11.220 735 21	10.756 955 79	40
12.924 613 33	12.314 520 34	11.757 360 20	11.247 246 77	10.779 050 72	41
12.967 234 57	12.349 788 33	11.786 568 99	11.271 458 24	10.799 137 02	42
13.006 698 67	12.382 293 39	11.813 366 04	11.293 569 17	10.817 397 29	43
13.043 239 51	12.412 251 97	11.837 950 50	11.313 761 80	10.833 997 53	44
13.077 073 62	12.439 863 57	11.860 505 04	11.332 202 55	10.849 088 67	45
13.108 401 50	12.465 312 05	11.881 197 29	11.349 043 43	10.862 807 88	46
13.137 408 80	12.488 766 86	11.900 181 00	11.364 423 22	10.875 279 89	47
13.164 267 41	12.510 384 20	11.917 597 25	11.378 468 70	10.886 618 08	48
13.189 136 49	12.530 308 02	11.933 575 46	11.391 295 61	10.896 925 53	49
13.212 163 41	12.548 670 99	11.948 234 36	11.403 009 69	10.906 295 94	50

付録２

日本全会社生命表(1984 ～'85)

日　本　全　会　社

年齢 x	生存数 l_x	死亡数 d_x	生存率 p_x	死亡率 q_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
0	100.000	137	0.99863	0.00137	75.99
1	99.863	98	0.99902	0.00098	75.09
2	99.765	67	0.99933	0.00067	74.16
3	99.698	48	0.99952	0.00048	73.21
4	99.650	39	0.99961	0.00039	72.25
5	99.611	36	0.99964	0.00036	71.28
6	99.575	34	0.99966	0.00034	70.30
7	99.541	31	0.99969	0.00031	69.33
8	99.510	26	0.99974	0.00026	68.35
9	99.484	22	0.99978	0.00022	67.37
10	99.462	19	0.99981	0.00019	66.38
11	99.443	17	0.99983	0.00017	65.39
12	99.426	20	0.99980	0.00020	64.40
13	99.406	29	0.99971	0.00029	63.42
14	99.377	42	0.99958	0.00042	62.44
15	99.335	58	0.99942	0.00058	61.46
16	99.277	75	0.99924	0.00076	60.50
17	99.202	94	0.99905	0.00095	59.54
18	99.108	108	0.99891	0.00109	58.60
19	99.000	116	0.99883	0.00117	57.66
20	98.884	118	0.99881	0.00119	56.73
21	98.766	113	0.99886	0.00114	55.80
22	98.653	102	0.99897	0.00103	54.86
23	98.551	95	0.99904	0.00096	53.92
24	98.456	91	0.99908	0.00092	52.97
25	98.365	90	0.99909	0.00091	52.02
26	98.275	88	0.99910	0.00090	51.06
27	98.187	87	0.99911	0.00089	50.11
28	98.100	85	0.99913	0.00087	49.15
29	98.015	84	0.99914	0.00086	48.19
30	97.931	84	0.99914	0.00086	47.24
31	97.847	85	0.99913	0.00087	46.28
32	97.762	89	0.99909	0.00091	45.32
33	97.673	95	0.99903	0.00097	44.36
34	97.578	101	0.99897	0.00103	43.40
35	97.477	107	0.99890	0.00110	42.44
36	97.370	115	0.99882	0.00118	41.49
37	97.255	124	0.99873	0.00127	40.54
38	97.131	134	0.99862	0.00138	39.59
39	96.997	147	0.99848	0.00152	38.64
40	96.850	162	0.99833	0.00167	37.70
41	96.688	178	0.99816	0.00184	36.76
42	96.510	193	0.99800	0.00200	35.83
43	96.317	210	0.99782	0.00218	34.90
44	96.107	228	0.99763	0.00237	33.98
45	95.879	247	0.99742	0.00258	33.06
46	95.632	272	0.99716	0.00284	32.14
47	95.360	300	0.99685	0.00315	31.23
48	95.060	334	0.99649	0.00351	30.33
49	94.726	373	0.99606	0.00394	29.43
50	94.353	417	0.99558	0.00442	28.55
51	93.936	464	0.99506	0.00494	27.67
52	93.472	503	0.99462	0.00538	26.81
53	92.969	546	0.99413	0.00587	25.95
54	92.423	594	0.99357	0.00643	25.10

生　命　表（1984～'85）（男子）

年　齢 x	生存数 l_x	死亡数 d_x	生存率 p_x	死亡率 q_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
55	91.829	647	0.99295	0.00705	24.26
56	91.182	699	0.99233	0.00767	23.43
57	90.483	746	0.99175	0.00825	22.60
58	89.737	795	0.99114	0.00886	21.79
59	88.942	846	0.99049	0.00951	20.98
60	88.096	900	0.98978	0.01022	20.17
61	87.196	960	0.98899	0.01101	19.38
62	86.236	1.038	0.98796	0.01204	18.59
63	85.198	1.124	0.98681	0.01319	17.81
64	84.074	1.218	0.98551	0.01449	17.04
65	82.856	1.321	0.98406	0.01594	16.28
66	81.535	1.433	0.98243	0.01757	15.54
67	80.102	1.554	0.98060	0.01940	14.81
68	78.548	1.685	0.97855	0.02145	14.09
69	76.863	1.825	0.97625	0.02375	13.39
70	75.038	1.976	0.97367	0.02633	12.70
71	73.062	2.135	0.97078	0.02922	12.03
72	70.927	2.302	0.96754	0.03246	11.38
73	68.625	2.477	0.96391	0.03609	10.74
74	66.148	2.656	0.95985	0.04015	10.13
75	63.492	2.837	0.95531	0.04469	9.53
76	60.655	3.018	0.95024	0.04976	8.95
77	57.637	3.195	0.94456	0.05544	8.39
78	54.442	3.363	0.93823	0.06177	7.86
79	51.079	3.516	0.93116	0.06884	7.34
80	47.563	3.649	0.92328	0.07672	6.85
81	43.914	3.755	0.91450	0.08550	6.37
82	40.159	3.826	0.90474	0.09526	5.92
83	36.333	3.855	0.89389	0.10611	5.50
84	32.478	3.837	0.88186	0.11814	5.09
85	28.641	3.765	0.86853	0.13147	4.70
86	24.876	3.637	0.85379	0.14621	4.34
87	21.239	3.451	0.83752	0.16248	4.00
88	17.788	3.209	0.81961	0.18039	3.67
89	14.579	2.917	0.79993	0.20007	3.37
90	11.662	2.584.4	0.77839	0.22161	3.09
91	9.077.6	2.225.2	0.75487	0.24513	2.83
92	6.852.4	1.855.0	0.72929	0.27071	2.59
93	4.997.4	1.491.4	0.70157	0.29843	2.36
94	3.506.0	1.151.1	0.67167	0.32833	2.15
95	2.354.9	848.7	0.63960	0.36040	1.96
96	1.506.2	594.39	0.60537	0.39463	1.79
97	911.81	392.91	0.56909	0.43091	1.63
98	518.90	243.41	0.53091	0.46909	1.48
99	275.49	140.21	0.49105	0.50895	1.35
100	135.28	74.430	0.44981	0.55019	1.23
101	60.850	36.048	0.40759	0.59241	1.12
102	24.802	15.7527	0.36486	0.63514	1.02
103	9.0493	6.1341	0.32215	0.67785	0.91
104	2.9152	2.0987	0.28010	0.71990	0.78
105	0.8165	0.8165	0.00000	1.00000	0.50

年齢 x	生存数 l_x	死亡数 d_x	生存率 p_x	死亡率 q_x	平均余命 $\mathring{e}_x$
0	100.000	126	0.99874	0.00126	82.06
1	99.874	94	0.99906	0.00094	81.17
2	99.780	65	0.99935	0.00065	80.24
3	99.715	44	0.99956	0.00044	79.29
4	99.671	30	0.99970	0.00030	78.33
5	99.641	23	0.99977	0.00023	77.35
6	99.618	21	0.99979	0.00021	76.37
7	99.597	19	0.99981	0.00019	75.39
8	99.578	18	0.99982	0.00018	74.40
9	99.560	16	0.99984	0.00016	73.41
10	99.544	15	0.99985	0.00015	72.43
11	99.529	14	0.99986	0.00014	71.44
12	99.515	13	0.99987	0.00013	70.45
13	99.502	15	0.99985	0.00015	69.46
14	99.487	19	0.99981	0.00019	68.47
15	99.468	22	0.99978	0.00022	67.48
16	99.446	26	0.99974	0.00026	66.49
17	99.420	31	0.99969	0.00031	65.51
18	99.389	35	0.99965	0.00035	64.53
19	99.354	38	0.99962	0.00038	63.55
20	99.316	40	0.99960	0.00040	62.58
21	99.276	40	0.99960	0.00040	61.60
22	99.236	41	0.99959	0.00041	60.63
23	99.195	41	0.99959	0.00041	59.65
24	99.154	42	0.99958	0.00042	58.68
25	99.112	43	0.99957	0.00043	57.70
26	99.069	46	0.99954	0.00046	56.73
27	99.023	49	0.99951	0.00049	55.75
28	98.974	52	0.99947	0.00053	54.78
29	98.922	55	0.99944	0.00056	53.81
30	98.867	58	0.99941	0.00059	52.84
31	98.809	61	0.99938	0.00062	51.87
32	98.748	64	0.99935	0.00065	50.90
33	98.684	68	0.99931	0.00069	49.93
34	98.616	74	0.99925	0.00075	48.97
35	98.542	80	0.99919	0.00081	48.00
36	98.462	85	0.99914	0.00086	47.04
37	98.377	90	0.99909	0.00091	46.08
38	98.287	94	0.99904	0.00096	45.12
39	98.193	101	0.99897	0.00103	44.17
40	98.092	108	0.99890	0.00110	43.21
41	97.984	117	0.99881	0.00119	42.26
42	97.867	125	0.99872	0.00128	41.31
43	97.742	134	0.99863	0.00137	40.36
44	97.608	143	0.99853	0.00147	39.42
45	97.465	154	0.99842	0.00158	38.47
46	97.311	164	0.99831	0.00169	37.53
47	97.147	178	0.99817	0.00183	36.60
48	96.969	193	0.99801	0.00199	35.66
49	96.776	208	0.99785	0.00215	34.73
50	96.568	225	0.99767	0.00233	33.81
51	96.343	243	0.99748	0.00252	32.88
52	96.100	261	0.99728	0.00272	31.96
53	95.839	280	0.99708	0.00292	31.05
54	95.559	298	0.99688	0.00312	30.14

生　命　表（1984～'85）（女子）

年齢 x	生存数 l_x	死亡数 d_x	生存率 p_x	死亡率 q_x	平均余命 e_x
55	95.261	315	0.99669	0.00331	29.23
56	94.946	335	0.99647	0.00353	28.33
57	94.611	358	0.99622	0.00378	27.43
58	94.253	384	0.99593	0.00407	26.53
59	93.869	415	0.99558	0.00442	25.64
60	93.454	450	0.99519	0.00481	24.75
61	93.004	493	0.99470	0.00530	23.86
62	92.511	539	0.99417	0.00583	22.99
63	91.972	592	0.99356	0.00644	22.12
64	91.380	652	0.99287	0.00713	21.26
65	90.728	718	0.99209	0.00791	20.41
66	90.010	791	0.99121	0.00879	19.57
67	89.219	873	0.99021	0.00979	18.74
68	88.346	965	0.98908	0.01092	17.92
69	87.381	1.066	0.98780	0.01220	17.11
70	86.315	1.178	0.98635	0.01365	16.32
71	85.137	1.302	0.98471	0.01529	15.53
72	83.835	1.437	0.98286	0.01714	14.77
73	82.398	1.585	0.98076	0.01924	14.02
74	80.813	1.746	0.97839	0.02161	13.28
75	79.067	1.921	0.97571	0.02429	12.56
76	77.146	2.108	0.97268	0.02732	11.86
77	75.038	2.307	0.96925	0.03075	11.18
78	72.731	2.518	0.96538	0.03462	10.52
79	70.213	2.737	0.96102	0.03898	9.88
80	67.476	2.962	0.95610	0.04390	9.26
81	64.514	3.190	0.95055	0.04945	8.67
82	61.324	3.416	0.94430	0.05570	8.09
83	57.908	3.633	0.93727	0.06273	7.54
84	54.275	3.834	0.92936	0.07064	7.01
85	50.441	4.011	0.92048	0.07952	6.50
86	46.430	4.155	0.91052	0.08948	6.02
87	42.275	4.255	0.89936	0.10064	5.56
88	38.020	4.301	0.88687	0.11313	5.13
89	33.719	4.285	0.87293	0.12707	4.72
90	29.434	4.198	0.85739	0.14261	4.34
91	25.236	4.035	0.84012	0.15988	3.98
92	21.201	3.796	0.82096	0.17904	3.64
93	17.405	3.485	0.79977	0.20023	3.32
94	13.920	3.112	0.77641	0.22359	3.03
95	10.808	2.693.7	0.75077	0.24923	2.75
96	8.114.3	2.249.9	0.72272	0.27728	2.50
97	5.864.4	1.805.1	0.69220	0.30780	2.27
98	4.059.3	1.383.5	0.65917	0.34083	2.06
99	2.675.8	1.007.1	0.62363	0.37637	1.86
100	1.668.7	691.41	0.58566	0.41434	1.69
101	977.29	444.27	0.54541	0.45459	1.53
102	533.02	264.85	0.50312	0.49688	1.38
103	268.17	145.04	0.45915	0.54085	1.25
104	123.13	72.162	0.41394	0.58606	1.13
105	50.968	32.209	0.36805	0.63195	1.03
106	18.759	12.7154	0.32217	0.67783	0.93
107	6.0436	4.3693	0.27703	0.72297	0.84
108	1.6743	1.2834	0.23348	0.76652	0.73
109	0.3909	0.3909	0.00000	1.00000	0.50

付録3

計算基数表

日本全会社生命表(1984～'85) 男子
5%, 5.5%, 5.75%, 6%

男 5.0%

年齢	D_x	N_x	S_x
0	100,000.	2,021,644.	38,265,987.
1	95,108.	1,921,644.	36,244,343.
2	90,490.	1,826,536.	34,322,699.
3	86,123.	1,736,046.	32,496,163.
4	81,982.	1,649,923.	30,760,117.
5	78,048.	1,567,941.	29,110,194.
6	74,304.	1,489,893.	27,542,253.
7	70,742.	1,415,589.	26,052,360.
8	67,352.	1,344,847.	24,636,771.
9	64,128.	1,277,495.	23,291,924.
10	61,061.	1,213,367.	22,014,429.
11	58,142.	1,152,306.	20,801,062.
12	55,364.	1,094,164.	19,648,756.
13	52,717.	1,038,800.	18,554,592.
14	50,192.	986,083.	17,515,792.
15	47,782.	935,891.	16,529,709.
16	45,480.	888,109.	15,593,818.
17	43,282.	842,629.	14,705,709.
18	41,181.	799,347.	13,863,080.
19	39,178.	758,166.	13,063,733.
20	37,268.	718,988.	12,305,567.
21	35,451.	681,720.	11,586,579.
22	33,725.	646,269.	10,904,859.
23	32,085.	612,544.	10,258,590.
24	30,528.	580,459.	9,646,046.
25	29,047.	549,931.	9,065,587.
26	27,639.	520,884.	8,515,656.
27	26,299.	493,245.	7,994,772.
28	25,025.	466,946.	7,501,527.
29	23,812.	441,921.	7,034,581.
30	22,659.	418,109.	6,592,660.
31	21,562.	395,450.	6,174,551.
32	20,517.	373,888.	5,779,101.
33	19,522.	353,371.	5,405,213.
34	18,574.	333,849.	5,051,842.
35	17,672.	315,275.	4,717,993.
36	16,812.	297,603.	4,402,718.
37	15,992.	280,791.	4,105,115.
38	15,211.	264,799.	3,824,324.
39	14,467.	249,588.	3,559,525.
40	13,757.	235,121.	3,309,937.
41	13,080.	221,364.	3,074,816.
42	12,434.	208,284.	2,853,452.
43	11,819.	195,850.	2,645,168.
44	11,231.	184,031.	2,449,318.
45	10,671.	172,800.	2,265,287.
46	10,137.	162,129.	2,092,487.
47	9,626.5	151,991.7	1,930,357.9
48	9,139.3	142,365.2	1,778,366.2
49	8,673.5	133,225.9	1,636,001.0
50	8,227.9	124,552.4	1,502,775.1
51	7,801.5	116,324.5	1,378,222.7
52	7,393.3	108,523.0	1,261,898.2
53	7,003.3	101,129.7	1,153,375.2
54	6,630.7	94,126.4	1,052,245.5

基　数　表

5.0%男

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
0	133.70	3,823.33	204,380.07
1	91.084	3,689.633	200,556.740
2	59.306	3,598.549	196,867.107
3	40.465	3,539.243	193,268.558
4	31.312	3,498.778	189,729.315
5	27.527	3,467.466	186,230.537
6	24.760	3,439.939	182,763.071
7	21.500	3,415.179	179,323.132
8	17.174	3,393.679	175,907.953
9	13.840	3,376.505	172,514.274
10	11.383	3,362.665	169,137.769
11	9.7000	3,351.2820	165,775.1042
12	10.868	3,341.582	162,423.822
13	15.009	3,330.714	159,082.240
14	20.702	3,315.705	155,751.526
15	27.227	3,295.003	152,435.821
16	33.530	3,267.776	149,140.818
17	40.024	3,234.246	145,873.042
18	43.795	3,194.222	142,638.796
19	44.799	3,150.427	139,444.574
20	43.401	3,105.628	136,294.147
21	39.583	3,062.227	133,188.519
22	34.028	3,022.644	130,126.292
23	30.184	2,988.616	127,103.648
24	27.536	2,958.432	124,115.032
25	25.937	2,930.896	121,156.600
26	24.153	2,904.959	118,225.704
27	22.741	2,880.806	115,320.745
28	21.160	2,858.065	112,439.939
29	19.916	2,836.905	109,581.874
30	18.967	2,816.989	106,744.969
31	18.279	2,798.022	103,927.980
32	18.228	2,779.743	101,129.958
33	18.530	2,761.515	98,350.215
34	18.762	2,742.985	95,588.700
35	18.931	2,724.223	92,845.715
36	19.377	2,705.292	90,121.492
37	19.899	2,685.915	87,416.200
38	20.479	2,666.016	84,730.285
39	21.396	2,645.537	82,064.269
40	22.457	2,624.141	79,418.732
41	23.500	2,601.684	76,794.591
42	24.267	2,578.184	74,192.907
43	25.147	2,553.917	71,614.723
44	26.002	2,528.770	69,060.806
45	26.828	2,502.768	66,532.036
46	28.136	2,475.940	64,029.268
47	29.555	2,447.804	61,553.328
48	31.338	2,418.249	59,105.524
49	33.330	2,386.911	56,687.275
50	35.488	2,353.581	54,300.364
51	37.607	2,318.093	51,946.783
52	38.827	2,280.486	49,628.690
53	40.139	2,241.659	47,348.204
54	41.588	2,201.520	45,106.545

男 5.0%

年齢	D_x	N_x	S_x
55	6,274.3	87,495.7	958,119.1
56	5,933.5	81,221.4	870,623.4
57	5,607.6	75,287.9	789,402.0
58	5,296.5	69,680.3	714,114.1
59	4,999.6	64,383.8	644,433.8
60	4,716.3	59,384.2	580,050.0
61	4,445.8	54,667.9	520,665.8
62	4,187.5	50,222.1	465,997.9
63	3,940.1	46,034.6	415,775.8
64	3,702.9	42,094.5	369,741.2
65	3,475.5	38,391.6	327,646.7
66	3,257.2	34,916.1	289,255.1
67	3,047.6	31,658.9	254,339.0
68	2,846.2	28,611.3	222,680.1
69	2,652.5	25,765.1	194,068.8
70	2,466.2	23,112.6	168,303.7
71	2,286.9	20,646.4	145,191.1
72	2,114.4	18,359.5	124,544.7
73	1,948.3	16,245.1	106,185.2
74	1,788.6	14,296.8	89,940.1
75	1,635.0	12,508.2	75,643.3
76	1,487.6	10,873.2	63,135.1
77	1,346.2	9,385.6	52,261.9
78	1,211.1	8,039.4	42,876.3
79	1,082.2	6,828.3	34,836.9
80	959.68	5,746.12	28,008.64
81	843.86	4,786.44	22,262.52
82	734.95	3,942.58	17,476.08
83	633.27	3,207.63	13,533.50
84	539.12	2,574.36	10,325.87
85	452.79	2,035.24	7,751.51
86	374.54	1,582.45	5,716.27
87	304.55	1,207.91	4,133.82
88	242.92	903.36	2,925.91
89	189.62	660.44	2,022.55
90	144.46	470.82	1,362.11
91	107.09	326.36	891.29
92	76.989	219.269	564.931
93	53.474	142.280	345.662
94	35.729	88.806	203.382
95	22.855	53.077	114.576
96	13.922	30.222	61.499
97	8.0268	16.2999	31.2772
98	4.3504	8.2731	14.9773
99	2.1997	3.9227	6.7042
100	1.0287	1.7230	2.7815
101	0.44070	0.69432	1.05845
102	0.17107	0.25362	0.36413
103	0.05945	0.08255	0.11051
104	0.01824	0.02310	0.02796
105	0.00486	0.00486	0.00486

5. 0%男

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
55	43.142	2,159.932	42,905.025
56	44.390	2,116.790	40,745.093
57	45.118	2,072.400	38,628.303
58	45.792	2,027.282	36,555.903
59	46.410	1,981.490	34,528.621
60	47.021	1,935.080	32,547.131
61	47.767	1,888.059	30,612.051
62	49.189	1,840.292	28,723.992
63	50.728	1,791.103	26,883.700
64	52.353	1,740.375	25,092.597
65	54.076	1,688.022	23,352.222
66	55.867	1,633.946	21,664.200
67	57.700	1,578.079	20,030.254
68	59.584	1,520.379	18,452.175
69	61.462	1,460.795	16,931.796
70	63.378	1,399.333	15,471.001
71	65.217	1,335.955	14,071.668
72	66.970	1,270.738	12,735.713
73	68.630	1,203.768	11,464.975
74	70.085	1,135.138	10,261.207
75	71.296	1,065.053	9,126.069
76	72.233	993.757	8,061.016
77	72.828	921.524	7,067.259
78	73.007	848.696	6,145.735
79	72.694	775.689	5,297.039
80	71.851	702.995	4,521.350
81	70.418	631.144	3,818.355
82	68.333	560.726	3,187.211
83	65.572	492.393	2,626.485
84	62.158	426.821	2,134.092
85	58.087	364.663	1,707.271
86	53.440	306.576	1,342.608
87	48.293	253.136	1,036.032
88	42.768	204.843	782.896
89	37.025	162.075	578.053
90	31.241	125.050	415.978
91	25.618	93.809	290.928
92	20.339	68.191	197.119
93	15.574	47.852	128.928
94	11.448	32.278	81.076
95	8.0385	20.8300	48.7982
96	5.3617	12.7915	27.9682
97	3.3755	7.4298	15.1767
98	1.9916	4.0543	7.7469
99	1.0926	2.0627	3.6926
100	0.55236	0.97006	1.62987
101	0.25478	0.41770	0.65981
102	0.10604	0.16292	0.24211
103	0.03932	0.05688	0.07919
104	0.01281	0.01756	0.02231
105	0.00475	0.00475	0.00475

男 5.5%

年齢	D_x	N_x	S_x
0	100,000.	1,862,150.	32,941,893.
1	94,657.	1,762,150.	31,079,743.
2	89,634.	1,667,493.	29,317,593.
3	84,904.	1,577,859.	27,650,100.
4	80,439.	1,492,955.	26,072,241.
5	76,216.	1,412,516.	24,579,286.
6	72,216.	1,336,300.	23,166,770.
7	68,428.	1,264,084.	21,830,470.
8	64,841.	1,195,656.	20,566,386.
9	61,444.	1,130,815.	19,370,730.
10	58,228.	1,069,371.	18,239,915.
11	55,182.	1,011,143.	17,170,544.
12	52,296.	955,961.	16,159,401.
13	49,560.	903,665.	15,203,440.
14	46,963.	854,105.	14,299,775.
15	44,495.	807,142.	13,445,670.
16	42,151.	762,647.	12,638,528.
17	39,924.	720,496.	11,875,881.
18	37,806.	680,572.	11,155,385.
19	35,796.	642,766.	10,474,813.
20	33,890.	606,970.	9,832,047.
21	32,085.	573,080.	9,225,077.
22	30,378.	540,995.	8,651,997.
23	28,764.	510,617.	8,111,002.
24	27,238.	481,853.	7,600,385.
25	25,795.	454,615.	7,118,532.
26	24,428.	428,820.	6,663,917.
27	23,133.	404,392.	6,235,097.
28	21,908.	381,259.	5,830,705.
29	20,748.	359,351.	5,449,446.
30	19,649.	338,603.	5,090,095.
31	18,609.	318,954.	4,751,492.
32	17,623.	300,345.	4,432,538.
33	16,690.	282,722.	4,132,193.
34	15,804.	266,032.	3,849,471.
35	14,965.	250,228.	3,583,439.
36	14,169.	235,263.	3,333,211.
37	13,414.	221,094.	3,097,948.
38	12,699.	207,680.	2,876,854.
39	12,020.	194,981.	2,669,174.
40	11,376.	182,961.	2,474,193.
41	10,765.	171,585.	2,291,232.
42	10,185.	160,820.	2,119,647.
43	9,634.9	150,635.2	1,958,827.2
44	9,112.7	141,000.3	1,808,192.0
45	8,617.1	131,887.6	1,667,191.7
46	8,146.9	123,270.5	1,535,304.1
47	7,700.2	115,123.6	1,412,033.6
48	7,275.8	107,423.4	1,296,910.0
49	6,872.2	100,147.6	1,189,486.6
50	6,488.3	93,275.4	1,089,339.0
51	6,122.9	86,787.1	996,063.6
52	5,775.0	80,664.2	909,276.5
53	5,444.5	74,889.2	828,612.3
54	5,130.4	69,444.7	753,723.1

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
0	133.38	3,000.23	148,728.56
1	90.437	2,866.848	145,728.332
2	58.606	2,776.411	142,861.484
3	39.798	2,717.805	140,085.073
4	30.650	2,678.007	137,367.268
5	26.817	2,647.357	134,689.261
6	24.007	2,620.540	132,041.904
7	20.748	2,596.533	129,421.364
8	16.494	2,575.785	126,824.831
9	13.229	2,559.291	124,249.046
10	10.829	2,546.062	121,689.755
11	9.1843	2,535.2329	119,143.6930
12	10.242	2,526.049	116,608.460
13	14.076	2,515.807	114,082.411
14	19.324	2,501.731	111,566.604
15	25.294	2,482.407	109,064.873
16	31.002	2,457.113	106,582.466
17	36.831	2,426.111	104,125.353
18	40.110	2,389.280	101,699.242
19	40.835	2,349.170	99,309.962
20	39.374	2,308.335	96,960.792
21	35.740	2,268.961	94,652.457
22	30.579	2,233.221	92,383.496
23	26.995	2,202.642	90,150.275
24	24.511	2,175.647	87,947.633
25	22.978	2,151.136	85,771.986
26	21.296	2,128.158	83,620.850
27	19.956	2,106.862	81,492.692
28	18.481	2,086.906	79,385.830
29	17.311	2,068.425	77,298.924
30	16.409	2,051.114	75,230.499
31	15.739	2,034.705	73,179.385
32	15.620	2,018.966	71,144.680
33	15.804	2,003.346	69,125.714
34	15.926	1,987.542	67,122.368
35	15.993	1,971.616	65,134.826
36	16.292	1,955.623	63,163.210
37	16.652	1,939.331	61,207.587
38	17.056	1,922.679	59,268.256
39	17.736	1,905.623	57,345.577
40	18.526	1,887.887	55,439.954
41	19.295	1,869.361	53,552.067
42	19.830	1,850.066	51,682.706
43	20.452	1,830.236	49,832.640
44	21.047	1,809.784	48,002.404
45	21.613	1,788.737	46,192.620
46	22.560	1,767.124	44,403.883
47	23.585	1,744.564	42,636.759
48	24.889	1,720.979	40,892.195
49	26.346	1,696.090	39,171.216
50	27.918	1,669.744	37,475.126
51	29.445	1,641.826	35,805.382
52	30.256	1,612.381	34,163.556
53	31.130	1,582.125	32,551.175
54	32.102	1,550.995	30,969.050

男 5.5%

年齢	D_x	N_x	S_x
55	4,831.6	64,314.3	684,278.4
56	4,547.5	59,482.7	619,964.1
57	4,277.4	54,935.2	560,481.4
58	4,021.0	50,657.8	505,546.2
59	3,777.6	46,636.8	454,888.4
60	3,546.6	42,859.2	408,251.6
61	3,327.3	39,312.6	365,392.4
62	3,119.1	35,985.3	326,079.8
63	2,921.0	32,866.2	290,094.5
64	2,732.1	29,945.2	257,228.3
65	2,552.2	27,213.1	227,283.1
66	2,380.6	24,660.9	200,070.0
67	2,216.8	22,280.3	175,409.1
68	2,060.5	20,063.5	153,128.8
69	1,911.2	18,003.0	133,065.3
70	1,768.5	16,091.8	115,062.3
71	1,632.2	14,323.3	98,970.5
72	1,501.9	12,691.1	84,647.2
73	1,377.4	11,189.2	71,956.1
74	1,258.4	9,811.8	60,766.9
75	1,144.9	8,553.4	50,955.1
76	1,036.8	7,408.5	42,401.7
77	933.82	6,371.65	34,993.23
78	836.07	5,437.83	28,621.58
79	743.53	4,601.76	23,183.75
80	656.25	3,858.23	18,581.99
81	574.32	3,201.98	14,723.76
82	497.83	2,627.66	11,521.78
83	426.92	2,129.83	8,894.12
84	361.73	1,702.91	6,764.29
85	302.36	1,341.18	5,061.38
86	248.93	1,038.82	3,720.20
87	201.45	789.89	2,681.38
88	159.92	588.44	1,891.49
89	124.24	428.52	1,303.05
90	94.200	304.284	874.527
91	69.502	210.084	570.243
92	49.730	140.582	360.159
93	34.377	90.852	219.577
94	22.860	56.475	128.725
95	14.554	33.615	72.250
96	8.8236	19.0606	38.6347
97	5.0631	10.2370	19.5741
98	2.7311	5.1739	9.3371
99	1.3744	2.4428	4.1632
100	0.63972	1.06836	1.72044
101	0.27275	0.42864	0.65208
102	0.10537	0.15589	0.22344
103	0.03644	0.05052	0.06755
104	0.01113	0.01408	0.01703
105	0.00295	0.00295	0.00295

5. 5%男

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
55	33.143	1,518.893	29,418.055
56	33.940	1,485.750	27,899.162
57	34.334	1,451.810	26,413.412
58	34.682	1,417.476	24,961.602
59	34.982	1,382.794	23,544.126
60	35.275	1,347.812	22,161.332
61	35.665	1,312.537	20,813.520
62	36.553	1,276.872	19,500.983
63	37.518	1,240.319	18,224.111
64	38.536	1,202.801	16,983.792
65	39.616	1,164.265	15,780.991
66	40.734	1,124.649	14,616.726
67	41.871	1,083.915	13,492.077
68	43.033	1,042.044	12,408.162
69	44.179	999.011	11,366.118
70	45.341	954.832	10,367.107
71	46.435	909.491	9,412.275
72	47.457	863.056	8,502.784
73	48.403	815.599	7,639.728
74	49.195	767.196	6,824.129
75	49.808	718.001	6,056.933
76	50.223	668.193	5,338.932
77	50.397	617.970	4,670.739
78	50.282	567.573	4,052.769
79	49.829	517.291	3,485.196
80	49.017	467.462	2,967.905
81	47.812	418.445	2,500.443
82	46.176	370.633	2,081.998
83	44.101	324.457	1,711.365
84	41.606	280.356	1,386.908
85	38.697	238.750	1,106.552
86	35.433	200.053	867.802
87	31.868	164.620	667.749
88	28.088	132.752	503.129
89	24.201	104.664	370.377
90	20.324	80.463	265.713
91	16.587	60.139	185.250
92	13.107	43.552	125.111
93	9.9882	30.4446	81.5591
94	7.3073	20.4564	51.1145
95	5.1067	13.1491	30.6581
96	3.3901	8.0424	17.5090
97	2.1241	4.6523	9.4666
98	1.2473	2.5282	4.8143
99	0.68102	1.28089	2.28614
100	0.34267	0.59987	1.00525
101	0.15731	0.25720	0.40538
102	0.06516	0.09989	0.14818
103	0.02405	0.03473	0.04829
104	0.00780	0.01068	0.01356
105	0.00288	0.00288	0.00288

男 5.75%

年齢	D_x	N_x	S_x
0	100,000.	1,791,242.	30,665,462.
1	94,433.	1,691,242.	28,874,220.
2	89,211.	1,596,809.	27,182,978.
3	84,303.	1,507,598.	25,586,169.
4	79,681.	1,423,295.	24,078,571.
5	75,319.	1,343,614.	22,655,276.
6	71,198.	1,268,295.	21,311,662.
7	67,304.	1,197,097.	20,043,367.
8	63,624.	1,129,793.	18,846,270.
9	60,149.	1,066,169.	17,716,477.
10	56,866.	1,006,020.	16,650,308.
11	53,764.	949,154.	15,644,288.
12	50,832.	895,390.	14,695,134.
13	48,058.	844,558.	13,799,744.
14	45,432.	796,500.	12,955,186.
15	42,943.	751,068.	12,158,686.
16	40,585.	708,125.	11,407,618.
17	38,349.	667,540.	10,699,493.
18	36,229.	629,191.	10,031,953.
19	34,222.	592,962.	9,402,762.
20	32,324.	558,740.	8,809,800.
21	30,529.	526,416.	8,251,060.
22	28,836.	495,887.	7,724,644.
23	27,240.	467,051.	7,228,757.
24	25,734.	439,811.	6,761,706.
25	24,313.	414,077.	6,321,895.
26	22,970.	389,764.	5,907,818.
27	21,701.	366,794.	5,518,054.
28	20,503.	345,093.	5,151,260.
29	19,371.	324,590.	4,806,167.
30	18,302.	305,219.	4,481,577.
31	17,292.	286,917.	4,176,358.
32	16,338.	269,625.	3,889,441.
33	15,436.	253,287.	3,619,816.
34	14,582.	237,851.	3,366,529.
35	13,775.	223,269.	3,128,678.
36	13,012.	209,494.	2,905,409.
37	12,290.	196,482.	2,695,915.
38	11,607.	184,192.	2,499,433.
39	10,960.	172,585.	2,315,241.
40	10,349.	161,625.	2,142,656.
41	9,769.6	151,276.2	1,981,030.9
42	9,221.4	141,506.6	1,829,754.7
43	8,702.6	132,285.2	1,688,248.1
44	8,211.4	123,582.6	1,555,962.9
45	7,746.5	115,371.2	1,432,380.3
46	7,306.4	107,624.7	1,317,009.1
47	6,889.5	100,318.3	1,209,384.4
48	6,494.4	93,428.8	1,109,066.1
49	6,119.7	86,934.4	1,015,637.3
50	5,764.2	80,814.7	928,702.9
51	5,426.7	75,050.5	847,888.2
52	5,106.2	69,623.8	772,837.7
53	4,802.6	64,517.6	703,213.9
54	4,514.8	59,715.0	638,696.3

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
0	133.22	2,677.56	127,365.05
1	90.117	2,544.337	124,687.489
2	58.260	2,454.220	122,143.152
3	39.469	2,395.960	119,688.932
4	30.325	2,356.491	117,292.972
5	26.470	2,326.166	114,936.481
6	23.640	2,299.696	112,610.315
7	20.383	2,276.056	110,310.619
8	16.166	2,255.673	108,034.563
9	12.935	2,239.507	105,778.890
10	10.564	2,226.572	103,539.383
11	8.9377	2,216.0080	101,312.8107
12	9.9432	2,207.0703	99,096.8027
13	13.634	2,197.127	96,889.732
14	18.672	2,183.493	94,692.605
15	24.383	2,164.821	92,509.112
16	29.815	2,140.438	90,344.291
17	35.336	2,110.623	88,203.853
18	38.392	2,075.287	86,093.230
19	38.993	2,036.895	84,017.943
20	37.509	1,997.902	81,981.048
21	33.966	1,960.393	79,983.146
22	28.993	1,926.427	78,022.753
23	25.535	1,897.434	76,096.326
24	23.130	1,871.899	74,198.892
25	21.632	1,848.769	72,326.993
26	20.001	1,827.137	70,478.224
27	18.699	1,807.136	68,651.087
28	17.275	1,788.437	66,843.951
29	16.144	1,771.162	65,055.514
30	15.266	1,755.018	63,284.352
31	14.608	1,739.752	61,529.334
32	14.464	1,725.144	59,789.582
33	14.599	1,710.680	58,064.438
34	14.677	1,696.081	56,353.758
35	14.704	1,681.404	54,657.677
36	14.944	1,666.700	52,976.273
37	15.237	1,651.756	51,309.573
38	15.571	1,636.519	49,657.817
39	16.153	1,620.948	48,021.298
40	16.833	1,604.795	46,400.350
41	17.490	1,587.962	44,795.555
42	17.933	1,570.472	43,207.593
43	18.451	1,552.539	41,637.121
44	18.943	1,534.088	40,084.582
45	19.406	1,515.145	38,550.494
46	20.208	1,495.739	37,035.349
47	21.077	1,475.531	35,539.610
48	22.190	1,454.454	34,064.079
49	23.433	1,432.264	32,609.625
50	24.773	1,408.831	31,177.361
51	26.066	1,384.058	29,768.530
52	26.721	1,357.992	28,384.472
53	27.428	1,331.271	27,026.480
54	28.217	1,303.843	25,695.209

男 5. 75%

年齢	D_x	N_x	S_x
55	4,241.9	55,200.2	578,981.3
56	3,983.0	50,958.3	523,781.1
57	3,737.5	46,975.3	472,822.8
58	3,505.2	43,237.8	425,847.5
59	3,285.2	39,732.6	382,609.7
60	3,077.0	36,447.4	342,877.1
61	2,880.0	33,370.4	306,429.7
62	2,693.4	30,490.4	273,059.3
63	2,516.3	27,797.0	242,568.9
64	2,348.1	25,280.7	214,771.9
65	2,188.3	22,932.6	189,491.2
66	2,036.3	20,744.3	166,558.6
67	1,891.7	18,708.0	145,814.3
68	1,754.2	16,816.3	127,106.3
69	1,623.2	15,062.1	110,290.0
70	1,498.5	13,438.9	95,227.9
71	1,379.7	11,940.4	81,789.0
72	1,266.6	10,560.7	69,848.6
73	1,158.8	9,294.1	59,287.9
74	1,056.3	8,135.3	49,993.8
75	958.72	7,078.98	41,858.54
76	866.08	6,120.26	34,779.56
77	778.24	5,254.18	28,659.30
78	695.13	4,475.94	23,405.12
79	616.73	3,780.81	18,929.18
80	543.05	3,164.08	15,148.37
81	474.12	2,621.03	11,984.29
82	410.01	2,146.91	9,363.26
83	350.78	1,736.90	7,216.35
84	296.51	1,386.12	5,479.45
85	247.26	1,089.61	4,093.33
86	203.08	842.35	3,003.72
87	163.96	639.27	2,161.37
88	129.85	475.31	1,522.10
89	100.64	345.46	1,046.79
90	76.127	244.820	701.326
91	56.035	168.693	456.506
92	39.999	112.658	287.813
93	27.585	72.659	175.155
94	18.300	45.074	102.496
95	11.624	26.774	57.422
96	7.0302	15.1497	30.6477
97	4.0245	8.1195	15.4980
98	2.1657	4.0950	7.3785
99	1.0873	1.9293	3.2835
100	0.50489	0.84197	1.35424
101	0.21475	0.33708	0.51227
102	0.08277	0.12233	0.17519
103	0.02856	0.03956	0.05286
104	0.00870	0.01100	0.01330
105	0.00230	0.00230	0.00230

5. 75%男

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
55	29.063	1,275.626	24,391.366
56	29.692	1,246.563	23,115.740
57	29.965	1,216.871	21,869.177
58	30.197	1,186.906	20,652.306
59	30.387	1,156.709	19,465.400
60	30.569	1,126.322	18,308.691
61	30.834	1,095.753	17,182.369
62	31.526	1,064.919	16,086.616
63	32.282	1,033.393	15,021.697
64	33.080	1,001.111	13,988.304
65	33.926	968.031	12,987.193
66	34.802	934.105	12,019.162
67	35.688	899.303	11,085.057
68	36.593	863.615	10,185.754
69	37.478	827.022	9,322.139
70	38.373	789.544	8,495.117
71	39.206	751.171	7,705.573
72	39.974	711.965	6,954.402
73	40.674	671.991	6,242.437
74	41.242	631.317	5,570.446
75	41.657	590.075	4,939.129
76	41.905	548.418	4,349.054
77	41.951	506.513	3,800.636
78	41.756	464.562	3,294.123
79	41.282	422.806	2,829.561
80	40.514	381.524	2,406.755
81	39.424	341.010	2,025.231
82	37.985	301.586	1,684.221
83	36.192	263.601	1,382.635
84	34.064	227.409	1,119.034
85	31.608	193.345	891.625
86	28.873	161.737	698.280
87	25.907	132.864	536.543
88	22.780	106.957	403.679
89	19.581	84.177	296.722
90	16.405	64.596	212.545
91	13.357	48.191	147.949
92	10.530	34.834	99.758
93	8.0053	24.3041	64.9244
94	5.8428	16.2988	40.6203
95	4.0736	10.4560	24.3215
96	2.6978	6.3824	13.8655
97	1.6864	3.6846	7.4831
98	0.98792	1.99816	3.79850
99	0.53812	1.01024	1.80034
100	0.27013	0.47212	0.79010
101	0.12372	0.20199	0.31798
102	0.05112	0.07827	0.11599
103	0.01882	0.02715	0.03772
104	0.00609	0.00833	0.01057
105	0.00224	0.00224	0.00224

男 6.0%

年齢	D_x	N_x	S_x
0	100,000.	1,725,452.	28,606,363.
1	94,210.	1,625,452.	26,880,911.
2	88,790.	1,531,242.	25,255,459.
3	83,708.	1,442,452.	23,724,217.
4	78,932.	1,358,744.	22,281,765.
5	74,435.	1,279,812.	20,923,021.
6	70,196.	1,205,377.	19,643,209.
7	66,200.	1,135,181.	18,437,832.
8	62,434.	1,068,981.	17,302,651.
9	58,884.	1,006,547.	16,233,670.
10	55,539.	947,663.	15,227,123.
11	52,385.	892,124.	14,279,460.
12	49,412.	839,739.	13,387,336.
13	46,605.	790,327.	12,547,597.
14	43,955.	743,722.	11,757,270.
15	41,449.	699,767.	11,013,548.
16	39,080.	658,318.	10,313,781.
17	36,840.	619,238.	9,655,463.
18	34,722.	582,398.	9,036,225.
19	32,721.	547,676.	8,453,827.
20	30,832.	514,955.	7,906,151.
21	29,053.	484,123.	7,391,196.
22	27,377.	455,070.	6,907,073.
23	25,800.	427,693.	6,452,003.
24	24,317.	401,893.	6,024,310.
25	22,919.	377,576.	5,622,417.
26	21,602.	354,657.	5,244,841.
27	20,361.	333,055.	4,890,184.
28	19,191.	312,694.	4,557,129.
29	18,089.	293,503.	4,244,435.
30	17,051.	275,414.	3,950,932.
31	16,072.	258,363.	3,675,518.
32	15,149.	242,291.	3,417,155.
33	14,278.	227,142.	3,174,864.
34	13,457.	212,864.	2,947,722.
35	12,682.	199,407.	2,734,858.
36	11,951.	186,725.	2,535,451.
37	11,261.	174,774.	2,348,726.
38	10,610.	163,513.	2,173,952.
39	9,996.1	152,902.8	2,010,438.6
40	9,416.0	142,906.7	1,857,535.8
41	8,868.1	133,490.7	1,714,629.1
42	8,350.8	124,622.6	1,581,138.4
43	7,862.3	116,271.8	1,456,515.8
44	7,401.1	108,409.5	1,340,244.0
45	6,965.6	101,008.4	1,231,834.5
46	6,554.4	94,042.8	1,130,826.1
47	6,165.8	87,488.4	1,036,783.3
48	5,798.5	81,322.6	949,294.9
49	5,451.1	75,524.1	867,972.3
50	5,122.3	70,073.0	792,448.2
51	4,811.0	64,950.7	722,375.2
52	4,516.2	60,139.7	657,424.5
53	4,237.7	55,623.5	597,284.8
54	3,974.3	51,385.8	541,661.3

基　　数　　表

6.0%男

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
0	133.07	2,401.66	109,364.47
1	89.798	2,268.590	106,962.810
2	57.918	2,178.792	104,694.220
3	39.144	2,120.874	102,515.428
4	30.005	2,081.730	100,394.554
5	26.129	2,051.725	98,312.824
6	23.280	2,025.596	96,261.099
7	20.025	2,002.316	94,235.503
8	15.844	1,982.291	92,233.187
9	12.648	1,966.447	90,250.896
10	10.305	1,953.799	88,284.449
11	8.6982	1,943.4944	86,330.6504
12	9.6540	1,934.7962	84,387.1560
13	13.206	1,925.142	82,452.360
14	18.043	1,911.936	80,527.218
15	23.506	1,893.893	78,615.282
16	28.676	1,870.387	76,721.389
17	33.906	1,841.711	74,851.002
18	36.751	1,807.805	73,009.291
19	37.239	1,771.054	71,201.486
20	35.736	1,733.815	69,430.432
21	32.285	1,698.079	67,696.617
22	27.493	1,665.794	65,998.538
23	24.157	1,638.301	64,332.744
24	21.830	1,614.144	62,694.443
25	20.368	1,592.314	61,080.299
26	18.788	1,571.946	59,487.985
27	17.523	1,553.158	57,916.039
28	16.151	1,535.635	56,362.881
29	15.058	1,519.484	54,827.246
30	14.205	1,504.426	53,307.762
31	13.561	1,490.221	51,803.336
32	13.395	1,476.660	50,313.115
33	13.489	1,463.265	48,836.455
34	13.529	1,449.776	47,373.190
35	13.522	1,436.247	45,923.414
36	13.710	1,422.725	44,487.167
37	13.946	1,409.015	43,064.442
38	14.218	1,395.069	41,655.427
39	14.714	1,380.851	40,260.358
40	15.298	1,366.137	38,879.507
41	15.857	1,350.839	37,513.370
42	16.220	1,334.982	36,162.531
43	16.650	1,318.762	34,827.549
44	17.054	1,302.112	33,508.787
45	17.429	1,285.058	32,206.675
46	18.107	1,267.629	30,921.617
47	18.841	1,249.522	29,653.988
48	19.788	1,230.681	28,404.466
49	20.848	1,210.893	27,173.785
50	21.988	1,190.045	25,962.892
51	23.082	1,168.057	24,772.847
52	23.605	1,144.975	23,604.790
53	24.173	1,121.370	22,459.815
54	24.809	1,097.197	21,338.445

男 6.0%

年齢	D_x	N_x	S_x
55	3,725.3	47,411.5	490,275.5
56	3,489.6	43,686.2	442,864.0
57	3,266.9	40,196.6	399,177.8
58	3,056.5	36,929.7	358,981.2
59	2,858.0	33,873.2	322,051.5
60	2,670.6	31,015.2	288,178.3
61	2,493.7	28,344.6	257,163.1
62	2,326.6	25,850.9	228,818.5
63	2,168.5	23,524.3	202,967.6
64	2,018.8	21,355.8	179,443.3
65	1,876.9	19,337.0	158,087.5
66	1,742.4	17,460.1	138,750.5
67	1,614.9	15,717.7	121,290.4
68	1,494.0	14,102.8	105,572.7
69	1,379.2	12,608.8	91,469.9
70	1,270.2	11,229.6	78,861.1
71	1,166.7	9,959.4	67,631.5
72	1,068.5	8,792.7	57,672.1
73	975.34	7,724.22	48,879.38
74	886.92	6,748.88	41,155.16
75	803.12	5,861.96	34,406.28
76	723.80	5,058.84	28,544.32
77	648.86	4,335.04	23,485.48
78	578.20	3,686.18	19,150.44
79	511.77	3,107.98	15,464.26
80	449.57	2,596.21	12,356.28
81	391.59	2,146.64	9,760.07
82	337.83	1,755.05	7,613.43
83	288.35	1,417.22	5,858.38
84	243.16	1,128.87	4,441.16
85	202.30	885.71	3,312.29
86	165.76	683.41	2,426.58
87	133.51	517.65	1,743.17
88	105.49	384.14	1,225.52
89	81.565	278.646	841.380
90	61.552	197.081	562.734
91	45.200	135.529	365.653
92	32.189	90.329	230.124
93	22.146	58.140	139.795
94	14.658	35.994	81.655
95	9.2878	21.3356	45.6611
96	5.6043	12.0478	24.3255
97	3.2006	6.4435	12.2777
98	1.7183	3.2429	5.8342
99	0.86065	1.52460	2.59127
100	0.39870	0.66395	1.06667
101	0.16919	0.26525	0.40272
102	0.06506	0.09606	0.13747
103	0.02239	0.03100	0.04141
104	0.00681	0.00861	0.01041
105	0.00180	0.00180	0.00180

6.0%男

年齢	$\bar{C}_x$	$\bar{M}_x$	$\bar{R}_x$
55	25.493	1,072.388	20,241.248
56	25.983	1,046.895	19,168.860
57	26.161	1,020.912	18,121.965
58	26.301	994.751	17,101.053
59	26.404	968.450	16,106.302
60	26.500	942.046	15,137.852
61	26.666	915.546	14,195.806
62	27.201	888.880	13,280.260
63	27.787	861.679	12,391.380
64	28.407	833.892	11,529.701
65	29.065	805.485	10,695.809
66	29.744	776.420	9,890.324
67	30.430	746.676	9,113.904
68	31.128	716.246	8,367.228
69	31.806	685.118	7,650.982
70	32.488	653.312	6,965.864
71	33.115	620.824	6,312.552
72	33.684	587.709	5,691.728
73	34.194	554.025	5,104.019
74	34.589	519.831	4,549.994
75	34.855	485.242	4,030.163
76	34.980	450.387	3,544.921
77	34.935	415.407	3,094.534
78	34.691	380.472	2,679.127
79	34.216	345.781	2,298.655
80	33.501	311.565	1,952.874
81	32.522	278.064	1,641.309
82	31.262	245.542	1,363.245
83	29.716	214.280	1,117.703
84	27.903	184.564	903.423
85	25.829	156.661	718.859
86	23.539	130.832	562.198
87	21.071	107.293	431.366
88	18.484	86.222	324.073
89	15.851	67.738	237.851
90	13.249	51.887	170.113
91	10.762	38.638	118.226
92	8.4635	27.8762	79.5878
93	6.4194	19.4127	51.7116
94	4.6742	12.9933	32.2989
95	3.2512	8.3191	19.3056
96	2.1481	5.0679	10.9865
97	1.3396	2.9198	5.9186
98	0.78291	1.58015	2.99880
99	0.42545	0.79724	1.41865
100	0.21306	0.37179	0.62141
101	0.09735	0.15873	0.24962
102	0.04013	0.06138	0.09089
103	0.01474	0.02125	0.02951
104	0.00476	0.00651	0.00826
105	0.00175	0.00175	0.00175

<著者略歴>　二見　隆（ふたみ たかし）

大正13年１月　大阪市に生まれる。
昭和20年９月　東京大学理学部数学科卒業。
昭和21年４月　日本生命保険株式会社（後に相互会社）に入社。保険計理人、常務取締役、監査役を経て、同54年７月退任。
昭和52年７月　財団法人 生命保険文化研究所理事長に就任。
昭和60年５月　社団法人 日本アクチュアリー会理事長に就任。平成元年５月退任。
平成26年９月　逝去。

生命保険数学（'92改訂版）　上巻

昭和63年１月24日　初版発行
平成４年１月23日　'92改訂版

著　者　二　見　　隆

発行所　公益社団法人　日本アクチュアリー会

〒104−6002 東京都中央区晴海1−8−10
晴海アイランド　トリトンスクエア　オフィスタワーX 2階
電話 03−5548−6033

発行者　浅野　紀久男

印刷所　株式会社　サンワ