年　金　数　理

平成２７年３月改訂

日本アクチュアリー会

このテキストは日本アクチュアリー会資格試験の第１次試験（年金数理）を受験する方のための教材です。

各項目について見識ある方にお願いして執筆いただきました。

受験生がこのテキストから幅広い理論的･実践的知識を習得し、あわせて応用能力を備えることを狙いとしており、テキストの内容自体が日本アクチュアリー会の公式見解を表わすものではありません。

しかしながら、できる限り種々の考え方、意見を集約するよう努めており、受験生にとって適切な学習書としての役割を果たすものです。

平成 26 年度　テキスト部会（年金）

用語について

本書で主に使用する用語と，一般に同義に使われる用語の例を以下に示す。

本書で主に使用する用語	一般に同義に使われる用語の例
保険料	掛金
標準保険料	標準掛金
特別保険料	特別掛金
払込み	拠出，納付，納入
積立金	（年金）資産、数理上資産額、純資産額
利息収入	（運用）収益
被保険者	加入者，加入員
在職中の被保険者	現在加入者、現在加入員
将来の被保険者	将来加入者、将来加入員
脱退	退職、（加入資格）喪失
定常人口	静止人口，定常状態
定常状態	成熟状態
加入年齢方式	特定年齢方式
責任準備金	数理債務
未積立債務	過去勤務債務、未償却過去勤務債務

特に，本書で主に使用する用語のうち**ゴシック文字**で表示した用語は，本書では特に断らない限り，以下の意味で使用しているので注意されたい。

定常状態　　：保険料・給付総額等も含めて定常な状態

加入年齢方式：制度へのみなし加入年齢ごとに平準的な保険料を算出し，標準保険料として適用する方式

目　　　　　　　　次

第Ⅰ編　理　論　編

第１章　年金数理の基礎知識

1.　年金数理とは

⑴　年金制度の分類と年金数理

＜年金数理の対象となる範囲＞

- 年金
  - 公的年金（国民年金・厚生年金保険等）
  - 私的年金
    - 企業年金（厚生年金基金・確定給付企業年金等）
    - 個人年金　→　保険数学の対象

年金制度は大きく分けると，国などの公の機関が主体となって運営している公的年金と私的年金とに分かれる。公的年金は国民全体を対象とした国民年金を始めとして，一般に大規模の集団を対象としており，また物価上昇に見合って年金額を引上げるなど実質価値を維持する仕組みを持ち，老後生活の基盤となる制度である。これに対して私的年金は，公的年金を補完し民間の自助努力でより豊かな老後生活を目指すもので，さらに各企業等で実施する企業年金と，個人ごとに個別に加入する個人年金とに分けられる。

これから扱う年金数理は，これらのうち公的年金と企業年金を対象とするものであり，個人年金は他の個人保険と共に保険数学の対象となる。また年金制度ではないが，各企業で実施している退職一時金制度についても，日本の退職給付会計や国際会計基準（ＩＡＳ１９）等を適用する場合のようにその支払準備の評価に当たり年金数理が用いられることがある。本書では特に断らない限り，年金制度とは個人年金以外の制度を指すこととする。

また，年金制度の中には払込む保険料を先に決めておいて，払込んだ保険料及

びその運用実績に応じて給付が事後的に決まる（保険料建て）制度がある。保険料建て制度でも事前の給付額見込みや実際の給付額の決定などに一部年金数理の考え方が使われる場合もあるが，本書では，先に給付を決めておいてそのために必要な保険料を徴求する（給付建て）制度に限定して扱うこととする。

⑵　保険数学との違い

保険数学と比較した年金数理の特徴としては，まず第一に特定の集団を対象として，その集団全体での収支相等を考えることが挙げられる。年金制度の保険料は多くの場合，集団全体で収支相等するよう算出された保険料率が年齢等に関係なく全員一律に適用される。言い換えれば，集団を形成する個人ごとでの収支相等は必ずしも成立しない。これは年金制度が通常は全員加入を原則としており，従って個人ごとの収支相等が成り立たなくても，個人保険のように逆選択により制度全体の収支が崩れる心配はないからである。

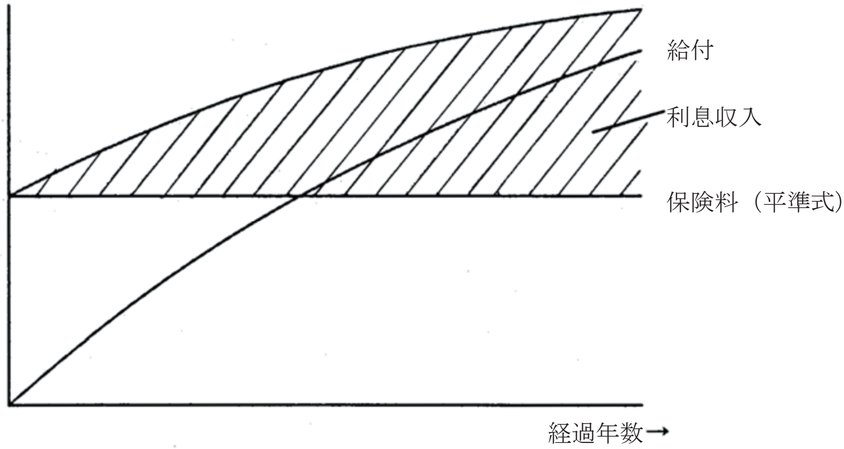
第二の特徴は，個々の年金制度は各々他とは区別された独自の積立金を持って運営されている点である。このため制度を運営していく過程で発生した剰余・不足はその制度の中で処理されなければならない。

第三の特徴は，保険料率の見直しが定期的に行われることである。これは制度が抱える剰余・不足を処理するために不可欠なものであるが，特に企業年金においては，単独企業等の比較的小規模の集団で基礎率が算定されるため不安定になりやすい上に，保険料が税法上損金として処理されるために安全性を見込んだ高めの保険料設定が税法上制限されることなどが，保険料率の変動を大きくする要因となっている。

⑶　年金数理の目的

年金数理の目的は決められた給付を実行するために，年金制度の将来を予測し長期的に見て「収入（利息収入を含む）=支出」となるように財政計画（主に保険料）を定めることである。

年金制度は一般に，制度発足当初は給付が少なく，時間の経過に応じて給付が増大する傾向がある。このような制度で保険料を平準化しようとすれば，当初の給付が少ない時期に積立金を形成し，後の給付を保険料と利息収入（場合によっては積立金の取崩し）でまかなうことになる。このためには年金制度の将来予測（保険料・給付・利息収入などの見込み）を行い，適切な財政計画を定めることが重要となる。



また，当初の見込みが適切であっても年金制度を長期間運営していくと，予定と実際との乖離が少なからず生じてくる。このため年金制度では，財政状況の予定との乖離を定期的にチェックし(決算),必要に応じて財政計画を見直すこと(再計算）が行われており，これも年金数理の重要な役割となっている。

2.　基本原理

⑴　大数の法則

大数の法則とは確率論における法則の一つであるが，標本を十分大きくとればその事象の発生する経験的頻度は先験的確率に限りなく接近するという確率法則をいう。年金数理の分野では，被保険者，受給権者等の年金制度の構成者につい

て，脱退等の事象が発生する実際の割合は，その人数が多くなればなるほどその発生確率に接近するというように援用される。しかしながら，これは実際の発生頻度がその発生確率から大きくはずれることは少なくなるということであって，その発生確率に一致することを保証するものではない。たとえば脱退率を算定する場合，過去の実績資料を使って将来の脱退率の推定を行うにあたって標本数が十分大きくなれば，算定された脱退率の信頼度はそれだけ高くなるということになる。同様に，対象となる制度の被保険者数が少なければ，脱退率が十分信頼度の高いものであっても，この法則の機能する余地が少ないということになる。

⑵　収支相等の原則

収支相等の原則とは，保険集団の収入と支出とが等しくなるように，すなわち確率的に制度の財政上過不足が生じないように，保険料を算定する際の基本原則をいう。年金制度で考えれば，積立金の利息収入を含む収入と給付支出とが一致するように財政計画を策定することに相当する。この原則を適用するにあたって，収支が一致する対象および期間の設定によって，次の区分を考えることができる。

		〈対象〉	〈期間〉
（一般の生命保険）	………	個人	一定期間
（企業年金制度）	………	企業集団	有限期間
（厚生年金保険）	………	国民集団	無限期間

（注）大数の（弱）法則

X_1，X_2，……が互いに独立に同一の分布に従う確率変数であり $E(X_i)=\mu$ とすると，任意の $\varepsilon>0$ に対して $n\to\infty$ のとき，

$$Pr\left\{\left|\frac{X_1+\cdots\cdots+X_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right\}\to 0$$

が成り立つ。

この対象と期間の係わり合いについて考えてみよう。一般の生命保険では年齢等のある一定条件を満たす個人について，一定期間あるいは有限期間の収支が相等するように計画される。企業年金制度では企業の有限性を考慮して収支が相等するように計画される。また，厚生年金保険は，ある一定条件を満たす国民について無限期間において収支相等の原則を適用する。さらに，企業集団，国民集団の場合には，現在の被保険者のほかに将来加入が見込まれる被保険者も含めて考えることができる。これらの対象，期間の組合せにより後述する種々の財政方式が生ずることになる。

⑶　非負の原則

年金制度を運営していく過程で，給付に対して積立金が不足し給付が出来なくなるような事態はたとえ一時的でもあってはならない。一般的傾向からすれば年金制度発足当初の給付は少ないため，長期的に見て収支相等する保険料をとっていれば積立金が不足するような事態が起こる可能性は低いが，積立金の水準が低い財政方式を採用する場合や，制度発足後間もない時期に大量の給付が予測される場合には注意が必要である。

3.　計算基礎率

年金制度の費用を算定，分析するためには，保険料および給付の額と発生時期を推計し，利息収入を予測することにより，収入と支出に関する情報を計算しなければならない。この計算に用いられる推計値を計算基礎率または単に基礎率という。制度に規定された給付乗率は，推計値ではないので計算基礎率とは呼ばれず，利率，死亡率，脱退率，昇給率などを計算基礎率と呼んでいる。

将来事象の推計にあたっては，各基礎率が確率変数としての性質を持っていて，過去の実績をもとに大数の法則により合理的な推計値を算定することが可能であることを前提としている。換言すれば，将来事象であることの偶然による誤差の

発生は統計上の誤差として不可避であるが，その誤差の大きさは用いられた情報量が大きいほど一般には小さくなるということを前提としている。

各基礎率の決定に当たっては，対象となる制度の実態に合わせて安全性を考慮する必要があるほか，基礎率全体として整合性をもった体系として捉える必要がある。

⑴　予定利率

年金制度においては，積立金は投資運用され，時間により価格が変動しかつ利息などの果実を生み出すことを前提としているため，何らかの利率が決定されなければならない。金利水準は経済の状況により変化するので，年金財政上どのような水準の利率を用いるかを決定するのは難しい。予定利率の変動は保険料に大きな影響を与えるため，実際の制度運営においては予定利率を変更することは困難であることが多い。

まず，予定利率を決定するにあたって，予定利率の性格付けがなされなければならない。第一の考えは，長期的な年金制度の財政計画において，決して下回ってはいけない下限の利率と性格付けることである。この場合の予定利率は実際の利率が予定利率を下回る確率を小さくすることが期待できる保守的な水準に決定される傾向があろう。第二の考えは，将来の事象としての推計値にできるだけ近いものを予定利率とすることである。実際の運営と事前の推計とを近付けようという考えである。この場合は金利動向に関する情報の他に，すでに積立金として運用されている資産に関する情報も合わせ予定利率の水準を決定することとなる。新たに開始する制度で資産に関する情報がさほどない場合も考えられる。

予定利率が保守的に安定的なものとして決定されているならば，予定利率の変更は慎重に行うべきであり，予定利率を実勢により近いものとするならば，計算の都度最新の情報をもとに合理的に見直してゆくことになる。日本の多くの年金制度では法制面からも前者の予定利率の取扱となっている。

予定利率は一定率である必要はなく，時間によって変動する関数としても考えられるが，実務計算上の取扱が煩雑になるためほとんど用いられない。

なお，日本の退職給付会計や国際会計基準（ＩＡＳ１９）等を適用する場合にも，年金数理を用いた計算を行っているが，ここでは予定利率に似た概念として割引率（後述の$v=\dfrac{1}{1+i}$ も割引率と呼ぶが，退職給付会計ではiを割引率と呼んでいる）という言葉が用いられている。割引率も現価計算する際に用いられる利率という意味では予定利率と同じであるが，予定利率は年金資産の運用利回りという性格が強いのに対して，割引率は年金資産の運用利回りとは無関係に，国債または優良社債の利回り等のイールドカーブをもとに決定されるという点が異なっている。

⑵　予定死亡率

予定死亡率は，被保険者（本書では制度に加入中の者を指すものとし，既に制度を脱退した受給権者は含まないものとする。）の状態でなくなる一事由として推計に用いられるほか，年金受給者が給付を終了する時期に関する推計に用いられる。一般に予定死亡率は性別・年齢ごとに算定されることが多いが，企業年金等では，現役で働いている被保険者の死亡率は退職後の受給権者の死亡率よりも低いと考えられることから，被保険者・受給権者ごとに別々の予定死亡率を適用することもある。

死亡率は制度に加入している集団の特性に応じて決定されるべき情報であるが，統計的に発生率の小さい確率変数の推計は，母集団が大きくないと統計上の誤差が大きくなってしまうため，集団の実績に基づいた推計値を用いることが妥当かどうかの判断が必要であろう。実際，日本の多くの年金制度では集団の実績に基づいた推計値の代わりに，国民全体で算定された死亡率を基準に一定の補正を加えて使用している。

⑶　予定脱退率

予定脱退率とは，被保険者が将来どのような傾向で年金制度から脱退していくかを推計する率であり，保険料払込みの終了や給付の発生時期を見込むために必要となる。年金制度からの脱退という点に着目すれば，予定死亡率と同列の基礎率である。予定死亡率が性別や年齢による関数であったのに対して，死亡以外の理由による脱退の場合は，性別や年齢の他に，加入後の期間も脱退率に影響を与えていると考えられるが，複雑になるため性別や年齢ごとに算定されることが多い。

死亡による脱退まで含めて総脱退という場合があり，また死亡脱退以外の脱退を明確に指し示す意味で生存脱退という用語が用いられることもある。企業を前提とした年金制度の場合には生存脱退率と同義で退職率と呼ぶこともある。制度の内容にしたがって必要がある場合には生存脱退をさらに複数の事由に分けて計算基礎率とする場合がある。

予定脱退率は期初の被保険者，期中の新規加入者および脱退者の人数を年齢により集計し，算定される。実績に基づく粗脱退率は年齢による凹凸があるため，その集団の脱退傾向を表わす率として補正される。なお，ここでは補正方法については触れない。

⑷　予定昇給率

予定昇給率は，年金制度の給付計算または保険料計算の基礎が給与に基づいている場合に，将来の給与の推計のために用いられる。昇給率といえば，例えば20歳の人が21歳になったとき，給与が何％上がったかという使い方をするが，年金財政の計算に用いるのは，昇給率そのものではなく各年齢別の「予定給与」であり，最低加入年齢の予定給与を1として各年齢の予定給与を指数化した「給与指数」または「昇給指数」である。通常は，計算に用いられる給与指数全体を指して予定昇給率という言い方をしている。

昇給率の決定に当たっては，いわゆるベース・アップを見込まない静態的昇給率をとる場合と，実際の将来推計ということで，いわゆるベース・アップ等を含む動態的昇給率をとる場合とがある。一般的な静態的昇給率の算定方法は次のとおりとなる。

ある一時点での x 歳，$x+1$ 歳の実際の給与水準から補正して得られた標準的な給与を B_x，B_{x+1} とすると，x 歳の昇給率 R_x は

$$B_{x+1}/B_x = 1 + R_x$$

から得られる。最低加入年齢 x_0 歳の予定給与を 1 とすると x_0+1 歳の予定給与すなわち給与指数は，x_0 歳の給与指数に x_0 歳の予定昇給率を乗じた $1 \times (1+R_{x_0})$ として得られる。同様に y 歳の給与指数を b_y とすると $b_y = b_{y-1} \times (1+R_{y-1})$ の関係から

$$b_y = 1 \times (1+R_{x_0}) \times (1+R_{x_0+1}) \times \cdots\cdots \times (1+R_{y-1})$$

となる。

このように予定昇給率と給与指数とは一意的な対応関係にあるが，実際例で示すと次表のとおりとなる。

年　齢 x	補 正 給 与 B_x	予 定 昇 給 率 $1+R_x$	給 与 指 数 b_x
25	114,600	1.043	1.000
26	119,500	1.040	1.043
27	124,300	1.039	1.085
28	129,200	1.037	1.127
29	134,000	1.035	1.169
⋮	⋮	⋮	⋮

上記では予定昇給率は年齢の関数としているが，年齢および勤続の関数とすることも考えられる。しかしながら，補正給与の算出あるいは数理計算が煩雑にな

るため一般には使用されない。

一方，動態的昇給率は，静態的昇給率を基礎として決定することが多い。すなわち，ベース・アップ等の要因による昇給率を r とした場合，動態的昇給率を

$$(1+R_x)\times(1+r)-1$$

とすることが多い。

⑸　新規加入の見込み

年金制度の財政方式は後述するが，制度の運営は通常，将来の被保険者を想定することとしており，このため年金制度の財政運営にあたっては，新規加入者に関する情報が必要となる場合が多い。厳密にいえば，新規加入者に関する情報は基礎率ではないが，制度の実態を考慮して合理的に決定する必要があるという点では計算に必要な基礎情報といえる。たとえば，将来の被保険者がある特定の年齢で加入し，その特定の年齢に基づく標準的な保険料を前提に制度運営を行うような場合の，新規加入年齢に関する情報である。通常は平均的な加入年齢や代表的な加入年齢をもって新規加入の年齢としている。

また，制度の運営にあたって，現在の被保険者と将来の被保険者の総合において合理的な保険料率をもって財政を計画する場合には，現在の被保険者に対応させて，将来の被保険者について，年齢，年間加入人員および加入時の給与額を見込む必要が生ずる。この場合の将来の被保険者の見込みに関しては，その制度が将来的に人員数や給与総額において一定規模を保つことができるような人員および給与額を見込むことを基本とするが，実務計算においては，実績や傾向と比較して，財政上の健全性を損なわないように配慮される。

⑹　一時金選択率

年金の受給資格を得た被保険者が企業年金制度を脱退した場合，通常は年金の給付を受けることとなるが，制度によっては年金に代えて一時金を選択することが可能なこともある。一時金選択率とは，年金受給資格を持つ脱退者のうち，ど

の程度の者が一時金を選択するのかを推計する率である。一時金選択率は企業年金の給付設計や母体企業の特性によってその傾向が異なるため，各制度の過去の実績をもとに算定する。また，給付設計によっては，年金の給付現価よりも一時金額の方が大きくなることもあるので,保守的な財政運営を行うという観点から,過去の実績によらず，現価が大きくなるように一時金選択率を見込むこともある。

(7)　その他の基礎率

制度の内容に従って年金の財政を検討する場合に，これまで述べてきた基礎率の他に推定を必要とする情報がいくつかある。たとえば，夫の死後妻の生存を条件に年金を支給する場合とか，親の死後その子の生存を条件に年金を支給する場合とかで，給付の対象者が被保険者本人のほか夫婦や親子を含む場合は，有配偶率や有子率を見込んで給付現価の算定をする必要が生じてくる。また，障害者に対し保険料払込みおよび給付に特定の取扱を行う制度は障害率を用いるし，さらに社会保険のように強制適用の場合には，その運営にあたり必要となる保険料免除率や保険料収納率という推計値を財政計算に用いている。

4.　定常人口

⑴　定常人口

年金制度の対象として，国民あるいは企業というような集団を考えると，その構成者は時間の経過とともに変動し，全体の状況も変化する。年金制度を考える場合，その制度の被保険者・受給権者の構成の特性・本質を把握すれば，財政運営上有用な情報になる。

毎年，一定人数が一様に出生し，死亡率のとおりに死亡し，かつ人口の移出入のない社会を仮定すると，その社会の年齢構成はやがて一定の状態に達する。これを死亡率の示す定常人口という。同様にして，企業の従業員集団においても，毎年特定の年齢で一定人数が入社し，予定されている脱退率に従い脱退・死亡するものと仮定した場合，やはり定常人口に達することとなる。これを脱退残存表の示す定常人口という。定常人口においては，当然のことながら，脱退者の年齢構成も一定となるため，年金数理では定常人口を仮定して将来の財政運営を考えることが基本となる。（巻末に定常人口の例を示すので参照されたい）

⑵　生命表

年金制度の計算にあたっては，予定死亡率に基づいて作成された生命表（死亡表または残存表とも呼ばれる）が用いられる。生命表は死亡率により定まる定常人口での人員分布を表わしたものであり，その構成は，まず l_0 人が同時に生まれたと仮定して，x 歳まで生存した人の人数を l_x と表わし，$l_x = 0$ をはじめて満たす x を最終年齢といい ω と表わす。x 歳の生存数 l_x 人の中で x+1 歳に到達することなく死亡する者の数を d_x 人と表わすと

$$d_x = l_x - l_{x+1} \qquad (1-1)$$

である。1 年間を単位とした生存率 p_x および死亡率 q_x は

$$p_x = l_{x+1} / l_x,\quad q_x = d_x / l_x \qquad (1-2)$$

と表わされ

$$p_x + q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1} + (l_x - l_{x+1})}{l_x} = \frac{l_x}{l_x} = 1$$

となる。生命表は死亡表ともよばれ，死亡率により定まる定常人口の社会の年齢別の生存者数および死亡者数を表わしたものである。

年　齢 x	生　存　数 l_x	死　亡　数 d_x	生　存　率 p_x	死　亡　率 q_x
0	100, 000	495	0. 99505	0. 00495
1	99, 505	78	0. 99922	0. 00078
2	99, 427	57	0. 99943	0. 00057
3	99, 370	42	0. 99958	0. 00042
4	99, 328	33	0. 99967	0. 00033
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

また，L_xをx歳からx+1歳の人口とすると

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\, dt \qquad (1-3)$$

であり，

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\, dt = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} L_{x+t} \qquad (1-4)$$

とすると，T_xはx歳以上の人口を表わす。

$$\mathring{e}_x = T_x / l_x \qquad (1-5)$$

と定義し，$\mathring{e}_x$はx歳の平均余命と呼ばれ，特に$\mathring{e}_0$を平均寿命と呼んでいる。平均寿命の逆数 $1/\mathring{e}_0$はその生命表の平均死亡率を表わしている。

現在x歳の者がn年間生存する確率${}_np_x$は

$$ {}_n p_x = (1-q_x)\cdot(1-q_{x+1})\cdot\cdots\cdots\cdots\cdot(1-q_{x+n-1}) = \prod_{k=1}^{n}(1-q_{x+k-1}) $$

$$ = \prod_{k=1}^{n} p_{x+k-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\cdot\cdots\cdots\cdots\cdot\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (1-6) $$

と表わされ，n 年間に死亡する確率 ${}_nq_x$ は

$$ {}_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad (1-7) $$

と表わされ，$n+1$ 年目に死亡する確率 ${}_{n|}q_x$ は，n 年間生存した後の $n+1$ 年目に死亡することになるので，

$$ {}_{n|}q_x = {}_np_x \cdot q_{x+n} = \left\{\prod_{k=1}^{n}(1-q_{x+k-1})\right\}\cdot q_{x+n} $$

$$ = \left\{\prod_{k=1}^{n} p_{x+k-1}\right\}\cdot q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x}\cdot\frac{d_{x+n}}{l_{x+n}} = \frac{d_{x+n}}{l_x} \qquad (1-8) $$

と表わされる。

x と $x+t$ の微小時間 t の死亡 $l_x - l_{x+t}$ が 1 年間続くとした時の年間死亡数は $\frac{l_x - l_{x+t}}{t}$ であり，これを期初の l_x で除して得られる年間死亡率を x 歳時点の死力 μ_x と定義すると

$$ \mu_x = \lim_{t\to 0}\frac{l_x - l_{x+t}}{t\cdot l_x} = -\frac{1}{l_x}\cdot\frac{dl_x}{dx} = -\frac{d\log l_x}{dx} \qquad (1-9) $$

また μ_x を用いて l_x を表わすには，上式をもとに両辺を積分し

$$ \int_0^x \mu_y dy = -\int_0^x \frac{d\log l_y}{dy}dy = -\log\frac{l_x}{l_0} $$

であるから，

$$l_x = l_0 \, e^{-\int_0^x \mu_y \, dy} \qquad (1-10)$$

となる。

現在 x 歳の人が T 年後に死亡するとして，この T が t と $t+\Delta t$ の間にある確率は

$$P_r\{t \leqq T \leqq t + \Delta t\} = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \cdot \Delta t$$

ここに Δt は任意の微小時間である。したがって

$$f(t) = {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}$$

は確率変数 T の確率密度関数といえる。なんとなれば,

$$\int_0^{\omega-x} f(t)dt = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \, dt = -\int_0^{\omega-x} d({}_tp_x) = -(0-1) = 1$$

したがって T の平均値は

$$E(T) = \int_0^{\omega-x} t \cdot f(t)dt = \int_0^{\omega-x} t\,(-d_t\,p_x) = \left[-t \cdot {}_tp_x\right]_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \, dt$$

$$= 0 + \int_0^{\omega-x} {}_tp_x \, dt = \mathring{e}_x \qquad (1-11)$$

となる。前述の ${}_np_x$，${}_{n|}q_x$ を死力を用いて表わすと

$${}_np_x = l_{x+n}/l_x$$

$$= \frac{l_0 e^{-\int_0^{x+n} \mu_y dy}}{l_0 e^{-\int_0^{x} \mu_y dy}} = e^{-\int_x^{x+n} \mu_y dy} = e^{-\int_0^{n} \mu_{x+t} \, dt} \qquad (1-12)$$

また，$x+t$ から $x+t+dt$ の微小時間 dt に死亡する人数は $l_{x+t} \cdot \mu_{x+t} \, dt$ だから，この間に死亡する確率は ${}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \, dt$ であり,

$$\therefore \quad {}_{n|}q_x = \int_n^{n+1} {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} \, dt \qquad (1-13)$$

となる。

⑶　脱退残存表

予定脱退率を用いるにあたっては，脱退率をもとに被保険者の推移および脱退者の発生状況を表にまとめた脱退残存表を作成し，計算に利用することとなる。また，年金制度の運営として通常は，制度から全員が脱退する特定的な年齢（企業年金では定年年齢などが用いられる）が定められていて，これを脱退残存表の最終年齢と呼ぶ。年金制度の計算には死亡脱退と生存脱退の二重脱退残存表が用いられるが，制度加入中で死亡する場合の厳密な死亡率ではなく，実務上は加入中死亡率への修正をしていない死亡率を用いている。すなわち，制度が十分に大きくなく実績としての加入中死亡率が推計できない場合などで，死亡率として制度以外の何らかの生命表死亡率からの援用をするとしたならば，制度からの生存脱退後死亡の部分が補正されるべきであるが，実務上は補正をせずに使用しているということである。

脱退残存表においては，残存者数に生存脱退率および死亡脱退率をそれぞれ乗じて，生存脱退数及び死亡脱退数を計算し，残存者数から生存脱退数および死亡脱退数を減じて，一年齢上の残存者数が算出される。生存脱退後死亡も考慮した死亡率は近似的に，残存者数から生存脱退数の 1 / 2 を減じた数で，死亡脱退数を

年齢 x	残存数 $l_x^{(T)}$	生存脱退数 $d_x^{(w)}$	死亡脱退数 $d_x^{(d)}$	残存率 $p_x^{(T)}$	生存脱退率 $q_x^{(w)}$	死亡脱退率 $q_x^{(d)}$
25	100,000	5,389	100	0.94511	0.05389	0.00100
26	94,511	4,724	94	0.94903	0.04998	0.00099
27	89,693	3,999	90	0.95411	0.04459	0.00100
28	85,604	3,234	88	0.96119	0.03778	0.00103
29	82,282	2,544	89	0.96800	0.03092	0.00108
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

除したものとなる。すなわち

$$d_x^{(w)} = l_x^{(T)} \cdot q_x^{(w)}$$
$$d_x^{(d)} = l_x^{(T)} \cdot q_x^{(d)} \qquad (1-14)$$
$$l_{x+1}^{(T)} = l_x^{(T)} - d_x^{(w)} - d_x^{(d)} = l_x^{(T)}(1 - q_x^{(w)} - q_x^{(d)}) = l_x^{(T)} \cdot p_x^{(T)}$$

$q_x^{(d)}$ は加入中に死亡する確率であるが，x 歳における生存脱退後死亡も考慮した死亡率を二重脱退残存表から算出するには，次のように考える。

いま生存脱退が1年を通じて一様に分布するものと仮定すれば，$(t,\ t+dt)$ の生存脱退者は $d_x^{(w)}\,dt$ である。これから生ずる $(t,\ 1)$ の期間の死亡数は $d_x^{(w)}\,dt\left(1-\dfrac{l_{x+1}}{l_{x+t}}\right)$ である。したがって生存脱退後 $x+1$ 歳までの死亡を $d_x^{(d)'}$ とすれば

$$d_x^{(d)'} = \int_0^1 d_x^{(w)} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_{x+t}}\right)dt$$

残存表における死亡が1年を通じて一様に分布すると仮定すれば

$1-\dfrac{l_{x+1}}{l_{x+t}} = (1-t)q_x$ とおけるので

$$d_x^{(d)'} = q_x \cdot d_x^{(w)} \cdot \int_0^1 (1-t)dt = \frac{q_x}{2} \cdot d_x^{(w)}$$

死亡者は加入中死亡と生存脱退後死亡の合計であるから，

$$q_x = \frac{d_x^{(d)} + d_x^{(d)'}}{l_x^{(T)}} = \frac{d_x^{(d)} + \frac{q_x}{2} d_x^{(w)}}{l_x^{(T)}}$$

$$\therefore \quad q_x = \frac{d_x^{(d)}}{l_x^{(T)} - \frac{1}{2} d_x^{(w)}} \qquad (1-15)$$

⑷　計算基数

年金制度の収入と支出に関する情報を算定するための前提となる推計値を計算基礎率として説明してきたが，実際の計算およびその説明に際してはこれらの計算基礎率をそのまま使用するのではなく，取扱が容易なように加工した計算基数

が用いられる場合が多い。計算基数は，年金数理の種々の計算を行う際に，べき乗や級数に関して計算を簡略化するために定義した関数であり，脱退残存表で計算されている残存者数（l_x），脱退者数（d_x）および割引率 v を用いて次のとおり表わされる。ここに予定利率を i として $v=\dfrac{1}{1+i}$ である。

$$D_x = v^x \cdot l_x$$

$$N_x = \sum_{k=x}^{\omega} D_k$$

$$S_x = \sum_{k=x}^{\omega} N_k$$

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x, \quad \overline{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}} \cdot d_x \qquad (1-16)$$

$$M_x = \sum_{k=x}^{\omega} C_k \ , \quad \overline{M}_x = \sum_{k=x}^{\omega} \overline{C}_k$$

$$R_x = \sum_{k=x}^{\omega} M_k \ , \quad \overline{R}_x = \sum_{k=x}^{\omega} \overline{M}_k$$

計算基数を各年齢に対して計算し，これを表として作成しておけば，種々の価格計算を容易にすることができる。計算基数表は，その基礎となる死亡表や脱退率及び利率により使いわけられる。予定昇給率を使用する計算の場合には，上記の l_x あるいは d_x に給与指数 b_x 等を乗じたものを計算基数として使用することが多い。（巻末に計算基数の例を示すので参照されたい）

第１章　練　習　問　題

１．ある年金制度は年１万名の加入がある。被保険者は毎年期初に30歳ちょうどで加入し，60歳ちょうどで脱退する。60歳未満においては，死亡以外の脱退はないものとする。

⑴　この制度が定常人口に達したとき，この制度の期初における人数を求める算式を示せ。

⑵　この制度がいま定常人口であるとする。期初現在30歳以上40歳未満の被保険者のうち，60歳に達するまでに死亡する者の人数を求める算式を示せ。

２．$\mathring{e}_x = 0.8(75 - x)$ とするとき，l_x を x で表わせ。ただし，$l_0 = 100,000$ とする。

３．$\mu_{x+t} = \dfrac{a}{1+at}$（$0 \leqq t \leqq 1$）のとき，$a$ を q_x で表わせ。

４．$D_x = 9397.8$，$D_{x+1} = 8850.5$，$p_x = 0.99827$ のとき，利率 i の値を 0.1%単位で求めよ。

５．x 歳の被保険者数 l_x が以下のとおり表される定常状態に達した年金制度があり、新規加入者は a 歳（$a > 0$ の整数）でのみ加入するものとする。被保険者の平均年齢を小数点以下第３位で四捨五入した結果が37.78歳であるとき、この制度における $2a$ 歳以上の被保険者の脱退時平均年齢に最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

$$l_x = \begin{cases} 5a - x & (a \leq x \leq 3a) \\ 0 & (x < a, x > 3a) \end{cases}$$

(A) 50　(B) 51　(C) 52　(D) 53　(E) 54

(F) 55　(G) 56　(H) 57　(I) 58　(J) 59

6．定常人口の下にある集団において、ある時点から年間の0歳の出生数が従前のα倍（$\alpha > 0$）に変化し、t年間その状態が継続した。t年後に集団全体の人口が従前のβ倍となったとき、βを表す式はつぎのいずれか。ただし、人口（l_x）は年齢（x）に関して連続な関数であり、年間の出生数が変化しても予定死亡率は変化しなかったものとする。

(A) $\alpha \cdot {}_t p_0$　(B) $(1-\alpha) \cdot {}_t p_0$　(C) $\alpha + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0$　(D) $(1-\alpha) + \alpha \cdot {}_t p_0$

(E) $\alpha + (1-\alpha) \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$　(F) $(1-\alpha) + \alpha \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$　(G) $\alpha + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0 \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$

(H) $(1-\alpha) + \alpha \cdot {}_t p_0 \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0}$　(I) $\alpha \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0} + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0$　(J) $(1-\alpha) \cdot \dfrac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0} + \alpha \cdot {}_t p_0$

7．x歳の昇給率R_xが以下のとおりとする。20歳の給与が、100,000円の時、40歳の給与に最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

$$R_x = \frac{1.02(x+1) \cdot f_{(x+1)} - x \cdot f_{(x)}}{x \cdot f_{(x)}}$$

但し、$f_{(x)} = \begin{cases} 20 & (x < 30) \\ 30 & (30 \leq x) \end{cases}$

(A) 410,000 円　(B) 420,000 円　(C) 430,000 円　(D) 440,000 円

(E) 450,000 円　(F) 460,000 円　(G) 470,000 円　(H) 480,000 円

(I) 490,000 円　(J) 500,000 円

８．25歳の給与が200,000円である被保険者について、35歳時点の給与を動態的昇給率に基づいて予測したところ300,000円であった。この動態的昇給率が、以下のx歳における給与指数b_xをもつ静態的昇給率を基礎としている場合、kに最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。なお、ベース・アップ等の要因による昇給率は2.5%とする。また、ベース・アップ等の要因による昇給率をrとした場合、x歳における静態的昇給率R_xを基礎とする動態的昇給率は$(1+R_x)\times(1+r)-1$とする。

$$b_x=\begin{cases}1 & (x<15)\\ 1+k\cdot(x-15) & (x\geq 15)\end{cases}$$

(A)0.011　(B)0.013　(C)0.015　(D)0.017　(E)0.019

(F)0.021　(G)0.023　(H)0.025　(I)0.027　(J)0.029

９．以下の脱退残存表において、年齢26歳における生存脱退後の死亡も考慮した死亡率q_{26}（空欄Xに入る数値）に最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。なお、脱退および死亡は一年を通じて一様に分布しているものとする。

年齢 x	残存数 $l_x^{(T)}$	生存脱退数 $d_x^{(w)}$	死亡脱退数 $d_x^{(d)}$	生存脱退率 $q_x^{(w)}$	死亡脱退率 $q_x^{(d)}$	死亡率 q_x
25	100,000			0.06226	0.00511	
26		5,100				X
27	87,411					

(A)0.00803　(B)0.00806　(C)0.00809　(D)0.00813　(E)0.00816

(F)0.00819　(G)0.00823　(H)0.00826　(I)0.00829　(J)0.00833

第２章　年金現価

1.　金利計算

⑴　単利と複利

年金数理の計算においては，積立金には時間の経過に対応して利息がつくものとされる。単位の元本に対し１年間に生ずる利息を年利率と言う。今，年利率を記号iで表わすとすると，期初元本P_0に対するn年後元利合計額P_nは次の式で表わされる。

㈠　利息を元本に繰り入れない（再投資を行わない）場合

$$P_n = P_0(1+ni) \qquad (2-1)$$

㈡　毎年期初に利息を元本に繰り入れる場合

$$P_n = P_0(1+i)^n \qquad (2-2)$$

㈠の場合，元本は常にP_0であるため各年度の利息はすべて$P_0 i$になるが，㈡の場合は毎年の利息が元本に繰り入れられていくため，元利合計は累乗で増加していく。

㈠のような計算を単利計算，㈡のような計算を複利計算という。

年金はその積立金が長期にわたり投資され，その利息の再投資による利息も相当の額になるため，年金数理の計算は複利計算で行われる。

複利計算の場合，利息の再投資を１年未満の期間で行うことが考えられる。$1/m$年毎に利息を元本に繰り入れる場合，年利率i'での１年後，n年後の元利合計は次の式で与えられる。

$$P_1 = P_0\left(1+\frac{i'}{m}\right)^m \qquad (2-3)$$

$$P_n = P_0\left(1+\frac{i'}{m}\right)^{mn} \qquad (2-4)$$

この場合，i'はすでに1年間の実質利率としての意味は無く，各$1/m$期の利率（i'/m）を定める指標となっており，このi'を名目利率と呼ぶ。mは転化回数と呼ばれるが，後節で述べる年金現価率の計算上は年間の支払回数と考えると良い。年金が年m回払であった場合，年金の支払期毎に元本が変化することになるからである。

（2－3）式で$m \to \infty$とすると次式が得られる。(eは自然対数の底)

$$P_1 = P_0 e^{i'}$$

$$P_n = P_0 e^{ni'}$$

これは連続的に利息を元本に繰り入れた場合の元利合計額を表わしている。一般に年間の実質利率iに対しδを次式のように定義し，利力と言う。

$$\delta = \log(1+i)$$

iは年間の収益を単利で得るために必要な利率である。転化回数がmの時には，i'，i，δは次のような関係になっている。

$$\left(1+\frac{i'}{m}\right)^m = 1+i = e^{\delta}$$

$$\therefore \quad i = \left(1+\frac{i'}{m}\right)^m - 1$$

$$\delta = \log(1+i)$$

$$= \log\left\{\left(1+\frac{i'}{m}\right)^m\right\} \qquad (2-5)$$

δは年利率i'，転化回数mで1年間に得られる利息と同等の利息を，連続的に転化する条件のもとで得るために必要な年利率を表わす。

投資効果が時刻tにより連続的に変化するような場合，利力δをtの関数として表わすと便利である。

利力が t の関数として δ_t で与えられた時，期初元本 P_0 の時刻 t における値 P_t を求めよう。

時刻 t から微少時 Δt の間の P_t の増分を ΔP_t とおくと，

$$\Delta P_t = P_t \cdot (\delta_t \cdot \Delta t)$$

ゆえに

$$\frac{1}{P_t} \Delta P_t = \delta_t \cdot \Delta t$$

$$\int \frac{1}{P_t} dP_t = \int \delta_t \, dt$$

$$\log P_t = \int \delta_t \, dt + \mathrm{C}$$

これから

$$P_t = P_0 \, e^{\int_0^t \delta_t \, dt} \qquad (2-6)$$

また $\delta_t = \delta$（定数）とすれば，

$$P_t = P_0 \, e^{\delta t} \qquad (2-7)$$

⑵　等価の原理

（2－2）式は元本 P_0 が n 年後には $P_0\,(1+i)^n$ になることを表わしたものであるが，この事実を次のように表現することとする。

“現時点の P_0 は n 年後の $P_0(1+i)^n$ と<u>等価</u>である”

等価とは文字どおり“価値が等しい”という意味である。金利の存在する計算においては時点の異なる2以上の金額を比較する場合，その絶対額では比較できない。そこである基準時点を設けて，各時点の金額を基準時点の等価な金額におきかえ，比較することが必要になる。基準時点より前の時点の金額と等価な基準時点の金額を<u>終価</u>と言う。逆に時点が基準時点より後の金額と等価な基準時点の金額を<u>現価</u>と言う。異なる時点の2つの金額A，Bがあって，AがBの終価であるならばBはAの現価である。

（2－2）式を変形すると

$$P_0 = P_n\left(\frac{1}{1+i}\right)^n = P_n v^n \quad \text{ここで，} \quad v = \frac{1}{1+i} \qquad (2-8)$$

これは年1回転化年利率iの時の，n年後の金額P_nの現価を求める式になっている。$v = 1/(1+i)$は1年後の単位金額に対する現価で複利現価率と言う。

時点と利率が同じであれば終価および現価は金額に比例する。単位金額に対する終価および現価をおのおの終価率，現価率と言う。（2－2）式，（2－8）式の$(1+i)^n$，v^nがこれに当る。終価率，現価率は利率と期間により決定される。

2. 確定年金

年金受給者の生存，死亡を問わず，一定の期間支払うことを約束する年金を確定年金と言う。確定年金の現価とは，ある期間にわたって支払われる年金を支払前の一時点で，等価な一つの金額にまとめたものを言う。以下，確定年金の現価の算出について述べる。

現在より1年後を初回の支払いとし，n年後まで1年毎に年金額Pを支払う年金の現時点での現価を求める。予定利率をi，割引率をvとすると，

第1回目の支払いの現価…… $P \cdot \frac{1}{1+i} = Pv$

第2回目の支払いの現価……Pv^2

⋮　　　　　　⋮

第n回目の支払いの現価……Pv^n

これから，支払いの現価の総和は，

$$Pv + Pv^2 + \cdots\cdots + Pv^n = P\,(v + v^2 + \cdots\cdots + v^n)$$

$$= P \cdot \frac{v\,(1 - v^n)}{1 - v} = P \cdot a_{\overline{n|}}$$

記号$a_{\overline{n|}}$ は期末払のn年確定年金の単位年金額に対する現価を表わし，確定年金現価率と言う。

$$a_{\overline{n|}} = \frac{v\,(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i} \qquad (2-9)$$

$P \cdot a_{\overline{n|}}$ は年金額Pの期末払n年確定年金現価と等価であるから，この年金を支払うためには現時点で$P \cdot a_{\overline{n|}}$ の金額を準備すればよいことになる。

次に同じ年金で期初払であった場合を考えよう。すなわち現時点で第1回目の支払いをなし，以降各年度の期初に年金を支払う場合である。この場合，第k回目の支払いは常に期末払の場合よりも1年早くなされるのであるから，現価は$1/v$倍になる。期初払の年金現価率を$\ddot{a}_{\overline{n|}}$で表わすと，

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1}{v} \cdot a_{\overline{n|}} = (1 + i) \cdot a_{\overline{n|}} \qquad (2-10)$$

今度は年金の支払いが年m回の場合を考える。1年間をm等分した各期の終わりに$1/m$ずつ支払うものとする。まず各期の支払いのその年度の末における終価を求め，年度毎に年度中の支払いと等価な年度末の金額を求めよう。

第1回目の支払いの年度末終価……$\dfrac{1}{m} \cdot \left(1 + \dfrac{i'}{m}\right)^{m-1}$

第2回目の支払いの年度末終価……$\dfrac{1}{m} \cdot \left(1 + \dfrac{i'}{m}\right)^{m-2}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

第m回目の支払いの年度末終価……$\dfrac{1}{m}$

年度中の支払いの年度末終価の総和

$$=\frac{1}{m}\left\{\left(1+\frac{i'}{m}\right)^{m-1}+\left(1+\frac{i'}{m}\right)^{m-2}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=\frac{1}{m}\cdot\frac{\left(1+\frac{i'}{m}\right)^{m}-1}{\left(1+\frac{i'}{m}\right)-1}=\frac{\left(1+\frac{i'}{m}\right)^{m}-1}{i'}=\frac{i}{i'}\equiv S_{\overline{1}|}^{(m)}$$

（ここでi'は名目利率である。）

各年度の支払いは，年度末での $S_{\overline{1}|}^{(m)}$ の支払いと等価であるから，年金額が $S_{\overline{1}|}^{(m)}$ の年度末払の年金の現価と年 m 回払の年金の現価は等しい。

ゆえに求める年金の現価率を $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ で表わすと，

$$a_{\overline{n}|}^{(m)}=S_{\overline{1}|}^{(m)}\cdot a_{\overline{n}|} \qquad (2-11)$$

また年金の支給開始までに据置期間がある場合には，支給開始時点における年金現価と等価になる値を求めればよい。据置期間sのある年金の現価率は，記号$s|a_{\overline{n}|}$のように通常の記号の前に $s\,|$ をつけて表わす。

支給開始時点における年金現価率は前述の（2－9）式で求められるのであるから，

$$s\,|\,a_{\overline{n}|}=v^{s}a_{\overline{n}|} \qquad (2-12)$$

その他も同様である。

次に連続払の確定年金現価を求めよう。

微小時間 dt に支払われる年金額は dt であり，（2－7）式は連続払の場合の終価を求める式であるから，時刻 t から dt の間に支払われる年金額の現価は $dt\cdot e^{-\delta t}$ で表わされる。

ゆえにn年確定年金の連続払での年金現価率を $\bar{a}_{\overline{n}|}$ で表わすと，

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t} dt$$

$$= -\frac{1}{\delta} \cdot \left[e^{-\delta t} \right]_0^n$$

$$= \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}$$

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta} \qquad (2-13)$$

最後に年金の支給期間を永久とする永久年金現価率を求めよう。前述の各式で$n \to \infty$とすれば

$$a_{\infty} = \frac{1}{i}$$

$$a_{\infty}^{(m)} = \frac{1}{i} \cdot S_{\overline{1|}}^{(m)}$$

$$s \mid a_{\infty} = \frac{v^s}{i}$$

$$\bar{a}_{\infty} = \frac{1}{\delta}$$

3.　生命年金

年金の支給に際して受給者が生存しているか否かにより支給要件が変わるものを生命年金という。夫婦等２人以上の組合せで受給の実態を為している場合，連生年金といい，これに対し受給者が１人のものを単生命年金という。連生年金については後節で述べるとして，ここでは単生命のみを扱うこととする。

⑴　終身年金，有期年金

生命年金の中でも最も代表的なものに終身年金がある。これは受給者が生存していることを条件に一定の年金額を支払い続けるもので，一定の支給期間は定めないものである。

有期年金は，一定期間の間生存を条件に年金を支払うもので，受給者が生存していても期間を満了した時には支払いが終了する年金である。

現在年齢がx歳の人に対し期初払での年金を支払う時の年金現価を，終身年金，期間n年の有期年金の両方について求めてみよう。

まず，受給者がy歳時の支払額の現価を求めると，

受給者がy歳（$y \geqq x$）まで生存している確率は${}_{y-x}p_x = \dfrac{l_y}{l_x}$であるから

$$\text{支払額の期待値} = \frac{l_y}{l_x}$$

支払時点まで（$y-x$）年あるから，

$$\text{期待値の現価} = \frac{l_y}{l_x} \cdot v^{y-x}$$

これから終身年金，n年有期年金の年金現価率を$\ddot{a}_x$，$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$で表わすと，

$$\ddot{a}_x = \frac{1}{l_x}(l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \cdots\cdots + l_\omega v^{\omega-x})$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{l_x}(l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \cdots\cdots + l_{x+n-1}v^{n-1})$$

ここで第１章で定義した計算基数を用いて

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \frac{1}{l_x v^x}(l_x v^x + l_{x+1}v^{x+1} + l_{x+2}v^{x+2} + \cdots\cdots) \\ &= \frac{1}{D_x}(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots\cdots) \\ &= \frac{N_x}{D_x} \qquad (2-14)\end{aligned}$$

同様に

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x} \tag{2—15}$$

期末払の年金の時には支払いの時期が1年繰り下がるため，次のようになる。

$$a_x=\frac{N_{x+1}}{D_x}$$
$$a_{x:\overline{n}|}=\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x} \tag{2—16}$$

年金の支給開始までに据置期間のある場合には，確定年金の時と同様に支給開始時点の年金現価を現時点で評価し直せばよい。支給開始の年齢をy歳，現時点の年齢をx歳とすると

$$_{y-x|}\ddot{a}_x=\frac{l_y}{l_x}v^{y-x}\cdot\ddot{a}_y=\frac{D_y}{D_x}\cdot\frac{N_y}{D_y}$$
$$=\frac{N_y}{D_x}$$

$$_{y-x|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=\frac{N_y-N_{y+n}}{D_x} \tag{2—17}$$

他も同様である。

⑵　保証期間付終身年金

保証期間付終身年金とは，支給開始後の一定期間を保証期間としこの期間中に受給者が死亡した場合は支払いを終了せず，保証期間満了時まで他者に転給する年金を言う。このような年金の現価を計算する場合には，保証期間までの部分とそれ以後の部分に分けて計算することとなる。

x歳における即時支給開始n年保証終身年金は，n年確定年金と$x+n$歳まで据置く終身年金との合成と考えられるため，その年金現価率は

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_{n|}\ddot{a}_x \qquad (2-18)$$

となる。期初払以外の支払方法においても同様である。

据置期間がある場合も，確定年金部分と終身部分を各々独立に考慮すればよい。（2－18）式で支給開始がy歳であったとすれば，

$$v^{y-x} \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}} + {}_{y+n-x|}\ddot{a}_x \qquad (2-19)$$

と表わせる。ただしこれは据置期間中に受給者が死亡したとしても，転給者への支給開始時期は受給者本人が生存していた場合と変わらないとした場合の算式である。据置期間のある保証期間付終身年金のうち，据置期間中に本人が死亡した場合，遺族には死亡の翌期初から支給するものがある。遺族への年金額が本人の額と変わらない場合は，確定年金部分の支払いが早まることになるので，この場合（2－19）式とは異なってくる。

死亡年齢をz歳（$x \leqq z < y$）とすると，死亡翌期初支給開始の確定年金現価は

$${}_{z+1-x|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^{z+1-x}\ddot{a}_{\overline{n|}}$$

受給者本人がz歳で死ぬ確率はd_z/l_xであることから，この部分の年金現価は

$$\frac{d_z}{l_x} \cdot v^{z+1-x}\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{C_z}{D_x} \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

で表わせる。$x \leqq z < y$の各年齢での死亡に対する現価をすべて考慮すると，求める年金現価率は次のようになる。

$$\sum_{z=x}^{y-1} \frac{C_z}{D_x}\ddot{a}_{\overline{n|}} + \frac{l_y}{l_x} \cdot v^{y-x}\ddot{a}_{\overline{n|}} + \frac{N_{y+n}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}(M_x - M_y)\,\ddot{a}_{\overline{n|}} + \frac{D_y}{D_x}\ddot{a}_{\overline{n|}} + \frac{N_{y+n}}{D_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{(M_x - M_y + D_y)\,\ddot{a}_{\overline{n|}} + N_{y+n}\} \qquad (2-20)$$

ここで（2－20）式のC_x，M_xは第1章で定義された計算基数である。

⑶　分割払の生命年金

生命年金現価について分割払を考える場合，確定年金のように容易ではない。残存者が支払期毎に異なってくるからである。

現在年齢x歳の者に各$1/m$年の期初毎に$1/m$の年金額を支払う場合の年金現価率$\ddot{a}_x^{(m)}$を求めよう。他の場合も応用として考えられる。

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{m(\omega-x)} \frac{1}{m} \cdot v^{\frac{t}{m}} \cdot {}_{\frac{t}{m}}p_x = \frac{1}{mD_x} \sum_{t=0}^{m(\omega-x)} D_{x+\frac{t}{m}}$$

Wool houseの公式より（注１）

$$\fallingdotseq \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t} - \frac{m-1}{2m} D_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \frac{dD_x}{dx}\right)$$

ここで

$$\frac{1}{D_x}\frac{dD_x}{dx} = \frac{d}{dx}(\log D_x) = \frac{d}{dx}\log l_x + \frac{d}{dx}(x \log v)$$

$$= -(\mu_x + \delta)$$

（μ_x：死力，δ：利力）

ゆえに

（注１）Wool houseの公式

$f(x)$は$[a，b]$で定義された無限回微分可能な函数とする。

$$f(a) + f\left(a+\frac{1}{n}\right) + f\left(a+\frac{2}{n}\right) + \cdots\cdots + f\left(b-\frac{1}{n}\right) + f(b)$$

$$= n\{f(a) + f(a+1) + \cdots\cdots + f(b)\} - \frac{n-1}{2}\{f(a) + f(b)\}$$

$$- \frac{n^2-1}{12n}\{f'(b) - f'(a)\} + \frac{n^4-1}{720n^3}\{f'''(b) - f'''(a)\} + \cdots\cdots$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta) \tag{2-21}$$

が成り立つ。

実用的には微分係数を含む項を無視した次の式が一般的である。

$$\ddot{a}_x^{(m)} \fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \tag{2-22}$$

また

$$a_x^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m} \text{ より}$$

$$a_x^{(m)} \fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{m+1}{2m} = a_x + \frac{m-1}{2m} \tag{2-23}$$

n年有期の場合には,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$\fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$$

$$- \frac{D_{x+n}}{D_x}\left\{\ddot{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_{x+n} + \delta)\right\}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) - \frac{m^2-1}{12m^2}\left\{(\mu_x + \delta) - \frac{D_{x+n}}{D_x}(\mu_{x+n} + \delta)\right\}$$

一般的な近似式は

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \tag{2-24}$$

同様に期末払の場合は

$$a_{x:\overline{n}|}^{(m)} \doteqdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{m+1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$= a_{x:\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \qquad (2-25)$$

⑷　連続払の生命年金

連続払の場合の年金現価率 $\bar{a}_x$ を求めよう。

$$\bar{a}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x\, dt$$

$$= \frac{1}{D_x}\int_0^{\omega-x} D_{x+t}\, dt$$

Euler-Maclaurinの公式より（注２）

$$\doteqdot \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta) \qquad (2-26)$$

$$= a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta)$$

この式は（２－21）式で$m\to\infty$の極限をとった式と一致している。

（２－22）式と同じように，実用的には

$$\bar{a}_x \doteqdot \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

（注２）Euler-Maclaurinの公式

$f(x)$は$[a,\ b]$で定義された無限回微分可能な函数とする。

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{x=a}^{b} f(x) - \frac{1}{2}\{f(a) + f(b)\}$$

$$- \frac{1}{12}\{f'(b) - f'(a)\} + \cdots\cdots$$

$$= a_x + \frac{1}{2} \qquad (2-27)$$

が用いられる。

次にn年有期で連続払の年金現価率を求めると，

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{x:\overline{n|}} &= \int_0^n v^t {}_tp_x \, dt \\
&= \frac{1}{D_x}\int_0^n D_{x+t}\, dt \\
&= \bar{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\bar{a}_{x+n} \\
&\fallingdotseq \left(\ddot{a}_x - \frac{1}{2}\right) - \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\ddot{a}_{x+n} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + a_{x:\overline{n|}}) \qquad (2-28)
\end{aligned}$$

4.　変動年金

年金額が一定の法則にしたがって増加または減少する年金の現価を求めよう。

⑴　確定年金の場合

年金額が毎年一定額増減する場合と，年金額に毎年一定率を乗じていく場合を考える。

㋐　初年度の年金額が 1，t 年度の年金額が $1+(t-1)K$ の期初払 n 年確定年金現価率を $\ddot{a}$ とすると，

$$\ddot{a} = 1 + v(1+K) + v^2(1+2K) + \cdots\cdots + v^{n-1}\{1+(n-1)K\} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表わされる。両辺に v を乗じて,

$$v\ddot{a} = v + v^2(1+K) + v^3(1+2K) + \cdots\cdots + v^n\{1+(n-1)K\} \qquad \cdots\cdots ②$$

①－②

$$(1-v)\ddot{a} = 1 + Kv(1 + v + \cdots\cdots + v^{n-1}) - v^n - nKv^n$$

$$= Kv\ddot{a}_{\overline{n}|} + (1-v^n) - nKv^n$$

$\dfrac{v}{1-v} = \dfrac{1}{i}$ より

$$\ddot{a} = K \cdot \frac{v}{1-v} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} + \frac{1-v^n}{1-v} - \frac{nKv^n}{1-v}$$

$$= \left(1 + \frac{K}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|} - \frac{nKv^{n-1}}{i} \qquad (2-29)$$

特に $K=1$ の場合,現価率を $I\ddot{a}_{\overline{n}|}$ で表わし,累加年金と呼ぶ。

$$I\ddot{a}_{\overline{n}|} = \left(1 + \frac{1}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{n}|} - \frac{nv^{n-1}}{i}$$

期末払の場合は同様にして

$$Ia_{\overline{n}|} = \left(1 + \frac{1}{i}\right)a_{\overline{n}|} - \frac{nv^n}{i} = \frac{1}{i}(\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n) \qquad (2-30)$$

⑷　初年度の年金額が 1,t 年度の年金額が r^{t-1} の場合,期初払 n 年確定年金現価率を $\ddot{a}$ とすると,

$$\ddot{a} = 1 + vr + v^2r^2 + \cdots\cdots + v^{n-1}r^{n-1}$$

初項 1,公比 vr の等比級数の和だから,$vr \neq 1$ のとき

$$\ddot{a} = \frac{1 - v^n r^n}{1 - vr}$$

期末払の場合は同様にして,

$$a=\frac{v\,(1-v^n r^n)}{1-vr}=\frac{1-v^n r^n}{(1+i)-r} \qquad (2-31)$$

⑵　生命年金の場合

終身給付で累加年金を支給する場合の年金現価を求めよう。現在年齢をx歳としたとき，期初払累加年金の年金現価率を記号$(I\ddot{a})_x$で表わす。

$$(I\ddot{a})_x=\sum_{t=0}^{\omega-x}(t+1)\,v^t\,{}_tp_x$$

$$=\sum_{t=0}^{\omega-x}(t+1)\,v^t\frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$$=\sum_{t=0}^{\omega-x}(t+1)\frac{D_{x+t}}{D_x}=\frac{1}{D_x}(D_x+2\,D_{x+1}+3\,D_{x+2}+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{D_x}(N_x+N_{x+1}+N_{x+2}+\cdots\cdots)$$

$$=\sum_{t=0}^{\omega-x}\frac{N_{x+t}}{D_x}$$

第1章で定義した計算基数を用いて表わすと，

$$(I\ddot{a})_x=\frac{S_x}{D_x} \qquad (2-32)$$

支給期間がn年有期の場合は，

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}=\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\frac{D_{x+t}}{D_x}=\frac{1}{D_x}(D_x+2D_{x+1}+\cdots\cdots+nD_{x+n-1})$$

$$=\frac{1}{D_x}\{(D_x+\cdots\cdots+D_{x+n-1})$$

$$+(D_{x+1}+\cdots\cdots+D_{x+n-1})+\cdots\cdots+D_{x+n-1}\}$$

$$=\frac{1}{D_x}\{(N_x-N_{x+n})+(N_{x+1}-N_{x+n})+\cdots\cdots+(N_{x+n-1}-N_{x+n})\}$$

$$=\frac{1}{D_x}(S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}) \qquad (2-33)$$

次に，支給開始後n年間は年金額は1からnまで増加し，以後はnのまま一定であるような年金を考えよう。このような終身給付の期初払の年金の年金現価率を$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x$で表わす。

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x=\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^t\ {}_tp_x+\sum_{t=n}^{\omega-x}nv^t\ {}_tp_x$$

第1項は$(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$と等しいから，

$$(I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x=\frac{S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_x}+\frac{nN_{x+n}}{D_x}$$

$$=\frac{S_x-S_{x+n}}{D_x} \qquad (2-34)$$

今度は初年度の年金額がnで毎年1ずつ年金額が減少していく年金を考えよう。年金現価率$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$で表わされる。

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n|}}=\sum_{t=0}^{n-1}(n-t)v^t\ {}_tp_x$$

$$=(n+1)\sum_{t=0}^{n-1}v^t\ {}_tp_x-\sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^t\ {}_tp_x$$

$$=(n+1)\ddot{a}_{x:\overline{n|}}-(I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$$

$$=(n+1)\cdot\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}-\frac{S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_x}$$

$$=\frac{(n+1)N_x-S_x+S_{x+n}-N_{x+n}}{D_x}$$

$$=\frac{nN_x-(S_{x+1}-S_{x+n+1})}{D_x} \qquad (2-35)$$

期末払は各場合とも年齢が1歳ずれるので，次のようになる。

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(I_{\overline{n}|}a)_x = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1}}{D_x}$$

$$(Da)_{x:\overline{n}|} = \frac{nN_{x+1} - (S_{x+2} - S_{x+n+2})}{D_x} \qquad (2-36)$$

分割払の累加年金は2つのケースが考えられる。1つは支払いは年m回だが年1回各年度初に年金年額を1（毎回の支払額としては$1/m$）ずつ増加していく場合で，もう1つは各支払期毎に年金年額を$1/m$（毎回の支払額としては$1/m^2$）ずつ増加していく場合である。期末払の各ケースの年金現価率を記号で前者は$(Ia)_x^{(m)}$，後者は$(I^{(m)}a)_x^{(m)}$と表わす。

$$(Ia)_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}a_x^{(m)} = \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x} a_{x+t}^{(m)}$$

$$\fallingdotseq \sum_{t=0}^{\omega-x} \frac{D_{x+t}}{D_x}\left(a_{x+t} + \frac{m-1}{2m}\right)$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{\omega-x}\left(N_{x+t+1} + \frac{m-1}{2m}D_{x+t}\right)$$

$$= \frac{1}{D_x}\left(S_{x+1} + \frac{m-1}{2m}\cdot N_x\right) \qquad (2-37)$$

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} = \sum_{t=1}^{m(\omega-x)} \frac{t}{m^2} v^{\frac{t}{m}} {}_{\frac{t}{m}}p_x = \frac{1}{mD_x}\sum_{t=1}^{m(\omega-x)} \frac{t}{m}\cdot D_{x+\frac{t}{m}}$$

（2－21）式と同様に，

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} \fallingdotseq \frac{1}{D_x}\left\{\sum_{t=1}^{\omega-x} t\,D_{x+t} + \frac{m-1}{2m}[t\,D_{x+t}]_{t=0}\right.$$

$$\left. + \frac{m^2-1}{12m^2}\left[\frac{d}{dt}(t\,D_{x+t})\right]_{t=0}\right\}$$

ここで

$$[t\,D_{x+t}]_{t=0} = 0\,,$$

$$\left[\frac{d}{dt}t\,D_{x+t}\right]_{t=0} = [D_{x+t} - t \cdot D_{x+t}(\mu_{x+t} + \delta)]_{t=0}$$

$$= D_x$$

ゆえに

$$(I^{(m)}a)_x^{(m)} \fallingdotseq (Ia)_x + \frac{m^2-1}{12m^2} \qquad (2-38)$$

（2－37），（2－38）式を$m\to\infty$とすることにより連続払の累加年金の現価率$(I\bar{a})_x$，$(\bar{I}\bar{a})_x$を求めることができる。$(\bar{I}\bar{a})_x$は年金額が連続的に増加する累加年金の現価率であり，$(I\bar{a})_x$は1年毎に年金額を改定する場合を表わしている。

すなわち，

$$(I\bar{a})_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|}\bar{a}_x, \quad (\bar{I}\bar{a})_x = \frac{1}{D_x}\int_0^{\omega-x} t\,D_{x+t}\,dt$$

（2－37），（2－38）式で$m\to\infty$とすると，

$$(I\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty}(Ia)_x^{(m)} \fallingdotseq \frac{1}{D_x}\left(S_{x+1} + \frac{1}{2}N_x\right)$$

$$= (Ia)_x + \frac{1}{2}\ddot{a}_x = (I\ddot{a})_x - \frac{1}{2}\ddot{a}_x$$

$$(\bar{I}\bar{a})_x = \lim_{m\to\infty}(I^{(m)}a)_x^{(m)}$$

$$= (Ia)_x + \frac{1}{12} \qquad (2-39)$$

5.　連生年金

(1)　連合生命の共存確率

2人以上の者の生死の条件により給付する年金を連生年金と言う。連生年金の現価を求めるにあたり，基本的な確率について述べる。以下の記号でx_1，x_2，……は年齢を表わし，(x_i)のようにその年齢の個人を表わすものとする。各個人は同一の死亡率に従う必要はないが，簡便のため残存者，基数，死力等の記号は特に個人毎に区別はしないで書くことにする。

(ア)　連合生命の全員が t 年間生存する確率

$${}_tp_{x_1,x_2,\cdots,x_n} = {}_tp_{x_1}\cdot{}_tp_{x_2}\cdot\cdots\cdots\cdot{}_tp_{x_n}$$

(イ)　連合生命の全員が t 年間に死亡する確率

$${}_tq_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_n}} = {}_tq_{x_1}\cdot{}_tq_{x_2}\cdot\cdots\cdots\cdot{}_tq_{x_n}$$

$$= (1-{}_tp_{x_1})\cdot(1-{}_tp_{x_2})\cdot\cdots\cdots\cdot(1-{}_tp_{x_n})$$

(ウ)　連合生命のうち少なくとも1人が t 年間生存する確率

$${}_tp_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_n}} = 1-{}_tq_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_n}}$$

$$= 1-(1-{}_tp_{x_1})\cdot(1-{}_tp_{x_2})\cdot\cdots\cdots\cdot(1-{}_tp_{x_n})$$

$$= \sum_{i_1}{}_tp_{x_{i_1}} - \sum_{i_1,i_2}{}_tp_{x_{i_1},x_{i_2}} + \cdots\cdots$$

$$+(-1)^{k+1}\sum_{i_1\cdots i_k}{}_tp_{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}\,{}_tp_{x_1,\cdots,x_n}$$

(エ)　連合生命のうち，ちょうど r 人が t 年間生存する確率

$$
{}_tp_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_n}}^{[r]} = \sum_{i_1\cdots i_r} {}_tp_{xi_1,xi_2,\cdots,xi_r} \cdot {}_tq_{\overline{xi_{r+1},\cdots,xi_n}}
$$

$$
= \sum_{i_1\cdots i_r} {}_tp_{xi_1} \cdot\cdots\cdots\cdot {}_tp_{xi_r} \cdot (1-{}_tp_{xi_{r+1}}) \cdot\cdots\cdots\cdot (1-{}_tp_{xi_n})
$$

$$
= \sum_{i_1\cdots i_r} {}_tp_{xi_1,xi_2,\cdots,xi_r} - {}_{r+1}C_r \sum_{i_1\cdots i_{r+1}} {}_tp_{xi_1,\cdots,xi_{r+1}}
$$

$$
+ {}_{r+2}C_r \sum_{i_1\cdots i_{r+2}} {}_tp_{xi_1,\cdots,xi_{r+2}} - \cdots\cdots
$$

$$
= \sum_{k=r}^{n} \{(-1)^{k-r} {}_kC_r \sum_{i_1\cdots i_k} {}_tp_{xi_1,\cdots,xi_k}\}
$$

(エ)の変形は，各 ${}_tp_{xi_1} \cdot\cdots\cdots\cdot {}_tp_{xi_r}$ 形の項が変形前後で同じ回数だけ数え上げられていることを確認できれば分かるであろう。$\sum_{i_1\cdots i_r}$ は1～nの中から重複しないようにとったr個の数字（$i_1, \cdots, i_r$）の全ての組合せについて合計することを意味する。

(オ)　連合生命のうち少なくとも r 人が t 年間生存する確率

$$
{}_tp_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_n}}^{\,r} = \sum_{l=r}^{n} {}_tp_{\overline{x_1,x_2,\cdots,x_n}}^{[l]}
$$

$$
= \sum_{l=r}^{n} \left\{ \sum_{k=l}^{n} (-1)^{k-l} {}_kC_l \sum_{i_1\cdots i_k} {}_tp_{xi_1,\cdots,xi_k} \right\}
$$

(ア)～(オ)を $n=2$ の場合について書くと，

$$
{}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y
$$

$$
{}_tq_{\overline{xy}} = (1-{}_tp_x)\cdot(1-{}_tp_y) = 1-{}_tp_x-{}_tp_y+{}_tp_x\cdot{}_tp_y
$$

$$
{}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y
$$

$$
{}_tp_{\overline{xy}}^{[1]} = {}_tp_x + {}_tp_y - 2\,{}_tp_x \cdot {}_tp_y
$$

$$
{}_tp_{\overline{xy}}^{\,1} = {}_tp_x + {}_tp_y - 2\,{}_tp_x \cdot {}_tp_y + {}_tp_x \cdot {}_tp_y = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_x \cdot {}_tp_y
$$

⑵　連生年金の現価

年金現価の場合も生存確率と同様の添字で表現する。すなわち，毎年度初に年金額1を支払う年金で，支払いの条件として，連合生命が共存している限り支払うもの，少なくとも1人が生存している限り支払うもの，ちょうどr人が生存している間支払うもの，少なくともr人が生存している限り支払うものの年金現価率を順に記号で$\ddot{a}_{x_1,\cdots,x_n}$，$\ddot{a}_{\overline{x_1,\cdots,x_n}}$，$\ddot{a}_{\overline{x_1,\cdots,x_n}}^{[r]}$，$\ddot{a}_{\overline{x_1,\cdots,x_n}}^{\ r}$と表わす。

連合生命の年金現価について$n=2$の場合について幾つか例を挙げよう。

㋐　2人が共存している限り年度初に年金額1を支払う年金の現価率$\ddot{a}_{xy}$

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \, {}_tp_{xy} = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \, {}_tp_x \cdot {}_tp_y = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t \cdot \frac{l_{x+t}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+t}}{l_y}$$

連合生命の計算基数として

$$D_{xy} = v^{\frac{x+y}{2}} l_x \cdot l_y = v^{\frac{x+y}{2}} l_{xy} \qquad (l_{xy} = l_x \cdot l_y)$$

$$N_{xy} = \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t:y+t}$$

とおけば，

$$\ddot{a}_{xy} = \frac{1}{D_{xy}} \sum_{t=0}^{\omega-x} D_{x+t:y+t} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}} \tag{2－40}$$

同様に

$$ {}_{n|}\ddot{a}_{xy} = \frac{N_{x+n:y+n}}{D_{xy}} \tag{2－41}$$

また死力として

$$\mu_{xy} = -\frac{1}{l_{xy}} \left. \frac{dl_{x+t:y+t}}{dt} \right|_{t=0} = \mu_x + \mu_y$$

を定義すると，単生命の時と同様に，分割払について

$$\ddot{a}_{xy}^{(m)}=\sum_{t=0}^{m(\omega-x)}\frac{1}{m}v^{\frac{t}{m}}\,{}_{\frac{t}{m}}p_{xy}=\frac{1}{mD_{xy}}\sum_{t=0}^{m(\omega-x)}D_{x+\frac{t}{m}:y+\frac{t}{m}}$$

$$\fallingdotseq \ddot{a}_{xy}-\frac{m-1}{2m}-\frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x+\mu_y+\delta) \qquad (2-42)$$

が得られる。

これから，連続払の場合は

$$\bar{a}_{xy}\fallingdotseq \ddot{a}_{xy}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}(\mu_x+\mu_y+\delta) \qquad (2-43)$$

(イ)　2人のどちらか一方が生存している限り年度初に年金額1を支払う年金の現価率 $\ddot{a}_{\overline{xy}}$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}=\sum_{t=0}^{\omega-x}v^t\,{}_tp_{\overline{xy}}=\sum_{t=0}^{\omega-x}v^t({}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy})$$

$$=\ddot{a}_x+\ddot{a}_y-\ddot{a}_{xy} \qquad (2-44)$$

n年据置の場合は，据置期間満了時に(x), (y)が共存している場合, (x)のみ生存している場合, (y)のみ生存している場合に分けて考える必要がある。

$${}_{n|}\ddot{a}_{\overline{xy}}=v^n\,{}_np_{xy}\,\ddot{a}_{\overline{x+n:y+n}}+v^n\,{}_np_x(1-{}_np_y)\,\ddot{a}_{x+n}+v^n\,{}_np_y(1-{}_np_x)\,\ddot{a}_{y+n}$$

$$=v^n\,{}_np_x\cdot{}_np_y(\ddot{a}_{x+n}+\ddot{a}_{y+n}-\ddot{a}_{x+n:y+n}-\ddot{a}_{x+n}-\ddot{a}_{y+n})$$

$$+v^n\,{}_np_x\,\ddot{a}_{x+n}+v^n\,{}_np_y\,\ddot{a}_{y+n}$$

$$=-v^n\,{}_np_x\cdot{}_np_y\,\ddot{a}_{x+n:y+n}+v^n\,{}_np_x\,\ddot{a}_{x+n}+v^n\,{}_np_y\,\ddot{a}_{y+n}$$

$$={}_{n|}\ddot{a}_x+{}_{n|}\ddot{a}_y-{}_{n|}\ddot{a}_{xy} \qquad (2-45)$$

(ウ)　2人のうちどちらか一方のみ生存している間年度初に年金額1を支払う年金の現価率 $\ddot{a}_{\overline{xy}}^{[1]}$

(イ)のうち(ア)の場合を除いた場合であるから

$$\ddot{a}_{\overline{xy}}^{[1]}=\ddot{a}_{\overline{xy}}-\ddot{a}_{xy}=\ddot{a}_x+\ddot{a}_y-2\ddot{a}_{xy}$$

$${}_{n|}\ddot{a}_{\overline{xy}}^{[1]}={}_{n|}\ddot{a}_{\overline{xy}}-{}_{n|}\ddot{a}_{xy}={}_{n|}\ddot{a}_x+{}_{n|}\ddot{a}_y-2\cdot{}_{n|}\ddot{a}_{xy} \qquad (2-46)$$

(エ)　(ウ)で死亡の順序も限定した場合。すなわち(y)の死亡を条件に給付が開始され，(x)の生存中年金額 1 を年度初に支払う年金の現価率 $\ddot{a}_{y|x}$

(x)の終身年金において，(y)の生存中給付が停止すると考えればよい。

$$\ddot{a}_{y|x} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}$$

$$\ddot{a}_{y|x}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - \ddot{a}_{xy}^{(m)}$$

$$\fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \delta)$$

$$-\left\{\ddot{a}_{xy} - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_x + \mu_y + \delta)\right\}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{m^2-1}{12m^2}\mu_y$$

$$\bar{a}_{y|x} = \bar{a}_x - \bar{a}_{xy}$$

$$\fallingdotseq \ddot{a}_x - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \delta) - \left\{\ddot{a}_{xy} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12}(\mu_x + \mu_y + \delta)\right\}$$

$$= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} + \frac{1}{12}\mu_y$$

ただし $\ddot{a}_{y|x}^{(m)}$ については $1/m$ 年の期間中に(y)が死亡した場合，その期間の末より年金額$1/m$を給付するものとしている。

μ_y の項が非常に小さいことを考えれば，いずれも $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy}$ で近似できると考えてさしつかえないだろう。

第２章　練　習　問　題

１．ある期間の確定年金（即時開始，年金額１，年１回期末払）の終価は 34.86832，現価は 11.95038 である。利率を求めよ。

２．年金額が最初の10年間は1，次の10年間は½，そのつぎの10年間はさらにその½となる，即時開始年1回期末払年金の現価を，5％の利率で計算せよ。

$a_{\overline{10}|} = 7.722$　　$v^{10} = 0.61391$ とする。

３．$a_x \leqq \dfrac{p_x}{q_x + i}$ を証明せよ。ただし，常に $p_x \geqq p_{x+t}$　（$t = 1, 2, 3, \cdots\cdots$）とする。

４．次の関係式を証明せよ。

$$a_x < a_{\overline{e_x}|}$$

ただし，$e_x = \dfrac{1}{l_x}(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots)$（$x$歳の略算平均余命）である。

5．n年間，各期初に1+（前回までの給付の合計のR倍）を給付する年金の現価は，予定利率を変更することによって，n年間各期初に1を給付する年金の現価に等しくなることを示せ。ただし，Rは一定で当初の予定利率より小さいものとし，初回の給付は1とする。

6．元本1なる元本保証終身年金の年金額を期初払の場合bとすれば，期末払の場合の年金額は$\dfrac{b}{1-b}$となることを証明せよ。

ただし，この場合元本保証とは，既に支払った年金額の合計が元本に達しない場合に死亡が起きれば，その差額を死亡直後に支払うものをいう。

7．現在x歳の人に対し，次のような年金を給付しようとする。第1回は4年後に支払われ，その後20年間は（x）の生死に関係なく，また，この期間を経過して（x）がなお生存すればその死亡まで続く年1回払の年金で，その年金額を1とする。

この年金の現価の式を求めよ。

8．(x)，(y)および(z)の3生命に対し，3人とも生存する間は，毎年度末に10,000円を，第1死亡後は毎年度末に8,000円を，第2死亡後は毎年度末に6,000円を最終生存者の死亡まで給付する年金の現価を求めよ。

９．支給開始時点の年金原資を１としたつぎのような２つの年金の支給方法を考える。

①支給期間n年、利率をiとする連続払年金

②支給期間n'年、利率をi'とする連続払年金

この２つの年金について支給期間中の年金の総額が等しいとき、i'を表す式として正しいものの記号を選べ。

(A) $\dfrac{in'}{n}$　(B) $\dfrac{in}{n'}$　(C) $(1+i)^{n'-n}-1$　(D) $(1+i)^{n-n'}-1$

(E) $(1+i)^{\frac{n'}{n}}-1$　(F) $(1+i)^{\frac{n}{n'}}-1$　(G) $\dfrac{(1+i)^{n'}-(1+i)^{n}}{n'-n}$

(H) $\dfrac{(1+i)^{-n}-(1+i)^{-n'}}{n'-n}$

10. 年金Ａ及びＢは、いずれも年1回期初払い10年確定年金である。年金Ａの年金年額はKで10年間一定であり、年金Ｂは初年度の年金年額が1、第t年度の年金年額がt（$1\leqq t\leqq 10$）の累加年金である。年金ＡとＢの年金現価が等しいとき、Kの値を求めよ。ただし、割引率vについて、$v=0.9302$、$v^{10}=0.4850$とする。（小数点以下第2位を四捨五入し小数点以下第1位まで求めよ。）

(A)4.5　(B)4.6　(C)4.7　(D)4.8　(E)4.9

(F)5.0　(G)5.1　(H)5.2　(I)5.3　(J)5.4

11. 初年度の給付額が１で、以降は「１＋（初年度から前年度までの給付の合計の2.0%）」を期初に給付するn年年金現価（予定利率i%、$n>1$）が、同じn年間各期初に１を給付する年金現価（予定利率5.0%）と等しくなった。このとき、t年度の給付額t（$t \geq 1$）を期初に給付する永久年金現価（$I\ddot{a}_{\overline{m|}}$において$m \to \infty$としたもの、予定利率は$i$%）を求めなさい。（小数点以下第１位を四捨五入し整数で求めなさい。）

12. 次の①～⑤について、誤っているものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。なお、$\overset{\circ}{e}_x$はx歳の平均余命とする。

① $\bar{a}_{\overline{\overset{\circ}{e}_x|}} \geq \bar{a}_x$

② $\dfrac{1}{\overset{\circ}{e}_x} \geq \mu_x \geq q_{x-1}$　（なお、μ_xはxについて単調増加とする。）

③ $\ddot{a}_{x|\overline{yz}} = \ddot{a}_y + \ddot{a}_z - \ddot{a}_{xy} - \ddot{a}_{zx} + \ddot{a}_{xyz}$

④ $n\ddot{a}_x = (I_{\overline{n|}}\ddot{a})_x - (I\ddot{a})_{x:\overline{n|}}$

⑤ $(\bar{I}\bar{a})_x = (I\bar{a})_x + \dfrac{1}{12}$

(A)①と②　(B)②と③　(C)③と④　(D)④と⑤　(E)①と④
(F)②と⑤　(G)①と②と③　(H)②と③と④　(I)③と④と⑤
(J)①と③と⑤　(K)いずれにも該当しない

13. 年金年額1（年1回期初払い）を支給する65歳支給開始20年保証終身年金の45歳時の年金現価を算定する。ただし、65歳までの据置期間中に受給権者が死亡した場合には、死亡の翌期初から遺族に本人と同額の年金を20年間支給する。基数表は次のとおりであり、期初払いの20年確定年金現価率を15.3238とした場合、年金現価として最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。

年齢	D_x	N_x	C_x	M_x
45歳	40,189.4064	887,866.0312	79.5984	14,329.2308
65歳	19,975.7916	291,078.3896	209.8428	11,497.7803
85歳	5,406.3201	33,008.8021	474.6539	4,444.8987

(A)　8.5　(B)　9.0　(C)　9.5　(D) 10.0　(E) 10.5

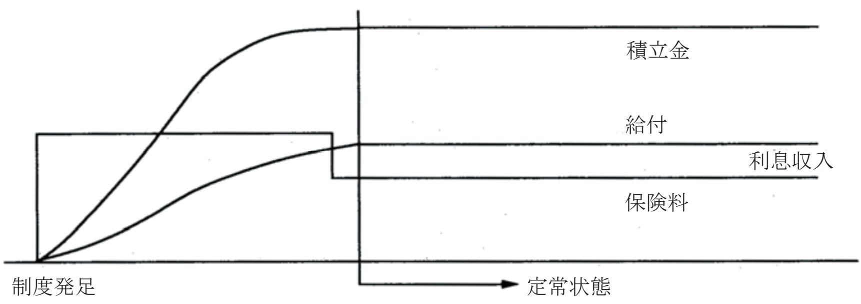
(F) 11.0　(G) 11.5　(H) 12.0　(I) 12.5　(J) 13.0

第３章　財政方式の概要１（定常状態における分類）

1.　定常状態と極限方程式

企業の年金制度導入にあたっては，はじめに企業が設立され，その後に年金制度を導入する場合がほとんどと考えられる。また，年金制度発足時の企業の人員構成も成熟した状態にあるとは限らない。企業年金の数理計算の実務においては，このような状況のもとで一定の積立方式を選択して適用することとなるが，これらの積立方式（財政方式という）の理論を学習するためには，定常状態・極限方程式等の概念を導入することが有効である。

年金制度は，たとえ人員構成が定常である企業で発足させたとしても，直ちに成熟した状態となることは少ない。給付については，制度発足当初既に退職した従業員に給付を行わない，又は在職中の従業員について制度発足以前の過去の勤務期間を給付額の算定上通算しない等の取扱いを行えば，毎年の給付額が安定するまでには時間を要する。また，保険料についてもいわゆる事前積立方式を取っている場合で制度発足時に過去の勤務期間を通算する場合には，その時点における積立不足分を補うため経過的に追加的費用が必要となってくる。給付・保険料についてこのような制度発足当初の経過的な取扱いが完了した時点において，年金制度は安定的な状態に到達する。（下図参照）



この段階に到達すると毎年の保険料及び給付は安定的になる。従って，収支相等の原則から年金資産も安定的になることが考えられる。このような状態を，一定の前提を設けて数式で表現すると以下のとおりになる。

毎年の給付金：B，保険料収入：C，積立金残高：F，予定利率：i

給付及び保険料の発生時期：年１回期初

n 年度の給付，保険料及び積立金残高をそれぞれ B_n，C_n，F_n とすると，

$F_{n+1} = (F_n + C_n - B_n) \times (1 + i)$

$\varDelta F_n = F_{n+1} - F_n$ とすると

$v \cdot \varDelta F_n = C_n + d \cdot F_n - B_n$

定常状態においては，給付，保険料及び積立金残高は一定となるから，

$B_n \to B$，$C_n \to C$，$F_n \to F$，$\varDelta F_n \to 0$ とすると，

$C + d \cdot F = B$ （３－１）

が得られる。

（３－１）式を極限方程式といい，極限方程式が成立している状態を定常状態という。

2. 年金制度の成熟段階

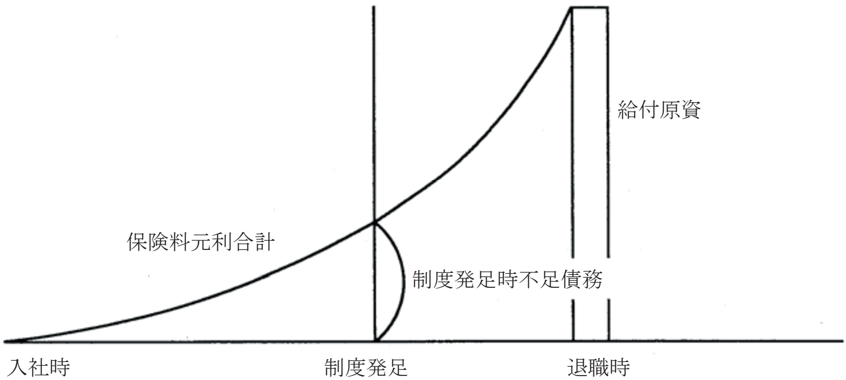
定常状態において若干言及したが，年金制度はたとえ定常人口のもとで制度を発足させたとしてもただちに定常状態となることは少ない。これは，給付と保険料の関係において定常状態における保険料のみでは，収支が相等しない被保険者が存在することを意味する。例えば，次のとおりである。

① 制度発足時に既に退職している従業員に給付を行う場合

これらの者は，制度発足と同時に給付の為に一定の原資が必要となるが，その時点においては積立金は存在しないため，給付原資が不足する。

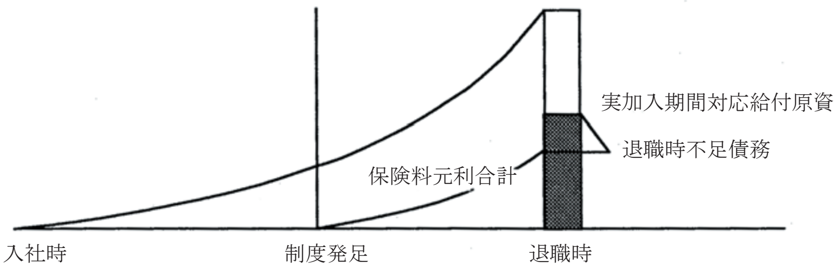
② 制度発足時に在職している従業員に過去の勤務期間を通算して給付を行う場合

これらの者は，他の被保険者と同様の給付を受ける反面、保険料の積立期間が短い。従って，制度が過去から存在していると仮定して，本来であれば積み立てておくべきであった保険料の元利合計相当分が制度発足時点で不足することとなる。



③ 制度発足時に在籍している従業員の過去の勤務期間を通算せずに給付を行う場合

これらの者は，②と同様に保険料の積立期間が短いが，一方で給付額も，過去の勤務期間を通算しないために，以前から年金制度が存在していれば受給できたであろう額よりも少なくなる。しかし，その制度において適用されている保険料とその者の給付とが相等するとは必ずしも言えない。



定常状態においては，毎年の保険料・給付額及び積立金は一定であり，結果としてこのような経過措置的な被保険者は存在しないこととなる。これら定常状態における保険料のみでは収支が均衡しない者の財政的手当を行い，かつ給付を終了することによって，年金制度はようやく定常状態に到達することとなる。

3.　非定常状態における経過的取扱い

制度発足時の問題として避けられないこのような被保険者に対する経過的な財政措置としては，以下のものが挙げられる。

① 制度発足時に不足分を一括保険料として払込む

② 制度発足後一定期間にわたり定常状態における保険料とは別途の保険料として払込む

③ 定常状態における保険料と調整の上，将来に亘り払込む

4.　財政方式の種類・概念

順序が前後したが，以後財政方式について説明する。

一般的に年金制度における財政方式とは，給付金（年金・一時金）の支払いの為の財源の準備方法を意味する。常識的な財政方式を取る限り，いかなる財政方式においても制度が成熟すると1. で導き出した極限方程式が成立する。

$C + d \cdot F = B$

この極限方程式は，次のことを意味する。

右辺の年間給付額（B）は，財政方式にかかわらず一定である。従って極限方程式は，毎年の保険料（C）と年金資産から発生する運用収益（iF）の現価（dF）との合計額が一定であることを意味する。いま，予定利率は一定であるから，この式は

① 毎年の保険料を少なくしようとすれば，多額の積立金を要する

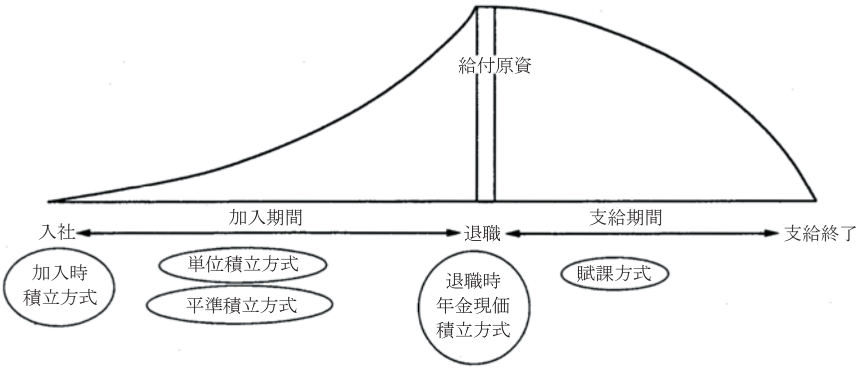
② 積立金が少なければ，毎年多額の保険料が必要となる

すなわち，財政方式は保険料の額を決定すると同時に積立金の額の水準（＝積立金から発生する利息収入への依存度）も決定することとなる。

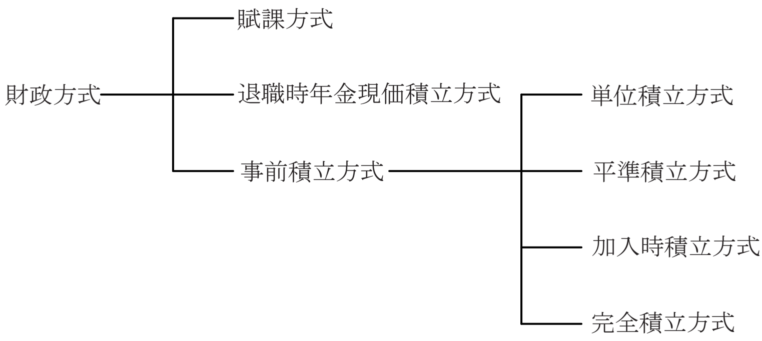
この利息収入への依存度は何を意味することとなるであろうか。

定常状態においては，保険料に関しても給付に関しても経過的な取扱いを受ける者は存在しない。この状態で制度全体が収支相等しているということは，個々の被保険者について保険料と給付との収支が相等していることを意味する。

利息収入への依存度は，被保険者個々人の給付に対する保険料の準備の時期及びその金額により決定される。容易に想像できることであるが，給付原資の準備は早ければ早いほど積み立てた金額から発生する利息を多く期待できるわけであり，（極限方程式から）保険料の総額はより小さくなる。各種財政方式の名称は，被保険者個人の積立時期を意味するものが多い。その概念を図で表すと以下のとおりである。



以上の考え方に基づいて各種の財政方式を整理すると以下のとおりになる。この図は，上から資金手当の遅い順にならべたものである。



5.　各種財政方式の定義

⑴　賦課方式（Pay-as-you-go Method，Current Funding Method）

賦課方式とは，支払うべき給付額が発生する都度同額の保険料を払込む財政方式である。制度全体で見ても，毎年発生する給付と必要な保険料の額は等しくなる。

これは，前述の極限方程式において $C=B$ であることを示しているため，結果として $F=0$ となる。賦課方式は，保険料の事前積立を行わず，財源として積立金に係る利息収入を全く期待していないのであるから，極限方程式を成立させる毎年の保険料の額はすべての財政方式の中で最も大きくなる。一般的に企業年金では，

① 被保険者数が大きくないため，人員構成のばらつきにより給付が変動し保険料が一定しない。

② 退職時までに給付原資の蓄積ができないため，受給権の保全機能がない。

等の理由で，賦課方式を財政方式として採用することは認められていない。

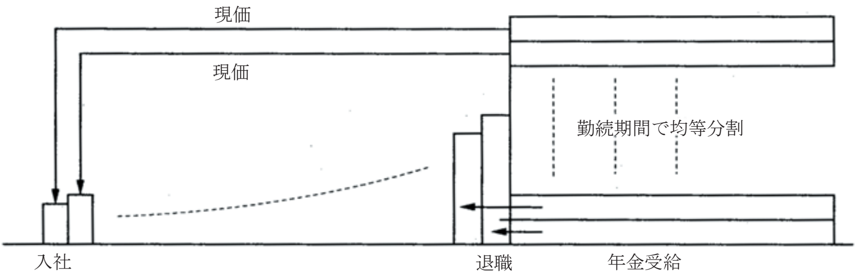
しかし，公的年金制度のように被保険者集団が充分に大きく，かつ，その運営が政策的に決められているものについては，必ずしも全面的に事前積立を行う必要がない。特に，国民の年齢構成が成熟した国においては賦課方式を採用することも考えられる。

⑵　退職時年金現価積立方式（Terminal Funding Method）

退職時年金現価積立方式とは，在職中に積立てを行わず，退職時（又は年金の支給開始時）にその時点で確定している年金の給付原資を保険料として一括して払込む財政方式である。この方式は，在職中の被保険者に対して積立を行わないわけであるから，定常状態における保険料の額は，ここで取り上げる財政方式の中では賦課方式の次に大きい。同様に，積立金の水準は賦課方式の次に低い。退職時年金現価積立方式は，退職金制度のように退職給付が全て一時金である制度に適用した場合，前出の賦課方式と同様の意味しか持ち得ない。このため一時金給付や年金の一時払給付が存在するのが通例である企業年金の財政方式としては，賦課方式と同様の理由により適切でない。

⑶　単位積立方式（Unit Credit Method，Accrued Cost Method）

単位積立方式は，退職時に賦与される見込の年金受給権を在職年数に対応して「単位」に分割し，1 単位の現価相当額を在職中の各年度に割当てるという原理の財政方式である。



各年度における個々の被保険者の保険料は，その年度に割当てられた「単位年金」の現価相当額（一時払い保険料）と一致する。このため，一時払積増方式と言うこともある。

この財政方式は，在職中に積立てを行うという点では，前 2 つの財政方式に比べ，定常状態における保険料の額は小さく，積立金の水準は高くなる。しかしながら，次に説明する平準積立方式と比較すると，保険料の額は大きく，積立金の水準は低い。それは，在職中の各年度の保険料の額の違いによるものである。

単位積立方式の各年齢の保険料は，退職時の単位年金の各時点における現価相当額であるから，支給開始までの期間が長い若年ほど（多額の利息収入を見込めるため）小さくなる。従って，被保険者個々の保険料は年齢が増加するに従って増加する。一方，平準積立方式は，在職の全期間にわたって平準的な保険料を想定しているため，単位積立方式との比較において相対的に早期により

大きな積立を行うことになる。このため，制度全体として積立金の利息に対する依存度が高まり，平準積立方式の方が保険料の額は小さく積立金の水準は高いということになる。

⑷　平準積立方式（Level Premium Method）

平準積立方式とは，在職中の全期間に亘り保険料水準を平準化する方式である。ここで言う平準化とは，給付及び保険料の算定基準が定額（給与に関係していない）の場合は一人あたり一定金額を，給与比例の場合は給与に対する一定比率を意味する。単位積立方式で説明したとおり，平準積立方式は単位積立方式との比較において，定常状態における保険料の額は小さく，積立金の水準は高い。実務的には平準積立方式には，第 4 章で説明するとおり，4 つの財政方式が属する。「加入年齢方式」，「総合保険料方式」，「到達年齢方式」及び「個人平準保険料方式」の各財政方式である。

⑸　加入時積立方式（Initial Funding Method）

年金制度における現実的な財政方式は⑷の平準積立方式までであるが，理論的には，今までの財政方式より高い積立水準と小さい保険料の財政運営は可能である。加入時積立方式とは，被保険者の加入と同時に将来の給付原資を全額払込む方式である。払込んだ保険料は，退職時まで運用収益が見込まれるため，平準積立方式より給付財源を積立金の利息に依存する度合いが高まる。

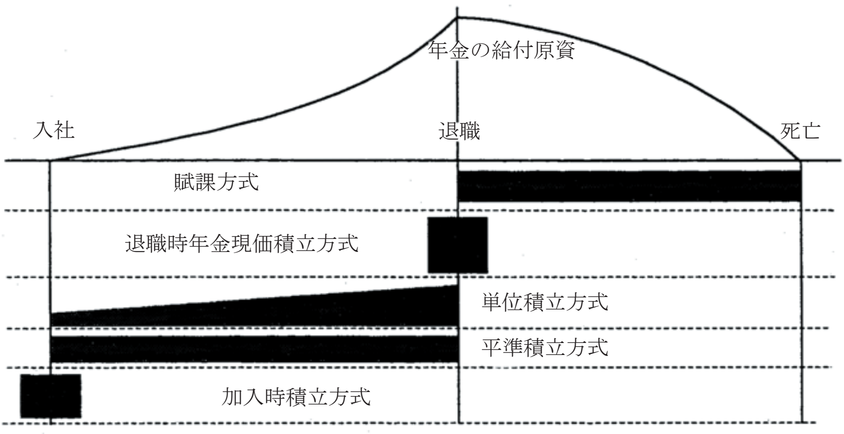
従って，平準積立方式よりも積立金の水準は高く保険料の額は小さくなる。

⑹　完全積立方式（Complete Funding Method）

完全積立方式は，被保険者個々の保険料の払込時期とは対応づけられないが，極限方程式において保険料の額（C）を 0 としたものである。毎年の給付（B）は，積立金の利息から支払うこととなる。この財政方式においては，年金受給者，在職中の被保険者のみならず将来加入が見込まれる被保険者についても既に給付原資が完全に積み立てられていることとなる。

$C=0$ であるため，考えられる財政方式のうちで，保険料の額は最も少なく（０），積立金の水準は最も高いものとなる。

前記⑴から⑸までの財政方式における保険料の額及び時期を図にすると次のようになる。



6.　制度内容の仮定

前述の各種財政方式を，具体的な数式により説明するために，この節では簡単な制度を仮定することとする。以後説明する各種財政方式の特徴は，制度を特定してもその一般性は失わない。

⑴　制度内容

議論を簡単にするために，以下のような制度を仮定する。

① 給付種類：退職年金

② 受給資格：定年年齢に到達して企業を退職した時

③ 年金年額：毎年１単位（年１回期初払い）

④ 給付期間：即時支給開始終身（保証期間無し）

⑤ 保険料の払込時期：年 1 回期初払い（当年度の新規加入後，給付の支払前に払込む）

⑥ 被保険者集団：第 1 章で与えた定常人口

⑦ 今後の新規の被保険者の見込み：定常人口を保つように最低年齢における人数と同数が毎年加入する

各種記号は，以下のとおりとする。括弧内は，基数表における具体的数値である。

x_e　：加入年齢（20 歳）

x_r　：定年年齢（60 歳）

ω　：生存最終年齢（108 歳）

$l_x^{(T)}$　：脱退残存表における x 歳の在職中の被保険者数（20～59 歳の l_x）

l_x　：生命表における x 歳の被保険者数（60～108 歳の l_x）

$\ddot{a}_x$　：年金現価率（N_x/D_x ただし $x \geq 60$）

B　：制度全体の毎年度の給付額（期初払い）（$=\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x$）

C　：制度全体の毎年度の保険料の額（期初払い）

F　：制度全体の積立金

P　：被保険者一人当たりの保険料（給与比例の場合は保険料率）

L　：在職中の被保険者の総数（$=\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)}$）

C・F・P は財政方式に依存するため，財政方式による区別の必要上，左肩に各財政方式の頭文字をとり，例えば ${}^{P}C$，${}^{P}F$，${}^{P}P$ のようにあらわすこととする。P は年齢 x に依存する場合は P_x，年度 n に依存する場合は P_n のようにあらわすこととする。

年金制度は本来，保険料の払込期間や退職による受給権者の発生を見込むための脱退残存表に基づく基数表と，退職後の年金支給を見込むための生命表に基づく基数表の二つを使い分けて数理計算を行うのが一般的である。例えば，40 歳で脱退した者に年金の受給権が発生するような制度の場合，40 歳以降の生命表による基数表が必要となってくる。しかしながら，今回仮定した制度は，定年退職者のみに年金の受給権を与える制度であるため，定年年齢以前の年齢に対応する生命表に基づく基数が不要となる。従って，付録に示したとおり脱退残存表に基づく基数と生命表に基づく基数が同一の基数表に収まっており，あたかも 1 本の基数表であるかのごとく取扱うことが出来るのは，仮定した制度のためであることを充分留意する必要がある。

なお，このような手法による財政方式の分類は，Charles L. Trowbridge により 1952 年に紹介されていることを付け加えておく。（以後，このような人員構成及び制度に基づく年金制度を「Trowbridge モデル」と言う。）

7. 給付現価及び人数現価等

前節で仮定した年金制度について，給付現価・人数現価等の定義及び若干の重要な関係式について確認しておきたい。

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{3－2}$$

$$d = 1 - v = \frac{i}{1+i} \tag{3－3}$$

$$\ddot{a}_{\infty} = 1 + v + v^2 + \cdots = \frac{1}{1-v} = \frac{1}{d} \tag{3－4}$$

$$D_x = l_x \cdot v^x (x \geq x_r) \text{ または } l_x^{(T)} \cdot v^x (x \leq x_r - 1) \tag{3－5}$$

$$N_x = \sum_{y=x}^{\omega} D_y \tag{3−6}$$

$$\ddot{a}_x = N_x / D_x \tag{3−7}$$

⑴　給付現価（S）

① 年金受給権者の給付現価（S^p）

$$S^p = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x \tag{3−8}$$

② 在職中の被保険者の給付現価

ア．在職中の被保険者の給付現価（S^a）

$$S^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \right) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{N_{x_r}}{D_x} \tag{3−9}$$

イ．在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価（S_{PS}^a）

定年退職する被保険者は，（$x_r - x_e$）年間で１の年金を受給することとなるのであるから，（$x - x_e$）年では，加入期間比例で $\dfrac{x - x_e}{x_r - x_e}$ の年金を累積させたと考えると，次のようになる。

$$S_{PS}^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{x - x_e}{x_r - x_e} \right) \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \right)$$

$$= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{x - x_e}{x_r - x_e} \right) \cdot \frac{N_{x_r}}{D_x} \tag{3−10}$$

ウ．在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価（S_{FS}^a）

$$S_{FS}^a = S^a - S_{PS}^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{x_r - x}{x_r - x_e} \right) \cdot \frac{N_{x_r}}{D_x} \tag{3−11}$$

③ 将来加入が見込まれる被保険者の給付現価（S^f）

定常人口を仮定しているため，次年度以降期初に毎年 $l_{x_e}^{(T)}$ 名の加入が見込まれる。

毎年度の新規の被保険者の加入時点の給付現価は，$l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\dfrac{N_{x_r}}{D_{x_e}} \right)$ である。

一方，翌期初から開始する毎年１の永久年金の現価率は，$v \cdot \ddot{a}_{\infty} = \dfrac{v}{d}$ であるから，求める給付現価は，この２つを掛け合わせたものである。

$$S^f = \left(\frac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{N_{x_r}}{D_{x_e}}\right) \qquad (3-12)$$

上記３つの被保険者集団の給付現価を合計したものを S とする。

$$S = S^p + S^a + S^f \qquad (3-13)$$

⑵　人数現価（G）

① 在職中の被保険者の人数現価（G^a）

$$G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right) = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left(v^{-x} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) \qquad (3-14)$$

② 将来加入が見込まれる被保険者の人数現価（G^f）

給付現価と同様の考え方で，次のとおりとなる。

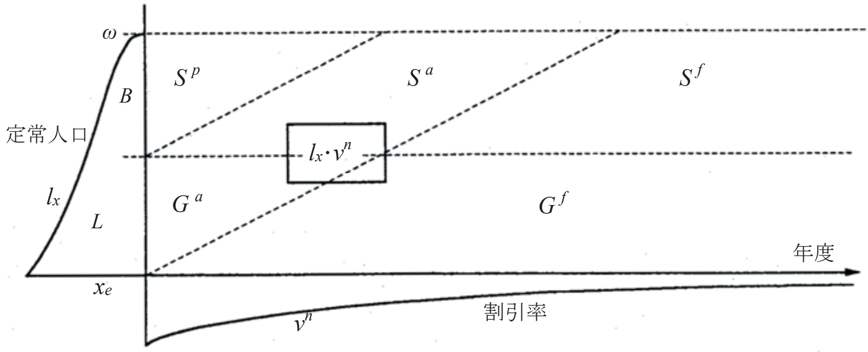
$$G^f = \left(\frac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x}{D_{x_e}} \right) = \left(\frac{v}{d}\right) \cdot v^{-x_e} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \qquad (3-15)$$

上記２つの被保険者集団の人数現価を合計したものを G とする。

$$G = G^a + G^f \qquad (3-16)$$

⑶　重要な関係式

まず，給付現価及び人数現価の数式を視覚的に理解するために，次のような図を示す。



横軸（n）を時間（年）とし，縦軸（x）を年齢とする。$n=0$が初年度であり，以降nは1年度経過する毎に1ずつ増加する。この時，この$n-x$平面上の各点（n，x）に，$v^n \cdot l_x$（又は $v^n \cdot l_x^{(T)}$）なる値が対応するものとする。これらの値には，次のような特徴が見出せる。

① nを固定して各xに対応する値を見ると，それは各l_xに定数v^nを乗じた値となっている。

② xを固定して各nに対応する値を見ると，それは初項l_x，公比vの等比数列である。

③ 上に定義した給付現価及び人数現価の算式は，それぞれ図に示した領域の値の合計額であることがわかる。

これらの特徴から，次に示す重要な関係式を導き出すことができる。

ア　$S=B/d$　（3－17）

図から明らかなとおりSは，初項B，公比vの無限等比数列の和となる。従って，$S=B \cdot \ddot{a}_{\infty}=B/d$ であることがわかる。

イ　$G=L/d$　（3－18）

アと同様にGは，初項L，公比vの無限等比数列の和となる。従って，

$G = L \cdot \ddot{a}_\infty = L/d$ であることがわかる。

ウ　$S^p = B/d - \left(\dfrac{v}{d}\right) \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$　(3－19)

$$S^p = S - (S^a + S^f) = B/d - (S^a + S^f)$$

ここで，括弧内は，図に戻ってみると初項 $v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$，公比 v の無限等比数列の和となる。

（斜線部分を一組として合計することとなる。）

$$= B/d - \ddot{a}_\infty \cdot (v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r})$$

$$= B/d - \left(\frac{v}{d}\right) \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

エ　$S^p + S^a = B/d - \left(\dfrac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\dfrac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}\right)$　(3－20)

これは，S^f の定義より明らかである。

$$S^p + S^a = S - S^f = B/d - \left(\frac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{N_{x_r}}{D_{x_e}}\right)$$

オ　$G^a = L/d - \left(\dfrac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\dfrac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}{D_{x_e}}\right)$　(3－21)

これも，G^f の定義より明らかである。

8.　各種財政方式における保険料及び積立金

6.で定義した年金制度について各種財政方式における保険料及び積立金について具体的に数式により求めてみる。

⑴　賦課方式

賦課方式は，給付が発生する都度同額の保険料を払込むのであるから，保険料の払込み対象者（ここでは，費用発生の源の意味で，保険料負担者の意ではない。）は年金受給者であり，その限りにおいては

$$^{P}P = 1 \tag{3－22}$$

である。制度全体の保険料は，

$$^{P}C = {}^{P}P \cdot \left(\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \right) = \left(\sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \right) = B \tag{3－23}$$

である。積立金については，

$$^{P}F = (B - {}^{P}C)/d = 0/d = 0 \tag{3－24}$$

となる。

⑵　退職時年金現価積立方式

退職時年金現価積立方式は，保険料の払込み対象者は x_r 歳で定年退職した被保険者である。保険料の額は，その者の年金給付に係るその時点の現価相当額となる。

$$^{T}P = \ddot{a}_{x_r} \tag{3－25}$$

$$^{T}C = l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \tag{3－26}$$

$$\begin{aligned} {}^{T}F &= B/d - {}^{T}C/d = S - l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \ddot{a}_{\infty} \\ &= S - (S^a + S^f + l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}) \\ &= S^p - l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \\ &= \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x \end{aligned} \tag{3－27}$$

（３－27）式は，退職時年金現価積立方式の定常状態における積立金は，年金受給権者の給付現価（x_r 歳を除く）となることを示している。

⑶　単位積立方式

単位積立方式からは，保険料の払込み対象者は，在職中の被保険者となる。この方式における x 歳の保険料は，その時点における１年分の年金額の現価相当額となる。

$$^{U}P_x = \left(\frac{1}{x_r - x_e} \right) \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \right) \tag{3－28}$$

$$ {}^{U}C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{U}P_x = \left(\frac{1}{x_r - x_e}\right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) $$

$$ = \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\right) \sum_{x=x_e}^{x_r-1} v^{x_r - x} = \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\right) \cdot \frac{v \cdot (1 - v^{x_r - x_e})}{1 - v} \qquad (3-29) $$

$$ {}^{U}F = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{x - x_e}{x_r - x_e}\right) \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) + \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x $$
$$ = S_{PS}^{a} + S^{P} \qquad (3-30) $$

ここで，与えた ${}^{U}F$ が，極限方程式を満たすことを確認しておく。

$A \equiv S_{PS}^{a} + S^{P} = S_{PS}^{a} + {}^{T}C + {}^{T}F$　　とおくと，

$$ {}^{U}C + d \cdot A - ({}^{T}C + d \cdot {}^{T}F) = {}^{U}C + d \cdot (S_{PS}^{a} + {}^{T}C) - {}^{T}C \qquad (3-31) $$

ここで，第 2 項括弧内は，

$$ S_{PS}^{a} + {}^{T}C = \sum_{x=x_e}^{x_r} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{x - x_e}{x_r - x_e}\right) \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) = \left(\frac{l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_e}\right) \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r} v^{x_r - x} \cdot (x - x_e) $$

（$x = x_e$ の項は，0 となるため付け加えても影響ない。）

ここで，最終式の Σ 以降を D とする。

$$ D = v^{x_r - x_e} \cdot 0 + v^{x_r - (x_e+1)} \cdot 1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + v^1 \cdot (x_r - 1 - x_e) + v^0 \cdot (x_r - x_e) $$

$$ v \cdot D = v^{x_r - x_e} \cdot 1 + v^{x_r - (x_e+1)} \cdot 2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + v^1 \cdot (x_r - x_e) $$

従って，

$$ D - v \cdot D = -v^{x_r - x_e} - v^{x_r - (x_e+1)} - \cdots\cdots\cdots\cdots - v^1 + (x_r - x_e) $$

$$ = (x_r - x_e) - \sum_{k=1}^{x_r - x_e} v^k $$

$$ d \cdot D = (x_r - x_e) - \frac{v \cdot (1 - v^{x_r - x_e})}{1 - v} $$

$$ D = \frac{1}{d} \cdot \left\{ (x_r - x_e) - \frac{v \cdot (1 - v^{x_r - x_e})}{1 - v} \right\} $$

従って，（３－31）式は以下のとおりとなる。

$$^{U}C+\left(\frac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\right)\left\{(x_r-x_e)-\frac{v\cdot(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}\right\}-{}^{T}C$$

$$=\left(\frac{l_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{x_r-x_e}\right)\cdot\left\{\frac{v\cdot(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}+(x_r-x_e)-\frac{v\cdot(1-v^{x_r-x_e})}{1-v}-(x_r-x_e)\right\}=0$$

これは，$^{U}C+d\cdot A={}^{T}C+d\cdot{}^{T}F$ であることを示している。

退職時年金現価積立方式においては，極限方程式の成立を確認済であるから，

$^{U}C+d\cdot A=B$　　となる。従って，A は単位積立方式における極限方程式を満たす積立金の額を与える式であることが確認できる。

単位積立方式における積立金の額は，在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価に年金受給権者の給付現価を加えたものに等しいことがわかる。

また，保険料 $^{U}P_x$ は年齢 x の関数であり，分母に $D_x=l_x\cdot v^x$ の要素があることからわかるとおり，人員の減少及び利息の両方の効果により年齢に関して単調増加となることがわかる。

⑷　平準積立方式

平準積立方式は，在職中の期間に平準的な保険料（毎年一定額又は給与に対する一定比率）によって積み立てることを意識した財政方式である。ここで取り上げた制度においては，保険料・積立金は，以下のとおり示される。

$$^{L}P=\frac{D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x} \quad (3-32)$$

$$^{L}C={}^{L}P\cdot L \quad (3-33)$$

$$^{L}F=S^{p}+S^{a}-{}^{L}P\cdot G^{a} \quad (3-34)$$

保険料の数式については，毎年一人当たり一定の額（Pとする。）を積み立てるものとして収支相等の原則から，

$$P \cdot (D_{x_e} + D_{x_e+1} + \cdots\cdots + D_{x_r-1}) = D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

により求めることができる。また，

$${}^{L}P = S^f / G^f \tag{3－35}$$

が言える。

$$S^f / G^f = \left\{ \left(\frac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}}\right) \right\} / \left\{ \left(\frac{v}{d}\right) \cdot l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x}{D_{x_e}} \right) \right\}$$

$$= \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} = {}^{L}P$$

従って，極限方程式を満たす積立金の額は，

$${}^{L}F = \left(B - {}^{L}C\right) / d = B / d - {}^{L}P \cdot L / d = S^p + S^a + S^f - {}^{L}P \cdot (G^a + G^f)$$

$$= S^p + S^a - {}^{L}P \cdot G^a$$ となる。

数式の展開にあたっては，（3－17），（3－18）及び（3－35）式を用いた。

積立金のうち在職中の被保険者に対する部分については，次のとおり分析できる。

$$S^a - {}^{L}P \cdot G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) - {}^{L}P \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right)$$

${}^{L}P = \dfrac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x}$ であるから，この式は次のように変形できる。

$$= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{L}P \cdot \left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y - \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right) = \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{L}P \cdot \left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x-1} D_y}{D_x} \right)$$

$$= \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} \left({}^{L}P \cdot \sum_{y=x_e}^{x-1} l_y^{(T)} \cdot (1+i)^{x-y} \right) \tag{3－36}$$

この式から，平準積立方式の定常状態における積立金の額は，在職中の被保険者についての過去の保険料の元利合計と年金受給権者についての給付現価の合計額となることがわかる。

⑸　加入時積立方式

加入時積立方式の保険料の払込み対象者は，新規に加入した被保険者のみである。これらの者のその時点における給付現価相当額を一時に払込むこととなる。

$$^{In}P = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} \tag{3－37}$$

$$^{In}C = l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} \right) \tag{3－38}$$

$$\begin{aligned} ^{In}F &= B/d - {}^{In}C/d = S - S^f - l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} \right) \\ &= S^p + S^a - l_{x_e}^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_{x_e}} \right) \\ &= S^p + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \right) \end{aligned} \tag{3－39}$$

従って，加入時積立方式の定常状態における積立金の残高は，在職中の被保険者（x_e 歳を除く）及び年金受給権者の給付現価に等しいことがわかる。

⑹　完全積立方式

完全積立方式は，極限方程式において $C=0$ としたものである。従って，保険料及び積立金は次のとおりである。

$$ {}^{Co}C = 0 \qquad (3-40) $$

$$ {}^{Co}F = (B - {}^{Co}C)/d = B/d = S \qquad (3-41) $$

完全積立方式における積立金の額は，年金受給権者，在職中の被保険者及び将来加入が見込まれる新規の被保険者の給付現価の合計額であることがわかる。

9. 各財政方式の相互の関係

これまで，説明してきた各種の財政方式の定常状態における保険料と給付現価とについて相互の関係を示す。

（3－17）式より，

$$ S = B/d = {}^{P}C/d \qquad (3-42) $$

（3－19）式より，

$$ S^{p} = \left({}^{P}C - v \cdot {}^{T}C\right)/d \qquad (3-43) $$

（3－20）式より，

$$ S^{p} + S^{a} = \left({}^{P}C - v \cdot {}^{In}C\right)/d \qquad (3-44) $$

従って，

$$ S^{a} = \left(v \cdot {}^{T}C - v \cdot {}^{In}C\right)/d \qquad (3-45) $$

（3－12）式より，

$$ S^{f} = \left(v \cdot {}^{In}C\right)/d \qquad (3-46) $$

また，（3－30）式より，

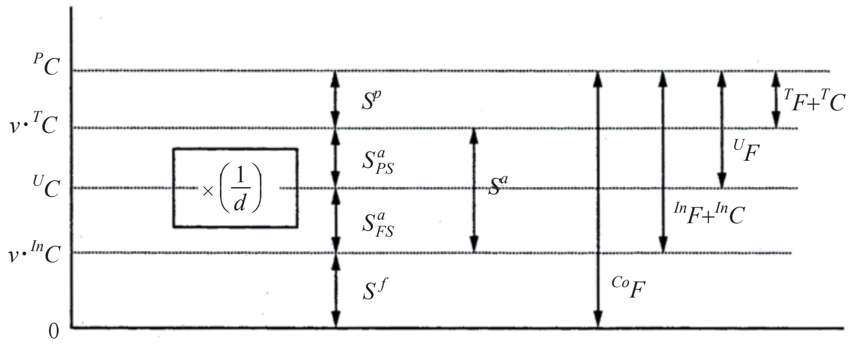
$$ S^{p} + S^{a}_{PS} = \left(B - {}^{U}C\right)/d = \left({}^{P}C - {}^{U}C\right)/d $$

従って，

$$ S^{a}_{PS} = \left(v \cdot {}^{T}C - {}^{U}C\right)/d \qquad (3-47) $$

$$ S^{a}_{FS} = \left({}^{U}C - v \cdot {}^{In}C\right)/d \qquad (3-48) $$

以上により，以下に示すように保険料の額と給付現価は$\left(\frac{1}{d}\right)$倍することにより互いに対応づけられていることがわかる。



^{P}C
$v\cdot{}^{T}C$
^{U}C
$v\cdot{}^{In}C$
0
$\times\left(\frac{1}{d}\right)$
S^{p}
S^{a}_{PS}
S^{a}_{FS}
S^{f}
S^{a}
^{Co}F
$^{In}F+{}^{In}C$
^{U}F
$^{T}F+{}^{T}C$

第３章　練　習　問　題

１．年間の給付 B 及び保険料収入 C が年末に発生するとした場合，年初の積立金を F として定常状態において成立する方程式（極限方程式）を導け。

２．定常状態にある次のような年金制度を考える。

保 険 料：年度初に C が払い込まれるものとする。

給　　付：年度末に B が支払われるものとする。

積 立 金：年度末給付支払後の値を F とする。

予定利率：i とする。

このとき次の質問に答えよ。

⑴　この制度の極限方程式を示せ。

⑵　積立金の水準を下げるため，ある年度以降この制度への保険料の払い込みをそれまでの $\dfrac{1}{2}$ とした。積立金が $\dfrac{F}{2}$ を下回るのは何年後か。

３．次の各等式を証明せよ。

①　$G^a = L + v \cdot \displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$

②　$S^p = B + v \cdot \displaystyle\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$

③　$S^a = v \cdot \left(l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} + \displaystyle\sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \right)$

４．⑴　次の等式を証明せよ。

$$l_{x_r}\ddot{a}_{x_r} + d\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x\ddot{a}_x = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x$$

⑵　Trowbridgeモデルにおいて，定常状態における積立金が

$$\sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$$　で表される財政方式を上式から導け。

５．定年退職者のみに対し，定年 r 歳時より終身年金（年金年額を α とし，年1回期初払い）を給付する年金制度において，財政方式を退職時年金現価積立方式によるものとすれば，定常状態における積立金 F は次式で表せることを示せ。

$$F = \alpha \times l_r \times (e_r - a_r)/d$$

ただし，$e_r = \sum_{t=1}^{\omega-r} l_{r+t}/l_r$ とする。

６．Trowbridge モデルの下で，x 歳（$x_e \leqq x < x_r$）の被保険者１人あたりの積立金 V_x が

$$V_x = \frac{x - x_e}{x_r - x_e} \cdot \frac{D_{x_r}}{D_x} \cdot \ddot{a}_{x_r}$$

で表される財政方式が単位積立方式であることを x 歳の被保険者の保険料を求めることによって示せ。

7．保険料と給付が年１回期初払いの年金制度において、n 年度末に定常状態にあるものとする。この年金制度において、n＋1 年度の運用利回りが予定利率を1.0%下回ったため、n＋1 年度末に積立不足が 20 発生した。n＋1 年度の運用利回りとして最も近いものを選択肢の中から一つ選びなさい。なおこの年金制度の保険料収入は 200、給付は 300 であるものとする。

(A) 3.0%　(B) 3.2%　(C) 3.4%　(D) 3.6%　(E) 3.8%

(F) 4.0%　(G) 4.2%　(H) 4.4%　(I) 4.6%　(J) 4.8%

8．定常状態に達している Trowbridge モデルの年金制度において、次の各財政方式における積立金の説明のうち正しいものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。ただし、新規加入年齢を x_e、定年年齢を x_r とし、予定利率を i 、$v = \dfrac{1}{1+i}$ とする。

①加入時積立方式

被保険者（x_e 歳の者を除く）の給付現価に v を乗じた額と受給権者の給付現価の合計

②退職時年金現価積立方式

受給権者（x_r 歳の者を除く）の給付現価

③単位積立方式

被保険者の過去の被保険者期間に対応する給付現価と受給権者の給付現価の合計

④平準積立方式

被保険者が過去の保険料の元利合計と受給権者の給付現価の合計

(A) ①と②　(B) ①と③　(C) ①と④　(D) ②と③
(E) ②と④　(F) ③と④　(G) ①と②と③　(H) ①と②と④
(I) ①と③と④　(J) ②と③と④　(K) いずれにも該当しない

9．ある年金制度では期初に保険料 C が払い込まれ、期末に給付 B が支払われる。また給付支払後の積立金は F で定常状態になっている（ここに予定利率は i とする）。

ある年度の運用利回りが j （$0< j <i$）となったため、その年度末の積立金残高が F より少なくなってしまった。そのため、翌年度の保険料を（$C+\Delta C$）とすることにより、翌年度末の積立金残高を F に回復させることにした。翌年度の運用利回りは予定利率どおりであるとして、追加保険料 ΔC を表す算式の記号を選べ。

(A) $\Delta C = B-(1+i)\,C-j\,F$　(B) $\Delta C = B-(1+j)\,C-j\,F$
(C) $\Delta C = B-(1+j)\,C-i\,F$　(D) $\Delta C = B-(1+j)\,C+j\,F$
(E) $\Delta C = B-(1+j)\,C+i\,F$

10．ある Trowbridge モデルの年金制度が、定常人口にある被保険者集団に対し、退職時年金現価積立方式により運営され、定常状態になっているものとする。

この制度において、ある年度から保険料をそれまでの保険料の α 倍（$0<\alpha<1$）に変更し、n年間その保険料を継続することにより積立金を減らしていくこととした。そして、その上で n 年後以降は賦課方式により運営することとしたい。

α を表す式として、最も適切なものを選択肢の中から一つ選びなさい。

なお、ここで

x_r ：定年年齢　i：予定利率（なお　$v=\dfrac{1}{1+i}$ とする）

e_{x_r}：x_r 歳における略算平均余命（$e_{x_r}=\sum_{t=1}^{\omega-x_r} l_{x_r+t}/l_{x_r}$）

a_{x_r}：x_r 歳における期末払い終身年金現価率

と定義するものとする。

（A）$\dfrac{1}{1-v^{n-1}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$

（B）$\dfrac{1}{1-v^{n}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$

（C）$-\dfrac{v^{n-1}}{1-v^{n-1}}\cdot\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+\dfrac{1}{1-v^{n-1}}$

（D）$-\dfrac{v^{n}}{1-v^{n}}\cdot\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+\dfrac{1}{1-v^{n}}$

（E）$\dfrac{v^{n-1}}{1-v^{n-1}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$

（F）$\dfrac{v^{n}}{1-v^{n}}\left(-\dfrac{e_{x_r}}{a_{x_r}}+1\right)$

（G）$\dfrac{1}{1-v^{n-1}}\left(-\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+1\right)$

（H）$\dfrac{1}{1-v^{n}}\left(-\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+1\right)$

（I）$-\dfrac{v^{n-1}}{1-v^{n-1}}\cdot\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+\dfrac{1}{1-v^{n-1}}$

（J）$-\dfrac{v^{n}}{1-v^{n}}\cdot\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1}+\dfrac{1}{1-v^{n}}$

第４章　財政方式の概要２（平準積立方式の概要）

1.　責任準備金と未償却債務

第３章では，定常状態を前提として各種の財政方式を説明した。この章では，被保険者の人員構成については定常人口を仮定した場合における（定常状態に到達する前の）財政的手当のちがいを中心に平準積立方式に属する各種財政方式の説明を行う。

まずはじめに，責任準備金という概念を導入する。

責任準備金とは，将来に亘って給付を賄うために必要な額（給付現価）のうち，理論的にその時点で積み立てておかなければならない金額をいう。保険料の収入が見込めるわけであるから，責任準備金は給付現価そのものではなく，給付現価から保険料の収入現価を差引いたものとなる。

責任準備金＝給付現価－保険料収入現価

責任準備金は，定義から明らかなとおり年金財政を評価する上で重要な尺度となるものである。

責任準備金の記号として V，または財政方式により ^{U}V などを用いる。

例えば，単位積立方式において責任準備金を算出すると以下のとおりである。

$$
\begin{aligned}
^{U}V &= S^{p} + S^{a} - \sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left\{ l_x^{(T)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x_r - x_e}\right) \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_y}\right)\right\} \\
&= S^{p} + S^{a} - \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{x_r - x}{x_r - x_e}\right) \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}\right) \\
&= S^{p} + S^{a} - S_{FS}^{a} = S^{p} + S_{PS}^{a} \qquad (4-1)
\end{aligned}
$$

また，平準積立方式においては，以下のとおりとなる。

$$^{L}V = S^{p} + S^{a} - {}^{L}P \cdot G^{a} \qquad (4-2)$$

それぞれの積立方式における責任準備金は，定常状態における積立金の残高に

等しいことがわかる。このことは，現実の積立金の額にかかわらず，責任準備金がその年金制度にとって保有すべき積立金の残高を示していることを意味する。

更に注意すべきことは，責任準備金算出上，将来加入が見込まれる被保険者の給付現価及び保険料収入現価が考慮されていないことである。実際，上記２つの例においては，将来加入が見込まれる被保険者に関しては，給付現価と保険料収入現価は等しいことから，それを考慮しても結果は同じである。しかしながら，この章において財政計画は，将来の被保険者をその計画の中に折り込まず，在職中の被保険者と年金受給権者の閉じた集団で考えるものとする。

前述の責任準備金の算出例においては，保険料収入現価は定常状態における保険料を適用した。

この保険料は，「標準保険料」という。標準保険料を適用して算出した責任準備金よりも積立金の額が小さい時，その差額を未積立債務（未償却債務）といい，年金制度は標準保険料のみでは財政上不足をきたすことになる。この未積立債務は，年金制度の給付改善や財政再計算によっても発生するが，まずは制度発足の際に過去勤務期間を通算すること等により発生する。その意味で，この未積立債務は，「未償却過去勤務債務等の額」ということもある。

未積立債務の記号として U を用いる。

未積立債務＝責任準備金－積立金残高

$$U = V - F \tag{4－3}$$

このような不足債務について，何らかの財政的措置を講ずる必要があるわけだが，そのうちのひとつとして，標準保険料とは別に未積立債務償却のための「特別保険料」を設ける方法がある。

特別保険料は，不足債務の性格上（過去勤務等の債務を持っている人が退職するまでに償却を終了しておくことが好ましい）一定の期間を設けてその期間内に償却を完了するように算出するのが一般的である。特別保険料の算出方法は例え

ば次のとおりである。

① 一定の期間を設けて元利均等償却を行う場合

ア 給与の一定率による償却

特別保険料＝未償却債務/（総給与・保険料の拠出回数・一定期間に対応する確定年金現価率）

$$P' = \frac{U}{L \cdot m \cdot a_{\overline{N|}}^{(m)}}$$ ここで m は拠出回数，N は償却期間

イ 定額償却

特別保険料＝未償却債務/（保険料の拠出回数・一定期間に対応する確定年金現価率）

$$P' = \frac{U}{m \cdot a_{\overline{N|}}^{(m)}}$$

② 一定の償却割合を設けて定率償却を行う場合

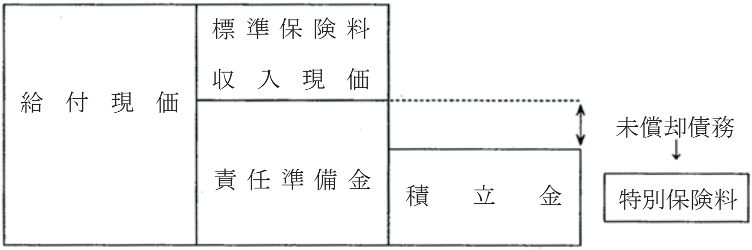
特別保険料＝（未償却債務・償却割合）/（総給与・保険料の拠出回数）

$$P' = \frac{U \cdot r}{L \cdot m}$$ ここで r は償却割合

①は厚生年金基金制度や確定給付企業年金制度において採用されている償却方式であり，②は平成 24 年 3 月末に廃止された適格退職年金制度で採用されていた償却方式のひとつである。なお，厚生年金基金や確定給付企業年金においては責任準備金を給付現価から特別保険料を含めた保険料収入現価を控除した額として定義しているが，この教科書では標準保険料収入現価のみを控除した額をいうこととする。

それぞれの保険料の位置付けから，標準保険料を将来勤務期間に対応する給付に係るもの，特別保険料を過去勤務期間に対応する給付に係るものと説明される

こともある。



2.　平準積立方式に属する各種財政方式の定義

この節では，第3章で説明した平準積立方式に属する4つの財政方式を紹介する。いずれの財政方式も定常状態においては，保険料及び積立金は一致する。従って，これらの財政方式の違いは，制度発足時の経過的な被保険者が持つ債務の処理の方法の違いといってもよい。

⑴　加入年齢方式（Entry Age Normal Cost Method）

加入年齢方式では、制度に加入した（または加入したであろう）各加入年齢に応じて在職中の被保険者期間に亘って平準的（一定額又は給与に対する一定率）になるように算出した保険料を標準保険料とする。制度発足時に既に過去勤務期間をもつ被保険者については，標準保険料のみでは不足が発生する。このため，これらの不足債務を未積立債務として，別途特別保険料を設けて払込むことにより制度全体の収支を相等させることとなる。

加入年齢方式は，標準保険料率を各加入年齢毎にそれぞれ算出するのが一般的であるが，ひとつの加入年齢に対応する標準保険料率を一律に適用することもある。このような方法は，加入年齢方式の中でも特定年齢方式ということもあるが，日本においては通常この特定年齢方式を加入年齢方式といっている。定常人口においては，被保険者は必ず x_e 歳で加入するため，設定したモデルにおいて

は加入年齢方式も特定年齢方式も同一結果となる。

加入年齢方式は，保険料設定の趣旨から標準保険料については平準積立方式と同じとなる。従って，定常状態においては次の算式が成立する。

$$ {}^{E}P = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} \qquad (4-4) $$

$$ {}^{E}C = {}^{E}P \cdot L \qquad (4-5) $$

$$ {}^{E}V = S^p + S^a - {}^{E}P \cdot G^a = {}^{E}F \qquad (4-6) $$

⑵　個人平準保険料方式（Individual Level Premium Method）

個人平準保険料方式とは，個々の被保険者がそれぞれ給付に要する費用を在職中の被保険者期間に亘り平準的（一定額又は給与に対する一定率）に積み立てる財政方式である。前提としているモデルにおいては，制度発足時の被保険者についても一律1の年金を給付する（過去勤務期間を通算する）わけであるから残された保険料の払込み期間が短い高齢者ほどコストが高くなる。

制度発足時 x 歳の被保険者の保険料は,

$$ {}^{I}P_x = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y} \qquad (4-7) $$

特に，${}^{I}P_{x_e} = {}^{E}P$ である。

また，${}^{I}P_x = {}^{E}P + ({}^{I}P_x - {}^{E}P)$ であるから，保険料は加入年齢方式の標準保険料と加入年齢方式の責任準備金の積立に要する保険料との合計と考えることができる。

制度発足時の保険料は受給権者に対する給付現価を一括して拠出するとすれば，次のとおりとなる。

（C の添え字の 1 は，発足時 $n=1$ を表す。）

$$ {}^{I}C_1 = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{I}P_x + S^p \qquad (4-8) $$

2年度以降の保険料は，制度発足時に在職していた被保険者が定年退職し，制

度発足後に加入した被保険者が徐々に増加する。n 年度の保険料は，それを考慮すると次のとおりになる。

$$
\begin{aligned}
{}^{I}C_n &= \sum_{x=x_e+n-1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{I}P_{x-n+1} + \sum_{x=x_e}^{x_e+n-2} l_x^{(T)} \cdot {}^{E}P \\
&= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot {}^{E}P + \sum_{x=x_e+n-1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left({}^{I}P_{x-n+1} - {}^{E}P\right) \qquad (4-9)
\end{aligned}
$$

ここにおいて，$x-n+1$ は現在年齢 x 歳の被保険者の制度発足時の年齢である。n の増加に従いこれらの者が退職し，${}^{I}C_n \rightarrow {}^{E}C$ となる。一方，加入年齢方式の責任準備金は次のように表わされる。

$$
{}^{E}V = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \left(\frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} - {}^{E}P \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right) + S^p
$$

$$
{}^{I}P_x = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}
$$
であるから，

$$
{}^{E}V = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ l_x^{(T)} \cdot ({}^{I}P_x - {}^{E}P) \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right\} + S^p \qquad (4-10)
$$

従って，個人平準保険料方式と加入年齢方式の保険料の差の現価は，加入年齢方式における在職中の被保険者の責任準備金の額に等しいことがいえた。このことは，制度発足時に保険料の差額の現価を一括して積み立てれば，加入年齢方式と同水準の定常状態が実現することを意味する。

⑶　総合保険料方式（Aggregate Cost Method）

総合保険料方式は，在職中の被保険者に一律の保険料を適用するものの，保険料は加入年齢方式のように標準保険料と特別保険料とを区別しない。制度発足時の保険料は次のとおり表わされる。

（P，C の添え字の 1 は，発足時 $n=1$ を表す。）

$$ {}^{C}P_1 = \frac{S^a + S^p}{G^a} \tag{4－11} $$

$$ = {}^{E}P + \frac{S^a + S^p - {}^{E}P \cdot G^a}{G^a} $$

$$ = {}^{E}P + \frac{{}^{E}V}{G^a} \tag{4－12} $$

$$ {}^{C}C_1 = {}^{C}P_1 \cdot L \tag{4－13} $$

注）保険料の添え字 C は，重複を避けることと，後述の開放型総合保険料方式（Open Aggregate Cost Method）と対比する意味で使用する Closed Aggregate Cost Method（閉鎖型総合保険料方式）の頭文字を取った。なお，単に総合保険料方式といったら閉鎖型を指すと解釈してよい。

（4－12）式が示すように，初年度の保険料は加入年齢方式における標準保険料に責任準備金相当額の償却コストを上乗せしたものとなる。翌年度においては，前年度から在職している被保険者のみであれば引続き同じ保険料を適用することにより財政上の過不足は生じない。しかし，このモデルにおいては翌年度に新規の被保険者が追加加入することになるが，これらの者を含めると財政上の過不足が発生することになる。（新規の被保険者は，${}^{E}P$ を適用すれば収支が相等するにもかかわらず ${}^{C}P_1$ を適用するため。）従って，総合保険料方式においては，毎年（又は数年に一度）保険料の見直しが必要となってくる。

一般に n 年度においては，保険料は以下のとおり算出される。

$$ {}^{C}P_n = \frac{S^a + S^p - {}^{C}F_n}{G^a} \tag{4－14} $$

$$ {}^{C}C_n = {}^{C}P_n \cdot L \tag{4－15} $$

前に説明した2つの財政方式と異なり，総合保険料方式は毎年度適用される保険料が変動するために，定常状態に到達した時の保険料及び積立金の残高が平準積立方式（すなわち加入年齢方式）のそれに等しくなることを確認しておく必要

がある。

$$ {}^{C}C_n = \frac{S^a + S^p - {}^{C}F_n}{G^a} \cdot L \qquad (4-16) $$

$$ {}^{C}F_n = ({}^{C}F_{n-1} + {}^{C}C_{n-1} - B) \cdot (1+i) \qquad (4-17) $$

この2つの関係式から F 及び C の極限値を求める。

$$ \begin{aligned} {}^{C}F_n &= \left({}^{C}F_{n-1} + \frac{S^p + S^a - {}^{C}F_{n-1}}{G^a} \cdot L - B \right) \cdot (1+i) \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{(G^a / L)} \right\} \cdot (1+i) \cdot {}^{C}F_{n-1} + \left\{ \frac{S^p + S^a}{(G^a / L)} - B \right\} \cdot (1+i) \end{aligned} \qquad (4-18) $$

ここで，右辺第1項の係数である $\left\{ 1 - \frac{1}{(G^a / L)} \right\} \cdot (1+i)$ について調べてみる。

$$ \begin{aligned} \left\{ 1 - \frac{1}{(G^a/L)} \right\} \cdot (1+i) &= \left(1 - \frac{L}{G^a} \right) \cdot (1+i) = \frac{G^a - d \cdot (G^a + G^f)}{G^a \cdot v} \\ &= \frac{(1-d) \cdot G^a - d \cdot G^f}{G^a \cdot v} = 1 - \frac{d \cdot G^f}{v \cdot G^a} < 1 \end{aligned} $$

一方，$G^a > L$ であるから，

$$ 0 < \left\{ 1 - \frac{1}{(G^a/L)} \right\} \cdot (1+i) < 1 $$ であることがわかる。

従って，$\{ {}^{C}F_n \}$ は，収束する。

ここで，R を次の条件を満たす値とする。

$$ R = \left\{ 1 - \frac{1}{(G^a/L)} \right\} \cdot (1+i) \cdot R + \left\{ \frac{S^p + S^a}{(G^a / L)} - B \right\} \cdot (1+i) \qquad (4-19) $$

この式を R について解くと次のとおりとなる。

$$R = \frac{(S^p + S^a) \cdot L - B \cdot G^a}{L - d \cdot G^a} \qquad (4-20)$$

（4－18）式から（4－19）式を差引くと，

$$\left({}^{C}F_n - R \right) = \left\{ 1 - \frac{1}{(G^a / L)} \right\} \cdot (1+i) \cdot \left({}^{C}F_{n-1} - R \right) \qquad (4-21)$$

従って，数列 $\{{}^{C}F_n - R\}$ は，公比 $\left\{ 1 - \frac{1}{(G^a / L)} \right\} \cdot (1+i)$ の等比数列であり，0 に収束する。

このことから，数列 $\{{}^{C}F_n\}$ は，R に収束することがわかる。

$${}^{C}F_\infty = R \qquad (4-22)$$

この極限値である R について検討してみると，以下のように R は加入年齢方式の責任準備金であることがわかる。

$${}^{C}F_\infty = R = \frac{(S^p + S^a) \cdot L - B \cdot G^a}{L - d \cdot G^a}$$

$$= \frac{(S^p + S^a) \cdot d \cdot (G^a + G^f) - d \cdot (S^p + S^a + S^f) \cdot G^a}{d \cdot (G^a + G^f) - d \cdot G^a}$$

$$= \frac{(S^p + S^a) \cdot G^f - S^f \cdot G^a}{G^f}$$

$S^f = {}^{E}P \cdot G^f$ であるから，

$${}^{C}F_\infty = R = (S^p + S^a) - {}^{E}P \cdot G^a = {}^{E}V \qquad (4-23)$$

F の極限値 R を代入することによって，C の極限値を求めることができる。

$${}^{C}C_\infty = \frac{S^p + S^a - {}^{C}F_\infty}{G^a} \cdot L = \frac{{}^{E}P \cdot G^a}{G^a} \cdot L = {}^{E}P \cdot L = {}^{E}C \qquad (4-24)$$

従って，総合保険料方式の保険料の額及び積立金は，加入年齢方式の標準保険

料及び責任準備金にそれぞれ収束することが確認できた。

⑷　到達年齢方式（Attained Age Normal Cost Method）

到達年齢とは「Attained Age」の訳であるが，その意味するところは計算基準日現在の年齢のことである。到達年齢方式は，総合保険料方式と異なり標準保険料と特別保険料が存在する。標準保険料は，制度発足時における将来勤務期間に対応する給付のための費用として算出される。即ち，標準保険料は過去を通算しなかった場合の費用ということであるが，この費用を総合保険料方式又は個人平準保険料方式に基づいて算出する。過去勤務期間を通算する制度の場合，発足時の過去勤務期間に対応する給付現価は，未積立過去勤務債務として将来にわたって特別保険料により償却される。制度発足後の保険料は，給付現価のうち当初の過去勤務債務の計算時点における未償却額及び積立金の合計額を上回る部分を標準保険料で賄うように標準保険料が見直される。当初の標準保険料は加入年齢方式の保険料とは異なるため，新規の被保険者が加入するたびに収支相等が崩れる。このため，総合保険料方式と同様に毎年（又は数年に1度）保険料を見直す必要がある。以下に標準保険料を総合保険料に基づいて算出した場合を記述する。

制度発足時の保険料及び過去勤務債務は，次のとおりである。

$$ {}^{A}P_1 = \frac{S^a_{FS}}{G^a} \qquad (4-25)$$

$$ {}^{A}C_1 = {}^{A}P_1 \cdot L \qquad (4-26)$$

発足時の過去勤務債務の額 ${}^{A}U_1$ は，

$$ {}^{A}U_1 = S^p + S^a_{PS} \qquad (4-27)$$

n 年度においては，標準保険料の算式は次のようになる。

$$ {}^{A}P_n = \frac{S^p + S^a - ({}^{A}F_n + {}^{A}U_n)}{G^a} \qquad (4-28)$$

$$= \frac{S_{FS}^{a} - \{({}^{A}F_{n} + {}^{A}U_{n}) - {}^{U}F\}}{G^{a}} = {}^{A}P_{1} - \frac{({}^{A}F_{n} + {}^{A}U_{n}) - {}^{U}F}{G^{a}}$$

n 年度の標準保険料は，初年度の保険料から初期過去勤務債務を全て償却した場合の n 年度の積立金と単位積立方式の定常状態における積立金の差額に対応する保険料を差引いたものとなる。

${}^{A}V_{n} = {}^{A}F_{n} + {}^{A}U_{n}$，$n$ 年度の特別保険料を ${}^{A}C'_{n}$ と置くと，

$${}^{A}F_{n+1} = ({}^{A}F_{n} + {}^{A}C_{n} + {}^{A}C'_{n} - B) \cdot (1+i)$$

$${}^{A}U_{n+1} = ({}^{A}U_{n} - {}^{A}C'_{n}) \cdot (1+i)$$

従って，この2式をそれぞれ合計すると，

$${}^{A}V_{n+1} = ({}^{A}V_{n} + {}^{A}C_{n} - B) \cdot (1+i) \qquad (4-29)$$

一方，n 年度の標準保険料の額は，

$${}^{A}C_{n} = \frac{(S^{p} + S^{a}) - {}^{A}V_{n}}{G^{a}} \cdot L \qquad (4-30)$$

よって，（4－29)，（4－30）式は，V を F と置き換えることにより総合保険料方式の関係式と一致する。

ただし，初期値は以下のとおり異なる。

${}^{C}F_{1} = 0$ であるのに対し ${}^{A}V_{1} = S^{p} + S_{PS}^{a}$

総合保険料方式の F 及び C の収束に関する証明は，F の初期値によらないため到達年齢方式にも適用できる。従って，

${}^{A}C_{n} \rightarrow {}^{E}C$，${}^{A}V_{n} \rightarrow {}^{E}V$

よって，到達年齢方式の標準保険料は加入年齢方式の標準保険料に収束し，初期過去勤務債務償却後の積立金は加入年齢方式の責任準備金に収束することが確認できた。

第4章　練　習　問　題

1．つぎの文章は財政方式について述べたものである。(　　) 内に補充すべき語句を番号に対応させて記入せよ。

・事前積立方式のうち平準積立方式に属する財政方式としては，(①)，(②)，(③)，(④) の四つがあげられる。

・(①) は，一般的には制度への加入年齢毎の各集団に対して平準的な保険料を算出して (⑤) として適用し，積立不足分は別途 (⑥) として一定の期間にわたり償却する財政方式である。

日本においては，(⑤) の適用にあたり制度に加入する標準的な被保険者に対する平準的な保険料を在職中の被保険者全員に一律に適用する方式を (①) と言っている。

・(②) は，個々の被保険者がそれぞれ給付に要する費用を被保険者期間にわたり平準的に組み立てる方式である。(⑦) においては，積立金は (①) による (⑧) と (⑨) 年度期初に一致する。ここで x_e は新規加入者の加入時年齢，x_r は定年年齢である。

・(③) は，在職中の被保険者について，全員が退職するまでの間に必要な給付費用を平準的な保険料として積み立てる方法である。保険料は，(①) による (⑤) に，未償却の (⑩) の償却費用を加えたものに分解できる。

保険料を一定期間毎に見直すことにより，積立金は (①) の (⑧) に収束する。

２．定年退職者に加入期間１年当り $1/(x_r-x_o)$ の年金を終身給付する制度において，加入年齢毎の平準保険料率を適用するものとする。加入年齢 x 歳 $(x_o \leqq x \leqq x_r-1)$ の平準保険料率を P_x とおくと，P_x は x について単調増加であることを示せ。ここに x_o は最低年齢，x_r は定年年齢とする。

３．定年退職者のみに年金を支給する定額制の年金制度において，標準加入者の加入年齢方式（特定年齢方式）による保険料の積立終価は，積立段階のどの時点をとっても，そのときの責任準備金を常に下回ることを証明せよ。

ただし，標準加入者とは保険料を算定する基礎となった加入年齢で加入したものをいう。また，脱退率は０ではない（ $p_{x_o+t}<1$ ）ものとする。

４．定額制の年金制度において，加入年齢方式（特定年齢方式）により保険料を算定する場合，全年齢一律定額の保険料と１年毎に r%ずつアップする保険料の２通りを考える。$(r>0)$

これら２つの積立方式による定常状態の保険料および積立金の大小関係を検証せよ。

5．人員構成の定常なる企業において，定年者のみに毎年１の年金を終身給付する制度を実施することにした。全員加入の場合と，年齢による加入制限のある場合における加入年齢方式（特定年齢方式）による標準保険料の総額の大小を比較せよ。

6．ある企業が，Trowbridge モデルに基づく給付を行う年金制度を発足させた。この企業の脱退残存表による x 歳の残存率 p_x（$x_e \leqq x < x_r$）は，

$p_{x_e} < p_{x_e+1} < \cdots\cdots\cdots < p_{x_r-1}$ であるとする。

加入年齢方式（特定年齢方式）に基づく在職中の被保険者の責任準備金を，保険料の支払回数に応じて次のとおり定義する。

ア．年１回期初払とした場合（$V^{(1)}$）

イ．年２回期初払とした場合（$V^{(2)}$）

ここで，x_e は最低年齢，標準保険料算出のための加入年齢は x_e 歳とし，脱退（死亡を含む）は年度を通じて一様に発生するものとする。

以上の前提のもとで次の各設問に答えよ。

⑴　年２回期初払とした場合の標準保険料 ${}^{E}P^{(2)}$ を求めよ。

⑵　責任準備金（$V^{(2)}$）を求めよ。

⑶　$V^{(1)}$ と $V^{(2)}$ との間には，$V^{(1)} > V^{(2)}$ なる関係があることを示せ。

７．Trowbridge モデルにおいて，発足時の被保険者全員について単一の全期平準払保険料を適用して算定した過去勤務債務と，みなし加入年齢系列別にそれぞれ対応する全期平準払加入年齢保険料を適用して計算した責任準備金とが等しくなった。この場合，単一保険料は加入年齢保険料の加重平均として求められることを定額制の場合について示せ。

８．年金制度において，制度発足時の総合保険料率及び個人平準保険料率をそれぞれ ${}^{C}P$，${}^{I}P(x,t)$，$(x=x_o, \cdots\cdots, x_r-1\ ;\ t=0, \cdots\cdots, x_r-x_o-1)$ としたときに，次の関係が成立することを示せ。

$$\underset{x,t}{\mathrm{Max}}\ {}^{I}P(x,t) \geqq {}^{C}P \geqq \underset{x,t}{\mathrm{Min}}\ {}^{I}P(x,t)$$

但し，制度発足時の年金受給権者はいないものとする。

９．ある年金制度において、年度末時点の積立金が年度末時点の責任準備金を下回る場合、その下回る額の一定割合 r に相当する額を、翌年度末に特別保険料として拠出するものとする。この年金制度が定常状態である場合の「年度末時点の積立金÷年度末時点の責任準備金」を表す数式の記号を選べ。

なお、予定利率を i、運用利回りを j 、$0< j < i < r < 1$ とし、標準保険料・給付ともに期初払いとする。また、「年度末時点の積立金」には年度末時点で拠出される特別保険料を含むものとする。

(A) $\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot i}{r-i}$　　(B) $\dfrac{r-\dfrac{1+i}{1+j}\cdot j}{r-i}$　　(C) $\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot j}{r-i}$

(D) $\dfrac{r-\dfrac{1+i}{1+j}\cdot j}{r-j}$　　　(E) $\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot i}{r-j}$

10．次の①～⑩の空欄に当てはまる適当な数式を解答群から選びなさい。なお、解答にあたり同じ記号を重複して使ってもよい。

定常人口における Trowbridge モデルの年金制度（保険料は年１回期初拠出）の保険料に関し、加入年齢方式と閉鎖型総合保険料方式との関係を考察する。記号について第３章に記載の他、次のとおりとする。

財政方式を加入年齢方式とした場合の一人当たり標準保険料 ${}^{EAN}P$

財政方式を閉鎖型総合保険料方式とした場合の

第 n 年度の一人当たり保険料　　${}^{C}P_n$

第 n 年度初における積立金　　F_n

第１年度初における積立金は０とする。

(1)財政方式を閉鎖型総合保険料方式とした場合の第 n 年度の一人当たり保険料 ${}^{C}P_n$ を式で表す。

A．${}^{C}P_n=(S^p+S^a-F_n)\cdot\boxed{\ ①\ }$、$F_{n+1}=(F_n+\boxed{\ ②\ })\cdot(1+i)$　$(n\geqq 1)$

B．上記A. の式から F_n、F_{n+1} を消去すると、

$$S^p+S^a-{}^{C}P_{n+1}G^a=(S^p+S^a-{}^{C}P_nG^a+\boxed{\ ②\ })\cdot(1+i)\quad (n\geqq 1)$$

C．また ${}^{EAN}P=\dfrac{S^f}{G^f}$　であり $L=d\cdot(G^a+G^f)$、$B=d\cdot(S^p+S^a+S^f)$ である

ことを用いると、

$$S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a = (S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a + \boxed{③}) \cdot (1+i)$$

D. 上記B. およびC. の算式の辺々の差をとり $\dfrac{1}{G^a}$ を乗じて整理すると、

$${}^{C}P_{n+1} - {}^{EAN}P = (1+i) \cdot \boxed{④} \cdot ({}^{C}P_n - \boxed{⑤}) \qquad (n \geqq 1)$$

E. 上記D. より、

$${}^{C}P_n = {}^{EAN}P + \{(1+i) \cdot \boxed{④}\}^{\boxed{⑥}} \cdot ({}^{C}P_1 - \boxed{⑤})$$

($n \geqq 2$ ただし $n=1$ のときも成り立つ)

(2) ${}^{C}P_n$ は、「制度発足時から財政方式を加入年齢方式とし、毎年期初の未償却過去勤務債務残高の $\dfrac{L}{G^a}$ 倍を特別保険料として償却する場合の、第 n 年度の一人当たり標準保険料と特別保険料の合計」に等しいことを示す。

A. 財政方式を加入年齢方式とした場合、第 1 年度初における未償却過去勤務債務を求めた上で、第 1 年度の一人当たり特別保険料を求めると $(S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a) \cdot \boxed{⑦}$ と表せる。

B. 第 1 年度以降後発債務が発生せず未償却過去勤務債務の償却が予定どおり進んだ場合、第 n 年度初 ($n \geqq 2$) における未償却過去勤務債務を求めた上で、第 n 年度の一人当たり特別保険料を求めると、

$$\boxed{⑧} \cdot (1 + \boxed{⑨})^{\boxed{⑥}} \cdot (S^p + S^a - {}^{EAN}PG^a) \cdot \boxed{⑦}$$

と表せる。($n=1$ のときも成り立つ。)

C. 上記B. の第 n 年度の一人当たり特別保険料は

$$\boxed{⑧} \cdot (1 + \boxed{⑨})^{\boxed{⑥}} \cdot ({}^{C}P_1 - \boxed{⑤})$$

とも表され、(1) E. の式の第2項と等しい、つまり ${}^{C}P_n$ は「財政方式を加入年齢方式とした場合の n 年度における一人当たり標準保険料と特別保険料の合

計」として表せることがわかる。

(3) ${}^{C}P_n$ は ${}^{EAN}P$ に収束することを示す。

$\boxed{\text{⑩}}$ ・ $G^a < L < G^a$ より、0＜ (1＋i) ・ $\boxed{\text{④}}$ ＜1

したがって、(1) E. 式の第２項はゼロに収束する。つまり ${}^{C}P_n$ は ${}^{EAN}P$ に収束することがわかる。

（解答群）

(A) $(n-1)$　(B) n　(C) $(1+i)$　(D) v　(E) d

(F) ${}^{C}P_1$　(G) ${}^{C}P_n$　(H) ${}^{EAN}P$　(I) $({}^{C}P_1 \cdot L - B)$　(J) $({}^{C}P_n \cdot L - B)$

(K) $({}^{EAN}P \cdot L - B)$　(L) $\dfrac{1}{G^a}$　(M) $\dfrac{L}{G^a}$　(N) $\dfrac{G^f}{G^a}$

(O) $i \cdot \dfrac{G^f}{G^a}$　(P) $\left(1-\dfrac{1}{G^a}\right)$　(Q) $\left(1-\dfrac{L}{G^a}\right)$　(R) $\left(1-\dfrac{G^f}{G^a}\right)$　(S) $\left(1-i \cdot \dfrac{G^f}{G^a}\right)$

(T) $\left(-\dfrac{1}{G^a}\right)$　(U) $\left(-\dfrac{L}{G^a}\right)$　(V) $\left(-\dfrac{G^f}{G^a}\right)$　(W) $\left(-i \cdot \dfrac{G^f}{G^a}\right)$

(X) i　(Y) $(1+i)^{n-1}$　(Z) $(1+i)^n$

第５章　開放型総合保険料方式と開放基金方式

1.　財政方式の定義

前章で説明した平準積立方式は，財政計画の範囲を現在在職中の被保険者及び年金受給権者としていた。以後，これを閉鎖型という。この章で説明する２つの財政方式は，その名称からもわかるとおり，財政計画の範囲を前述の被保険者集団のほか将来加入が見込まれる新規の被保険者をも含めている。閉鎖型の場合，総合保険料方式や到達年齢方式のように制度に一律に適用した保険料が新規の被保険者の収支が相等する保険料と異なるために制度の運営中に定期的に保険料を洗い替える必要があったが，開放型の場合は，将来加入が見込まれる新規の被保険者も財政の中に組入れられているために，当初の見込みどおりの新規の被保険者が加入してくる限りにおいては保険料率を洗い替えて適用する必要がない点が大きな特徴である。まず，それぞれの財政方式の定義を行う。

⑴　開放型総合保険料方式（Open Aggregate Cost Method）

開放型総合保険料方式とは，現在及び将来の被保険者全体について給付に必要な費用を平準的に積立てる財政方式を言う。閉鎖型において紹介した総合保険料方式の財政計画の範囲を，将来加入が見込まれる被保険者にまで広げた方式であり，保険料に標準・特別の区別はない。

制度発足時においては保険料は次のように算出される。

$$(\text{保険料}) = \frac{\{(\text{現在被保険者給付現価}) + (\text{将来被保険者給付現価})\}}{\{(\text{現在被保険者給与(人数)現価}) + (\text{将来被保険者給与(人数)現価})\}}$$

制度発足後の保険料は次のように算出される。

$$(\text{保険料}) = \frac{\{(\text{現在被保険者給付現価}) + (\text{将来被保険者給付現価}) - (\text{積立金})\}}{\{(\text{現在被保険者給与(人数)現価}) + (\text{将来被保険者給与(人数)現価})\}}$$

制度発足時に給付の対象にその時点で既に退職した従業員も含めるのであれば，それらの者を被保険者として，その給付現価を現在被保険者給付現価に含めることとなる。

⑵　開放基金方式（Open Aggregate Normal Cost Method）

開放基金方式は，しばしば開放型総合保険料方式と混同されるが，この2つの財政方式の考え方は若干異なる。開放型総合保険料方式においては，保険料に標準・特別の区別はなかったが，開放基金方式にはこの区別がある。

標準保険料は，将来の被保険者期間に対応する給付を賄うための費用として定義される。

$$(\text{標準保険料}) = \frac{\{(\text{現在被保険者の将来期間給付現価}) + (\text{将来被保険者給付現価})\}}{\{(\text{現在被保険者給与（人数）現価}) + (\text{将来被保険者給与（人数）現価})\}}$$

標準保険料のみでは，被保険者の過去の加入期間（過去勤務期間を含む）に対応する給付原資が不足するため，積立金を充当してなお不足があれば特別保険料を設けることになる。

$$\begin{aligned}(\text{責任準備金}) &= (\text{給付現価}) - (\text{標準保険料})\cdot(\text{給与（人数）現価}) \\ &= (\text{被保険者の過去期間給付現価})\end{aligned}$$

$$(\text{未積立債務}) = (\text{責任準備金}) - (\text{積立金})$$

逆に，積立金が責任準備金を上回る場合は，その上回る額に基づいて標準保険料が調整される。この場合は，保険料は開放型総合保険料方式と全く同じ定義になる。

2.　各財政方式の特徴

2つの財政方式を Trowbridge モデルに適用することで，それぞれの財政方式のもつ特徴を検証していく。

⑴　開放型総合保険料方式

制度発足時の保険料を求めることにより，定常状態における極限方程式を適用することで，その積立レベルを検証することができることは今までどおりである。さて，制度発足時の保険料であるが，これは過去勤務期間の取扱により異なってくる。そこで，ここではつぎの４つの場合について考察してみた。

① 在職中の被保険者の過去勤務期間を通算し，かつ既に退職した従業員にも給付を行う場合

② 在職中の被保険者の過去勤務期間は通算するが，既に退職した従業員には給付を行わない場合

③ 在職中の被保険者の過去勤務期間を通算しない場合

④ 給付の対象者を将来の被保険者のみに限った場合

① 在職中の被保険者の過去勤務期間を通算し，かつ既に退職した従業員にも給付を行う場合

$$ {}^{O}P = \frac{S^{p} + S^{a} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}} = \frac{\left(\frac{1}{d}\right) \cdot B}{\left(\frac{1}{d}\right) \cdot L} = \frac{B}{L} \qquad (5-1) $$

$$ {}^{O}C = {}^{O}P \cdot L = B = {}^{P}C \qquad (5-2) $$

従って，この場合の保険料は賦課方式の保険料と一致する。

② 在職中の被保険者の過去勤務期間は通算するが，既に退職した従業員には給付を行わない場合

$$ {}^{O}P = \frac{S^{a} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}} \qquad (5-3) $$

（３－45），（３－46）式より

$$=\frac{\left(\frac{v}{d}\right)\cdot({}^{T}C-{}^{In}C)+\left(\frac{v}{d}\right)\cdot\ {}^{In}C}{\left(\frac{1}{d}\right)\cdot L}=\frac{v\cdot\ {}^{T}C}{L}$$

$${}^{O}C={}^{O}P\cdot L=v\cdot{}^{T}C \qquad (5-4)$$

従って，この場合の保険料は退職時年金現価積立方式の保険料と一致する。退職時年金現価積立方式は，被保険者が退職した時点で保険料を払込むため，初回の払込みが制度発足後１年となる。一方，このモデルにおいては開放型総合保険料方式の保険料は制度発足時に初回の払込みがあるため，対応関係が１年ずれこむこととなる。この結果，保険料も１年の時点の差を考慮した上で等価となるように算出されている。

③ 在職中の被保険者の過去勤務期間を通算しない場合

$${}^{O}P=\frac{S_{FS}^{a}+S^{f}}{G^{a}+G^{f}} \qquad (5-5)$$

（３－46)，（３－48）式より

$$=\frac{\left(\frac{1}{d}\right)\cdot({}^{U}C-v\cdot\ {}^{In}C+v\cdot\ {}^{In}C)}{\left(\frac{1}{d}\right)\cdot L}=\frac{{}^{U}C}{L}$$

$${}^{O}C={}^{O}P\cdot L={}^{U}C \qquad (5-6)$$

従って，この場合の保険料は単位積立方式の保険料と一致する。

④ 給付の対象者を将来の被保険者のみに限った場合

在職中の被保険者から保険料を徴収し，給付を行わないという現実的でない仮定であるが，保険料を算出すると以下のとおりとなる。

$${}^{O}P=\frac{S^{f}}{G^{a}+G^{f}} \qquad (5-7)$$

（３－46）式より

$$=\frac{\left(\frac{1}{d}\right)\cdot v\cdot {}^{In}C}{\left(\frac{1}{d}\right)\cdot L}=\frac{v\cdot {}^{In}C}{L}$$

$${}^{O}C={}^{O}P\cdot L=v\cdot {}^{In}C \qquad (5-8)$$

従って，この場合の保険料は加入時積立方式の保険料と一致する。加入時積立方式の保険料に v を乗じてあるのは②の場合と同様に，保険料の払込時期の違いによるものである。

⑵　開放基金方式

開放基金方式における，標準保険料及び定常状態における責任準備金は以下のとおりである。

$${}^{OAN}P=\frac{S^{a}_{FS}+S^{f}}{G^{a}+G^{f}} \qquad (5-9)$$

（５－５），（５－６）式より

$${}^{OAN}P=\frac{{}^{U}C}{L}$$

$${}^{OAN}C={}^{U}C \qquad (5-10)$$

$${}^{OAN}V=(S^{p}+S^{a}+S^{f})-{}^{OAN}P\cdot(G^{a}+G^{f})$$

$$=S^{p}+S^{a}_{PS}={}^{U}F \qquad (5-11)$$

責任準備金と積立金を比較することにより不足があれば別途特別保険料で手当することになる。

従って，開放基金方式の定常状態における保険料及び積立金は単位積立方式のそれと一致することになる。

⑶　開放型の財政方式の注意点

①　将来の被保険者の見込み

開放型の財政方式は，定常人口を前提としている場合には問題ないが，非定常

人口の場合には将来の被保険者の見込み方が問題となる。通常は，計算時点で在職している被保険者の総数が定常の人員構成をとっているものと仮定し，その総数を維持するに足る新規の被保険者を見込むことになる。しかし，現実には人員構成は定常でないため，たとえ脱退率どおりに退職した場合にも退職者の総数と見込んだ新規の被保険者の数とが一致するとは限らない。このため，脱退及び新規加入が予定通りであったとしても在職中の被保険者数が増減し，新規の被保険者の見込みが前年と異なることによる差損益が発生することになる。

また，開放型の財政方式に被保険者数の傾向的な変動に関しては，弱い面がある。一貫して増加又は減少傾向にある被保険者集団にこの財政方式を適用すると，新規の被保険者をその時点の在職中の被保険者数を維持するように見込む関係上，毎年の財政決算において恒常的な差益又は差損を計上することになる。

更に，開放基金方式の標準保険料は在職中の被保険者の年齢構成の影響を大きく受ける。非定常の被保険者集団にこの財政方式を適用した場合は，たとえ脱退・死亡・新規加入が予定どおりであったとしても人員構成は変化するため，標準保険料は変動し，その結果特別保険料も変化することがあるということに留意する必要がある。

② 開放型総合保険料方式の積立水準

開放型総合保険料方式は，保険料に標準・特別の区別がない。仮に，定常状態にある制度がなんらかの理由により資産に不足をきたしたとする。この場合の保険料は，定常状態を維持するために必要な保険料と発生した不足を償却するための保険料との合計になる。後者の保険料は，不足額を $\varDelta F$ とすると

$$\left(\frac{\varDelta F}{G^a + G^f} \right) \cdot L = d \cdot \varDelta F$$ である。

従って，1 年後の未償却不足額は，

$\varDelta F \cdot (1+i) - d \cdot \varDelta F \cdot (1+i) = \varDelta F$ となり，全く減少しない。

このことは，発生した不足額による積立水準の低下は保険料の洗い替えによっては解消できないことを示している。つまり，積立水準の変動に関して歯止めがないことが，この財政方式のもつ大きな問題点である。開放基金方式は，この問題が解消されており，開放型総合保険料方式より優れた財政方式と言うことができる。

第5章　練　習　問　題

1．被保険者および受給権者の集団について定常人口を仮定するとき，次の各場合の開放型総合保険料方式による保険料は，下のいかなる財政方式による標準保険料に一致するか。

⑴　将来，現在の被保険者，受給権者集団について過去の期間を完全通算する。

⑵　将来，現在の被保険者について過去の期間を通算する。

⑶　将来，現在の被保険者について将来期間のみを給付の対象とする。

⑷　将来の被保険者集団のみを給付の対象とする。

ア．賦課方式　　　　　　　　イ．退職時年金現価積立方式

ウ．単位積立方式　　　　　　エ．加入年齢方式

オ．加入時積立方式　　　　　カ．完全積立方式

2．開放基金方式において，未積立債務の償却を永久償却（未積立債務の予定利息相当分のみを償却）とした場合には，保険料の合計は開放型総合保険料方式によった場合と同じとなることを示せ。

ただし，被保険者集団は定常人口であるとする。

３．定常人口にある団体に対し，Trowbridge モデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）による年金制度を導入するものとし，制度導入時在職中の者の過去勤務期間を通算するが，既に退職した者に対する給付は行わないものとする。

財政方式として加入年齢方式を採用し，過去勤務債務の償却を永久償却とした場合の保険料が開放型総合保険料方式の保険料に等しいことを証明せよ。

４．開放型総合保険料方式による財政運営を行っている年金制度が定常状態であるとする。（予定利率を i とする。）保険料及び給付は年 1 回期末に発生するものとする。

⑴　予定利率を i'（$i' < i$）とした場合の保険料を求めよ。

⑵　今後，実際の運用利率が i' で推移した場合，n 年後の積立金 F_n を求めよ。
ただし，保険料は毎期初予定利率を i として算定するものとする。

５．年金制度を発足しようとするある集団に対して，次の 3 つの財政方式を考え設問に答えよ。なお，制度発足時には年金受給権者はいないものとし，積立金もないものとする。

加入年齢方式（特定年齢方式），総合保険料方式，開放基金方式

設問　「過去勤務期間を通算するとした場合の加入年齢方式の過去勤務債務の額」と「過去勤務期間を通算するとした場合の開放基金方式の過去勤務債務の額」の差額を(A)とする。

「過去勤務期間を通算しない場合の総合保険料方式の保険料収入現価」と「過去勤務期間を通算しない場合の加入年齢方式の標準保険料収入現価」の差額を(B)とする。

このとき，(A)＝(B)が成り立つことを示せ。

6．定常人口の企業を仮定する。Trowbridge モデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）にもとづく年金制度の諸数値は以下のとおりである。

① 年金受給権者の給付現価		(S^p)	763 百万円
② 被保険者の給付現価	将来期間対応分	(S^a_{FS})	296　〃
	過去期間対応分	(S^a_{PS})	527　〃
	合　　計	(S^a)	823　〃
③ 新規加入員の加入時給付現価（単年度分）		(S^f_0)	6.8　〃
④ 被保険者の給与現価		(G^a)	3,063　〃
⑤ 新規加入員の加入時給与現価（単年度分）		(G^f_0)	144　〃
⑥ 積立金の残高		(F)	1,000　〃
⑦ 給与総額		($\sum LB$)	283　〃
⑧ 予定利率		(i)	5%
⑨ 15 年償却の年金現価率		($\ddot{a}_{\overline{15}\vert}$)	10.90

⑴　以下の財政方式におけるそれぞれの保険料率の算式と値を求めよ。

ア　加入年齢方式で過去勤務債務を 15 年償却とした場合の標準保険料率と特別保険料率

イ　開放基金方式で過去勤務債務を 15 年償却とした場合の標準保険料率と特別保険料率

ウ　総合保険料方式の初年度の保険料率

(2)　給付を一律 2 倍とした場合の(1)のそれぞれの保険料を求めよ。ただし，給付改善の効果は，年金受給権者には及ばないものとする。

(3)　(1)のアの結果にもとづき，1 年間制度を運営した後に(2)の給付改善を行うこととした場合，加入年齢方式の保険料率はどうなるか。ただしその間の積立金の運用利率は年 8%，給付改善後の過去勤務債務の償却年数は 15 年とする。

7．Trowbridge モデルの年金制度に関する以下の記述①～⑥について、誤っているものの番号の組み合わせとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。

①完全積立方式を採用する年金制度の定常状態における積立金の額は年金受給権者、在職中の被保険者の給付現価の合計額であり、考えられる財政方式のうちで積立水準は最も高くなる。

②開放基金方式を適用した場合、脱退・死亡・新規加入・給付支払が予定どおりであれば、標準保険料は変化しない。

③定常人口の集団に年金制度を導入するにあたり、開放型総合保険料方式を採用する場合、発足時点の保険料として「在職中の被保険者から徴収するものの給付は行わず、給付の対象者を将来の被保険者に限る」とすると、この場合の標準保険料は、加入時積立方式の標準保険料に保険料の払込時期の違いによる 1 年分の割引を考慮した金額と一致する。

④ある年金制度が発足し、到達年齢方式を採用した場合の n 年度の標準保険料は、初年度の保険料から初期過去勤務債務を全て償却した場合の n 年度の積立金と単位積立方式の定常状態における積立金の差額に対応する保険料を差

し引いたものになる。なおこの年金制度は定常人口であり、発足後の年金制度はすべて予定どおり推移するものとする。

⑤開放型総合保険料方式を採用する定常状態に達した年金制度に関して、ある年度に利差損が発生したとする。この状況で保険料の見直しを行い、翌年度以降、年金制度が予定どおり推移すると積立金の額は増加する。

⑥既に退職した従業員には給付を行わず、かつ在職中の被保険者の過去勤務債務を通算しない場合の制度発足時の開放型総合保険料方式による保険料は、単位積立方式の保険料と一致する。

(A) ①と②と④　(B) ①と②と⑤　(C) ②と③と⑤　(D) ②と③と⑥

(E) ③と④と⑤　(F) ③と④と⑥　(G) ①と②と③と⑤

(H) ①と②と④と⑤　(I) ①と③と④と⑥　(J) ①と④と⑤と⑥

(K) ②と③と⑤と⑥　(L) ③と④と⑤と⑥　(M)いずれにも該当しない

8．ある年金制度の諸数値は次のとおりである。期初未積立債務の 50%相当額を期初払いで償却し、その後は前年度末未積立債務の 50%相当額を期初払いで償却することとする。ただし、前年度末未積立債務が当年度標準保険料を下回った場合は、当年度に未積立債務の全額を償却することとする。

財政方式として加入年齢方式を採用した場合と開放基金方式を採用した場合において、どちらの財政方式が何年早く未積立債務を全額償却するか、最も適切なものを選択肢の中から１つ選びなさい。

ただし、未積立債務を全額償却するまでの間、給与総額は変化しないものとし、未積立債務の利息以外の後発債務は発生しないものとする。なお、標準保険料率は小数点以下第 4 位を四捨五入し小数点以下第 3 位までとしたものを用いることとし、保険料の払い込みは年１回であるものとする。

項目		金額（千円）
S^p	年金受給権者の給付現価	1,000,000
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の被保険者期間に対応する給付現価	2,000,000
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の被保険者期間に対応する給付現価	3,000,000
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	3,000,000
G^a	在職中の被保険者の給与現価	19,000,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	41,000,000
F	積立金残高	2,500,000
i	予定利率	3.0％
―	給与総額（年間）	1,100,000

(A) 加入年齢方式の方が 4 年早い　(B) 加入年齢方式の方が 3 年早い

(C) 加入年齢方式の方が 2 年早い　(D) 加入年齢方式の方が 1 年早い

(E) 開放基金方式の方が 1 年早い　(F) 開放基金方式の方が 2 年早い

(G) 開放基金方式の方が 3 年早い　(H) 開放基金方式の方が 4 年早い

(I) 同じ年数である　(J) いずれにも該当しない

第 6 章　年金財政の検証

1.　はじめに

実際の年金財政運営では，常に設定した保険料が適正かどうかのチェックを行っている。具体的には，積立金と責任準備金の大小関係を見て，保険料を変えずに将来の給付を行うことができるかどうかの検証を行う。

第 4 章，第 5 章では，責任準備金の定義として給付現価から標準保険料の収入現価を差し引いたものとし，年金制度が予定通り推移しても制度発足時の未積立債務分は積立金を上回っていた。

すなわち，

責任準備金＝給付現価－標準保険料収入現価＝積立金＋未積立債務

であったが，未積立債務はいずれその額に見合う特別保険料によって償却される（未積立債務＝特別保険料収入現価）と考え，責任準備金を定義し直して給付現価から標準保険料収入現価および特別保険料収入現価を差し引いたものとすれば

責任準備金＝給付現価－標準保険料収入現価－特別保険料収入現価

＝給付現価－標準保険料収入現価－未積立債務

＝積立金

となる。すなわち，年金制度が予定通り推移すれば責任準備金と積立金とは相等しくなる。ここでは，責任準備金は，給付現価から，広義の保険料収入現価を差し引いたものとして定義されているものと考えられる。また，第 4 章で定義した責任準備金のことを数理債務と呼び，改めて以下の算式で定義する。（ここで責任準備金を定義し直したのは，企業年金によって責任準備金の定義が異なっていることによる。平成 24 年 3 月末に廃止された適格退職年金では第 4 章で定義したものを責任準備金と呼んでいたが，確定給付企業年金や厚生年金基金では本章で定義したものを責任準備金と呼んでいる。）

数理債務＝給付現価－標準保険料収入現価

責任準備金＝数理債務－未積立債務

このような責任準備金に関して，より素朴な観点から積立金との関係を考え，その大小関係から財政の健全性（=将来の給付原資が，確かに確保されていること）を見る尺度にしている理由は一般には次のように説明される。

すなわち，

積立金 = 過去の保険料収入の元利合計 − 過去の給付の元利合計

責任準備金 = 将来の給付の現価 − 将来の保険料収入の現価

したがって，積立金 > 責任準備金ならば

過去の保険料収入の元利合計−過去の給付の元利合計 >

将来の給付の現価 − 将来の保険料収入の現価

移項すると，

過去の保険料収入の元利合計+将来の保険料収入の現価 >

過去の給付の元利合計 + 将来の給付の現価

となって，過去・将来にわたって，保険料収入が給付をうわまわり，給付に必要な財源に不足をきたすことがないことになる。

しかし，ここではもっと問題をつきつめて，ある時点において，積立金 < 責任準備金となった場合にこれを放置し，将来の保険料の積立をこれまでの計画通りに行った場合にどのような事態が生じるか考察してみよう。なおこのような状態になった以降は再び予定通り推移することを仮定する。

今，時点 T において，

$$\underbrace{\sum_{k=T}^{\infty} B_k v^{k-T} - \sum_{k=T}^{\infty} C_k v^{k-T}}_{\text{（責任準備金）}} > \underbrace{F_T}_{\text{（積立金額）}} \qquad (6-1)$$

ここに，B_k，C_k はそれぞれ時点 k における給付額，保険料額，F_T は時点 T に

おける積立金額。

左辺から右辺を差し引いた額（不足金）を D とおくと，時点 $T+t$ における積立金と責任準備金の関係式は次のようになる。

$$\sum_{k=T+t}^{\infty} B_k v^{k-(T+t)} - \sum_{k=T+t}^{\infty} C_k v^{k-(T+t)}$$

$$= (F_T + D)(1+i)^t + \sum_{k=T}^{T+t-1} C_k (1+i)^{T+t-k} - \sum_{k=T}^{T+t-1} B_k (1+i)^{T+t-k}$$

$$= \underline{F_T(1+i)^t + \sum_{k=T}^{T+t-1} C_k (1+i)^{T+t-k} - \sum_{k=T}^{T+t-1} B_k (1+i)^{T+t-k}} + D(1+i)^t \qquad （６－２）$$

ここに，（６－２）の下線部分は $(T+t)$ 時点の積立金 (F_{T+t}) を示す。今，多くの年金制度では，責任準備金（(６－２）の左辺）は t が大きくなってもある一定の値におさまる（$<K$）ものと近似的に考えることができよう。

一方，T 時点の不足金の元利合計額である $D(1+i)^t$ は，t が大きくなるほど増大する。従って F_{T+t} については，

$$F_{T+t} < K - D(1+i)^t \qquad （６－３）$$

であるから，ある t 時点においては必ずマイナスになり，その絶対額はどんどん膨らみ回復することがない。財政的な破綻をきたすわけである。

このように，ある一時点で不足金が発生するとその後予定どおりの保険料，給付，利回りであっても，給付が不可能になる時点が必ず訪れることがわかった。以下，この章では，年金財政が健全に運営されているかを判断するために不足金の発生の有無をみることとするが，その裏には上記の（６－１）から（６－３）までの議論があることを念頭におくことにする。（当然ながら Trowbridge モデルでは責任準備金がある一定の値を超えないことを，最初から仮定することはできる）

2.　1年間の責任準備金，積立金の動き

今，Trowbridge モデルで，定常状態にあり，また制度発足時の未積立債務の償却が終了している年金制度を想定して，1年間に予定通りの財政運営が行われた場合の，責任準備金（およびその構成要素）と積立金（およびその変動要素）の推移を被保険者および受給権者の年齢別にみておくことにする。

財政方式は標準保険料を適用した平準保険料方式を想定し，また1年間の推移とは，新規加入者が加入し，保険料収入，給付の発生する直前の時点から次のそれらが起こる直前までとする。すなわち，図6－1のようになる。

⑴　年初に被保険者である者に関する推移

・責任準備金

x 歳$(x_e \leqq x \leqq x_{r-1})$の被保険者の責任準備金は，

$$S_x - PG_x \qquad (6-4)$$

となる。

1年間経過すると，給付現価は，$x_r - 1$ 歳までの被保険者ならばまだ給付は発生せず，また年金開始までの期間が1年短くなったので割引率を乗ずる数が1減るために単純に$(1+i)$倍に増加する。

すなわち，1年間の給付現価の増は，

$$(1+i)S_x - S_x = iS_x \qquad (6-5)$$

である。ここに，

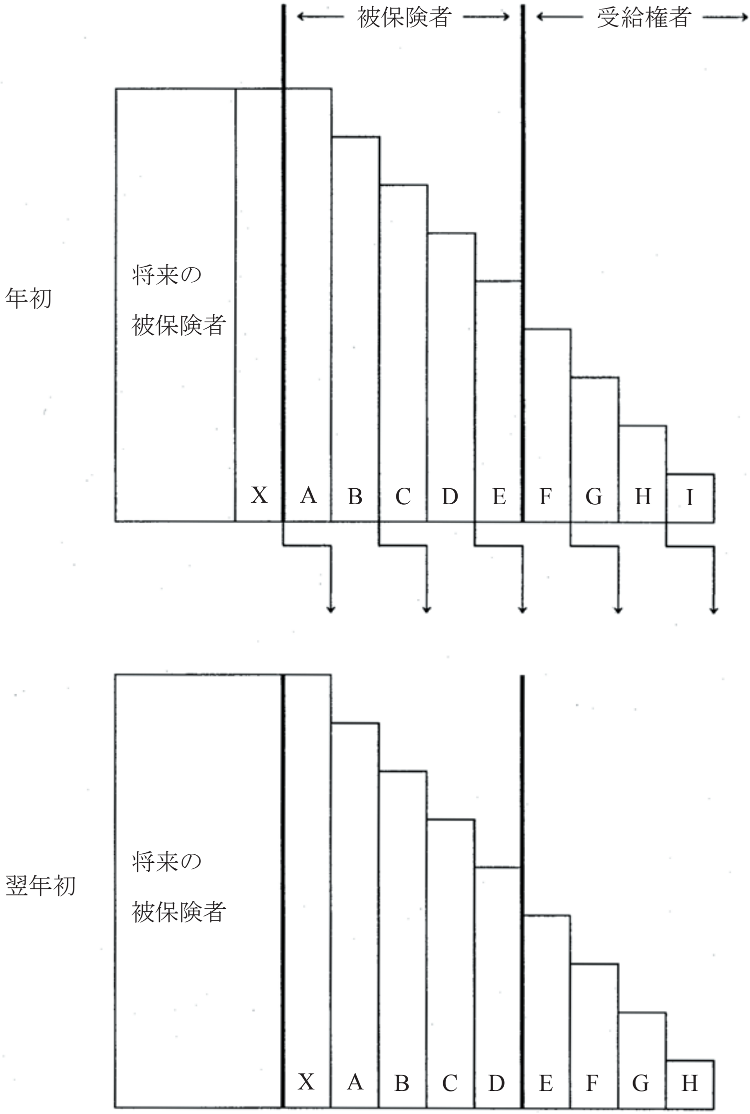
S_x　：　x 歳の者の給付現価

P　：　標準保険料率

G_x　：　x 歳の者の人数現価

i　：　予定利率

図６－１



一方，収入現価は保険料の収入の元利合計分か減少し，また割引率を乗ずる数が１減るために$(1+i)$倍に増加する。すなわち収入現価の増は，

$$(1+i)PG_x-(1+i)Pl_x-PG_x=iPG_x-(1+i)Pl_x \qquad (6-6)$$

となる。　したがって，責任準備金の変化は，（６－５）－（６－６）で，

$$iS_x-iPG_x+(1+i)Pl_x \qquad (6-7)$$

となる。

・積立金

やはり，x 歳$(x_e \leqq x \leqq x_{r-1})$の被保険者について考察する。被保険者に固有の積立金というものはないが，１年間のうちに保険料収入が発生する。これにより，保険料収入の元利合計である，

$$(1+i)Pl_x \qquad (6-8)$$

だけ積立金が増える。

⑵　年初に受給権者である者に関する推移

年初の年齢が x 歳$(x_r \leqq x \leqq \omega-1)$である受給権者について考察する。

・責任準備金

責任準備金は給付現価のみであり，割引率の関係で増加すると同時に，給付による減少が生ずる。

すなわち，責任準備金の変動は，

$$iS_x-(1+i)l_x \qquad (6-9)$$

となる。

・積立金

給付によって，

$$-(1+i)l_x \qquad (6-10)$$

だけ変動する。

⑶　将来の被保険者に関する推移

翌年初以降に x_e 歳で加入する被保険者に関する収支の推移をみる。

・責任準備金

翌年初以降に加入する被保険者に関する責任準備金は，

$(v/(1-v))\times(S_{x_e}-PG_{x_e})$ である。

給付現価，収入現価に関して，割引率の関係で，これが変動するのみであるので，

$$(v/(1-v))\times(S_{x_e}-PG_{x_e})\times i=S_{x_e}-PG_{x_e} \qquad (6-11)$$

だけ，責任準備金が増えることになる。この結果は次のように解することもできる。すなわち，翌年初時点から見た将来の被保険者に関する責任準備金の額は，定常状態の仮定から年初時点のそれと同額であるが，年初時点で「将来の被保険者」としてとらえられていた1年分の新規加入の被保険者が翌年初においてあらたに加入することでこの分の責任準備金の増加を見ておかなければならない。この額がちょうど（6－11）の額である（(図6－1）のXの部分)。

・積立金

積立金には全く変動を与えない。

⑷　年初の積立金から生ずる利息収入

⑶までで，責任準備金に関する変動は全て記述されたが，年初の積立金の利息収入については，以上の考察ではいずれの被保険者・受給権者にも付随させなかったので，あらためてここで独立して考慮する。

この額は，

iF（ここで，F は保険料，給付発生直前の年初積立金）　（6－12）

となり，当然，積立金を増加させる方向に働く。

以上を総合して表にまとめると表6－1のようになる。

ここで，責任準備金の変動，積立金の変動，損益のいずれも合計が0になるこ

との証明は章末の練習問題とする。

すなわち，定常状態では，予定通り推移すれば全体では表６－１のように１年間の損益は０である。このことは，極限方程式の成立からも実は明らかである。しかし，被保険者の区分や受給権者，さらにそれらの年齢別に損益を分解してみるとそれぞれプラスマイナスがあることがこの表よりわかる。このことは，被保険者や受給権者の年齢別の人数の推移が予定どおりであってはじめて，全体として収支バランスしており，逆に言えばそうでなければ損益の合計額は０にはならないことを示唆している。

したがって，次にもし被保険者・受給権者の年齢別推移が予定通りでなかった場合の損益について調べてみる。

今，年初現在で x 歳であった者が，予定通り１年間推移すれば l_{x+1} 人に，実際には l'_{x+1} 人になると仮定する。また，翌年初に加入する被保険者も，実際には，l'_{x_e} 人加入するものとする。この場合の表６－１に相当するものは表６－２のようになる。

この表では，各年齢別に，被保険者については，

$$\text{翌年初の責任準備金} \times (l'_{x+1}/l_{x+1}-1) \qquad (6-13)$$

が責任準備金の変動に加わり，損益はこの金額の符号を逆にした金額が加わることを示している。また，将来の被保険者については，

$(S_{x_e}-PG_{x_e})\times(l'_{x_e}/l_{x_e}-1)$ が責任準備金として加わり，結局責任準備金増は $(S_{x_e}-PG_{x_e})\times l'_{x_e}/l_{x_e}$ となる。

したがって，人員数の推移の実績が予定より大きい場合に発生する損益は，その年齢における責任準備金がプラスならば不足へ，マイナスならば剰余の方向に働く。受給権者の場合は，責任準備金が給付現価であり常にプラスとなるが，被保険者の場合は財政方式によってさまざまなケースがある。次の節で加入年齢方式と開放基金方式の場合でこのことを考察してみることにする。

表６－１

被保険者等の区分		責任準備金変動	積立金変動	損益
被保険者	現在の被保険者 $x_e \leqq x \leqq x_r - 1$	$iS_x - iPG_x + (1+i)Pl_x$	$(1+i)Pl_x$	$iPG_x - iS_x$
	将来の被保険者	$S_{x_e} - PG_{x_e}$	0	$PG_{x_e} - S_{x_e}$
受給権者	$x_e \leqq x \leqq \omega - 1$	$iS_x - (1+i)l_x$	$-(1+i)l_x$	$-iS_x$
年初の積立金から生ずる利息収入		――――	iF	iF
合計		0	0	0

表６－２

<table>
<tr><th colspan="2">被保険者等
の区分</th><th>責任準備金変動</th><th>積立金変動</th><th>損益</th></tr>
<tr><td rowspan="2">被
保
険
者</td><td>現在の被保険者
$x_e \leqq x \leqq x_r - 1$</td><td>$iS_x - iPG_x +$
$(1+i)Pl_x +$
$\underline{(l'_{x+1}/l_{x+1}-1)}$
$\underline{\times(S_{x+1}-PG_{x+1})}$</td><td>$(1+i)Pl_x$</td><td>$iPG_x - iS_x +$
$\underline{(l'_{x+1}/l_{x+1}-1)}$
$\underline{\times(PG_{x+1}-S_{x+1})}$</td></tr>
<tr><td>将来の被保険者</td><td>$(S_{x_e} - PG_{x_e})$
$\underline{\times l'_{x_e}/l_{x_e}}$</td><td>0</td><td>$(PG_{x_e} - S_{x_e})$
$\underline{\times l'_{x_e}/l_{x_e}}$</td></tr>
<tr><td>受
給
権
者</td><td>$x_e \leqq x \leqq$
$\omega - 1$</td><td>$iS_x - (1+i)l_x +$
$\underline{(l'_{x+1}/l_{x+1}-1)}$
$\underline{\times S_{x+1}}$</td><td>$-(1+i)l_x$</td><td>$-iS_x -$
$\underline{(l'_{x+1}/l_{x+1}-1)}$
$\underline{\times S_{x+1}}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">年初の積立金から生ずる利息収入</td><td>――――</td><td>iF</td><td>iF</td></tr>
<tr><td colspan="2">合計</td><td>$\underline{\sum_{x_e}^{\omega-1}(S_x - PG_x)}$
$\underline{\times(l'_x/l_x-1)}$</td><td>0</td><td>$\underline{-\sum_{x_e}^{\omega-1}(S_x - PG_x)}$
$\underline{\times(l'_x/l_x-1)}$</td></tr>
</table>

$(G_x = 0\ (x \geqq x_r))$

3.　被保険者の年齢別責任準備金に関する考察

加入年齢方式の場合の，年齢群団毎の責任準備金は第 3 章で考察したようにその者の加入時以来の標準保険料の元利合計額になる。すなわち，

$$S_x - {}^{E}PG_x = {}^{E}P \times \left(\sum_{y=x_e}^{x-1} l_y (1+i)^{x-y} \right) \qquad (6-14)$$

となる。

したがって，Trowbridge モデルの場合は，加入年齢方式を採用する場合はどの年齢群団でも人員が予定を上回って推移した場合は，必ず責任準備金が増加し損益は不足に働く。

次に開放基金方式の場合について考察してみよう。

この考察には，加入年齢方式，開放基金方式，単位積立方式の一人あたりの保険料およびこの節の目的のために新たに導入する「年齢別将来期間対応保険料」を比較することが役立つ。

今，単位積立方式において，x 歳の一人の被保険者が 1 年間に払い込む保険料は，

$$(1/(x_r - x_e)) \times D_{x_r} \ddot{a}_{x_r} / D_x \qquad (6-15)$$

であり，これを ${}^{U}P_x$ とおくことにする。

今，また年齢別将来期間対応保険料を，

$$((x_r - x)/(x_r - x_e)) \times D_{x_r} \ddot{a}_{x_r} / (N_x - N_{x_r}) \qquad (6-16)$$

と定義し，これを ${}^{A}P_x$ とおくことにする。

勿論，${}^{E}P = {}^{A}P_{x_e}$ である。

（6 －15），（6 －16）式より，

$${}^{A}P_x = \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y \right) / \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) \qquad (6-17)$$

である。

このことは，年齢別将来期間対応保険料が，単位積立方式の保険料の D_x による重みつき平均値で表されることを意味している。

さて，開放基金方式の一人あたりの保険料 ${}^{OAN}P$ は，次のように表される。

$$\left\{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\left(x_r-x\right)/\left(x_r-x_e\right)\right)\cdot D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}/D_x\cdot l_x+v/d\cdot D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}/D_{x_e}\cdot l_{x_e}\right\}$$

$$/\left\{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}(N_x-N_{x_r})/D_x\cdot l_x+v/d\cdot(N_{x_e}-N_{x_r})/D_{x_e}\cdot l_{x_e}\right\} \qquad (6-18)$$

ここで，この式の分子は，年齢別将来期間対応保険料の算式を用いて，

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1}{}^{A}P_x(N_x-N_{x_r})/D_x\cdot l_x+v/d\cdot{}^{E}P\,(N_{x_e}-N_{x_r})/D_{x_e}\cdot l_{x_e} \qquad (6-19)$$

と表される。これより ${}^{OAN}P$ は ${}^{A}P_x$ の加重平均値で表されることがわかった。

さらに，（６－17）を（６－19）に適用させれば，次の算式を得る。

$${}^{OAN}P=\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_x l_x\right)/\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1}l_x\right) \qquad (6-20)$$

（６－20）の証明を章末の練習問題とする。

（６－17），（６－19），（６－20）より各財政方式に於ける一人あたりの保険料についての関係が次のようにまとめられることがわかる。

① ${}^{E}P$，${}^{A}P_x$，${}^{OAN}P$ のいずれも ${}^{U}P_x$ の加重平均値の形で表現できる。

② ${}^{OAN}P$ は ${}^{E}P$，${}^{A}P_x$ の加重平均値として表される。

③ ${}^{A}P_x>{}^{U}P_x$ （${}^{U}P_x$ が x の単調増加関数であることより）

④ ${}^{A}P_x$ は，x の単調増加関数。したがって，${}^{A}P_x\geqq{}^{E}P$

⑤ ②，④より ${}^{OAN}P>{}^{E}P$ であり，また近似的に ${}^{OAN}P={}^{A}P_x$ となる年齢 x を $x_e\leqq x\leqq x_r-1$ の範囲で見つけることができる（これを x_1 とする）。

⑥ 近似的に ${}^{OAN}P={}^{U}P_x$ となる年齢 x を，$x_e\leqq x\leqq x_{r-1}$ の範囲で見つけることができる（これを x_2 とする）。

⑦ ${}^{U}P_{x_e}\leqq{}^{U}P_{x_1}<{}^{A}P_{x_1}={}^{OAN}P={}^{U}P_{x_2}$，${}^{U}P_x$ が x の単調増加関数であることより，$x_1<x_2$

これらをまとめて章末の練習問題とする。

さて，当節の議論では①，⑤を直接用いることとする。

$$S_x - {}^{OAN}PG_x = G_x(S_x/G_x - {}^{OAN}P) \quad (6-21)$$

であるが，

$S_{x_e}/G_{x_e} = {}^{E}P$ であり，また ${}^{OAN}P > {}^{E}P$ であることから，$x = x_e$ では，$S_x/G_x - {}^{OAN}P$ はマイナス。

また，

$$S_x/G_x = D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}/(N_x - N_{x_r}) \quad (6-22)$$

で，これは x の増加関数であることから $S_x/G_x - {}^{OAN}P$ は x の増加関数，（6－22）を変形すると，

$$\{(D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}/D_x)/(x_r - x_e)\}/\{(N_x - N_{x_r})/D_x/(x_r - x_e)\}$$

$$= {}^{U}P_x/\{(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y/D_x)/(x_r - x_e)\}$$

$$> {}^{U}P_x/\{(x_r - x)/(x_r - x_e)\}$$

$$\geqq {}^{U}P_x \quad (6-23)$$

一方，${}^{OAN}P$ は ${}^{U}P_x$ の加重平均値であるから，x を十分大きくとれば，（6－23）より S_x/G_x は ${}^{OAN}P$ より大きくなる。

これらのことより，x が x_e から x_{r-1} に動く間に，$S_x/G_x - {}^{OAN}P$ は単調増加でマイナス→0→プラスと変化することがわかった。したがって，（6－21）もまたマイナス→0→プラスと変化することになる。

したがって，近似的に $S_x/G_x - {}^{OAN}P = 0$ となる x を x_3 とすると，x_3 歳より若い年齢で予定を上回って人員数が増えれば，マイナスの責任準備金が増えて剰余の方向に働き，x_3 歳より高齢で予定を上回って人員数が増えれば，加入年齢方式同様不足の方向に働くことがわかる。

4.　数値例による年金財政概観

（前提）

この節で取り扱う前提は，次の通りとする。

$x_e = 20$，$x_r = 60$，$\omega = 108$，$l_{x_e} = 100,000$

被保険者および受給権者は，巻末の定常人口の例によって，脱退・死亡するものとする。

⑴　加入年齢方式・開放基金方式における年齢別収支比較

第2節，第3節で説明した内容について数値で確かめてみる。すなわち，両財政方式とも，極限方程式が成立しているのだから責任準備金の増も積立金の増も0であるが，年齢別・要素別に見ると過不足が生じ，総合計で収支バランスしていることがよくわかる。

まず，加入年齢方式で年齢別収支をみると被保険者の責任準備金はいずれもプラスであり，責任準備金増もプラスである。積立金増もプラスであるが，いずれも責任準備金増より小さいために被保険者全体では損益はマイナスとなる。将来の被保険者は責任準備金増，積立金増いずれも0である。これら損益に対して年初の積立金利息が加わって全体で損益0となっている（表6－3）。

開放基金方式では，一定年齢以下の責任準備金はマイナスであり，この年齢層では責任準備金増自体もマイナスとなり，損益はプラスである。また将来の被保険者に関しては，責任準備金がマイナス，責任準備金増もマイナス，したがって損益はプラスとなっている。被保険者と将来の被保険者の損益の合計はマイナスであるが加入年齢方式のそれよりは絶対額は小さい。したがって，年初の積立金の利息収入が加わって，合計の損益が0になる点は加入年齢方式と同じであるが打ち消し合う絶対額は小さい。勿論このことは，加入年齢方式よりも積立水準が低いことと符合している（表6－4）。

次に当初年金受給権者の積立金のみ積み立てて，定常状態での積立て不足額は

10年間で償却する前提で積立金，責任準備金，保険料，給付等の推移を数値で示したのが，表6－5（加入年齢方式），表6－6（開放基金方式）である。これによれば，10年経過後における両財政方式における極限方程式の成立が確かめられる。

すなわち，

$$F + C - B + (F + C - B) \cdot i = F \qquad (\longleftrightarrow C + dF = B) \qquad (6-24)$$

が成立している。ここに，

$F =$ 3,832,087 （加入年齢方式）
　　 3,334,396 （開放基金方式）

$C =$ 26,391 （加入年齢方式）
　　 52,337 （開放基金方式）

$B =$ 226,169

加入年齢方式の方が開放基金方式との比較では最終的な積立水準が高いので利息収入が大きく標準保険料が小さい。当然ながら，定常状態に達するまでの特別保険料の額は，加入年齢方式の方が高い。すなわち，

1年あたりの特別保険料＝ 234,640 （加入年齢方式）
　　 172,054 （開放基金方式）

また，前節で展開した単位積立方式，加入年齢方式，開放基金方式の一人あたりの保険料および年齢別将来期間対応保険料の関係は，表6－7のように示される。前節での議論を再記すれば，

① 加入年齢方式の一人あたり保険料，年齢別将来期間対応保険料は，単位積立方式の保険料の加重平均値として表される。 （6－17）

② 開放基金方式の保険料は，加入年齢方式，年齢別将来期間対応保険料の加重平均値として表される。 （6－19）

③ 従って，開放基金方式の保険料は，単位積立方式の保険料の加重平均値として表される。 （6－20）

ということが言えた。

したがって，加入年齢方式，開放基金方式とも，ある年齢で単位積立方式の年齢別保険料率に最も近くなる年齢がある。設例では，加入年齢方式では 31 歳，開放基金方式で 39 歳である。加入年齢方式の方が開放基金方式より低くなっているのは，加重平均をとった時の重みが前者が D_x であるのに対し後者が l_x で，前者の方が年齢 x の増加に応じての重みの減少度合いが大きく，より低い年齢での単位積立方式の保険料水準（年齢の単調増加関数）に影響される度合いが大きいからである。勿論，このことは加入年齢方式の保険料が開放基金方式の保険料より低いことにもつながっている。これらの数値的関係をグラフで示したのが図 6 － 2 である。

表６－３　加入年齢方式による損益（モデル例）

年齢	残存人数	給付現価	収入現価	責任準備金	1年間の推移による損益		
					責準増	積立金増	損益
20	100,000.000	15,325	15,325	0	1,992	1,992	0
21	91,914.000	16,168	14,176	1,992	1,941	1,831	-110
22	84,485.511	17,057	13,125	3,933	1,899	1,683	-216
23	75,971.061	17,995	12,163	5,832	1,834	1,513	-321
24	68,316.976	18,985	11,319	7,666	1,783	1,361	-422
25	62,117.894	20,029	10,581	9,449	1,757	1,237	-520
26	56,480.695	21,131	9,925	11,206	1,741	1,125	-616
27	51,919.314	22,293	9,346	12,947	1,746	1,034	-712
28	47,725.791	23,519	8,826	14,694	1,759	951	-808
29	44,348.237	24,813	8,360	16,453	1,788	883	-905
30	41,210.156	26,178	7,937	18,241	1,824	821	-1,003
31	38,706.227	27,617	7,552	20,065	1,875	771	-1,104
32	36,353.275	29,136	7,197	21,940	1,931	724	-1,207
33	34,504.348	30,739	6,868	23,871	2,000	687	-1,313
34	32,746.696	32,429	6,559	25,871	2,075	652	-1,423
35	31,403.099	34,213	6,267	27,946	2,163	626	-1,537
36	30,426.149	36,095	5,986	30,109	2,262	606	-1,656
37	29,476.853	38,080	5,709	32,371	2,368	587	-1,780
38	28,554.227	40,174	5,436	34,738	2,479	569	-1,911
39	27,656.768	42,384	5,166	37,218	2,598	551	-2,047
40	26,783.367	44,715	4,899	39,816	2,723	534	-2,190
41	25,933.263	47,174	4,635	42,539	2,856	517	-2,340
42	25,105.473	49,769	4,374	45,395	2,997	500	-2,497
43	24,299.337	52,506	4,114	48,392	3,146	484	-2,662
44	23,514.468	55,394	3,856	51,538	3,303	468	-2,835
45	22,749.542	58,441	3,600	54,841	3,469	453	-3,016
46	22,003.357	61,655	3,345	58,310	3,645	438	-3,207
47	21,274.386	65,046	3,090	61,956	3,831	424	-3,408
48	20,562.120	68,624	2,837	65,787	4,028	410	-3,618
49	19,865.475	72,398	2,583	69,815	4,236	396	-3,840
50	19,183.493	76,380	2,329	74,050	4,455	382	-4,073
51	18,323.114	80,581	2,075	78,505	4,683	365	-4,318
52	17,307.647	85,013	1,824	83,188	4,920	345	-4,575
53	16,338.765	89,688	1,580	88,108	5,171	325	-4,846
54	15,415.298	94,621	1,341	93,280	5,437	307	-5,130
55	14,535.701	99,825	1,108	98,717	5,719	290	-5,429
56	13,698.735	105,316	879	104,436	6,017	273	-5,744
57	12,902.702	111,108	655	110,453	6,332	257	-6,075
58	12,145.958	117,219	434	116,785	6,665	242	-6,423
59	11,426.067	123,666	216	123,450	7,017	228	-6,790
60	10,740.389	130,468	0	130,468	-4,155	-11,331	-7,176
61	10,623.641	126,312	0	126,312	-4,261	-11,208	-6,947
62	10,498.813	122,051	0	122,051	-4,363	-11,076	-6,713
63	10,365.478	117,688	0	117,688	-4,463	-10,936	-6,473
64	10,222.227	113,225	0	113,225	-4,557	-10,784	-6,227

65	10,067.667	108,668	0	108,668	−4,645	−10,621	−5,977
66	9,901.047	104,024	0	104,024	−4,724	−10,446	−5,721
67	9,724.017	99,299	0	99,299	−4,797	−10,259	−5,461
68	9,534.787	94,502	0	94,502	−4,862	−10,059	−5,198
69	9,332.936	89,640	0	89,640	−4,916	−9,846	−4,930
70	9,119.398	84,724	0	84,724	−4,961	−9,621	−4,660
71	8,893.967	79,763	0	79,763	−4,996	−9,383	−4,387
72	8,649.649	74,767	0	74,767	−5,013	−9,125	−4,112
73	8,383.240	69,754	0	69,754	−5,008	−8,844	−3,836
74	8,092.258	64,746	0	64,746	−4,976	−8,537	−3,561
75	7,775.527	59,769	0	59,769	−4,916	−8,203	−3,287
76	7,431.615	54,854	0	54,854	−4,823	−7,840	−3,017
77	7,061.075	50,030	0	50,030	−4,698	−7,449	−2,752
78	6,666.714	45,332	0	45,332	−4,540	−7,033	−2,493
79	6,253.978	40,792	0	40,792	−4,354	−6,598	−2,244
80	5,827.644	36,438	0	36,438	−4,144	−6,148	−2,004
81	5,391.154	32,294	0	32,294	−3,912	−5,688	−1,776
82	4,951.128	28,382	0	28,382	−3,662	−5,223	−1,561
83	4,508.447	24,720	0	24,720	−3,397	−4,756	−1,360
84	4,068.603	21,323	0	21,313	−3,120	−4,292	−1,173
85	3,638.145	18,204	0	18,204	−2,837	−3,838	−1,001
86	3,221.032	15,367	0	15,367	−2,553	−3,398	−845
87	2,818.274	12,814	0	12,814	−2,269	−2,973	−705
88	2,434.622	10,545	0	10,545	−1,989	−2,569	−580
89	2,074.444	8,556	0	8,556	−1,718	−2,189	−471
90	1,741.475	6,839	0	6,839	−1,461	−1,837	−376
91	1,438.685	5,377	0	5,377	−1,222	−1,518	−296
92	1,168.140	4,155	0	4,155	−1,004	−1,232	−229
93	930.949	3,151	0	3,151	−809	−982	−173
94	727.165	2,343	0	2,343	−638	−767	−129
95	555.837	1,704	0	1,704	−493	−586	−94
96	415.110	1,212	0	1,212	−371	−438	−67
97	302.358	840	0	840	−273	−319	−46
98	214.402	568	0	568	−195	−226	−31
99	147.719	373	0	373	−135	−156	−20
100	98.685	237	0	237	−91	−104	−13
101	63.789	146	0	146	−59	−67	−8
102	39.806	87	0	87	−37	−42	−5
103	23.926	50	0	50	−23	−25	−3
104	13.818	27	0	27	−13	−15	−1
105	7.650	14	0	14	−7	−8	−1
106	4.049	7	0	7	−4	−4	0
107	2.045	3	0	3	−2	−2	0
108	0.983	1	0	1	−1	−1	0
将来の被保険者				0	0	0	0
小　計				3,832,087	0	−210,765	−210,765
年初積立金の利息						210,765	210,765
合　計				3,832,087	0	0	0

年初の積立額＝3,832,087　　標準保険料率＝0.01888

表６－４　開放基金方式による損益（モデル例）

年齢	残存人数	給付現価	収入現価	責任準備金	1年間の推移による損益		
					責準増	積立金増	損益
20	100,000.000	15,325	30,392	-15,066	3,122	3,951	829
21	91,914.000	16,168	28,133	-11,945	2,974	3,631	657
22	84,485.511	17,057	26,028	-8,970	2,844	3,338	493
23	75,971.061	17,995	24,122	-6,126	2,664	3,001	337
24	68,316.976	18,985	22,447	-3,462	2,508	2,699	190
25	62,117.894	20,029	20,983	-953	2,402	2,454	52
26	56,480.695	21,131	19,683	1,448	2,311	2,231	-80
27	51,919.314	22,293	18,534	3,759	2,258	2,051	-207
28	47,725.791	23,519	17,502	6,017	2,216	1,885	-331
29	44,348.237	24,813	16,580	8,233	2,205	1,752	-453
30	41,210.156	26,178	15,739	10,438	2,202	1,628	-574
31	38,706.227	27,617	14,977	12,640	2,224	1,529	-695
32	36,353.275	29,136	14,272	14,865	2,254	1,436	-818
33	34,504.348	30,739	13,620	17,118	2,305	1,363	-942
34	32,746.696	32,429	13,006	19,423	2,362	1,294	-1,068
35	31,403.099	34,213	12,428	21,785	2,439	1,241	-1,198
36	30,426.149	36,095	11,871	24,224	2,534	1,202	-1,332
37	29,476.853	38,080	11,322	26,758	2,636	1,164	-1,472
38	28,554.227	40,174	10,780	29,394	2,745	1,128	-1,617
39	27,656.768	42,384	10,245	32,139	2,860	1,093	-1,768
40	26,783.367	44,715	9,716	34,999	2,983	1,058	-1,925
41	25,933.263	47,174	9,192	37,982	3,114	1,025	-2,089
42	25,105.473	49,769	8,673	41,096	3,252	992	-2,260
43	24,299.337	52,506	8,159	44,348	3,399	960	-2,439
44	23,514.468	55,394	7,647	47,747	3,555	929	-2,626
45	22,749.542	58,441	7,139	51,302	3,720	899	-2,822
46	22,003.357	61,655	6,633	55,022	3,895	869	-3,026
47	21,274.386	65,046	6,129	58,917	4,081	840	-3,240
48	20,562.120	68,624	5,625	62,998	4,277	812	-3,465
49	19,865.475	72,398	5,122	67,276	4,485	785	-3,700
50	19,183.493	76,380	4,619	71,760	4,705	758	-3,947
51	18,323.114	80,581	4,115	76,465	4,929	724	-4,206
52	17,307.647	85,013	3,618	81,395	5,160	684	-4,477
53	16,338.765	89,688	3,133	86,555	5,406	645	-4,761
54	15,415.298	94,621	2,660	91,961	5,667	609	-5,058
55	14,535.701	99,825	2,197	97,628	5,944	574	-5,370
56	13,698.735	105,316	1,744	103,572	6,238	541	-5,696
57	12,902.702	111,108	1,299	109,809	6,549	510	-6,040
58	12,145.958	117,219	860	116,359	6,880	480	-6,400
59	11,426.067	123,666	428	123,238	7,229	451	-6,778
60	10,740.389	130,468	0	130,468	-4,155	-11,331	-7,176
61	10,623.641	126,312	0	126,312	-4,261	-11,208	-6,947
62	10,498.813	122,051	0	122,051	-4,363	-11,076	-6,713
63	10,365.478	117,688	0	117,688	-4,463	-10,936	-6,473
64	10,222.227	113,225	0	113,225	-4,557	-10,784	-6,227

65	10,067.667	108,668	0	108,668	−4,645	−10,621	−5,977
66	9,901.047	104,024	0	104,024	−4,724	−10,446	−5,721
67	9,724.017	99,299	0	99,299	−4,797	−10,259	−5,461
68	9,534.787	94,502	0	94,502	−4,862	−10,059	−5,198
69	9,332.936	89,640	0	89,640	−4,916	−9,846	−4,930
70	9,119.398	84,724	0	84,724	−4,961	−9,621	−4,660
71	8,893.967	79,763	0	79,763	−4,996	−9,383	−4,387
72	8,649.649	74,767	0	74,767	−5,013	−9,125	−4,112
73	8,383.240	69,754	0	69,754	−5,008	−8,844	−3,836
74	8,092.258	64,746	0	64,746	−4,976	−8,537	−3,561
75	7,775.527	59,769	0	59,769	−4,916	−8,203	−3,287
76	7,431.615	54,854	0	54,854	−4,823	−7,840	−3,017
77	7,061.075	50,030	0	50,030	−4,698	−7,449	−2,752
78	6,666.714	45,332	0	45,332	−4,540	−7,033	−2,493
79	6,253.978	40,792	0	40,792	−4,354	−6,598	−2,244
80	5,827.644	36,438	0	36,438	−4,144	−6,148	−2,004
81	5,391.154	32,294	0	32,294	−3,912	−5,688	−1,776
82	4,951.128	28,382	0	28,382	−3,662	−5,223	−1,561
83	4,508.447	24,720	0	24,720	−3,397	−4,756	−1,360
84	4,068.603	21,323	0	21,313	−3,120	−4,292	−1,173
85	3,638.145	18,204	0	18,204	−2,837	−3,838	−1,001
86	3,221.032	15,367	0	15,367	−2,553	−3,398	−845
87	2,818.274	12,814	0	12,814	−2,269	−2,973	−705
88	2,434.622	10,545	0	10,545	−1,989	−2,569	−580
89	2,074.444	8,556	0	8,556	−1,718	−2,189	−471
90	1,741.475	6,839	0	6,839	−1,461	−1,837	−376
91	1,438.685	5,377	0	5,377	−1,222	−1,518	−296
92	1,168.140	4,155	0	4,155	−1,004	−1,232	−229
93	930.949	3,151	0	3,151	−809	−982	−173
94	727.165	2,343	0	2,343	−638	−767	−129
95	555.837	1,704	0	1,704	−493	−586	−94
96	415.110	1,212	0	1,212	−371	−438	−67
97	302.358	840	0	840	−273	−319	−46
98	214.402	568	0	568	−195	−226	−31
99	147.719	373	0	373	−135	−156	−20
100	98.685	237	0	237	−91	−104	−13
101	63.789	146	0	146	−59	−67	−8
102	39.806	87	0	87	−37	−42	−5
103	23.926	50	0	50	−23	−25	−3
104	13.818	27	0	27	−13	−15	−1
105	7.650	14	0	14	−7	−8	−1
106	4.049	7	0	7	−4	−4	0
107	2.045	3	0	3	−2	−2	0
108	0.983	1	0	1	−1	−1	0
将来の被保険者				−273,935	−15,066	0	15,066
小　計				3,334,396	0	−183,392	−183,392
年初積立金の利息						183,392	183,392
合　計				3,334,396	0	0	0

年初の積立額＝3,334,396　　標準保険料率＝0.03745

表6－5　年金財政の推移（加入年齢方式）

年度	年始積立金	標準 保険料	特別 保険料	給付	利息収入	年末資産	PSL 未償却残高
1	1,966,186	26,391	234,640	226,169	110,058	2,111,106	1,720,981
2	2,111,106	26,391	234,640	226,169	118,028	2,263,997	1,568,090
3	2,263,997	26,391	234,640	226,169	126,437	2,425,297	1,406,790
4	2,425,297	26,391	234,640	226,169	135,309	2,595,469	1,236,618
5	2,595,469	26,391	234,640	226,169	144,668	2,775,000	1,057,087
6	2,775,000	26,391	234,640	226,169	154,542	2,964,405	867,682
7	2,964,405	26,391	234,640	226,169	164,960	3,164,227	667,860
8	3,164,227	26,391	234,640	226,169	175,950	3,375,040	457,047
9	3,375,040	26,391	234,640	226,169	187,545	3,597,447	234,640
10	3,597,447	26,391	234,640	226,169	199,777	3,832,087	0
11	3,832,087	26,391	0	226,169	199,777	3,832,087	0
12	3,832,087	26,391	0	226,169	199,777	3,832,087	0
13	3,832,087	26,391	0	226,169	199,777	3,832,087	0
14	3,832,087	26,391	0	226,169	199,777	3,832,087	0
15	3,832,087	26,391	0	226,169	199,777	3,832,087	0

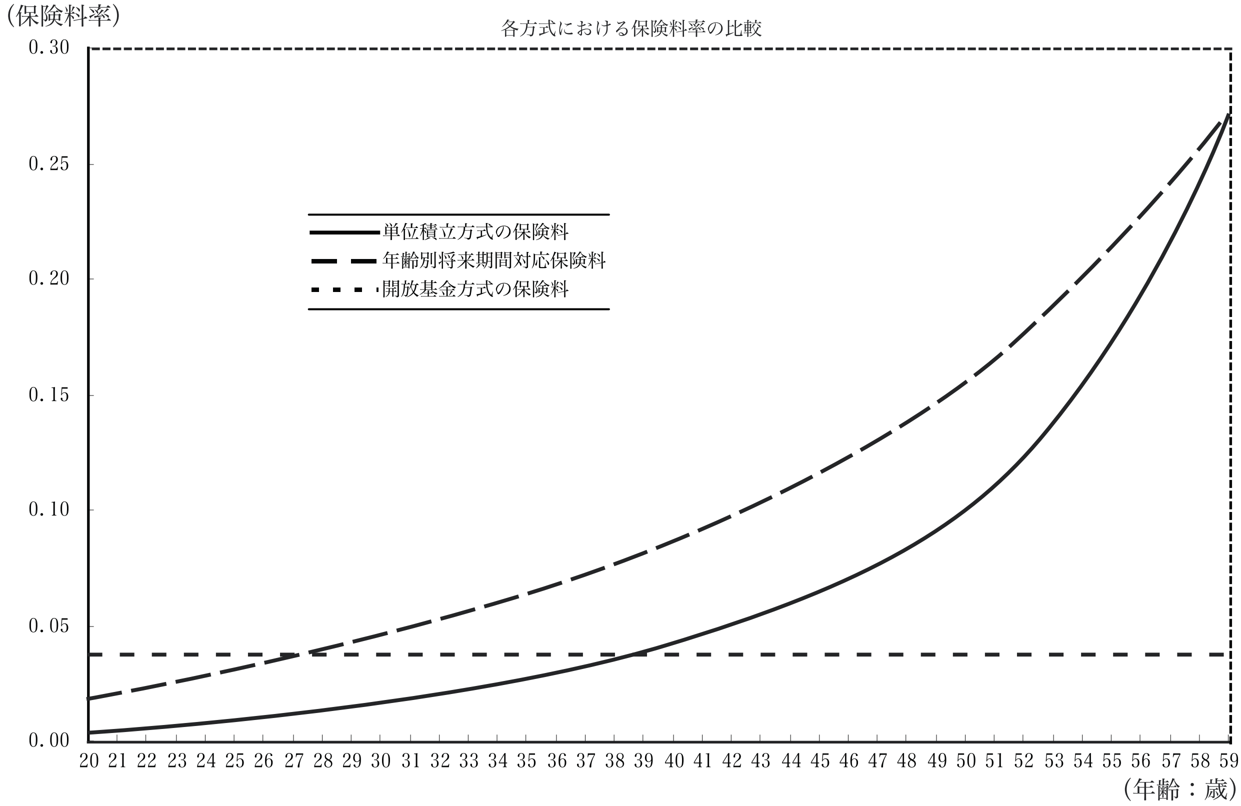
表6－6　年金財政の推移（開放基金方式）

年度	年始積立金	標準 保険料	特別 保険料	給付	利息収入	年末資産	PSL 未償却残高
1	1,966,186	52,337	172,054	226,169	108,043	2,072,452	1,261,944
2	2,072,452	52,337	172,054	226,169	113,887	2,184,562	1,149,833
3	2,184,562	52,337	172,054	226,169	120,053	2,302,839	1,031,557
4	2,302,839	52,337	172,054	226,169	126,558	2,427,620	906,775
5	2,427,620	52,337	172,054	226,169	133,421	2,559,265	775,131
6	2,559,265	52,337	172,054	226,169	140,662	2,698,150	636,245
7	2,698,150	52,337	172,054	226,169	148,301	2,844,674	489,722
8	2,844,674	52,337	172,054	226,169	156,359	2,999,257	335,139
9	2,999,257	52,337	172,054	226,169	164,861	3,162,341	172,054
10	3,162,341	52,337	172,054	226,169	173,831	3,334,396	0
11	3,334,396	52,337	0	226,169	173,831	3,334,396	0
12	3,334,396	52,337	0	226,169	173,831	3,334,396	0
13	3,334,396	52,337	0	226,169	173,831	3,334,396	0
14	3,334,396	52,337	0	226,169	173,831	3,334,396	0
15	3,334,396	52,337	0	226,169	173,831	3,334,396	0

表６－７　各財政方式における保険料の関係

年齢	単位積立方式の保険料	年齢別将来期間対応保険料	開放基金方式の保険料
20	0.00383	0.01888	0.03745
21	0.00440	0.02100	0.03745
22	0.00505	0.02331	0.03745
23	0.00592	0.02584	0.03745
24	0.00695	0.02850	0.03745
25	0.00806	0.03128	0.03745
26	0.00935	0.03417	0.03745
27	0.01073	0.03716	0.03745
28	0.01232	0.04026	0.03745
29	0.01399	0.04343	0.03745
30	0.01588	0.04671	0.03745
31	0.01784	0.05006	0.03745
32	0.02004	0.05351	0.03745
33	0.02227	0.05704	0.03745
34	0.02476	0.06069	0.03745
35	0.02724	0.06443	0.03745
36	0.02966	0.06831	0.03745
37	0.03230	0.07242	0.03745
38	0.03517	0.07675	0.03745
39	0.03831	0.08133	0.03745
40	0.04174	0.08617	0.03745
41	0.04548	0.09128	0.03745
42	0.04956	0.09669	0.03745
43	0.05402	0.10242	0.03745
44	0.05889	0.10850	0.03745
45	0.06422	0.11495	0.03745
46	0.07005	0.12182	0.03745
47	0.07644	0.12917	0.03745
48	0.08343	0.13704	0.03745
49	0.09111	0.14555	0.03745
50	0.09954	0.15479	0.03745
51	0.10994	0.16497	0.03745
52	0.12280	0.17598	0.03745
53	0.13723	0.18758	0.03745
54	0.15345	0.19980	0.03745
55	0.17169	0.21265	0.03745
56	0.19220	0.22614	0.03745
57	0.21528	0.24028	0.03745
58	0.24127	0.25509	0.03745
59	0.27058	0.27058	0.03745

図６－２


(保険料率)
各方式における保険料率の比較
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
単位積立方式の保険料
年齢別将来期間対応保険料
開放基金方式の保険料
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59
(年齢：歳)

⑵　実際の人員推移が予定と異なった場合の損益発生の数値例

次に人員の推移の実績が予定と異なる場合として次の4ケースを想定し，財政方式と損益への影響のしかたについて考察してみる。この結果は，いずれも前節の議論の数値的説明になっている。

①　低年齢の被保険者の残存が予定より多かった場合

20歳～24歳での脱退が1年間で全くなかったものとする。（ちなみに，この年齢層は，開放基金方式による翌年初の年齢別責任準備金が負となる箇所である）

②　高年齢の被保険者の残存が予定より多かった場合

25歳以降の被保険者の脱退が1年間で全くなかったものとする。

③　受給権者の残存が予定より多かった場合

受給権者の死亡が1年間で全くなかったものとする。

④　翌年初に加入する被保険者が予定より多かった場合

新規加入年齢は予定通り（x_e歳）であるが，予定の2倍（200,000名）加入したものとする。

まず，①のケースでは，加入年齢方式においてこの年齢層での責任準備金増が予定よりも増えて，損益が予定よりも不足の方向に振れた（表6－8）。開放基金方式では，責任準備金増は逆にマイナスになり，損益は剰余の方向に振れた（表6－9）。

次に，②のケース（表6－10，表6－11）では，両財政方式とも各年齢における責任準備金が増加して損益は不足の方向に振れたが，開放基金方式の責任準備金水準が低いことから，不足の絶対額は開放基金方式の方が小さい。

③のケース（表6－12）では，受給権者に関する損益は財政方式に関係しないことから不足金の絶対額は両方式とも同額であるが，開放基金方式の方が当然ながら収入現価に対する割合は小さくなっている。

④のケース（表６－13）では，加入年齢方式の場合は将来の被保険者の責任準備金がゼロであるので，予定の年齢（x_e歳）で加入する限りでは人数に関係なく損益はゼロである。一方，開放基金方式では，責任準備金が負である群団が予定より多く加入することにより，損益は剰余に振れることになる。

表6－8　低年齢の被保険者の残存が予定よりも多かった場合（加入年齢方式）

年齢	責任準備金増（予定）	責任準備金増（実績）	損益の実績－予定
20	1,992	2,167	-175
21	1,941	2,286	-346
22	1,899	2,553	-654
23	1,834	2,693	-859
24	1,783	2,725	-943
25	1,757	1,757	0
26	1,741	1,741	0
27	1,746	1,746	0
28	1,759	1,759	0
29	1,788	1,788	0
30	1,824	1,824	0
31	1,875	1,875	0
32	1,931	1,931	0
33	2,000	2,000	0
34	2,075	2,075	0
35	2,163	2,163	0
36	2,262	2,262	0
37	2,368	2,368	0
38	2,479	2,479	0
39	2,598	2,598	0
40	2,723	2,723	0
41	2,856	2,856	0
42	2,997	2,997	0
43	3,146	3,146	0
44	3,303	3,303	0
45	3,469	3,469	0
46	3,645	3,645	0
47	3,831	3,831	0
48	4,028	4,028	0
49	4,236	4,236	0
50	4,455	4,455	0
51	4,683	4,683	0
52	4,920	4,920	0
53	5,171	5,171	0
54	5,437	5,437	0
55	5,719	5,719	0
56	6,017	6,017	0
57	6,332	6,332	0
58	6,665	6,665	0
59	7,017	7,017	0
計	—	—	-2,976

表６－９　低年齢の被保険者の残存が予定よりも多かった場合（開放基金方式）

年齢	責任準備金増（予定）	責任準備金増（実績）	損益の実績－予定
20	3,122	2,071	1,051
21	2,974	2,185	789
22	2,844	2,158	687
23	2,664	2,276	388
24	2,508	2,413	95
25	2,402	2,402	0
26	2,311	2,311	0
27	2,258	2,258	0
28	2,216	2,216	0
29	2,205	2,205	0
30	2,202	2,202	0
31	2,224	2,224	0
32	2,254	2,254	0
33	2,305	2,305	0
34	2,362	2,362	0
35	2,439	2,439	0
36	2,534	2,534	0
37	2,636	2,636	0
38	2,745	2,745	0
39	2,860	2,860	0
40	2,983	2,983	0
41	3,114	3,114	0
42	3,252	3,252	0
43	3,399	3,399	0
44	3,555	3,555	0
45	3,720	3,720	0
46	3,895	3,895	0
47	4,081	4,081	0
48	4,277	4,277	0
49	4,485	4,485	0
50	4,705	4,705	0
51	4,929	4,929	0
52	5,160	5,160	0
53	5,406	5,406	0
54	5,667	5,667	0
55	5,944	5,944	0
56	6,238	6,238	0
57	6,549	6,549	0
58	6,880	6,880	0
59	7,229	7,229	0
計	―	―	3,009

表６－10　高年齢の被保険者の残存が予定よりも多かった場合（加入年齢方式）

年齢	責任準備金増（予定）	責任準備金増（実績）	損益の実績－予定
20	1, 992	1, 992	0
21	1, 941	1, 941	0
22	1, 899	1, 899	0
23	1, 834	1, 834	0
24	1, 783	1, 783	0
25	1, 757	2, 876	−1, 118
26	1, 741	2, 879	−1, 137
27	1, 746	3, 037	−1, 291
28	1, 759	3, 012	−1, 253
29	1, 788	3, 177	−1, 389
30	1, 824	3, 122	−1, 298
31	1, 875	3, 295	−1, 420
32	1, 931	3, 210	−1, 279
33	2, 000	3, 389	−1, 389
34	2, 075	3, 271	−1, 196
35	2, 163	3, 129	−967
36	2, 262	3, 305	−1, 042
37	2, 368	3, 490	−1, 122
38	2, 479	3, 687	−1, 208
39	2, 598	3, 896	−1, 298
40	2, 723	4, 118	−1, 394
41	2, 856	4, 353	−1, 497
42	2, 997	4, 602	−1, 605
43	3, 146	4, 866	−1, 720
44	3, 303	5, 147	−1, 844
45	3, 469	5, 447	−1, 977
46	3, 645	5, 768	−2, 123
47	3, 831	6, 110	−2, 279
48	4, 028	6, 476	−2, 448
49	4, 236	6, 868	−2, 633
50	4, 455	8, 141	−3, 686
51	4, 683	9, 564	−4, 881
52	4, 920	10, 145	−5, 225
53	5, 171	10, 759	−5, 588
54	5, 437	11, 411	−5, 974
55	5, 719	12, 100	−6, 381
56	6, 017	12, 831	−6, 814
57	6, 332	13, 608	−7, 276
58	6, 665	14, 443	−7, 778
59	7, 017	15, 347	−8, 329
計	―	―	−99, 861

表６－11　高年齢の被保険者の残存が予定よりも多かった場合（開放基金方式）

年齢	責任準備金増（予定）	責任準備金増（実績）	損益の実績－予定
20	3,122	3,122	0
21	2,974	2,974	0
22	2,844	2,844	0
23	2,664	2,664	0
24	2,508	2,508	0
25	2,402	2,546	−145
26	2,311	2,641	−330
27	2,258	2,787	−529
28	2,216	2,843	−627
29	2,205	3,000	−795
30	2,202	3,020	−818
31	2,224	3,186	−962
32	2,254	3,171	−917
33	2,305	3,347	−1,043
34	2,362	3,294	−932
35	2,439	3,217	−778
36	2,534	3,396	−862
37	2,636	3,586	−950
38	2,745	3,788	−1,043
39	2,860	4,002	−1,141
40	2,983	4,228	−1,245
41	3,114	4,469	−1,355
42	3,252	4,723	−1,471
43	3,399	4,993	−1,594
44	3,555	5,280	−1,725
45	3,720	5,586	−1,866
46	3,895	5,914	−2,019
47	4,081	6,263	−2,182
48	4,277	6,636	−2,359
49	4,485	7,036	−2,551
50	4,705	8,298	−3,590
51	4,929	9,705	−4,776
52	5,160	10,293	−5,133
53	5,406	10,915	−5,509
54	5,667	11,575	−5,908
55	5,944	12,272	−6,328
56	6,238	13,012	−6,775
57	6,549	13,799	−7,250
58	6,880	14,644	−7,765
59	7,229	15,559	−8,329
計	—	—	−91,599

表６－12　受給権者の残存が予定よりも多かった場合

年齢	責任準備金増（予定）	責任準備金増（実績）	損益の実績－予定
60	-4, 155	-2, 767	-1, 388
61	-4, 261	-2, 810	-1, 451
62	-4, 363	-2, 850	-1, 514
63	-4, 463	-2, 876	-1, 587
64	-4, 557	-2, 889	-1, 668
65	-4, 645	-2, 894	-1, 751
66	-4, 724	-2, 917	-1, 808
67	-4, 797	-2, 922	-1, 876
68	-4, 862	-2, 923	-1, 939
69	-4, 916	-2, 932	-1, 984
70	-4, 961	-2, 939	-2, 022
71	-4, 996	-2, 884	-2, 112
72	-5, 013	-2, 797	-2, 217
73	-5, 008	-2, 680	-2, 328
74	-4, 976	-2, 542	-2, 435
75	-4, 916	-2, 377	-2, 538
76	-4, 823	-2, 198	-2, 625
77	-4, 698	-2, 016	-2, 682
78	-4, 540	-1, 848	-2, 692
79	-4, 354	-1, 689	-2, 666
80	-4, 144	-1, 529	-2, 615
81	-3, 912	-1, 389	-2, 522
82	-3, 662	-1, 235	-2, 427
83	-3, 397	-1, 092	-2, 305
84	-3, 120	-966	-2, 154
85	-2, 837	-847	-1, 990
86	-2, 553	-722	-1, 831
87	-2, 269	-607	-1, 662
88	-1, 989	-503	-1, 486
89	-1, 718	-410	-1, 308
90	-1, 461	-329	-1, 132
91	-1, 222	-260	-962
92	-1, 004	-201	-803
93	-809	-152	-657
94	-638	-113	-525
95	-493	-82	-411
96	-371	-58	-313
97	-273	-40	-233
98	-195	-27	-168
99	-135	-17	-118
100	-91	-11	-80
101	-59	-7	-52
102	-37	-4	-33
103	-23	-3	-20
104	-13	-2	-11

105	-7	-1	-6
106	-4	-1	-3
107	-2	-1	-1
108	-1	-1	0
計	—	—	-67,109

表６－13　翌年初の新規加入者が予定よりも多かった場合

	責任準備金増（予定）	責任準備金増（実績）	損益の実績－予定
加入年齢方式	0	0	0
開放基金方式	0	-15,066	15,066

第６章　練　習　問　題

１．企業年金を実施しているある企業が，給付を２倍にする制度変更を行った。給付改善の効果は過去に遡及するものとする。このとき標準保険料率も２倍にするとして，過去勤務債務は，

２×（制度変更直前の過去勤務債務残高）＋（制度変更時の積立金）

となることを示せ。

２．ある定常状態に達した年金制度で，一定年数にわたって継続的に年金受給権者に対する給付改善を実施するとする。各々の給付改善で発生する追加的給付現価は前年度の$(1+r)$倍$(r>0)$とする。

今，給付改善によって生じた後発過去勤務債務を毎年同額ずつ永久償却する。ただし，この額は初回の給付改善によって生じた追加的給付現価の$\frac{1}{2}$を超えないものとし，毎年の償却も給付改善も年初に行っていくものとする。

このとき給付改善を行うことのできる回数は

$$\frac{\log\dfrac{i+r}{2i}}{\log\dfrac{1+r}{1+i}}$$

を超えない整数であることを示せ。

ここにiは予定利率とする。なお，$i \neq r$。

３．定年時より勤務年数にかかわらず定額の終身年金を支払う年金制度を考える。

今，財政方式として加入年齢方式（特定年齢方式）を採用しており，定常状態に達しているとする。もし，特定年齢を超えたある年齢においてそのときの

その年齢における人数だけ追加加入があったとしたとき，それによって生ずる後発過去勤務債務は，定常状態において特定年齢で加入した者にかかる標準保険料のその年齢までの元利合計に等しいことを示せ。

4．過去勤務期間 τ 年，実加入期間 t 年なる脱退者に対する給付を(1) $\alpha_{\tau+t}+\beta_t$，(2) $\alpha_t+\beta_{\tau+t}$，(3) $\alpha_t+\beta_t$ とする 3 つの年金制度を設計した。

　これらの制度の加入年齢方式（特定年齢方式）による責任準備金をそれぞれ(1) U_1，(2) U_2，(3) U_3 とすると

　給付が $\alpha_{\tau+t}+\beta_{\tau+t}$ である制度の責任準備金を求めよ。

5．表 6 － 1 において，「合計」欄いずれも 0 になることを示せ。

6．（ 6 －20）を示せ。

7．第 3 節の①から⑦を示せ。

8．定年退職者に対して退職時給与と同額を、退職時から終身にわたって支給する年金制度がある。この制度に加入する被保険者の人数及び給与は定常状態にあり、財政方式は開放基金方式を採用していた。財政運営上の影響に関する次の記載の中に適切な記述が 2 つ含まれている。適切な記述の記号を 2 つ

選びなさい。ただし、予定する新規加入年齢は、制度上加入できる最低の年齢とする。

(A) ある年度において中途脱退者数の実績が各年齢一律に予定を下回った場合、各年齢層における年金財政上の損益は常に予定より不足の方向になる。

(B) ある年度において昇給の実績が各年齢一律に予定を下回った場合、各年齢層における年金財政上の損益は予定より剰余の方向になるとは限らず不足の方向になることもある。

(C) ある年度において新規に加入する被保険者数の実績が予定を上回った場合（新規加入年齢は予定どおり）、年金財政上の損益は常に予定より不足の方向になる。

(D) 被保険者の傾向的な減少がある場合には、予定された脱退によるものであっても、年金財政上恒常的な剰余要因となる。

(E) 財政運営上不足が生じた場合、保険料率の洗替えで当該不足分による積立水準の低下を解消していくことができる。

9．定常状態にあった年金制度の第 n 年度末において剰余金 M が発生した。このため、第 n 年度末時点で制度設計を次のように見直すこととした。

・第 $n+1$ 年度以降の給付を毎年 ΔB ずつ引き上げる（給付改善）ことを t 回繰り返し、第 $n+t$ 年度以降の給付水準を当初の給付より $\Delta B \cdot t$ だけ増額する。

・給付改善の原資は剰余金 M を用い、第 $n+1$ 年度以降の保険料は従前と同水準に据え置く。

給付改善を剰余金 M の範囲で実施する場合、上のような給付改善を行うことが出来る回数 t として正しいものの記号を選べ。なお、予定利率を i とし、

給付は年 1 回期末払いとする。（記号$\left[x\right]$は、xを超えない最大の整数を表す。）

(A) $\left[\dfrac{\log\dfrac{i^2M}{(1+i)\Delta B}}{\log\dfrac{1}{1+i}}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\log\dfrac{iM}{(1+i)\Delta B}}{\log\dfrac{1}{1+i}}\right]$ (C) $\left[\dfrac{\log(1-\dfrac{iM}{(1+i)\Delta B})}{\log\dfrac{1}{1+i}}\right]$

(D) $\left[\dfrac{\log(1-\dfrac{i^2M}{(1+i)^2\Delta B})}{\log\dfrac{1}{1+i}}\right]$ (E) $\left[\dfrac{\log(1-\dfrac{i^2M}{(1+i)\Delta B})}{\log\dfrac{1}{1+i}}\right]$

10. 定常状態にある集団が以下の 2 種類の年金制度を検討している。

○制度内容

<table>
<tr><td>加入時期</td><td colspan="2">年 1 回期初加入</td></tr>
<tr><td rowspan="2">給付内容</td><td>制度 A</td><td>制度 B</td></tr>
<tr><td>「脱退時給与×$\alpha(x)$」の年金年額を、脱退時から年 1 回期初払いで生死に関わらずn年間支給する

$\alpha(x)$：脱退時の期初年齢xに応じた支給率</td><td>「加入全期間における毎期初の給与の平均額（定年到達時は定年時の給与も含めた平均とする。）×$\beta(x)$」の年金年額を、脱退時から年 1 回期初払いで生死に関わらずn年間支給する

$\beta(x)$：脱退時の期初年齢xに応じた支給率</td></tr>
</table>

昇給時期	年 1 回期初昇給
脱退時期	年 1 回期末脱退（死亡による脱退は発生しない） 定年退職は定年到達時の期初に脱退
保険料の拠出時期	年 1 回期初拠出（昇給後給与合計×保険料率）
財政方式	加入年齢方式（加入年齢 x_e 歳）

解答にあたり必要であれば以下の記号および計算基数を用いよ。

x_e ：加入年齢、x_r ：定年年齢、i ：予定利率、L_x ：x 歳の被保険者数、

B_x ：x 歳の 1 人あたり給与、b_x ：給与指数、

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ：利率 i の期初払 n 年確定年金現価率

なお、この問題においては、死亡は一切考慮しないこととし、計算 D_x、C_x は生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。また、b_x は x に関して単調増加であるものとする。

(1)　制度 A、制度 B におけるそれぞれの標準保険料率 $P_{x_e}^A$、$P_{x_e}^B$ および制度全体の被保険者の責任準備金 V^A、V^B を求めよ。

(2)　制度 A、制度 B それぞれについて、ある昇給時期に一律 γ のベースアップがあった場合に発生する後発過去勤務債務を求めよ。なお、ここでいうベースアップとは、過去の給与には影響せず、将来にわたっての給与が従前の $(1+\gamma)$ 倍 $(\gamma > 0)$ となるものとする。

(3)　被保険者がいつ脱退しても制度 A、制度 B の年金年額が等しくなるように支給率 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ を設定した場合、(2) で求めた後発過去勤務債務の大小関係を示せ。ただし、結論を導くまでの過程についても解答用紙に記載すること。

第７章　一般的な給付制度とその財政

前章では，Trowbridge モデルにおける財政運営について述べたが，この章ではより一般化して，給与比例で定年前の給付がなされる年金制度の財政について述べることとする。

前章でわかったように，財政運営上，予定と実績が異なったときに結果として将来保険料を引き上げなければならないか否か（不足か剰余か），およびその程度は，その年齢層における責任準備金の大きさに依存している。

たとえば，表６－２において被保険者に関する損益をみると，１年間の予定と実績の差異によって生ずる損益は，

$$
\begin{aligned}
&(l'_{x+1}/l_{x+1}-1)\times(PG_{x+1}-S_{x+1})\\
&=l_{x+1}\times\underline{\{(-(l'_{x+1}/l_{x+1}-1)\times V_{x+1})\}} \qquad (7-1)
\end{aligned}
$$

（ここに，$V_x=(S_x-PG_x)/l_x$ で x 歳の一人あたりの責任準備金を示している。）である。実務では，予定と実績の乖離である

$$l'_{x+1}/l_{x+1}-1$$

の部分が同様な値を示し，他の条件が異なる２つのケース，例えば，

① 異なった群団（男子と女子）間（男子，女子別々に脱退残存表を作成し，保険料等も別々にする。）

② 異なった年齢間

で，一人あたりの損益（(７－１）の下線部分）の出方の異なる理由として，この V_x の大きさをもって説明することが可能である。①のケースでは，もし x 歳以降の脱退率が男子のほうが女子よりも低いために V_x が大きければ，同じ予定と実績の乖離によってもたらされる損益への影響は男子の方が大きくなる。②のケースでは，年齢が高くなるほど給付までの期間が短くなることによって，予定利率による割り戻しが小さくなり，また年金開始までに残存する可能性が高くな

ることにより一人あたりの責任準備金が大きくなるので一人あたりの損益の絶対値は次第に大きくなる。

①のケースと②のケースの組合せでは，さらに次の主張が可能である。男子と女子の比較で，女子の方が脱退率水準が高ければ，年齢が 1 歳上がることによる年金開始まで残存する可能性の増大の速さはより大きいはずである。従って男女間で同一年齢で V_x を比較するのでなく，年齢によるその上昇度合いを見た場合に，女子の方が大きいであろうことが予想される。

このことは次のことにつながる。年金制度の年齢構成が，一定期間の内に大幅な変化を遂げた場合に，年齢による V_x の大きさの変化度合いが小さいほど制度全体に及ぼす財政的な影響度が小さい，すなわち財政的な基盤が強いものと考えられる。

当章では，より一般的な制度を扱うことにより年齢による V_x の変化事由を，利率・脱退率以外の要素にも眼を向けて，離散的なモデルにより「ファクラーの公式」を，最後に連続モデルの導入により「ティーレの公式」を導いて分析することにする。

1. 離散的なモデルとファクラーの公式

掛金・給付・利息の付与を 1 年単位で考える離散的な年金制度のモデルの給与 1 あたりの責任準備金を求めてみる。

今，モデルとして脱退時に最終給与に比例する給付を支払い，保険料もまた給与比例で積み立てる制度を考える。すなわち，Trowbridge モデルに給与の要素と中途脱退に対する給付を付け加えるものとする。

一定年齢（例えば最小加入年齢）の給与を 1 とし，各年齢の給与がこの給与の b_y 倍（y は年齢）になるとした場合，x 歳で加入した被保険者が t 年経過した群団の責任準備金は，

$$b_{x+t}\, l_{x+t}\ {}_tV_x = \sum_{k=t}^{x_r-1-x} v^{k+1/2-t} b_{x+k}\, d_{x+k}\, \alpha_{k+1/2} - \sum_{k=t}^{x_r-1-x} v^{k-t}\, b_{x+k}\, l_{x+k}\, P_x$$

（７－２）

である。

ここに,

b_{x+t}　：給与指数

${}_tV_x$　：$(x+t)$ 歳における給与１に対する責任準備金

d_{x+k}　：$(x+k)$ 歳における脱退者数

$\alpha_{k+1/2}$　：k 年度に支払われる給付率（その時点の給与１に対する給付額で,
年央の給付を想定)。

P_x　：保険料率（給与１に対して）

とする。

（７－２）式より,

$${}_tV_x = \left(\sum_{k=t}^{x_r-1-x} v^{k+1/2-t} b_{x+k}\, d_{x+k}\, \alpha_{k+1/2} - \sum_{k=t}^{x_r-1-x} v^{k-t}\, b_{x+k}\, l_{x+k}\, P_x \right) / b_{x+t}\, l_{x+t}$$

（７－３）

となるが，この式の t に $t+1$ を代入すると,

$${}_{t+1}V_x = \left(\sum_{k=t+1}^{x_r-1-x} v^{k+1/2-t-1} b_{x+k}\, d_{x+k}\, \alpha_{k+1/2} - \sum_{k=t+1}^{x_r-1-x} v^{k-t-1} b_{x+k}\, l_{x+k}\, P_x \right) / b_{x+t+1}\, l_{x+t+1} \quad （７－４）$$

（７－４）を,（７－３）を用いて整理すると,

$$\begin{aligned} {}_{t+1}V_x &= (b_{x+t} / b_{x+t+1})(l_{x+t} / l_{x+t+1}) \\ &\times \left(\sum_{k=t}^{x_r-1-x} v^{k+1/2-t-1} b_{x+k}\, d_{x+k}\, \alpha_{k+1/2} - v^{1/2-1} b_{x+t}\, d_{x+t}\, \alpha_{t+1/2} \right. \\ &\left. - \sum_{k=t}^{x_r-1-x} v^{k-t-1} b_{x+k}\, l_{x+k}\, P_x + v^{-1} b_{x+t}\, l_{x+t}\, P_x \right) / b_{x+t}\, l_{x+t} \end{aligned}$$

$$=(b_{x+t}/b_{x+t+1})(l_{x+t}/l_{x+t+1})$$

$$\times\left[\left\{(1+i)\sum_{k=t}^{x_r-1-x}v^{k+1/2-t}b_{x+k}\,d_{x+k}\,\alpha_{x+1/2}-(1+i)\sum_{k=t}^{x_r-1-x}v^{k-t}b_{x+k}\,l_{x+k}\,P_x\right\}/b_{x+t}\,l_{x+t}\right.$$

$$\left.+(1+i)\ P_x-(1+i)^{1/2}(d_{x+t}/l_{x+t})\,\alpha_{t+1/2}\right]$$

$$=\underbrace{(b_{x+t}/b_{x+t+1})}_{①}\ \underbrace{(l_{x+t}/l_{x+t+1})}_{②}$$

$$\times\{\underbrace{(1+i)}_{③}({}_tV_x\underbrace{+P_x}_{④})-\underbrace{(1+i)^{1/2}(d_{x+t}/l_{x+t})\,\alpha_{t+1/2}}_{⑤}\} \qquad (7-5)$$

ここで，まず①の部分は，単位給与当たりの責任準備金が昇給によって相対的に小さくなること，②の部分は逆に脱退によって相対的に大きくなることを示している。また③は責任準備金の評価時点が1年進むことによって利息による割戻しが少なくなることによる増加，④は保険料の払込によって収入現価が小さくなることによる増加，⑤は給付の支払いによって給付現価が小さくなることによる減少を示している。

（7－5）はファクラーの公式と呼ばれ、より一般的な生命保険の数理でも同様の関係式が成立している。ファクラーの公式の意義については次節にて導く連続的なモデルによるティーレの公式の意義と同様であり，また連続的モデルによるイメージがより簡明であるので，そこで述べることにする。

2.　連続的なモデルとティーレの公式

次に，脱退・昇給・保険料の払込・給付の支払いが連続的（数学的に厳密に言えば微分可能な時間の関数の値になる）に起こる場合を考える。

単位給与あたりの責任準備金は次の式で表される。

$${}_tV_x = \int_t^{\omega-x} S_\tau^{(x)} exp\left(-\delta(\tau-t)\right)d\tau - \int_t^{\omega-x} P_\tau B_\tau^{(x)} exp\left(-\delta(\tau-t)\right)d\tau$$

（７－６）

ここに，

$S_\tau^{(x)}\,d\tau$　：時点 τ において微小期間 $d\tau$ に脱退する者の給付額

$B_\tau^{(x)}\,d\tau$　：時点 τ において微小期間 $d\tau$ に収入される給与額

P_τ　：時点 τ における保険料率

δ　：利力

ω　：最終年齢

さらに， $S_\tau^{(x)}$， $B_\tau^{(x)}$ に関しては，

$$S_\tau^{(x)}\,d\tau = s_\tau^{(x)}\{(-dl_{x+\tau})/l_{x+t}\}\left(b_{x+\tau}/b_{x+t}\right)$$

$$= s_\tau^{(x)}\left(l_{x+\tau}\,b_{x+\tau}\right)/\left(l_{x+t}\,b_{x+t}\right)\cdot\mu_{x+\tau}\,d\tau \qquad （７－７）$$

$$B_\tau^{(x)} = \left(l_{x+\tau}\,b_{x+\tau}\right)/\left(l_{x+t}\,b_{x+t}\right) \qquad （７－８）$$

ここで，

$s_\tau^{(x)}$　： x 歳加入，τ 年で脱退した者の，脱退時の給与１に対する給付額

b_x　：昇給指数

これらを代入して整理すると，

$${}_tV_x = exp(\delta t)/(l_{x+t}\,b_{x+t})\cdot\int_t^{\omega-x}(s_\tau^{(x)}\mu_{x+\tau} - P_\tau)\,l_{x+\tau}\,b_{x+\tau}\,exp(-\delta\tau)\,d\tau$$

（７－９）

この式を t で微分すると，

$$d\ {}_tV_x/dt$$
$$= \delta\ {}_tV_x + \left[(d/dt)\{1/(l_{x+t}\,b_{x+t})\}\right]\ l_{x+t}\,b_{x+t}\ {}_tV_x$$
$$+\{exp(\delta t)/(l_{x+t}\,b_{x+t})\}(-s_t^{(x)}\mu_{x+t} + P_t)\,l_{x+t}\,b_{x+t}\,exp(-\delta t) \qquad （７－10）$$

ここで，

$$(d/dt)\{1/(l_{x+t}\,b_{x+t})\}$$

$$=(1/b_{x+t})(-1/l_{x+t}{}^2)(dl_{x+t}/dt)+(1/l_{x+t})(-1/b_{x+t}{}^2)(db_{x+t}/dt)$$

$$=\{1/(l_{x+t}\,b_{x+t})\}\{d(-\log l_{x+t})/dt-d(\log b_{x+t})/dt\} \qquad (7-11)$$

ここで，$d(-\log l_{x+t})/dt=\mu_{x+t}$（脱退力）である。また，

$$d(\log b_{x+t})/dt = db_{x+t}/(b_{x+t}\cdot dt) = \lambda_{x+t} \qquad (7-12)$$

とし，極小時間あたりの昇給率として，「昇給力」なる概念を導入する。

これらを使用して，（7 −11）は，

$$\{1/(l_{x+t}\,b_{x+t})\}(\mu_{x+t}-\lambda_{x+t}) \qquad (7-13)$$

となり，結局，（7 −10）は，

$$P_t+(\delta+\mu_{x+t}-\lambda_{x+t})\,{}_tV_x-s_t^{(x)}\mu_{x+t} \qquad (7-14)$$

となる。

ここで（7 −14）の構成要素を見てみると，

P_t ：保険料の払込によって収入現価が小さくなることによる増加

$\delta\,{}_tV_x$ ：責任準備金の評価時点が進むことによって，利息による割戻しが少なくなることによる増加

$\mu_{x+t}\,{}_tV_x$ ：脱退による相対的な増加

$-\lambda_{x+t}\,{}_tV_x$ ：昇給による相対的な減少

$-s_t^{(x)}\mu_{x+t}$ ：支払いによる減少

を意味している。

（7 −14）をティーレの公式という。

さて，ここでティーレの公式の，考えられる一つの意義について述べる。

年金財政上，被保険者・受給権者等の数の予定と実績の差異によって制度全体の責任準備金と積立金のバランスが崩れ，剰余金・不足金が生じ，またこれは差異の生ずる年齢層によって異なってくることは Trowbridge モデルの場合についてすでに前章にて述べたが，ここで取り上げた連続的な一般的なモデルの場合で

改めて考察してみる。

今，毎微小時間 Δt においてその時間のはじめに給付と保険料の払込の両方が行われるものとする。

時点 t から微小時間 Δt における加入年齢 x 歳の群団の損益を考える。

責任準備金の増加は，

$$ {}_{t+\Delta t}V_x\, l_{x+t+\Delta t}\, b_{x+t+\Delta t} - {}_tV_x\, l_{x+t}\, b_{x+t} \qquad (7-15) $$

であり，一方積立金の増加は，

$$ (P_t\, l_{x+t}\, b_{x+t}\Delta t - S_t^{(x)}\, l_{x+t}\, b_{x+t}\Delta t)\, exp(\delta\Delta t) \qquad (7-16) $$

である。

ここで，実績と予定との相異は，（7 −15）の第一項および（7 −16）の第二項に関係する。実績の方を ′ を用いて表すと，（7 −15）は，

$$ {}_{t+\Delta t}V_x\, l'_{x+t+\Delta t}\, b'_{x+t+\Delta t} - {}_{t+\Delta t}V_x\, l_{x+t+\Delta t}\, b_{x+t+\Delta t} $$

$$ = {}_{t+\Delta t}V_x\,(l'_{x+t+\Delta t}\, b'_{x+t+\Delta t} - l_{x+t+\Delta t}\, b_{x+t+\Delta t}) $$

$$ = {}_{t+\Delta t}V_x\, l'_{x+t+\Delta t}\,(b'_{x+t+\Delta t} - b_{x+t+\Delta t}) $$

$$ + {}_{t+\Delta t}V_x\,(l'_{x+t+\Delta t} - l_{x+t+\Delta t})\, b_{x+t+\Delta t} $$

$$ = {}_{t+\Delta t}V_x\, l'_{x+t+\Delta t}\,(b'_{x+t+\Delta t} - b_{x+t+\Delta t}) $$

$$ - {}_{t+\Delta t}V_x\,(\mu'_{x+t} - \mu_{x+t})\, l_{x+t}\, b_{x+t+\Delta t}\Delta t + o(\Delta t) $$

$$ = {}_{t+\Delta t}V_x\, l'_{x+t+\Delta t}\,(b'_{x+t+\Delta t} - b_{x+t+\Delta t}) $$

$$ -({}_tV_x + (d\ {}_tV_x / dt)\Delta t + o(\Delta t))(\mu'_{x+t} - \mu_{x+t}) $$

$$ \times\ l_{x+t}\,(b_{x+t} + \lambda_{x+t}\, b_{x+t}\Delta t + o(\Delta t))\Delta t + o(\Delta t) $$

$$ = {}_{t+\Delta t}V_x\, l'_{x+t+\Delta t}\,(b'_{x+t+\Delta t} - b_{x+t+\Delta t}) $$

$$ - {}_tV_x\,(\mu'_{x+t} - \mu_{x+t})\, l_{x+t}\, b_{x+t}\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad (7-17) $$

であり，（7 −16）について実績と予定の差を計算すると，

$$ -(S_t'^{(x)}\Delta t - S_t^{(x)}\Delta t)\ l_{x+t}\, b_{x+t}\, exp(\delta\Delta t) $$

$$ = - s_t^{(x)}(\mu'_{x+t} - \mu_{x+t})\, l_{x+t}\, b_{x+t}\, exp(\delta\Delta t)\Delta t $$

$$= -s_t^{(x)}(\mu'_{x+t} - \mu_{x+t})\, l_{x+t}\, b_{x+t}\, \Delta t + o(\Delta t) \qquad (7-18)$$

となる。

実績と予定が異なることによる損益は，（7 －18）から（7 －17）を差し引いて次のようになる。

$$({}_tV_x - s_t^{(x)})(\mu'_{x+t} - \mu_{x+t})\, l_{x+t}\, b_{x+t}\, \Delta t$$

$$-{}_{t+\Delta t}V_x\, l'_{x+t+\Delta t}(b'_{x+t+\Delta t} - b_{x+t+\Delta t}) + o(\Delta t) \qquad (7-19)$$

今，人数変化の実績と予定の乖離に対する感度を見る場合は上式の

$${}_tV_x - s_t^{(x)} \qquad (7-20)$$

を見ればよいことになる。さらに，この感度が，年齢（$x+t$）の変化によってどのように変化するかは（7 －20）を t によって微分すれば様子が把めよう。

これを実行し，ティーレの公式を当てはめると，

$$d({}_tV_x - s_t^{(x)})/dt = d\,{}_tV_x/dt - ds_t^{(x)}/dt$$

$$= P_t + (\delta + \mu_{x+t} - \lambda_{x+t})\,{}_tV_x - s_t^{(x)}\mu_{x+t} - ds_t^{(x)}/dt \qquad (7-21)$$

となる。

つまり，給付率の年数による変化度合いが一人あたりの責任準備金率と打ち消し合うような動きをすれば，どの年齢層における人数変化の予定と実績の同様な乖離に対する感度はあまりかわらないと言えるが，これを調べるためには，d_tV_x $/d_t$ の構成要素である，

P_t

δ_tV_x

$\mu_{x+t}\ {}_tV_x$

$-\lambda_{x+t}\ {}_tV_x$

$-s_t^{(x)}\quad \mu_{x+t}$

の合計と $ds_t^{(x)}/dt$ の大小関係を調べればよいことになる。たとえば，P_t 以外の要素が小さくて無視できるような場合は，P_t と $ds_t^{(x)}/dt$ の大小を調べればよい。

第７章　練　習　問　題

１．当章第２節であったモデルで，

$s_\tau^{(x)} = k$　　　　（ケース１）

$s_\tau^{(x)} = m\, exp(-\delta(\omega - x - \tau))$　　　　（ケース２）

の２つのケースを考える。ここで，k，m は正の実数とする。

ケース１は，加入していた期間にかかわらず，退職時の給与によって退職時の給付額がきまる制度，ケース２は，加入していた期間にかかわらず，退職時の給与によって，給付額の ω 時点における原資がきまる制度である。

つぎの問に答えよ。

⑴　財政方式として加入年齢方式（特定年齢方式）を採用するとして，ケース１とケース２の標準保険料率が等しくなるための条件は，

$$m = k \frac{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau} exp(\delta(\omega - x_e - \tau))\, d\tau}{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, d\tau}$$

であることを示せ。

⑵　⑴の条件のもとで，加入年齢 x_e 歳時点における，脱退力 μ_x の変化に対する損益の感度に関して，ケース１とケース２の大小関係を論ぜよ。

２．定常状態にある企業の年金制度を考える。

○制度内容

加入時期	年１回期初加入
給付内容	「脱退時の給与×α」の年金年額を、脱退時から年１

	回期初払で生死に関わらずn年間支給する。
昇給時期	年1回期初昇給
脱退時期	年1回期末脱退（死亡による脱退は発生しない） 定年退職は定年到達時の期初に脱退
保険料の拠出時期	年1回期初拠出

解答にあたり必要であれば以下の記号をおよび計算基数を用いよ。

x_e：加入年齢、x_r：定年年齢、i：予定利率、$v=\dfrac{1}{1+i}$：割引率

l_x：脱退残存表におけるx歳の生存者数、d_x：脱退残存表におけるx歳の脱退者数

b_x：給与指数、$\ddot{a}_{\overline{n}|}$：利率iの期初払n年確定年金現価率

なお、この問題においては、死亡は一切考慮しないこととし、計算基数D_x、C_xは生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。また、x_e歳の給与を1とし、x歳の給与のb_x倍となると考えること。

(1)　現在x歳（x_e歳加入、$x_e \le x \le x_r-1$、以下同じ）の給与1あたりの給付現価S_xを求めよ。

(2)　（1）で求めた給付現価S_xにおいて、将来y歳（$x \le y \le x_r$）で脱退したときの給付を、x_e歳からx歳までの加入期間（以下、「過去加入期間」という）に相当する給付と、x歳以降脱退時までの加入期間（以下、「将来加入期間」という）に相当する給付に、次のように分ける。

過去加入期間に相当する給付

＝脱退時の給付×（x_e歳からx歳までの加入期間÷x_e歳から脱退時までの加入期間）

将来加入期間に相当する給付

＝脱退時の給付×（x歳から脱退時までの加入期間÷x_e歳から脱退時までの加入期間）

このとき、x歳の給与1あたりの過去加入期間に相当する給付現価5を、将来加入期間に相当する給付現価を${}^{F}S_x$とすると、$S_x={}^{P}S_x+{}^{F}S_x$となるが、${}^{P}S_x$、${}^{F}S_x$それぞれを求めよ。

(3)　現在x歳の給与1あたりの標準保険料をP_xとし、これをもとに算出した現在x歳の給与1あたりの責任準備金が${}^{P}S_x$に等しくなるとする。このとき、${}^{P}S_x$、${}^{P}S_{x+1}$、P_xの間にファクラーの公式が成り立つが、この式を記せ（答えのみでよい。ただし、${}^{P}S_{x+1}=\cdots$とすること）。

(4)　P_xを、${}^{P}S_x$を用いずに表せ。さらに、${}^{P}S_x=f(x)\times P_x$（ただし、$f(x)$はxの一次式）の形で表すことができるが、この$f(x)$を求めよ。

3．脱退時に最終給与に比例する給付を支払い、保険料もまた給与比例で積み立てる制度を考える。x歳で加入し、t年経過した被保険者における責任準備金と、x歳で加入し、$t+1$年経過した被保険者における責任準備金の関係を表しているものとして、最も適切なものを選択肢の中から1つ選びなさい。なお、各記号の意味は以下のとおりである。

b_{x+t}：x歳で加入し、t年経過した被保険者における給与指数

${}_tV_x$：x歳で加入し、t年経過した被保険者における給与1に対する責任準備金

l_{x+t}：x歳で加入した被保険者のt年経過した時点における残存者数

d_{x+t}：x歳で加入した被保険者のt年経過した時点から1年間における脱退者数

$\alpha_{t+\frac{1}{2}}$ ： t 年経過した時点から 1 年間の脱退者に支払う給与 1 に対する給付

（年央の給付を想定）

P_x ： x 歳で加入した被保険者における給与 1 に対する標準保険料（年初の払い込みを想定）

(A) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t+1}}{b_{x+t}}\right)\left(\frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) - (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(B) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t+1}}{b_{x+t}}\right)\left(\frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) + (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(C) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t+1}}{b_{x+t}}\right)\left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t+1}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) - (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(D) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t+1}}{b_{x+t}}\right)\left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t+1}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) + (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(E) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t}}{b_{x+t+1}}\right)\left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t+1}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) - (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(F) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t}}{b_{x+t+1}}\right)\left(\frac{l_{x+t}}{l_{x+t+1}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) + (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(G) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t}}{b_{x+t+1}}\right)\left(\frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) - (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

(H) $${}_{t+1}V_x = \left(\frac{b_{x+t}}{b_{x+t+1}}\right)\left(\frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}}\right) \times \left\{(1+i)({}_tV_x + P_x) + (1+i)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d_{x+t}}{l_{x+t}}\right)\alpha_{t+\frac{1}{2}}\right\}$$

4．次の〈1〉～〈15〉の空欄に当てはまる最も適切なものを算式群からそれぞれ 1 つ選びなさい。なお、解答にあたり同じ記号を算式群から重複して選んでも

良い。

脱退・昇給・保険料の払込・給付の支払いが連続的に起こる年金制度を考える。この年金制度は定常状態にあり、被保険者はいずれも x_e 歳で加入し、定年年齢は x_r 歳とする。

なお、この年金制度における給付は、加入期間が $\dfrac{n}{2}$ 年以上（$n = x_r - x_e$）で脱退した場合に行うものとし、脱退時給与を s 倍した額（s は加入期間にかかわらず定率とする。）を原資に、脱退時から確定年金を支給する。

また、財政方式は加入年齢方式（特定年齢 x_e 歳）とする。

ここで、

δ ：予定利率による利力

μ_x ：年齢 x における脱退力

β_x ：年齢 x における昇給指数

λ_x ：年齢 x における昇給力　$(\lambda_x = \dfrac{d(\log \beta_x)}{dx})$

n ：加入年齢から定年年齢までの年数（$n = x_r - x_e$）

とする。

今、加入年齢から定年年齢まで、脱退力及び昇給力が年齢によらず一定であるものとする（それぞれ μ 及び λ と定義し、$\mu > \lambda > \delta$ であるものとする）と、保険料率 ${}^E P$ は、次のように表せる。

$$ {}^E P = \frac{\int_{<1>}^{n} (<2> \cdot A^{\tau}) d\tau + <3>}{\int_0^n A^{\tau} d\tau} $$

なお、ここで、$A=<4>$とする。

式を変形すると、$^{E}P=\dfrac{<5>+<6>}{1-<7>}$と表すことができる。

また、加入期間t年の被保険者にかかる単位給与当たりの責任準備金$_tV_x$は、

$t\geq\dfrac{n}{2}$の場合、上記のA及び^{E}Pを用いて次のように表せる。

$$_tV_x=\frac{1}{A^{<8>}}\left\{\int_t^n\left\{(<9>-{}^{E}P)\cdot A^{\tau}\right\}d\tau+<10>\right\}$$

式を変形すると、

$$_tV_x=\frac{1}{<11>}\left\{(<9>-{}^{E}P)+\frac{1}{1-<12>}\{<13>+<14>\}A^{<15>}\right\}$$

よって、$(<13>+<14>)<0$ の場合、$_tV_{x_e}$は$t\geq\dfrac{n}{2}$で単調減少となる。

算式群

(A) 0 (B) n (C) $\dfrac{n}{2}$ (D) t (E) $n-t$ (F) $\dfrac{n}{2}-t$ (G) δ (H) $\delta+\mu-\lambda$

(I) $(-\dfrac{1}{\delta+\mu-\lambda})$ (J) $\left\{-\dfrac{1}{\mu-\lambda}\exp(-\delta)\right\}$ (K) $\left\{-\dfrac{1}{\delta}\exp(-(\mu-\lambda))\right\}$

(L) $\exp(-(\delta+\mu-\lambda)$ (M) s (N) $s\mu$ (O) $\{-s(\lambda-\delta)\}$ (P) $s(\delta+\mu-\lambda)$

(Q) A^n (R) sA^n (S) $s\mu A^n$ (T) $\{-s(\lambda-\delta)A^n\}$ (U) $s(\delta+\mu-\lambda)A^n$ (V) $A^{\frac{n}{2}}$ (W) $sA^{\frac{n}{2}}$ (X) $s\mu A^{\frac{n}{2}}$ (Y) $\left\{-s(\lambda-\delta)A^{\frac{n}{2}}\right\}$ (Z) $s(\delta+\mu-\lambda)A^{\frac{n}{2}}$

第Ⅱ編　実　務　編

企業年金には，確定給付企業年金制度および厚生年金基金制度があり，制度の設計については，企業毎に様々である。それに加えて各企業の年齢構成，給与構成等も様々であり，第Ⅰ編で仮定してきたような定常状態だけの論議では成り立たないのが通常である。

例えば，定年に到達した時のみ受給要件が満たされる制度であった場合，ある者が定年まで在職するか，定年前で退職するかにより，給付の発生の有無に直結するため，予定している見込み（計算基礎率）との乖離が，収支バランスに与える影響は大きく，財政運営上，保険料に大きな影響を及ぼしやすい制度であるということは，実務に携わっているものにとってはよく経験することである。

そこで，この編では，企業年金に係る実際の数理計算業務に着目し，まずは，企業年金制度の仕組み，制度の種類について簡単に述べ，その後でそれぞれの制度における保険料計算について触れながら，その制度の特徴について述べていきたい。

更には，上記の例でも述べたような，当初予定していた見込み（計算基礎率）との乖離が，年金財政の運営上，どのようにチェックが行われ，財政運営上の健全性をどう維持していくかについて，その要となる財政決算，財政再計算の仕組みに触れながら述べていく。

第１章　日本の企業年金制度について

1.　企業年金制度の種類

日本の企業年金の中核をなす制度は，昭和37年４月の法人税法・所得税法の改正によって創設された適格退職年金と，昭和40年６月の厚生年金保険法の改正によって昭和41年10月より実施された厚生年金基金であった。ところが，バブル崩壊後，経済の低成長期に入ると，運用環境が悪化し，企業年金の財政状況は徐々に悪化していった。そのような経済環境の変化の中，従来の企業年金だけでは，健全な財政運営が行えない，十分な受給権保護が図られない等の問題が顕在化し，それらを解決するため，平成13年10月に確定拠出年金法，平成14年4月に確定給付企業年金法が相次いで施行され，新たな企業年金として，確定拠出年金と確定給付企業年金が創設された。なお，適格退職年金は平成24年3月に廃止された。

厚生年金基金は国の厚生年金の一部を代行するとともに，企業（業界）独自に年金給付を上積みして，より手厚い年金を給付することを目的として，厚生労働大臣の認可を得て実施する制度をいう。

厚生年金基金は給付区分として基本部分と加算部分に分けることができる。

基本部分は国の厚生年金の老齢厚生年金部分（但しスライド・再評価部分を除く）を代行し，加算部分は個々の企業（業界）の独自の設計となっているため，この部分は適格退職年金と同様，様々な設計が可能となっている（図１－１参照)。

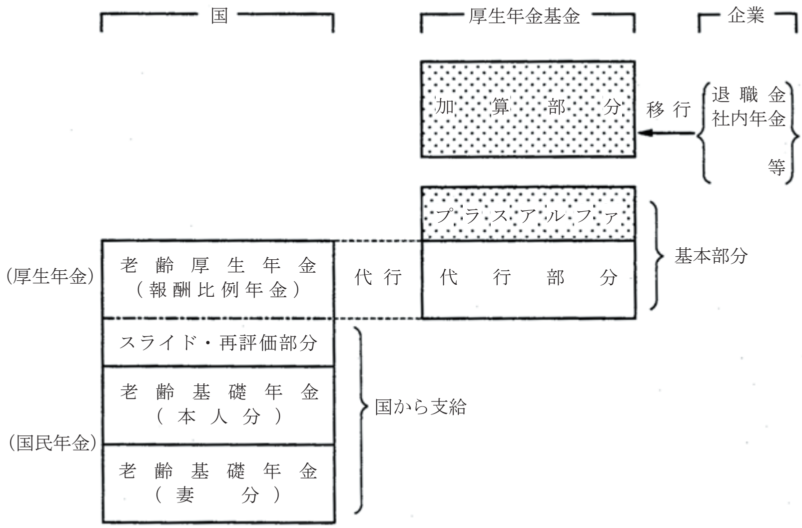
確定給付企業年金は厚生労働大臣の認可（承認）を得て実施する企業年金制度であり，確定給付企業年金の実施主体として母体企業とは別に企業年金基金を設立する基金型と，母体企業が実施主体となる規約型の2種類がある。年金制度の

給付設計は，適格退職年金や厚生年金基金の加算部分と同様，企業毎に制度設計は様々である。

確定拠出年金は，上記の3制度とは異なり，年金制度に拠出する掛金が決まっている制度であり，拠出した掛金およびその運用実績に応じて事後的に給付が決まる確定拠出型の企業年金制度である。本書では，確定給付型の企業年金制度に限定しての説明となっているため，ここでは紹介程度に留める。

また，いずれの企業年金制度も契約相手が信託銀行や生命保険会社等となっており，いわば企業から見れば外部（契約相手先）に直接あるいは間接的に拠出を行い，その拠出金により積み上がった資産を取崩しながら従業員等への給付を行っていく年金制度ともいえる。

（図１－１）厚生年金基金と他の制度との関係

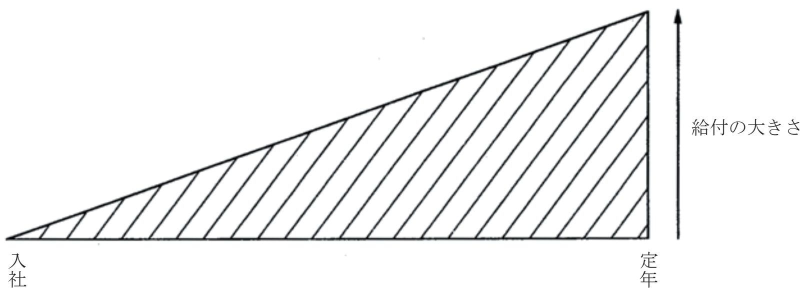


・加算部分は，他の年金制度や一時金制度とは別に独自に給付を設計すること，また，上図のとおり，企業内の退職金を原資として基金に持ち込み，給付の設計を行なうことも可能である。

2.　確定給付型の企業年金における給付設計

確定給付型の企業年金の代表的な制度設計のパターンを図で示すと次のとおりとなる。

①　定年退職及び中途退職について幅広く給付を行なう設計

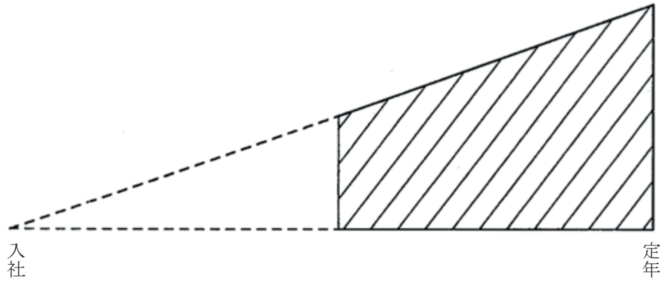


・厚生年金基金・基本部分は，加入期間が 1 ヶ月以上あれば年金給付が行なわれるため，この設計イメージとなっている。

・勤続（加入）期間とともに給付額が増加していくように設計する。

・若年退職については，一時金給付を行なう設計が一般的である。（確定給付企業年金や厚生年金基金・加算部分は，加入期間 3 年以上の脱退に対しては，必ず給付（一時金）を行なうこととされており，この意味では，上記設計イメージとなっている。）

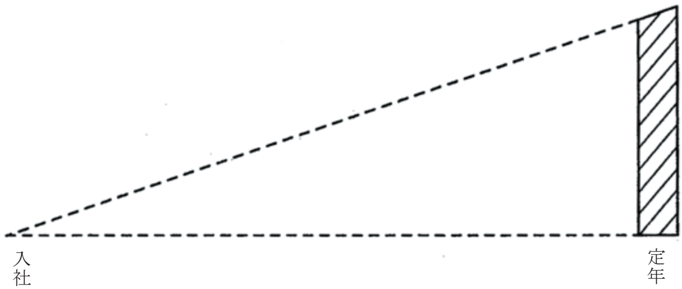
②　定年退職及び長期勤続退職について給付を行なう設計



・①に対して，例えば加入期間 20 年以上のみを受給範囲としている設計イ

メージである。

③　定年退職のみについて給付を行なう設計



・定年に到達するか否かで受給資格の有無が決定するため，計算基礎率（特に予定脱退率）の変動により，保険料率（額）が変動しやすい設計といえる。

ところで，実際に給付額を算定する時は，基準給与に給付率を乗じて算定する方法と，給付額が，退職時の勤続期間あるいは年齢によって定額で決定する方法がある。一方，保険料についても同様に，基準給与に保険料率を乗じて算定する方法と，一人当り一定額で決定する方法がある。

一般に給付額と保険料の算定方法は，一致させており，給与を使用する制度を給与比例制，定額で決定する制度を定額制といっている。

給与比例制……
- 保険料＝基準給与×保険料率
- 給付額＝基準給与×給付率

定額制…………
- 保険料……一人当り一定額で定まる
- 給付額……（勤続期間等により）一定額で定まる

さらに，上記給与比例制において，給付額算定に使用する給与としては，次のような種類がある。

・最終（退職時）給与……数多くの制度で使用されている。

・全期間平均給与…………厚生年金基金・基本部分等で使用されている。

・退職時前一定期間の平均給与

・その他

（参考）厚生年金基金・基本部分の給付額算定式

給付額＝（平成15年3月までの加入員期間の平均標準給与月額）×（総報酬制導入前の年金支給率）×（平成15年3月までの加入員期間月数）

＋（平成15年4月以降の加入員期間の平均標準給与額（賞与込み））×（総報酬制導入後の年金支給率）×（平成15年4月以降の加入員期間月数）

総報酬制導入前の年金支給率……老齢厚生年金の年金支給率である生年月日に応じた $\frac{10}{1000}$ ～ $\frac{7.125}{1000}$ に対し，基金制度においては，$\frac{10.1}{1000}$ ～ $\frac{7.225}{1000}$ 以上で設定する。

総報酬制導入後の年金支給率……総報酬制導入前の年金支給率/1.3

なお，上記の方法の他にも，基準給与やポイント等の累計に給付率を乗じて給付額の算定を行う累計給与制度（ポイント制）や給付額が国債の利回り等に応じて変動するキャッシュバランス制度等もある。

キャッシュバランス制度は確定給付型と確定拠出型の企業年金の中間的な性質を持つ制度であり，「ハイブリッド型制度」の 1 種である。確定給付型の企業年金であれば，給付が先に決まりそのために必要な保険料を徴求する仕組みであるが，キャッシュバランス制度の場合，給付が国債の利回り等に応じて変動して決まる。

キャッシュバランス制度では，各加入者が仮想的な勘定残高（仮想個人別勘定残高という）を持っており，毎月基準給与に持分付与率と呼ばれる仮想的な保険料率を乗じた額が加算されるとともに，仮想個人別勘定残高の累計に対して一定の利息が加算される。(この利息のことを利息付与額と呼ぶ)。

累計給与制　　　　　……　保険料 = 基準給与 × 保険料率
　　　　　　　　　　　　　給付額 = 基準給与の累計額 × 給付率

キャッシュバランス……　保険料 = 基準給与 × 保険料率
　　　　　　　　　　　　　給付額 = 仮想個人別勘定残高 × 給付率

・持分付与額　　　　……　基準給与 × 持分付与率
・利息付与額　　　　……　仮想個人別勘定残高 × 利息付与率
・仮想個人別勘定残高……　持分付与額と利息付与額の合計

給付の額が変動するものの，その変動幅が限定されているので，キャッ

シュバランス制度は確定給付型の企業年金の範疇となる。

また，ここでは持分付与率のことを仮想的な保険料率と呼んでいるが，必ずしも持分付与率は企業年金の保険料率と一致するとは限らず，給付設計等によっては持分付与率は保険料率とは異なることもある。

3.　年金額の計算方法

確定給付企業年金，厚生年金基金・加算部分および適格退職年金の多くは，各企業の退職金を原資としており，退職金の一部もしくは全部を移行するような形で企業年金を実施している。退職金は一時金給付のみの制度であるため，この一時金額を原資として年金化することになる。

例えば，定年まで勤続すると 1,000 万円の退職金が支給される制度を考えてみる。この 1,000 万円を原資として，年 1 回期初払いの 10 年確定年金の年金額を計算してみる。単純に考えると，1 回当りの支払額は 100 万円（ = 1,000 万円 /10 回）となるが，これは単に 1,000 万円の退職金を分割払いしているだけであり，被保険者にとって退職金を年金化するメリットは少ない。実際の企業年金制度においても，単に分割払いを行うのではなく，年金受給中の期間について，幾らかの利息を付与するのが一般的である。この利息の元となる利率のことを，給付利率と呼んでいる。給付利率が 2.5%である場合，1,000 万円の退職金を年金化すると，1 回当りの支払額はいくらになるであろうか。年金受給中の利回りが，2.5%であることから，2.5%の下で退職金と年金の現価が等しくなければならない。今，一回当りの支払額を A とすると，

（一時金額）=（年金の現価）

$$1{,}000\text{万円} = A \times \ddot{a}_{\overline{10}|}$$

$$A = \frac{1{,}000\text{万円}}{\ddot{a}_{\overline{10}|}}$$

となる。このように，確定年金の場合，一時金原資を確定年金現価率で除すと年金額となる。

保証期間付きの終身年金についても，確定年金と同様に，一時金原資を保証期間付きの終身年金現価率で除して年金額を計算することもできる。しかしながら実際の企業年金においては，この方法で年金額を計算する制度はほとんどなく，通常は，保証期間の確定年金現価率で除して年金額を計算する制度である。これは即ち，退職金の移行部分はあくまでも確定年金の部分（保証期間部分）ということであり，終身年金部分を付与するかどうかは各企業の選択による。当該部分を付与する場合，退職金原資に対し追加コストが必要となる。

4. 確定給付型の企業年金の具体例

確定給付型の企業年金のイメージを深めてもらうため，給与比例，定額，ポイント制，キャッシュバランスの 4 種類の制度について，その具体例を以下のとおり示す。

① 給与比例制

- 一時金の受給資格……3 年以上
- 年金の受給資格……20 年以上
- 年金の支給開始年齢……60 歳
- 年金の給付種類……10 年確定年金（年 1 回期初払い）
- 一時金額 ＝ 脱退時の基準給与×勤続年数
- 年金額 ＝ 脱退時の基準給与×勤続年数×据置利率/ $\ddot{a}_{\overline{10|}}$
- 据置利率，給付利率……年 2.0%

脱退時の基準給与が 100,000 円であったとする。勤続 3 年未満での退職であれば，この企業年金制度からの給付はない。一方，勤続 3 年以上であれば，一時金

もしくは年金の支給が行われる。例えば，勤続 10 年での退職であれば，1,000,000 円（100,000 円×10 年）が支給される。また，勤続 20 年での脱退であれば，年金の受給資格が付与され，年金で給付を受けることができる。その場合の年金額は 2,000,000 円×据置利率/$\ddot{a}_{\overline{10}|}$ となる。据置利率とは，脱退時点から 60 歳までの間の利息に相当するものであり，例えば 50 歳での脱退であれば，据置利率は 1.02^{10} となる。

② 定額制

- 一時金の受給資格……3 年以上
- 年金の受給資格……20 年以上
- 年金の支給開始年齢……60 歳
- 年金の給付種類……10 年確定年金（年 1 回期初払い）
- 一時金額 = 勤続年数×100,000
- 年金額 = 勤続年数×100,000×据置利率/$\ddot{a}_{\overline{10}|}$
- 据置利率，給付利率……年 2.0%

①とは一時金額や年金額の計算方法が異なる。①では基準給与に比例する方式であったが，定額制の場合，基準給与に関係なく勤続年数に応じて定額の給付が行われる。

③ ポイント制

- 一時金の受給資格……3 年以上
- 年金の受給資格……20 年以上
- 年金の支給開始年齢……60 歳
- 年金の給付種類……10 年確定年金（年 1 回期初払い）
- 一時金額 = ポイント累計×ポイント単価

・年金額 ＝ ポイント累計×ポイント単価×据置利率/ $\ddot{a}_{\overline{10|}}$

・据置利率，給付利率……年 2.0%

・年間付与ポイント……資格に応じた表 1 のポイント

・ポイント単価……1,000 円

表 1

資格	ポイント
A	500
B	400
C	300
D	200
E	100

資格に応じて年間の付与ポイントが決定され，その累計によって一時金額や年金額が計算される。①の最終給与比例制においては，脱退時の給与によって給付額は計算されるが，ポイント制では加入時から脱退時までのポイント累計によって給付額が計算されるので，成果反映型の退職給付制度であると言われる。

④　キャッシュバランス制度

・一時金の受給資格……3 年以上

・年金の受給資格……20 年以上

・年金の支給開始年齢……60 歳

・年金の給付種類……10 年確定年金（年 1 回期初払い）

・一時金額 ＝ 仮想個人別勘定残高

・年金額 ＝ 仮想個人別勘定残高/ $\ddot{a}_{\overline{10|}}$

・持分付与率……3.2%

・利息付与率（再評価率），給付利率（指標利率）……2.0%

加入中の仮想個人別勘定残高は基準給与×持分付与率の利息付与率（再評価率）による元利合計となる。脱退時に一時金の給付を受けるのであれば，仮想個人別勘定残高が支払われるが，年金受給資格がある場合，60 歳まで仮想個人別勘定残高を繰下げることができる。

この繰下げ率も利息付与率（再評価率）と呼ばれ，上記の例では 2.0%となる。このように，脱退時の仮想個人別勘定残高を 60 歳まで利息付与率（再評価率）で付利した額が年金の支給原資となる。さらに，年金額は支給原資（仮想個人別勘定残高）に給付利率（指標利率）に基づく利息を加えた額を年金化したものである。

第1章　練　習　問　題

1．ある企業はポイント制の年金制度を実施している。標準保険料は年間付与ポイントに標準保険料率を乗じた額（開放型総合保険料方式については、保険料は年間付与ポイントに保険料率を乗じた額）とするとき、加入年齢方式による標準保険料率は 0.1、開放基金方式による標準保険料率は 0.12、開放型総合保険料方式による保険料率は 0.14 となった。また、在職中の被保険者の給与現価は、将来加入が見込まれる被保険者の給与現価の 1.5 倍であった。この企業はある年度において、将来加入する被保険者の見込みを現在の 2 倍とするとともに、将来の年間付与ポイントを 2 倍に引き上げた。（過去期間対応分の給付現価は変動がない。）この年の開放型総合保険料方式による保険料率を求めなさい。（計算結果は小数点以下第 4 位を四捨五入し小数点以下第 3 位まで求めなさい。）なお、将来加入する被保険者の見込みを除き、この制度変更に伴う基礎率等の変更はないものとする。

2．定常状態にある年金制度について考察を行う。

○制度内容

項目	内容
加入時期	年 1 回期初加入
給付内容	「脱退時までの毎期初の給与の α 倍（ただし、$\alpha > 0$ ：定数）に、脱退時までは年利率 j_1 、脱退時以後支給開始年齢までは年利率 j_2 で複利で付利した額の合計額」を原資として、年金支給開始年齢以後は

	終身年金（終身年金額は年金原資を年利率 j_3 の期初払い n 年確定年金として支給する場合の年金額と同額とする）を支給するものとする。
昇給時期	年 1 回期初昇給
脱退時期	年 1 回期末脱退、定年退職は定年年齢到達時に脱退。なお、在職中（加入中）の死亡者は発生しないものとする。
拠出時期	年 1 回期初拠出（昇給後の給与×保険料率）
財政方式	加入年齢方式（新規加入年齢 x_e 歳）

ここで、

x_e ：新規加入年齢、x_r ：定年年齢（年金支給開始年齢）、i ：予定利率（また、$v=\dfrac{1}{1+i}$ とする）

b_x ：給与指数（定年時の給与指数は $b_{x_r}=b_{x_r-1}$ とする）、B_x ：被保険者 x 歳の 1 人当たりの給与

$\ddot{a}'_{\overline{n}|}$ ：利率 j_3 の期初払い n 年確定年金現価率　と定義する。

なお、当問題においては、年齢 x_r 歳未満の死亡は一切考慮しないこととし、計算基数（D_x、C_x 等）は年齢 x_r 歳未満は生存脱退のみを考慮したもの、年齢 x_r 歳以降は死亡のみを考慮したものとすること。また、解答にあたり、既存の被保険者は新規加入年齢（x_e 歳）にて加入したものとし、昇給、脱退はすべて予定どおり行われるものとすること。

次の〈1〉～〈16〉の空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれ 1 つずつ選びなさい。なお、〈1〉～〈8〉については算式群Ｉから、〈9〉～〈15〉については算

式群Ⅱから、〈16〉については語群からそれぞれ選びなさい。なお、解答にあたり同じ記号を算式群から重複して選んでも良い。

（1） x_e 歳で加入した x 歳の被保険者が $y\ (x \le y \le x_r)$ 歳時点で制度から脱退すると仮定する。当該被保険者が y 歳末の時点において、獲得していると予想される年金給付のための原資相当額は $\alpha(<1>)\cdot(<2>)$ と表すことができる。当該〈2〉の算式（ y の関数）を $F(y)_x^{j_1}$ と定義する。

x 歳の被保険者１人あたりの給付現価を S_x 、給与現価を G_x とすると、上記 $F(y)_x^{j_1}$ の定義を利用して、

$$S_x = (<3>)\cdot\left[\sum_{y=x}^{x_r-1} F(y)_x^{j_1}\cdot(<4>) + F(<5>)_x^{j_1}\cdot(<6>)\right]\cdot(<7>)$$

$$G_x = (<3>)\cdot\sum_{y=x}^{x_r-1}(<8>)$$ と表すことができる。

よって、当該年金制度の標準保険料率 ${}^{E}P$ は

$${}^{E}P = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} F(y)_{x_e}^{j_1}\cdot(<4>) + F(<5>)_{x_e}^{j_1}\cdot(<6>)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(<8>)}\cdot(<7>)$$ となる。

算式群Ⅰ

（A） x_e　（B） $x_r - 1$　（C） x_r　（D） D_x　（E） D_{x_r}　（F） N_x

（G） N_{x_r}　（H） $N_x - N_{x_r}$　（I） $\alpha\ddot{a}'_{\overline{n}|}$　（J） $\dfrac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}$　（K） $\alpha\dfrac{N_{x_r}}{D_{x_r}}$　（L） $\alpha\ddot{a}'_{\overline{n}|}\dfrac{N_{x_r}}{D_{x_r}}$

（M） $\dfrac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}\dfrac{N_{x_r}}{D_{x_r}}$　（N） $\dfrac{B_x}{b_x}$　（O） $\dfrac{b_x}{B_x}$　（P） $\dfrac{B_x}{b_x D_x}$　（Q） $\dfrac{b_x D_x}{B_x}$　（R） $\dfrac{D_y}{b_y}$

（S） $\dfrac{b_y}{D_y}$　（T） $b_y D_y$　（U） $\sum_{t=x_e}^{y} b_t (1+j_1)^{y-t+1}$　（V） $\sum_{t=x_e}^{y} b_t (1+j_1)^{y-t}$　（W） $\sum_{t=x}^{y} b_t (1+j_1)^{y-t}$

（X） $(v(1+j_2))^{x_r-y} C_y$　（Y） $(v(1+j_2))^{x_r-y-1} C_y$　（Z） $(\dfrac{v}{1+j_2})^{x_r-y} C_y$

（2） ここで仮に $i = j_1 = j_2$ であったとすると、G_x は上記（1）の算式のままであるが、

$$S_x = (<3>) \cdot \left[\sum_{y=x}^{x_r-1} F(y)_x^i \cdot (<9>) + F(<5>)_x^i \cdot (<6>) \right] \cdot (<7>)$$

$${}^E P = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} F(y)_{x_e}^i \cdot (<9>) + F(<5>)_{x_e}^i \cdot (<6>)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} (<8>)} \cdot (<7>)$$ となる。

$(<9>) = v^{y+1}(<10>)$ に着目し、$F(y)_x^i$、$F(y)_{x_e}^i$ をそれぞれ展開し整理すると、

$$S_x = (<3>) \cdot [(<11>) l_x + (<12>)] \cdot (<7>)$$

$${}^E P = \frac{(<13>)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} (<8>)} \cdot (<7>)$$ と変形することができる。

ここで、x 歳の被保険者1人あたりの責任準備金を V_x とすれば、

$$\begin{aligned} V_x &= S_x - {}^E P G_x \\ &= \frac{(<3>) \cdot (<7>)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} (<8>)} \times \left(\sum_{y=x_e}^{x_r-1} (<8>) \cdot [(<11>) l_x + (<12>)] - \sum_{y=x}^{x_r-1} (<8>) \cdot (<13>) \right) \\ &= (<3>)(<7>)(<14>) \\ &= (<1>)(<7>)(<15>) \end{aligned}$$

これより、V_x は $(<16>)$ ことがわかる。

算式群Ⅱ

(A) $l_y - l_{y+1}$ (B) $D_y - D_{y+1}$ (C) $N_y - N_{y+1}$ (D) $\ddot{a}_y - \ddot{a}_{y+1}$ (E) l_y (F) D_y

(G) C_y (H) M_y (I) $\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t$ (J) $\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t$ (K) $\sum_{t=x}^{x_r-1} b_t v^t$ (L) $\sum_{t=x+1}^{x_r-1} b_t v^t$

(M) $\sum_{t=x_e}^{x-1} b_t v^t l_x$ (N) $\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_x$ (O) $\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t l_x$ (P) $\dfrac{\sum_{t=x_e}^{x-1} b_t v^t}{l_x}$ (Q) $\dfrac{\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t}{l_x}$ (R) $\dfrac{\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t}{l_x}$

(S) $\sum_{t=x_e}^{x-1} b_t D_t$ (T) $\sum_{t=x_e}^{x} b_t D_t$ (U) $\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t D_t$ (V) $\sum_{t=x}^{x_r-1} b_t D_t$ (W) $\sum_{t=x+1}^{x_r-1} b_t D_t$

(X) $\sum_{t=x_e}^{x-1} b_t (1+i)^{x-t}$ (Y) $\sum_{t=x_e}^{x} b_t (1+i)^{x-t}$ (Z) $\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t (1+i)^{x-t}$

語群

(A) 新規加入年齢 x_e に依存しない

(B) 定年年齢 x_r に依存しない

(C) 予定利率 i に依存しない

(D) 利率 j_3 に依存しない

(E) 給与指数 b_x に依存しない

(F) x 歳の被保険者１人あたりの給与 B_x に依存しない

(G) 定年より前の l_x $(x \le x_r - 1)$ に依存しない

(H) 定年以後の l_x $(x \ge x_r)$ に依存しない

(I) 選択肢(A)～(H)のいずれの特徴も有していない

３．制度の被保険者が脱退した時から、以下の式で表される加入期間に応じた年金額 α_t を終身年金として支払う年金制度がある。制度からの給付を定年脱退

時のみとし、単位積立方式により制度を運営しているとする。定常状態となっていたある期末時点において、各年度に割り当てる「単位」の考え方を変更して、加入期間が 1 年伸びることにより増加する年金額を各年度に割り当てる「単位」とした。このとき、従前の標準保険料${}^{U}P_x^1$と「単位」を変更した後の標準保険料${}^{U}P_x^2$が等しくなる年齢xとして最も適切なものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。なお、新規加入年齢をx_e歳、定年年齢をx_r歳とし、保険料の払い込みおよび給付の支払いは年 1 回期初に行われるものとする。

加入年齢に応じた年金額：$\alpha_t = \dfrac{t^2}{(x_r - x_e)^2}$

(A) $x_r - x_e + 1$　(B) $x_r - x_e - 1$　(C) $\dfrac{x_r + x_e}{2} + 1$　(D) $\dfrac{x_r + x_e}{2} - 1$

(E) $\dfrac{x_r + x_e + 1}{2}$　(F) $\dfrac{x_r + x_e - 1}{2}$　(G) $x_e + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 - 1}{2}}$

(H) $x_e + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 + 1}{2}}$　(I) $\dfrac{(x_r - x_e)}{2} + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 - 1}{2}}$

(J) $\dfrac{(x_r - x_e)}{2} + \sqrt{\dfrac{(x_r - x_e)^2 + 1}{2}}$

第２章　企業年金に係る年金数理

第１章では，確定給付企型の企業年金に係る制度内容について述べてきた。この章では，これらの年金制度の内容を踏まえ，その中でも簡略化した制度を前提におき，制度毎の年金数理上の特性について，財政方式，計算基礎率を絡めて述べていく。

なお本章では，保険料は全て年１回期初払いとする。

1.　定額制・定年のみの給付の制度

定年退職者に年額１の終身年金を期初に支給する年金制度を考える。財政方式は，加入年齢方式とし，受給者はいないものとする。x 歳の加入者１人当たりの給付現価を S_x，人数現価を G_x とすれば，

$$S_x = D_{x_r}\ddot{a}_{x_r} / D_x \qquad (2-1)$$

$$G_x = \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\right) / D_x \qquad (2-2)$$

と表される。今，加入年齢を x_e 歳とした場合の標準保険料率を P_{x_e} とすれば

$$P_{x_e} = S_{x_e} / G_{x_e} = D_{x_r}\ddot{a}_{x_r} / \left(\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y\right) \qquad (2-3)$$

と表される。この制度の特徴は給付が定年退職者に対してのみ行われるため，加入年齢から定年年齢までの残存率の大小が標準保険料率の変動に大きく係わってくる。以下では，予定脱退率が標準保険料率に与える影響をみていくことにする。

⑴　定年年齢への残存率の影響

図２－１のような２つの脱退残存イメージA，Bを考える。

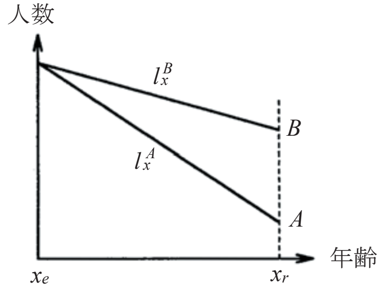


図２－１

l_xの関係式として

$$\left.\begin{aligned} l_x^A &= l_{x_e} - k^A(x - x_e) \\ l_x^B &= l_{x_e} - k^B(x - x_e) \qquad (k^A > k^B) \end{aligned}\right\} \qquad (2-4)$$

が成り立っているとすれば，$x_e \leq x < x_r$なる任意の年齢xについて

$$\left.\begin{aligned} S_x^A &< S_x^B \\ G_x^A &< G_x^B \end{aligned}\right\} \qquad (2-5)$$

が言え，給付現価，人数現価ともBがAを上回っている。また，標準保険料率P_{x_e}を比較すると

$$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}^B} = \frac{D_{x_r}^A}{D_{x_r}^B} \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y^B}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y^A} \qquad (2-6)$$

$$\frac{D_y^A}{D_y^B} = \frac{v^y l_y^A}{v^y l_y^B} = \frac{l_y^A}{l_y^B}$$　はyについて単調減少であるので

$$\frac{D_{x_r}^A}{D_{x_r}^B} < \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y^A}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y^B} \qquad (2-7)$$

が成り立つ。ゆえに

$$\frac{D_{x_r}^A}{D_{x_r}^B}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^B}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}D_y^A}<1 \qquad (2-8)$$

となり，$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}^B}<1$　すなわち　$P_{x_e}^A < P_{x_e}^B$　（２－９）

が示された。

以上から，定年年齢への残存率が上昇すると標準保険料率も上昇する傾向があると言える。

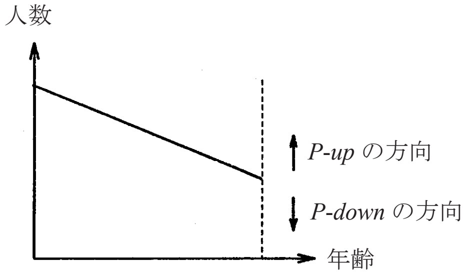


図２－２

⑵　脱退残存表の形状の影響

次に，図２－３のような２つの脱退残存イメージA，Bを考える。

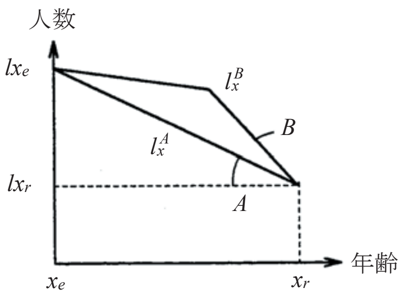


図２－３

⑴と同様に l_x の関係式として

$$\left.\begin{array}{ll} l_x^A = l_x^B & (x = x_e,\ x_r) \\ l_x^A < l_x^B & (x_e < x < x_r) \end{array}\right\} \quad (2-10)$$

が成り立っているとすれば，年齢別の給付現価，人数現価は，

$$\left.\begin{array}{l} S_{x_e}^A = S_{x_e}^B,\ S_x^A > S_x^B\ (x_e < x < x_r) \\ G_{x_e}^A < G_{x_e}^B,\ （x_e < x < x_r \text{については形状により異なる}） \end{array}\right\} \quad (2-11)$$

の大小関係が言える。

標準保険料率を比較すると

$$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}^B} = \frac{S_{x_e}^A}{S_{x_e}^B} \cdot \frac{G_{x_e}^B}{G_{x_e}^A} = \frac{G_{x_e}^B}{G_{x_e}^A} > 1 \quad (2-12)$$

となり,

$$P_{x_e}^A > P_{x_e}^B \quad (2-13)$$

が示される。

これは A，B の給付現価は等しいが，B の方が途中の年齢における残存率が高いため，人数現価が大きくなっていることによる。

すなわち，最終的に給付を受けられる者の見込み数が変わらなくても，途中の残存傾向の違いによって保険料率が変動していることがわかる。

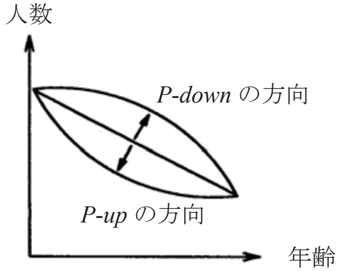


図２－４

実務では，財政再計算（詳細は後述）で予定脱退率を見直す際に，⑴，⑵で述べた考え方に基づき影響分析を行なっている。実際は，最終的な残存率が変化したり，形状が交差したりすることもあるため，画一的に議論できないケースもある。

最後に，標準保険料率 P_{x_e} が最大となるような脱退率は，どのような場合かを述べてみる。

$$
\begin{aligned}
1/P_{x_e} &= \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}} = \frac{1}{\ddot{a}_{x_r} v^{x_r}} \sum_{y=x_e}^{x_r-1} v^y \frac{l_y}{l_{x_r}} \\
&= \frac{1}{\ddot{a}_{x_r} v^{x_r}} \left(v^{x_e} \frac{1}{{}_{x_r-x_e}p_{x_e}} + v^{x_e+1} \frac{1}{{}_{x_r-x_e-1}p_{x_e+1}} + \cdots + v^{x_r-1} \frac{1}{p_{x_r-1}} \right) \\
&= \frac{1}{\ddot{a}_{x_r} v^{x_r}} \left(v^{x_e} \frac{1}{p_{x_e} \cdot p_{x_e+1} \cdots p_{x_r-1}} + v^{x_e+1} \frac{1}{p_{x_e+1} \cdots p_{x_r-1}} + \cdots + v^{x_r-1} \frac{1}{p_{x_r-1}} \right)
\end{aligned}
$$

（２－14）

（　）内の各項は $p_{x_e} = p_{x_e+1} = \cdots = p_{x_r-1} = 1$ のとき最小値をとる。

すなわち，P_{x_e} は各年齢における脱退率がすべてゼロであるとき最大となる。

2.　最終給与比例制・定年のみの給付の制度

保険料や年金給付の額を最終（退職時）給与の一定割合として定める制度であり，予定脱退率の他に給与指数（予定昇給率）の影響を受ける。x 歳の給与を b_x と表わし，定年退職者のみに年金額 b_{x_r}（最終給与）の終身年金を支給する制度を考える。なお，財政方式は加入年齢方式とし，年金は期初払いとする。

このとき，x 歳の加入者１人当たりの給付現価 S_x，給与現価 G_x は，

$$S_x = \frac{b_{x_r} D_{x_r} \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \qquad (2-15)$$

$$G_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}(b_y D_y)}{D_x} \qquad (2-16)$$

と表される。更に加入年齢を x_e 歳とした場合の標準保険料率 P_{x_e} は，

$$P_{x_e} = \frac{b_{x_r} D_{x_r} \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}(b_y D_y)} \qquad (2-17)$$

と表される。

ここで，脱退残存表が同一で，給与指数が異なる2つの集団 A，B を設定し，標準保険料率を比較することにより給与指数の影響をみていくことにする。

⑴　給与指数の傾きの影響

図２－５のような２つの給与指数 A，B を考える。

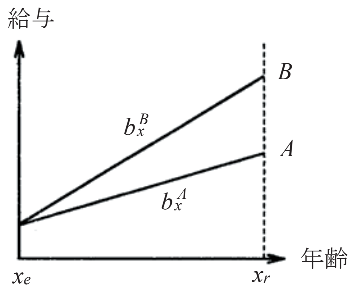


図２－５

集団 A の給与指数 b_x^A に対し，集団 B の給与指数 b_x^B は傾きが β 倍であるとする。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} b_x^A &= a(x-x_e)+b_{x_e} \\ b_x^B &= \beta \cdot a(x-x_e)+b_{x_e} \qquad (1<a,\quad 1<\beta) \end{aligned}\right\} \qquad (2-18)$$

と表すことができ，

$$\frac{b_x^B}{b_x^A}=\frac{\beta\cdot a\,(x-x_e)+b_{x_e}}{a\,(x-x_e)+b_{x_e}}=\beta-\frac{(\beta-1)\,b_{x_e}}{a(x-x_e)+b_{x_e}} \tag{2－19}$$

であるので $\frac{b_x^B}{b_x^A}$ は x について単調増加である。

$$\frac{P_{x_e}^B}{P_{x_e}^A}=\frac{b_{x_r}^B D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\left(b_y^B D_y\right)}\,\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\left(b_y^A D_y\right)}{b_{x_r}^A D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}=\frac{b_{x_r}^B}{b_{x_r}^A}\,\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\left(b_y^A D_y\right)}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\left(b_y^B D_y\right)} \tag{2－20}$$

$\frac{b_x^B}{b_x^A}$ が単調増加であることから

$$\frac{b_{x_r}^B}{b_{x_r}^A}>\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A} \tag{2－21}$$

$\frac{b_x^A}{b_x^B}$ が単調減少かつ D_y が単調減少であるから

$$\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B}<\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A} \tag{2－22}$$

（２－22）より $\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A D_y}<\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A}$ （２－23）

（２－21），（２－23）より $\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^B D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y^A D_y}<\frac{b_{x_r}^B}{b_{x_r}^A}$

$\therefore\quad \frac{P_{x_e}^B}{P_{x_e}^A}>1 \qquad \therefore\quad P_{x_e}^B>P_{x_e}^A$

以上から，給与指数の傾きが大きくなると，標準保険料率は上昇する傾向があると言える。

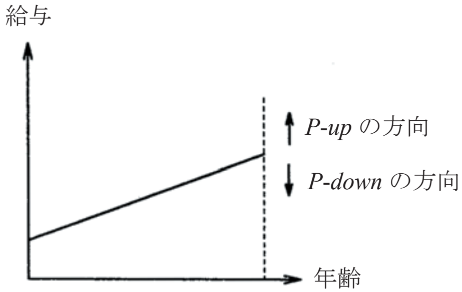


図２－６

⑵　頭打ちの影響

図２－７のような２つの給与指数 A，B を考える。

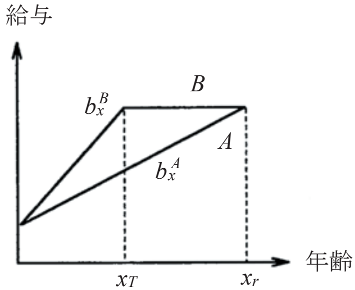


図２－７

b_x^B は年齢 x_T で上限に到達し，

$$b_{x_T}^B = b_{x_T+1}^B = \cdots = b_{x_r}^B = b_{x_r}^A$$

が成り立っているとする。標準保険料率を比較すると，

$$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}^B} = \frac{b_{x_r}^A}{b_{x_r}^B} \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y^B D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y^A D_y} = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y^B D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y^A D_y} \tag{2-24}$$

$x_e < y < x_r$ では常に $b_y^A < b_y^B$ であるから

$$\frac{P_{x_e}^A}{P_{x_e}^B} > 1 \quad \therefore \quad P_{x_e}^A > P_{x_e}^B$$

すなわち，（最終）給与比例制であるため給付現価は等しく，給与現価の方で B が A よりも大きくなるため B の標準保険料率の方が低くおさえられる。

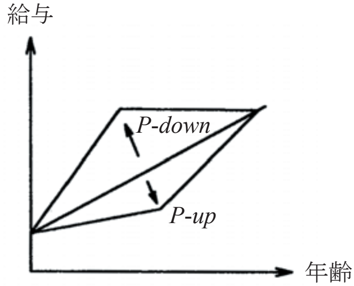


図２－８

3.　中途脱退給付のある制度（定額制）

これまでは定年退職者のみに給付がある制度についてみてきたが，次に中途退職者にも給付がある制度を考える。そこで次のような前提を置く。

① 定額制

② α_τ：加入期間 τ 年（1 年未満の端数切り捨て）の退職者の支給額

③ 支給期間：退職の翌期初より n 年間の確定年金を支払う

④ 財政方式：加入年齢方式

このとき，x 歳の加入者 1 人当たりの給付現価 S_x，人数現価 G_x は，

$$S_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} \alpha_{y-x_e} C_y + \alpha_{x_r-x_e} D_{x_r}}{D_x} \ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{2-25}$$

$$G_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \qquad (2-26)$$

と表される。そして標準保険料率 P_{x_e} は,

$$P_{x_e} = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \alpha_{y-x_e} C_y + \alpha_{x_r-x_e} D_{x_r}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} \ddot{a}_{\overline{n}|} \qquad (2-27)$$

と表される。

一方で, S_{x_e}, G_{x_e} は,

$$\begin{aligned} S_{x_e} &= (v q_{x_e} \cdot \alpha_{x_e-x_e} + v^2 {}_{1|}q_{x_e} \cdot \alpha_{x_e+1-x_e} + \cdots + v^{x_r-x_e} {}_{x_r-x_e-1|}q_{x_e} \cdot \alpha_{x_r-x_e-1} \\ &\quad + v^{x_r-x_e} {}_{x_r-x_e}p_{x_e} \cdot \alpha_{x_r-x_e}) \ddot{a}_{\overline{n}|} \\ G_{x_e} &= q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{1}|} + {}_{1|}q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{2}|} + \cdots + {}_{x_r-x_e-1|}q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|} + {}_{x_r-x_e}p_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|} \end{aligned} \qquad (2-28)$$

とも表すことができ,

$S_{x_e} - P_{x_e} \cdot G_{x_e} = 0$ 　より

$$\begin{aligned} &\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \left(v^{y-x_e+1} {}_{y-x_e|}q_{x_e} \cdot \alpha_{y-x_e} \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e} \cdot {}_{y-x_e|}q_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{y-x_e+1}|} \right) \\ &\quad + v^{x_r-x_e} {}_{x_r-x_e}p_{x_e} \cdot \alpha_{x_r-x_e} \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e} \cdot {}_{x_r-x_e}p_{x_e} \cdot \ddot{a}_{\overline{x_r-x_e}|} = 0 \end{aligned} \qquad (2-29)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{y=x_e}^{x_r-1} v^{y-x_e+1} {}_{y-x_e|}q_{x_e} \left(\alpha_{y-x_e} \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e} \cdot \ddot{S}_{\overline{y-x_e+1}|} \right) \\ &\quad + v^{x_r-x_e} {}_{x_r-x_e}p_{x_e} \left(\alpha_{x_r-x_e} \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e} \cdot \ddot{S}_{\overline{x_r-x_e}|} \right) = 0 \end{aligned} \qquad (2-30)$$

ここで　$\alpha_{y-x_e} \ddot{a}_{\overline{n}|} =$ (y 歳で退職した場合の年金現価)

$P_{x_e} \cdot \ddot{S}_{\overline{y-x_e+1}|} =$ (y 歳までに払込んだ保険料の元利合計)

$P_{x_e} \cdot \ddot{S}_{\overline{x_r-x_e}|} =$ (x_r 歳までに払込んだ保険料の元利合計)

であるから，$\alpha_{y-x_e}\ddot{a}_{\overline{n|}}-P_{x_e}\ddot{S}_{\overline{y-x_e+1|}}$　および　$\alpha_{x_r-x_e}\ddot{a}_{\overline{n|}}-P_{x_e}\ddot{S}_{\overline{x_r-x_e|}}$は，各年齢で脱退が起こった場合に発生する給付と，それまでの保険料収入の積み上げとの乖離度合を示す指標ともいえる。よって，確率的に言えば（２－30）式は各年齢における脱退による剰余・不足の現価の期待値であり，それがゼロになっていることはP_{x_e}が給付と保険料収入が収支相等するような保険料率であることを示している。

（剰余・不足の例）

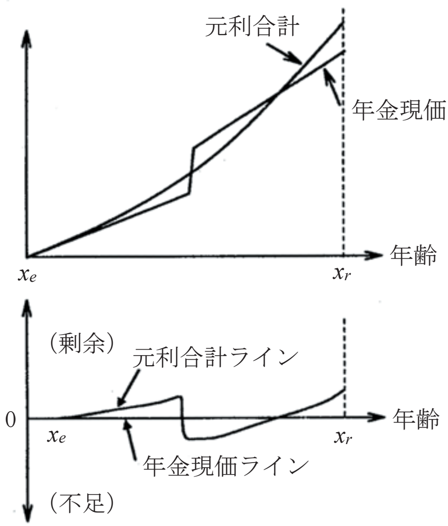


図２－９

※一般的には，各年齢において元利合計と年金現価は必ずしも一致しないが，標準者から見て予定通りの脱退が想定されれば，一致しないことによる剰余・不足が相殺しあい，バランスがとれたものとなっていることを左図はイメージしている。（なお，左図の年金現価のカーブは，一定年齢を境に給付額が増加する制度をイメージしている。）

4.　給与累計に基づく給付の制度

厚生年金基金の基本部分の年金額は，

（平均標準報酬月額）×（加入員月数）×（年金支給率）　　（２－31）

となっているが，

（平均標準報酬月額）×（加入員月数）＝（標準報酬累計）

とも表わせるので，（２－31）は

（標準報酬累計）×（年金支給率）

となる。ここではこの基本部分を簡略化した制度を，基本部分の財政方式である開放基金方式を用いて考えることにする。

D_x，$C_x^{(w)}$ など　：　脱退残存表に基づく計算基数

D'_x，$\ddot{a}'_{x_r}$ など　：　生命表に基づく計算基数，年金現価率等

（$C_x^{(w)} = v^{x+1} d_x^{(w)}$ には，生存脱退後その年度中に死亡する者を含まないものとする。）

簡単のため，年金支給率は生年月日によらず一定値 α とする。また，年金支給開始年齢は x_r 歳とし，x_r 歳で全員退職するものとする。

給付現価 S_x の計算式は，y 歳での退職では年金額が $\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{y} b_z\right)$ となることから，

$$S_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{y} b_z\right) C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} \ddot{a}'_{x_r}\right\} + \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x_r-1} b_z\right) D_{x_r} \ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$$= \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\alpha\left(\sum_{z=x}^{y} b_z\right) C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} \ddot{a}'_{x_r}\right\} + \alpha\left(\sum_{z=x}^{x_r-1} b_z\right) D_{x_r} \ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$$+ \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}\left\{\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z\right) C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} \ddot{a}'_{x_r}\right\} + \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z\right) D_{x_r} \ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$$= S_{x F.S.} + S_{x P.S.} \qquad (2-32)$$

と表される。第 1 項は将来見込まれる年金額のうち，将来加入期間に対応する部分の給付現価（$S_{x F.S.}$）を表わしており，第 2 項は過去加入期間分の給付現価（$S_{x P.S.}$）を表している。

$S_{x P.S.}$ は将来の加入期間の長短にかかわらず年金額が確定しており，

$$S_{x P.S.} = \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z\right) \ddot{a}'_{x_r} \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)} \frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_x} \qquad (2-33)$$

ここで $\dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)} \dfrac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_x} = v^{x_r - x} \dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} d_y^{(w)} \dfrac{l'_{x_r}}{l'_{y+1}} + l_{x_r}}{l_x}$ （2 −34）

x 歳の被保険者が x_r 歳まで生存している確率は，x_r 歳までに生存退職した者が x_r 歳まで生存する確率と x_r 歳まで在職する確率の和であるから

$$\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)} \dfrac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_x} = v^{x_r - x} \frac{l'_{x_r}}{l'_x} \quad (2-35)$$

となる。これより過去の期間に対応する給付現価（$S_{x\,P.S.}$）は生命表のみに依存しており，計算基礎率（予定脱退率・給与指数）の影響を受けないことが言える。よって，再計算等での計算基礎率（予定脱退率・給与指数）変更の際にも，後発過去勤務債務は発生しないことがわかる。

5.　新規加入年齢の保険料率への影響

加入年齢方式では，実務上ひとつの加入年齢（改めて x_N とする）について標準保険料率を定め，加入者全員に適用しているが，この x_N が再計算等で変動した場合の保険料率への影響をみていくことにする。

最も単純な「１．定額制・定年のみの給付の制度」で前提とした制度における加入年齢毎の標準保険料率 P_x は，

$$P_x = \frac{D_{x_r} \ddot{a}_{x_r}}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y} \quad (2-36)$$

となっているので x が上がるにつれて P_x も上昇する。その他一般の制度の場合でも加入年齢が上がると P_x が上昇することが多い。その理由の１つとしては，支給時期までの期間が短くなることで積立金の利息収入の効果が小さくなることが挙げられる。

例えば，ある集団で，計算基礎率は変わらないが，新規加入年齢だけが $x_N \to x'_N$ に変動したとすると，標準保険料率は $P_{x_N} \to P_{x'_N}$ へと変動する。このときの責任準備金 V および過去勤務債務 U の動きは

$$\left.\begin{aligned} &V = S^p + S^a - P_{x_N} \cdot G^a \to V' = S^p + S^a - P_{x'_N} \cdot G^a \\ &U = V - F = S^p + S^a - P_{x_N} \cdot G^a - F \to U' = S^p + S^a - P_{x'_N} \cdot G^a - F \end{aligned}\right\} \quad (2-37)$$

ここでは給付現価および給与現価が新規加入年齢の影響をうけないことを用いている。過去勤務債務の増加額は

$$U' - U = (P_{x_N} - P_{x'_N})\, G^a \qquad (2-38)$$

であるから，新規加入年齢は標準保険料率だけでなく特別保険料率も変動させることがわかる。また，一方が上昇すればもう一方は低下し，保険料収入（現価）の合計は常に不変であるため，標準・特別の償却期間の違いを考慮しなければ，基本的には保険料負担に影響を及ぼさない。（ただし，実際は，特別保険料率は n 年償却や年 $\frac{1}{k}$ 償却など標準保険料率と比べて相対的に短い期間（有限期間）で償却することが多く，その場合には，特別保険料率のウエイトが高いほど当面の保険料負担が多くなる。）

次に開放基金方式の場合を考える。

$$\left.\begin{aligned} &P^{OAN} = \frac{S^a_{F.S.} + S^f}{G^a + G^f} \\ &P^{PSL} = \frac{S^a_{P.S.} + S^p - F}{B\ddot{a}_{\overline{n|}}} \text{（}B\text{：給与総額，}n\text{年償却の場合）} \end{aligned}\right\} \quad (2-39)$$

S^f および G^f は，毎年一定年齢・人数・給与の新規加入員が永久に加入してくるという前提で計算され，

$$\left.\begin{aligned} S^f &= (x_N\text{ 歳の加入者 1 人当たりの給付現価})\times(\text{一定人数}) \\ &\quad \times(\text{永久年金現価率}) \\ G^f &= (x_N\text{ 歳の加入者 1 人当たりの給与現価})\times(\text{一定人数}) \\ &\quad \times(\text{永久年金現価率}) \end{aligned}\right\} \qquad (2-40)$$

となるため

$$\frac{S^f}{G^f}=\frac{x_N\text{歳の加入者の給付現価}}{x_N\text{歳の加入者の給与現価}}=\frac{S_{x_N}}{G_{x_N}}=P_{x_N} \qquad (2-41)$$

と表わせ，一般的に x_N が低いほど $\dfrac{S^f}{G^f}=P_{x_N}$ も小さくなる。よって（２－39）より，標準保険料率については，新規加入年齢の要素だけで見れば，この年齢が低いほど標準保険料率は下がると言える。また，特別保険料率については，算式より新規加入年齢の影響を受けないと言える。

6.　予定新規加入員の見込み方

厚生年金基金の基本部分では，計算基準日における加入者数および給与総額の集団を定常人口にあるものと仮定し，以降の脱退および昇給が基礎率通りに推移するとした場合に，その加入者数および給与総額が，計算基準日時点と同じになるように毎年の新規加入者数およびその給与を見込んでいる。

⑴　人　数

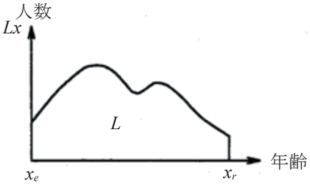


図２－10　人員分布

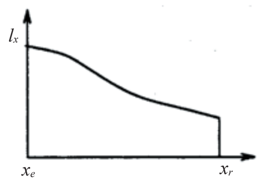


図２－11　脱退残存表

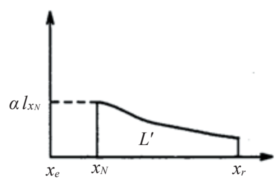


図２－12

いま，図２－10 のような人員分布の集団があるとして，この集団について予定新規加入者数と給与を算出する。今，図２－11 に示すように脱退残存表上の残存者数を l_x で表わすとし，今後 $\alpha \cdot l_{x_N}$ 人の新規加入者が毎年加入し，脱退が基礎率通り起こるとすれば定常人口では図２－12 のような人員分布になっており，その人数を L' とすれば

$$L' = \sum_{x=x_N}^{x_r-1} \alpha \cdot l_x \tag{２－42}$$

集団の人数を L とすれば　$L = L'$　となる α は

$$\alpha = L \Big/ \left(\sum_{x=x_N}^{x_r-1} l_x \right) \tag{２－43}$$

よって毎年 x_N 歳の新規加入者の人数を

$$L \times \frac{l_{x_N}}{\sum_{x=x_N}^{x_r-1} l_x} \tag{２－44}$$

と見込めば良いことになる。

$$e_{x_N} = \frac{\sum_{x=x_N}^{x_r-1} l_x}{l_{x_N}} \tag{２－45}$$

であることを考慮すると，

(新規加入者数)＝

(加入者総数)／(脱退残存表による x_N 歳の平均加入期間)　　(２－46)

となる。

⑵　給　与

続いて予定新規加入者の給与の算出方法を考える。給与を b_x とし，同様に定常人口での給与総額 B' が現在の給与総額 B と一致するような条件は，予定新規加入者１人当たりの給与を $\beta \cdot b_{x_N}$ として，

$$B = B' = \sum_{x=x_N}^{x_r-1}(\beta \cdot b_x)(\alpha \cdot l_x) \qquad (2-47)$$

変形すれば

$$\beta = \frac{B}{\alpha \sum_{x=x_N}^{x_r-1}(b_x l_x)} = \frac{\sum_{x=x_N}^{x_r-1} l_x}{L} \frac{B}{\sum_{x=x_N}^{x_r-1}(b_x l_x)}$$

$$\therefore \beta b_{x_N} = \frac{B}{L} \times \frac{b_{x_N} \sum_{x=x_N}^{x_r-1} l_x}{\sum_{x=x_N}^{x_r-1}(b_x l_x)} \qquad (2-48)$$

よって

$$(\text{新規加入者給与}) = (\text{加入者の平均給与}) \times \frac{b_{x_N} \sum_{x=x_N}^{x_r-1} l_x}{\sum_{x=x_N}^{x_r-1}(b_x l_x)} \qquad (2-49)$$

となる。

以上⑴，⑵において（２－46），（２－49）により新規加入者の人数および給与を見込むことにより，総人数および給与総額が計算基準日時点と同じである定常人口の集団が仮定されたことになる。

7.　開放基金方式と過去勤務債務

ここでは，厚生年金基金の基本部分と絡めて述べることにする。基本部分は財政方式として，開放基金方式を採用しており，この基本部分は，厚生年金基金設立時における過去勤務期間を通算しない。よって，設立時の保険料率は将来勤務期間部分の給付現価をもとに計算され，

$$P^{OAN} = \frac{S^a_{F.S.} + S^f}{G^a + G^f} \qquad (2-50)$$

と表わせる。

実際は，この保険料率を一定期間（再計算あるいは制度変更時まで）適用していくことになるため，仮に定常人口でなく，一定期間後に年齢構成等が異なっていた場合では，その一定期間後において改めて計算した $P^{OAN'}$ と，設立時に計算し適用してきた P^{OAN} とは，一致しないことが一般的である。

また，一定期間後には，積立金もあるため過去の加入期間部分も含め，収支相等する保険料率が， $P^{OAN'}$ か P^{OAN} かあるいは，それ以外かという点も検証する必要がある。

そこで，まず定常人口における財政の状態の一例として勤務期間が延びることによって $S^{a}_{P.S.}$ が増加する様子をみていきたい。期初 x 歳の加入者の給付現価 S_x を将来および過去の加入期間に分けると

$$S_x = \begin{cases} x_e \text{ 歳〜} x \text{ 歳までの過去の加入期間に対応する部分} \\ x \text{ 歳〜} (x+1) \text{ 歳の将来加入期間に対応する部分} \\ (x+1) \text{ 歳〜} x_r \text{ 歳の将来加入期間に対応する部分} \end{cases} \qquad (2-51)$$

となり，第１項から順に ${}_{x_e\sim x}S_x$，${}_{x\sim x+1}S_x$，${}_{x+1\sim x_r}S_x$ と呼ぶことにすれば

$${}_{x_e\sim x}S_x = \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z\right)\ddot{a}'_{x_r}\,\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_x} = S_{x P.S.}$$

$${}_{x\sim x+1}S_x = \alpha \cdot b_x\,\ddot{a}'_{x_r}\,\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_x}$$

$${}_{x+1\sim x_r}S_x = \frac{\displaystyle\sum_{y=x+1}^{x_r-1}\left\{\alpha\left(\sum_{z=x+1}^{y} b_z\right)C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}}\ddot{a}'_{x_r}\right\} + \alpha\left(\sum_{z=x+1}^{x_r-1} b_z\right)D_{x_r}\ddot{a}'_{x_r}}{D_x}$$

$${}_{x\sim x+1}S_x + {}_{x+1\sim x_r}S_x = S_{x F.S.} \qquad (2-52)$$

${}_{x\sim x+1}S_x$ は x 歳から（$x+1$）歳までの１年間の加入期間分の給付現価である。

ここで

$$S_{x_{P.S.}} + {}_{x\sim x+1}S_x$$

$$= \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x} b_z\right)\ddot{a}'_{x_r}\,\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_x}$$

$$= \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x} b_z\right)\ddot{a}'_{x_r}\,\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_{x+1}}\cdot\frac{vl_{x+1}}{l_x}$$

$$= \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x} b_z\right)\ddot{a}'_{x_r}\,\frac{\displaystyle C_x^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}} + \sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_{x+1}}\,\frac{vl_{x+1}}{l_x}$$

$$= \alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x} b_z\right)\ddot{a}'_{x_r}\left(vq_x^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}} + vp_x\,\frac{\displaystyle\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y^{(w)}\frac{D'_{x_r}}{D'_{y+1}} + D_{x_r}}{D_{x+1}}\right)$$

$$= vq_x^{(w)}\cdot\frac{D'_{x_r}}{D'_{x+1}}\cdot\alpha\left(\sum_{z=x_e}^{x} b_z\right)\ddot{a}'_{x_r} + vp_x\cdot S_{x+1_{P.S.}} \qquad (2-53)$$

となる。これは，仮に ${}_{x\sim x+1}S_x$ に相当する額を保険料として払込めば，この１年間に退職した場合に必要になる給付現価および（$x+1$）歳時における過去勤務期間分の給付現価を賄うことができるということを示している。更に，集団が定常状態に達していると仮定すれば，必要な保険料は毎年一定で，

$$C = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x\cdot {}_{x\sim x+1}S_x \qquad (2-54)$$

と表せる。

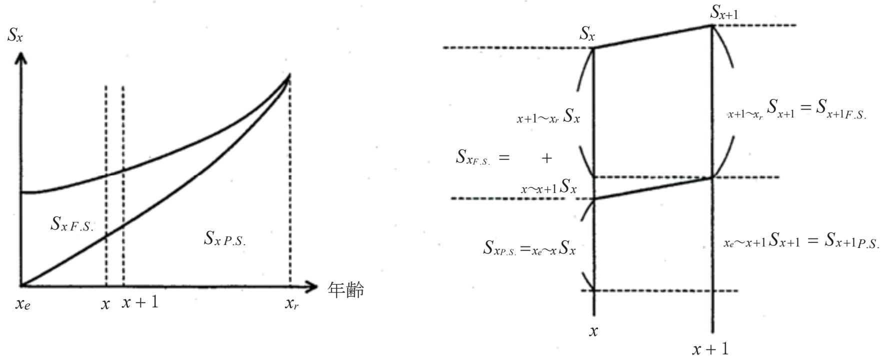


図２－13　S_x の推移イメージ

これは退職時における年金受給権のうち，この１年間の加入期間に対応する分の現価相当額を積み立てていることになり，単位積立方式の考え方となっている。定常状態の集団においては，単位積立方式と開放基金方式の保険料は等しいため，P^{OAN} を保険料率として制度を運営すれば一定期間経過後においても

積立金（F）＝過去の加入期間分の給付現価（$S^p+S^a_{P.S.}$）　　（２－55）

という関係が成り立ち，将来加入期間分の給付は P^{OAN} で賄うことができる。

$S^a_{F.S.}+S^f$	$P^{OAN}(G^a+G^f)$

⇒

$S^a_{F.S.}+S^f$	$P^{OAN}(G^a+G^f)$
$S^p+S^a_{P.S.}$	F

図２－14

ところが，実務上となると，定常状態となっている基金は存在しないと言え，更に年齢構成の変化やベースアップなど財政状態を変化させる要因を多数挙げることができる。本来はそのような変化が起これば収支相等する保険料率も変わる

が，通常一定期間が経過するまでは，保険料率の見直しがされないため，実際に適用している保険料と数理上必要な保険料は乖離し，その差による財政上の過不足が保険料率見直し時に反映されることになる。そこで次では，財政再計算を例にとって開放基金方式の保険料率と過去勤務債務の関係を述べていくことにする。

再計算においては，計算基礎率の見直しが行なわれ，再計算日における加入者を対象としてその新しい計算基礎率で算定した保険料率（$P^{OAN'}$）

$$P^{OAN'} = \frac{S^a_{F.S.} + S^f}{G^a + G^f} \tag{2－56}$$

を新しい保険料率とするのが原則となる。((2－50) と同じ式であるが，計算基準時点が異なるため，それぞれの値は異なる。）これは過去の加入期間を考慮せず将来加入期間部分のみの給付現価をもとに算定されており，今新しく基金を設立するとした場合に必要な保険料率ともいえる。（これを将来保険料率と呼ぶことにする。）しかし，実際は，過去の加入期間分の給付現価と積立金の存在があるため，この要素も含めて収支バランスした保険料率を新しい保険料率として適用している。決定方法をパターン別に見ると次のように分けられる。

（イ） $S^p + S^a_{P.S.} = F$ の場合

過去の加入期間分の給付現価と積立金が等しいため，将来保険料率 $P^{OAN'}$ が収支相等する標準保険料率となる。

$S^a_{F.S.} + S^f$	$P^{OAN'}(G^a + G^f)$
$S^p + S^a_{P.S.}$	F

図2－15

（ロ）　$S^p + S^a_{P.S.} < F$ の場合

積立金が過去の加入期間分の給付現価を上回っているため，その上回った部分を将来加入期間分の給付に充てることができ，$P^{OAN'}$ よりも小さい保険料率で収支相等させることができる。

$$P = \frac{S^a_{F.S.} + S^f - \{F - (S^p + S^a_{P.S.})\}}{G^a + G^f} = \frac{S^p + S^a + S^f - F}{G^a + G^f} \qquad (2-57)$$

こうして過去の加入期間に係る剰余を用いて将来保険料率を引き下げたこの保険料率を過去含み保険料率（図２－16における P）と呼ぶ。

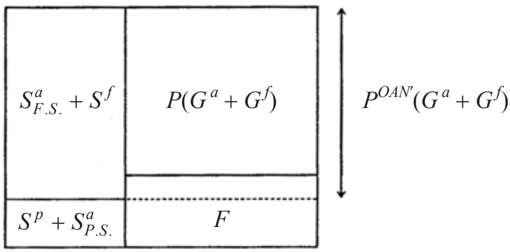


図２－16

（ハ）　$S^p + S^a_{P.S.} > F$ の場合

過去の加入期間分の給付現価を積立金で賄うことができないため，その不足分を後発過去勤務債務としてとらえ，（将来保険料率とは別に）特別保険料率（P^{PSL}）で償却する必要がある。

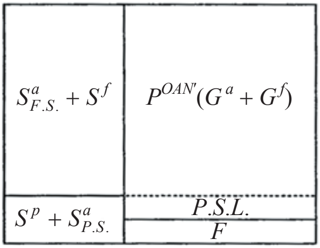


図２－17

$$P.S.L. = S^p + S^a_{P.S.} - F$$

$$P^{PSL} = \frac{P.S.L.}{B \times \ddot{a}_{\overline{n}|}} \qquad (B\text{：給与総額} \quad n\text{：償却年数}) \qquad (2-58)$$

8.　特別保険料率と償却年数

確定給付企業年金や厚生年金基金では過去勤務債務は一定の期間もしくは一定の償却割合を設けて償却することになっている。一定の期間を設けて償却（元利均等償却）する場合，過去勤務債務の額を U，給与総額を B，および償却年数を n とすると，特別保険料率（P^{PSL}）は，

$$P^{PSL} = \frac{U}{B \times \ddot{a}_{\overline{n}|}} \qquad (2-59)$$

と表わせる。また，一定の償却割合を設けて償却する場合（定率償却），過去勤務債務の額を U，償却割合を r とすると，

$$P^{PSL} = U \times r$$

と表せる。なお，過去勤務債務の額が標準保険料の年額以下と見込める場合には一括償却が可能である。ここでは後発過去勤務債務が発生した場合と過去勤務債務が減少した場合について特別保険料と償却年数の関係について述べていくことにする。

⑴　後発過去勤務債務が発生した場合

給付改善等で過去勤務債務が$\varDelta U$だけ増えてU'になったとすると

ア．　$\varDelta U$を残余償却年数（t）で償却する場合（図２－18）

$$P^{PSL'}=\frac{U+\varDelta U}{B\times \ddot{a}_{\overline{t}|}}=P^{PSL}+\varDelta P^{PSL} \qquad (2-60)$$

残余償却年数とはP^{PSL}をn年償却で決めた時点から新たに$P^{PSL'}$を決め直す時点までの経過年数を，nから差し引いた年数である。

イ．　$\varDelta U$はn'年で償却し，償却年数を按分する場合（図２－19）

$$\varDelta P^{PSL}=\frac{\varDelta U}{B\times \ddot{a}_{\overline{n'}|}} \qquad P^{PSL'}=P^{PSL}+\varDelta P^{PSL} \qquad (2-61)$$

更に，P^{PSL}と$\varDelta P^{PSL}$の償却年数が異なるため償却年数の比例按分を行なう。すなわち，

$$U'=B\times P^{PSL'}\times \ddot{a}_{\overline{t'}|} \qquad (2-62)$$

となるようなt'を求め，これを新たな償却年数とする。

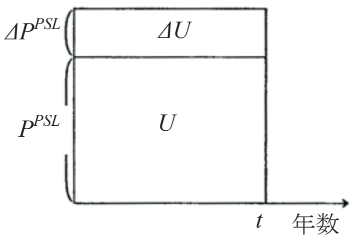


図２－18

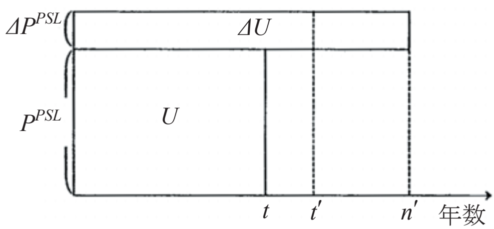


図２－19

イ．は償却年数がア．よりも長い分保険料率が低くなっている（$t<n'$の場合）

ウ．定率償却の場合

$$P^{PSL'} = (U+\varDelta U)\times r$$

U' =（U ＋$\varDelta U$）を新たな過去勤務債務と考え，その一定割合を償却することになる。

⑵ 過去勤務債務が減少した場合

再計算などで過去勤務債務が $\varDelta U$ だけ減少して U' になったとすると

ア． 償却年数を変えず P^{PSL} を下げる場合（図２－20）

$$P^{PSL'} = \frac{U - \varDelta U}{B \times \ddot{a}_{\overline{t}|}} = P^{PSL} - \varDelta P^{PSL} \qquad (2-63)$$

イ． P^{PSL} を変えずに償却年数を短縮する場合（図２－21）

$$U' = U - \varDelta U = B \times P^{PSL} \times \ddot{a}_{\overline{t'}|} \qquad (2-64)$$

となるような t' を求め，これが新たな償却年数となる。

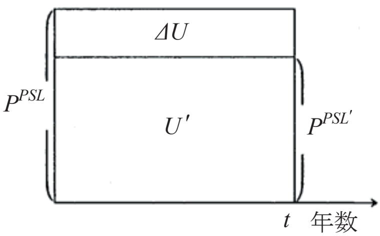


図２－20

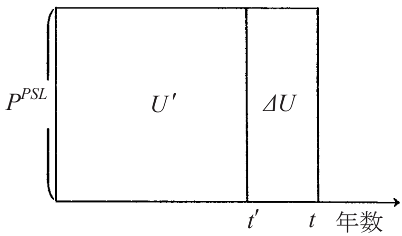


図２－21

ウ． 定率償却の場合

$$P^{PSL'} = (U - \varDelta U) \times r$$

U' =（U －$\varDelta U$）を新たな過去勤務債務と考え，その一定割合を償却することになる。

(3) 財政決算時の過去勤務債務

ア． 元利均等償却の場合

保険料決定時の過去勤務債務を U_t，給与総額を B，および償却年数を n とすると，

$$P^{PSL} = \frac{U_t}{B \times \ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

と表せる。これを式変形すると，

$$U_t = P^{PSL} \times B \times \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

となる。これは特別掛金（P^{PSL} ×B）の現価であることから，U_t のことを特別掛金収入現価と呼ぶこともある。保険料決定の時から 1 年経過した決算において給与総額が変動しなかった場合，1 年後の特別掛金収入現価 U_{t+1} は，

$$U_{t+1} = P^{PSL} \times B \times \ddot{a}_{\overline{n-1}|}$$

となる。ここで，U_t ×（1+i）と U_{t+1} の差を考えると，

$$\begin{aligned}
&U_t \times (1+i) - U_{t+1} \\
&= P^{PSL} \times B \times \ddot{a}_{\overline{n}|} \times (1+i) - P^{PSL} \times B \times \ddot{a}_{\overline{n-1}|} \\
&= P^{PSL} \times B \times (1+i)
\end{aligned}$$

これを式変形すると，

$$U_{t+1} = U_t \times (1+i) - P^{PSL} \times B \times (1+i)$$

となっている。これは即ち，特別掛金収入現価は 1 年経過すると，予定利率に基づく利息の分だけ増加し，支払った特別保険料の分だけ減少するということを意味している。

一方で，給与総額が変動した場合，毎年の決算では剰余・不足が発生する。例えば，保険料率決定の時から 1 年経過した決算において給与総額が ΔB だけ増加した場合，決算時点での特別保険料収入現価の見込みは，残余償却年数を $n-1$ 年とすると

$$B \times P^{PSL} \times \ddot{a}_{\overline{n-1}|} \quad (2-65)$$

から

$$(B + \Delta B) \times P^{PSL} \times \ddot{a}_{\overline{n-1}|} \quad (2-66)$$

に増加するため，その差額である $\Delta B \times P^{PSL} \times \ddot{a}_{\overline{n-1}|}$ が剰余として発生することになる。逆に給与総額が減少した場合は不足が発生することになる。ただし，定額償却であれば，給与の変動とは無関係に過去勤務債務を償却することができるので，給与総額の変動による剰余・不足は発生しない。

（給与総額が増加した場合）

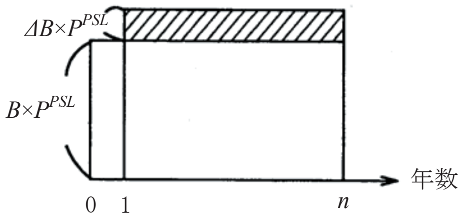


図２－22

イ.　定率償却の場合

保険料決定時の過去勤務債務を U_t，給与総額を B，および償却割合を r とすると，

$$P^{PSL} = U_t \times r$$

となり，保険料率決定の時から１年経過した決算における過去勤務債務 U_{t+1} は，

$$U_{t+1} = U_t \times (1+i) - P^{PSL} \times B \times (1+i)$$

となる。

ウ.　　弾力償却の場合

確定給付企業年金や厚生年金基金では，特別保険料率に一定の幅を持たせて，その幅の中で毎年の特別保険料率を決定する弾力償却という償却方法も可能とされている。弾力償却ではまず，元利均等償却と同じく，一定の償却期間を定め，特別保険料率の算定を行う。

$$P^{PSL(\text{下限})} = \frac{U_t}{B \times \ddot{a}_{\overline{n}|}}$$

これに対し，一定のルールで n に対応する償却期間 m （$n>m$）が決定され，この償却期間 m に基づいて，上記の特別保険料率の算定を行う。

$$P^{PSL(\text{上限})} = \frac{U_t}{B \times \ddot{a}_{\overline{m}|}}$$

そして，この $P^{PSL(\text{上限})}$ と $P^{PSL(\text{下限})}$ の範囲内で毎年の特別保険料率を決め，特別保険料を拠出することになる。

例えば，実際に拠出した特別保険料率が $P^{PSL(\text{上限})}$ であった場合，保険料決定の時から 1 年経過した決算における過去勤務債務 U_{t+1} は，

$$U_{t+1} = U_t \times (1+i) - P^{PSL(\text{上限})} \times B \times (1+i)$$

となる。これは元利均等償却の場合と比べると，（$P^{PSL(\text{上限})} - P^{PSL(\text{下限})}$）$\times B \times$（$1+i$）の分だけ多く過去勤務債務が減少しているので，1 年経過した決算において，償却期間の残余年数も n-1 年よりも短くなっている。

第2章　練　習　問　題

1．最終給与比例方式による給付を行う年金制度について積立過不足がなく定常状態にあった。ここで、ある年の期初に 5.0%のベースアップがあったとする。保険料率を見直さなかった場合、年数が経過するにつれ積立金が減少し、ある時点の期初積立金＜当初の定常状態における期初積立金×0.9 となるが、それはベースアップの何年後か、最短の年数を求めよ。

なお、保険料及び給付は年１回期初払いとし、予定利率は5.0%とする。

また、利差損益は発生しないものとし、ベースアップがあった年の保険料及び給付はベースアップ後の給与に基づき行われるものとする。

(A) 20年後　(B) 21年後　(C) 22年後　(D) 23年後　(E) 24年後

(F) 25年後　(G) 26年後　(H) 27年後　(I) 28年後　(J) 29年後

2．定年退職者（定年年齢 60 歳）に年額１の終身年金を期初に支給する年金制度（保険料は年１回期初払）を考える。財政方式は加入年齢方式（特定年齢55歳）とし、受給者はいないものとする。

今般、財政再計算を実施した結果、脱退率が変動したため、財政再計算後の標準保険料率が財政再計算前の標準保険料率の 0.95 倍となった。再計算前の脱退残存表を l_x^A と、再計算後の脱退残存表を l_x^B とすると、両者に次の関係があったとき k に最も近いものを選択肢の中から１つ選びなさい。

なお、財政再計算により脱退率以外に基礎率の変更はないものとする。

$$l_x^B = l_x^A (55 \le x \le 58)$$

$$l_x^B = k \times l_x^A (x \ge 59)$$

＜再計算前の脱退残存表に基づく基数＞

x	D_x	N_x
55	6,274.3	87,495.7
56	5,933.5	81,221.4
57	5,607.6	75,287.9
58	5,296.5	69,680.3
59	4,999.6	64,383.8
60	4,716.3	59,384.2

(A)　0.90　　(B)　0.92　　(C)　0.94　　(D)　0.96　　(E)　0.98

(F)　1.02　　(G)　1.04　　(H)　1.08　　(I)　1.10　　(J)　1.12

3．ある年金制度において、初期の未積立債務 PSL_0 の償却のため、特別保険料に一定の幅を持たせてその幅の中で毎年の特別保険料を決定する弾力償却を採用した。具体的には、年 1 回期初払いで $PSL_0 / \ddot{a}_{\overline{10}|}$ 以上、 $PSL_0 / \ddot{a}_{\overline{5}|}$ 以下の額を特別保険料として、毎年度拠出時に特別保険料を決定して支払うことにした。当初 3 年間は最大額である $PSL_0 / \ddot{a}_{\overline{5}|}$ を拠出した後、第 4 年度以降の償却計画を次の条件で作成することにした。

・第 4 年度から第 6 年度の 3 年間に拠出する特別保険料を毎年 PSL_0 / X とする。

・未積立債務の償却が第 6 年度までの 6 年間で過不足なく完了するようにする。

この場合、 X に最も近いものを選択肢の中から 1 つ選びなさい。ただし、予

定利率は 3.5%とし、償却期間中に差損益の発生はないものとする。また、必要であれば以下の表の値を使用しなさい。

n	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$	n	$\ddot{a}_{\overline{n}\vert}$
1	1.00000	6	5.51505
2	1.96618	7	6.32855
3	2.89969	8	7.11454
4	3.80164	9	7.87396
5	4.67308	10	8.60769

(A) 6.5　(B) 6.6　(C) 6.7　(D) 6.8　(E) 6.9

(F) 7.0　(G) 7.1　(H) 7.2　(I) 7.3　(J) 7.4

4．Trowbridge モデルの年金制度（加入時期は年１回期初、保険料は年１回期初払い）において、予定新規加入年齢を次の算定方法で求めるものとして、以下の問いに答えよ。

＜予定新規加入年齢の算定方法＞

過去一定期間に加入した被保険者の集団で収支相等する保険料を算出し、加入年齢毎の個人平準保険料のうち当該保険料と近似する保険料となる加入年齢を、予定新規加入年齢とする方法

x_e ：年金制度に加入できる最低年齢

x_r ：定年年齢

S_x ：加入年齢 x 歳の被保険者１人あたりの加入時給付現価

G_x ：加入年齢 x 歳の被保険者１人あたりの加入時人数現価

P_x ：加入年齢 x 歳の被保険者１人あたりの個人平準保険料（＝S_x ／G_x）

L_x ：過去一定期間に x 歳で加入した被保険者の人数

（S_x、G_x、P_x、L_x はいずれも $x_e \le x \le x_r - 1$ である正の整数 x で定義されるものとする。）

$\overline{P}$ ：過去一定期間に加入した被保険者の集団 $\{L_x\}$ で収支相等する保険料

$$\left[= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x S_x \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x G_x \right]$$

このとき、$x_e \le x \le x_r - 1$ である正の整数 x のうち、$P_x \le \overline{P}$ を満たすものの最大値 x_N を予定新規加入年齢とする。

解答には次の記号を用いること。

i：予定利率、　v：割引率 $(=1/(1+i))$、　l_x：脱退残存表に基づく残存数

D_x、N_x：予定利率 i の脱退残存表に基づく計算基数

$\ddot{a}_x$ ：x 歳支給開始期初払終身年金現価率

なお、各問の①については、解答を導く過程は記載しなくてもよい。

(1) ①　P_x 、$\overline{P}$ それぞれを、計算基数および定年年齢における年金現価率（$\ddot{a}_{x_r}$）を用いて表せ。

②　$\overline{P}$ が $P_{x_e}, P_{x_e+1}, \ldots, P_{x_r-1}$ の加重平均値であることを示した上で、x_N が必ず存在することを示せ。

(2) 以下、$x_e \le x \le x_r$ である正の整数 x について $l_x = mp^x$ であるものとする $(0 < m, 0 < p < 1)$ 。

①　D_x 、$N_x - N_{x_r}$ それぞれを v、m、p を用いて表せ。

②　過去一定期間に加入した被保険者の平均加入年齢 $\overline{x}$ が正の整数であるものとする。

$$\left(\overline{x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} x L_x \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \right) \quad (x_e \le \overline{x} \le x_r - 1)$$

このとき、$\bar{x}$ が $P_{\bar{x}} \leq \bar{P}$ であることを満たすことにより、$\bar{x} \leq x_N$ であることを示せ。

＜ヒント＞

一般に、正の数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$， $w_1, w_2, \ldots, w_n$ について次の不等式が成り立つ。

$$\frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} \geq \left(a_1^{w_1} \cdot a_2^{w_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{w_n}\right)^{\frac{1}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}}$$ （相加平均≧相乗平均）

5． 2つの年金制度（A および B）が合併することとなった。これらの年金制度間ではつぎの関係が成立しているとする。

⑴ B は，総人員・総給与とも A の 10%，勤続・年齢構成比は等しい。

⑵ B の給付水準は A の給付の一律 2 倍

⑶ B の積立金残高は A の 10%

⑷ A において未償却の過去勤務債務残高は給付現価の 50%あり，有限年数で総給与の一定割合を償却している。

今，合併にあたって，A の給付はそのまま，B の給付水準を一律に下げ，過去勤務債務を A と B の合計の総給与の一定割合で償却，償却年数は現在の A における残余償却年数とすることにした。なお，標準保険料率は従前の A のそれを使用する。

この新たな償却額が A にとって従前の 5%以内に押えるためには，B の給付水準をどのように設定したらよいか。

6．A 社および B 社が共同で実施している年金制度（以下、分割前制度という。）があるが、今般この年金制度を分割し、A 社、B 社それぞれ単独で年金

制度を実施することとした。

年金制度分割時の下記の前提、諸数値を用いて、分割後の A 社および B 社の年金制度の特別保険料率をそれぞれ求めよ。

（前提）

・A 社の被保険者の規模（被保険者の総人数・総給与）は B 社の 3 倍

・A 社と B 社は被保険者の年齢構成、加入期間構成、年齢別給与構成は互いに等しい。（すなわち、A 社と B 社は規模が異なるだけで被保険者の構成割合は等しい。）

・A 社および B 社とも年金受給権者は存在しない

・分割後の A 社、B 社の年金制度はともに分割前制度の基礎率を使用する。

・分割後の A 社年金制度の給付水準は分割前制度の一律 1.2 倍とし、B 社年金制度の給付水準は分割前制度と同じとする。

・分割前制度の積立金は、分割前制度の A 社の被保険者にかかる責任準備金と、B 社の被保険者にかかる責任準備金の比で按分し、分割後の A 社および B 社の年金制度にそれぞれ配分する。

・分割後の A 社の年金制度は開放基金方式で運営し、B 社の年金制度は加入年齢方式で運営する。

・分割後の A 社および B 社の年金制度の過去勤務債務は、それぞれ 20 年で元利均等償却する。（ここで 20 年の期初払年金現価率は 14.7 とする。）

（分割前制度の諸数値等）

・将来加入が見込まれる被保険者の給付現価（S^f）＝500 百万円

・在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価（S^a_{FS}）＝700 百万円

・在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価（S^a_{PS}）＝800 百万円

・将来加入が見込まれる被保険者の給与現価（G^f）＝20,000 百万円

・在職中の被保険者の給与現価（G^a）＝25,000 百万円

・積立金（F）＝700 百万円

・給与総額＝400 百万円

A 社および B 社の特別保険料率は何%か。（小数点以下第 2 位を四捨五入し小数点以下第 1 位まで求めよ。）

(A)　3.0	(B)　3.2	(C)　3.4	(D)　3.6	(E)　3.8
(F)　4.0	(G)　4.2	(H)　4.4	(I)　4.6	(J)　4.8

第 3 章　財政決算・再計算

1.　財政決算の意義

年金制度の目的は，被保険者の老齢退職に際し，年金を基金の積立金から支給することにある。従って，基金は常に積立金を適正な水準に保ち，将来の年金給付に対し万全を期しておくことが重要となる。

このような観点から，財政決算では，過去の収支状況および現在の積立金の残高を把握し，直近の財政再計算時（または当初制度設計時）におり込んだ諸計算基礎率にもとづく変動要因に即して資金の動きが円滑に推移しているかどうかを検討する。この検討は通常，貸借対照表における積立金と責任準備金との対比により行う。

すなわち，

　積立金 > 責任準備金であれば（積立金 – 責任準備金）が財政上の剰余金

　積立金 < 責任準備金であれば（責任準備金 – 積立金）が財政上の不足金

となる。

このような検討により当初の予測と決算実績とでかなりの変動が生じた場合は，現行の保険料率自体に問題があることが考えられ，現行の保険料率の適正水準はどの辺にあるかといった面を検討する必要があり，例えば，確定給付企業年金や厚生年金基金では，不足金の大きさが一定水準以上になれば，保険料率の見直しを行うことになっている。

また，同時にそのような変動が発生した要因を分析することも財政決算においては重要である。

例えば，剰余金，不足金がゼロに近くても，ある要因については大幅に剰余，ある要因については大幅に不足で相殺されてゼロでは財政上健全とはいえない。各要因における剰余，不足の発生理由を検討し，諸計算基礎率の妥当性，保険料

率の妥当性をも検討し，財政状態を把握することが必要である。

2.　財政決算の考え方

先程も述べた通り，決算では責任準備金と積立金を対比することにより，財政がどのような状態にあるかを把握する。

決算時の責任準備金の評価の際には，年金制度発足時（又は前回再計算時）に算定された計算基礎率（予定利率，予定脱退率，予定昇給率，予定死亡率等）を使用することになるが，1 年間の各基礎率の動きが予定通りであるならば，決算年度末において過不足が生じず，

積立金 = 責任準備金

となるはずである。

実際には，基礎率が予定通り推移することはなく

積立金 > 責任準備金　（両者の差を剰余金という）

又は，積立金 < 責任準備金　（両者の差を不足金という）

となる。

財政決算では，決算年度末の責任準備金と積立金の状態を貸借対照表で表わし，1 年間の保険料，給付金等のフローを損益計算書で表わす。

n 年度末責任準備金…V_n

n 年度末積立金　　…F_n

n 年度中の保険料　…C_n

n 年度中の給付金　…B_n

n 年度中の利息収入…I_n

とし，$(n-1)$ 年度末に財政上過不足がなかったとすると，$(n-1)$ 年度末の貸借対照表は次の様になっているはずである。

$(n-1)$年度末貸借対照表

積立金　F_{n-1}	責任準備金　V_{n-1}

予定利率を i とし，掛金，給付が年度期初に行われるとすると，予定通り推移した場合の n 年度末の責任準備金は，

$$V_n = V_{n-1} + C_n - B_n + I_n \qquad (I_n = (F_{n-1} + C_n - B_n) \cdot i \quad n\text{年度中の利息収入})$$

$$= F_{n-1} + C_n - B_n + I_n \qquad (F_{n-1} = V_{n-1})$$

$$= F_n$$

となり，

n 年度末貸借対照表

積立金　F_n	責任準備金　V_n

n 年度損益計算書

給付金	B_n	保険料	C_n
n 年度末責任準備金	V_n	利息収入	I_n
		$(n-1)$年度末責任準備金	V_{n-1}

となる。

基礎率等が予定通りに推移しなかった場合は，例えば n 年度中の剰余金を M_n とし，n 年度末責任準備金等にダッシュ（$'$）をつけて表わすと，

$$M_n = V_{n-1} + C'_n - B'_n + I'_n - V'_n$$

$$= F_{n-1} + C'_n - B'_n + I'_n - V'_n$$

$$= F'_n - V'_n$$

となり，

n 年度末貸借対照表

F'_n	V'_n
	M_n

n 年度損益計算書

B'_n	C'_n
V'_n	I'_n
M_n	V_{n-1}

となり，M_n を翌年度に繰越す。

（例 1.）

1 年度末積立金＝100

1 年度末責任準備金＝100

とし，2 年度中の保険料＝50　給付金＝30

予定利率＝ 5 %とすると

理論上は,

利息収入＝(100＋50－30)×0.05＝6

2 年度末責任準備金＝ 2 年度末積立金＝100＋50－30＋6＝126

となり,

2 年度末貸借対照表

2 年度末積立金	126	2 年度末責任準備金	126

2 年度損益計算書

給付金	30	保険料	50
2 年度末責任準備金	126	利息収入	6
		1 年度末責任準備金	100
	156		156

となる。

2 年度末責任準備金が，予定と違い 120 となったとすると，

剰余金 = 126 − 120 = 6 となるので，

2 年度末貸借対照表

2 年度末積立金	126	2 年度末責任準備金	120
		剰余金	6
	126		126

2 年度損益計算書

給付金	30	保険料	50
2 年度末責任準備金	120	利息収入	6
剰余金	6	1 年度末責任準備金	100
	156		156

となる。

利回りが予定とは異なり 10%であったとすると，

利息収入 =(100 + 50 − 30)× 0. 10 = 12

2 年度末積立金 = 100 + 50 − 30 + 12 = 132

となり，剰余金 = 132 − 126 = 6 となるので，

2 年度末貸借対照表

2 年度末積立金	132	2 年度末責任準備金	126
		剰余金	6
	132		132

2 年度損益計算書

給付金	30	保険料	50
2 年度末責任準備金	126	利息収入	12
剰余金	6	1 年度末責任準備金	100
	162		162

となる。

先程のケースで，$(n+1)$年度について考えてみる。$(n+1)$年度中の剰余金をM_{n+1}とすると，

$$M_{n+1}=V'_n+C'_{n+1}-B'_{n+1}+I'_{n+1}-V'_{n+1}$$

$$=F'_n-M_n+C'_{n+1}-B'_{n+1}+I'_{n+1}-V'_{n+1}\quad(\because F'_n=V'_n+M_n)$$

$$=F'_{n+1}-V'_{n+1}-M_n$$

となり，

$(n+1)$年度末貸借対照表

F'_{n+1}	V'_{n+1}
	M_n
	M_{n+1}

$(n+1)$年度損益計算書

B'_{n+1}	C'_{n+1}
V'_{n+1}	I'_{n+1}
M_{n+1}	V'_n

となり，M_n+M_{n+1}を翌年度に繰越す。

また，n年度中の剰余金M_nが，$M_n<0$の場合，決算上M_nを不足金とよび，$m_n=-M_n$とすると，

n 年度末貸借対照表

F'_n	V'_n
m_n	

n 年度損益計算書

B_n	C_n
V_n	I_n
	V_{n-1}
	m_n

となり，m_n を翌年度に繰越す。

n 年度が剰余金 M_n，$(n+1)$年度が不足金 m_{n+1} であれば，

$M_n - m_{n+1} > 0$ の時，$M_n - m_{n+1}$ を剰余金として翌年度に繰越し，

$M_n - m_{n+1} < 0$ の時，$-(M_n - m_{n+1})$ を不足金として翌年度に繰越す。

（例 2.）

先程の例 1. の 2 年度末責任準備金 = 120 となったケースの続きで，3 年度の保険料 = 50，給付金 = 30，利回り = 5% とすると，3 年度末積立金は，

$$126 + 50 - 30 + (126 + 50 - 30) \times 0.05 = 153.3$$

このとき，3 年度末責任準備金が 140 であったとすると，

$$3 \text{ 年度剰余金} = 153.3 - 140 - 6 = 7.3$$

であり，剰余金合計 = 6 + 7.3 = 13.3

となり，

3 年度末貸借対照表

3 年度末積立金	153.3	3 年度末責任準備金	140
		剰余金合計	13.3
	153.3		153.3

3年度損益計算書

給付金	30	保険料	50
3年度末責任準備金	140	利息収入	7.3
剰余金	7.3	2年度末責任準備金	120
	177.3		177.3

3. 財政決算の損益

先程，2.財政決算の考え方で述べた通り，決算年度中の計算基礎率が予定通り推移するならば，年度末において，

積立金＝責任準備金

となることがわかった。

それでは，計算基礎率の推移が予定通りではなかった場合について，次の様な年金制度について数値例を交えながら述べてみる。

・財政方式は特定年齢方式（予定新規加入年齢＝27歳）

・加入1年以上の脱退者に，最終給与×加入期間で計算される金額を給付（過去勤務期間は通算しない）

・保険料，給付金は年度初に発生

・定年退職者は，60歳となる年度初に脱退

・予定基礎率は，別表3－1の通り（予定利率は5.5%）

・人員構成は，別表3－2の通り

この場合，年齢別の標準保険料率は，別表3－3の通りとなるが，予定新規加入年齢＝27歳であるので，この年金制度の標準保険料率は，0.69373となる。

また，制度発足時の責任準備金＝14,053,286となり，

最初の1年間の保険料＝24,162,545

最初の1年間の予定給付＝0（加入期間0年のため）　　となる。

別表３－１（脱退残存表）

年齢	死亡脱退率	生存脱退率	標準給与
18	0.00074	0.03000	80,000
19	0.00075	0.03000	90,000
20	0.00075	0.03000	100,000
21	0.00074	0.03000	110,000
22	0.00073	0.03000	120,000
23	0.00072	0.03000	130,000
24	0.00072	0.03000	140,000
25	0.00073	0.03000	150,000
26	0.00074	0.03000	160,000
27	0.00077	0.03000	170,000
28	0.00078	0.03000	180,000
29	0.00080	0.03000	190,000
30	0.00083	0.03000	200,000
31	0.00087	0.03000	210,000
32	0.00092	0.03000	220,000
33	0.00099	0.03000	230,000
34	0.00108	0.03000	240,000
35	0.00118	0.03000	250,000
36	0.00129	0.03000	260,000
37	0.00141	0.03000	270,000
38	0.00153	0.03000	280,000
39	0.00167	0.03000	290,000
40	0.00183	0.03000	300,000
41	0.00201	0.03000	310,000
42	0.00224	0.03000	320,000
43	0.00250	0.03000	330,000
44	0.00282	0.03000	340,000
45	0.00320	0.03000	350,000
46	0.00358	0.03000	360,000
47	0.00394	0.03000	370,000
48	0.00426	0.03000	380,000
49	0.00454	0.03000	390,000
50	0.00485	0.03000	400,000
51	0.00520	0.03000	410,000
52	0.00561	0.03000	420,000
53	0.00606	0.03000	430,000
54	0.00652	0.03000	440,000
55	0.00703	0.03000	450,000
56	0.00762	0.03000	460,000
57	0.00834	0.03000	470,000
58	0.00920	0.03000	480,000
59	0.01012	0.03000	490,000
60			500,000

別表３－２（人員構成表）

年齢	人数	給与
18	5	598,260
19	9	1,086,782
20	8	982,794
21	12	1,476,182
22	13	1,656,943
23	16	2,065,874
24	13	1,729,056
25	13	1,782,093
26	7	974,386
27	9	1,377,572
28	5	742,100
29	9	1,384,009
30	2	320,265
31	9	1,471,268
32	3	531,010
33	6	1,029,196
34	7	1,320,356
35	4	745,118
36	3	542,415
37	1	222,555
38	1	158,085
39	1	146,025
40	2	451,561
41	3	678,330
42	1	201,134
43	4	890,309
44	6	1,344,105
45	5	1,265,524
46	2	368,550
47	4	923,389
48	5	1,190,964
49	0	0
50	1	369,709
51	4	814,167
52	2	458,926
53	3	826,208
54	1	253,813
55	3	723,331
56	2	418,584
57	6	1,308,950
58	0	0
59	0	0
60	0	0
合計	210	34,829,898

別表３－３（年齢別保険料率）

年齢	保険率
18	0.73735
19	0.72783
20	0.71979
21	0.71307
22	0.70751
23	0.70300
24	0.69945
25	0.69676
26	0.69488
27	0.69373
28	0.69328
29	0.69348
30	0.69430
31	0.69569
32	0.69765
33	0.70014
34	0.70315
35	0.70666
36	0.71066
37	0.71514
38	0.72008
39	0.72549
40	0.73134
41	0.73765
42	0.74440
43	0.75159
44	0.75922
45	0.76731
46	0.77584
47	0.78484
48	0.79429
49	0.80420
50	0.81457
51	0.82538
52	0.83665
53	0.84838
54	0.86058
55	0.87323
56	0.88633
57	0.89989
58	0.91391
59	0.92841

制度発足時に，積立金＝責任準備金が成り立っているとすると，1 年後の貸借対照表，損益計算書は次の通りとなる。

貸借対照表

F_1	40, 317, 702	V_1	40, 317, 702

損益計算書

B_1	0	C_1	24, 162, 545
V_1	40, 317, 702	I_1	2, 101, 871
		V_0	14, 053, 286
	40, 317, 702		40, 317, 702

次に，計算基礎率が予定通り推移しなかった場合の財政上の各損益について考えてみる。

ア，利　差

積立金の実際の運用利回りが，予定利率と異なる場合に発生する。例えば，実際の運用利回りが，7. 0%であったとすると，

$$I_1 = 14,053,286 \times 0.07 + 24,162,545 \times 0.07$$
$$= 2,675,108$$
$$F_1 = 14,053,286 + 24,162,545 + 2,675,108$$
$$= 40,890,939$$

となるのに対して，責任準備金の算出は，予定利率により行うから，7. 0%の場合の利息収入と 5. 5%の場合の利息収入の差

$$2,675,108 - 2,101,871 = 573,237$$

が剰余金となる。

貸借対照表

F_1	40, 890, 939	V_1	40, 317, 702
		M_1	573, 237
	40, 890, 939		40, 890, 939

損益計算書

B_1	0	C_1	24, 162, 545
V_1	40, 317, 702	I_1	2, 675, 108
M_1	573, 237	V_0	14, 053, 286
	40, 890, 939		40, 890, 939

イ，新規加入者

実際の新規加入の被保険者が予定と相違した場合に発生する。

特定年齢方式の場合，予定新規加入年齢で加入した場合，給付現価＝標準保険料収入現価となり責任準備金＝0となる。その他の年齢で加入した場合，年齢別標準保険料と年金制度の標準保険料に乖離が生じるため，責任準備金が発生することになる。

例えば，年度末に35歳で1名新規加入したとする。（給与＝250, 000）

この者の責任準備金＝250, 000×0. 18110（35歳の責任準備金率）

＝45, 275

となるから，$V_1 = 40,317,702 + 45,275 = 40,362,977$

となり，年度末の加入であることから，保険料，給付金等には影響がなく，この者の責任準備金45, 275が不足金となる。

貸借対照表

F_1	40,317,702	V_1	40,362,977
m_1	45,275		
	40,362,977		40,362,977

損益計算書

B_1	0	C_1	24,162,545
V_1	40,362,977	I_1	2,101,871
		V_0	14,053,286
		m_1	45,275
	40,362,977		40,362,977

ウ，昇給差

実際の昇給状況が予定と相違した場合に発生する。

最終給与比例方式の場合，例えば，予定より10%多く昇給したとすると責任準備金も10%増加することとなり，この分が不足金発生の要素となる。

年度末に10%多く昇給した場合，

$V_1 = 40,317,702 \times 1.1 = 44,349,472$

となり，一方年度末に予定より多く昇給することから，保険料，給付金等には影響がなく，10%の昇給分

$44,349,472 - 40,317,702 = 4,031,770$

が不足金となる。

なお，全期間平均給与比例の場合は，最終給与比例の場合に比べて，昇給が財政損益に与える影響が小さい。

貸借対照表

F_1	40, 317, 702	V_1	44, 349, 472
m_1	4, 031, 770		
	44, 349, 472		44, 349, 472

損益計算書

B_1	0	C_1	24, 162, 545
V_1	44, 349, 472	I_1	2, 101, 871
		V_0	14, 053, 286
		m_1	4, 031, 770
	44, 349, 472		44, 349, 472

エ，脱退差

実際の脱退状況が予定と相違した場合に発生する。

年金制度においては一般的には，将来の高い給付を受けるために，平準化された保険料を事前積立するのであるから，予定より早く脱退すれば積立のみを行って予定より低めの給付を受けることになり剰余の要因となる。例えば，顕著な例として定年退職者のみに給付を行う制度の場合，定年到達前に予定以上に脱退すれば予定以上に年金制度に積立金が残ることになる。

36 歳の 3 名（給与合計＝542, 415）が全員年度初に脱退した場合，この 3 名の給付金＝542, 415 × 0＝0

3 名の責任準備金＝542, 415 × 1. 52761（年度末の責任準備金率）

＝828, 599

となり，責任準備金が 828, 599 減少することになる。(積立金は減少しない)

ここで，36 歳の予定脱退率＝0. 00129＋0. 030000＝0. 03129 であるので，

予定通りであれば，36 歳での脱退者数は 3 × 0. 03129＝0. 09387 名であり，

責任準備金の減少は 542, 415 × 0. 03129 × 1. 52761＝25, 927 のはずであり，

給付金$=542,415\times 0.03129\times 0 = 0$となるはずである。

従って，$828,599-25,927=802,672$余分に責任準備金が減少することになるから（給付は予定も実際もゼロであるから積立金はかわらず）802,672の剰余金となる。

$F_1=14,053,286+24,162,545+2,101,871=40,317,702$

$V_1=40,317,702-802,672=39,515,030$

となり，802,672の剰余金が発生する。

貸借対照表

F_1	40,317,702	V_1	39,515,030
		M_1	802,672
	40,317,702		40,317,702

損益計算書

B_1	0	C_1	24,162,545
V_1	39,515,030	I_1	2,101,871
M_1	802,672	V_0	14,053,286
	40,317,702		40,317,702

オ，死　差

被保険者及び年金受給権者の死亡状況が予定と相違する場合に発生する。

被保険者の死亡については脱退差と同じであるが，生存脱退に比べて死亡脱退の確率はかなり小さくなるため，財政損益に与える影響は小さい。

また，年金受給権者についても，年金の内容が確定年金の場合や，年金受給権者が少ない場合はそれほど影響がなく，大きな影響が出るのは終身年金の場合である。例えば，保証期間付終身年金を受給中の者が保証期間中に死亡した場合，終身部分の給付現価相当の積立金が剰余となる。

4.　財政再計算

財政決算においては，直近の財政再計算時（または制度発足時）に算出した計算基礎率にもとづいて責任準備金を算出し，剰余，不足の要因分析を行うことにより計算基礎率の妥当性，保険料率の妥当性をも検討し，財政状態を把握したが，計算基礎率，保険料率の見直しは原則行っていない。

しかるに，年金制度は長期にわたって運営されるべきものであるから，財政の安定のためには定期的に予定を見直す必要がある。財政再計算では，各年度の財政決算結果により計算基礎率を見直し，必要であればこれを変更し，将来の財政の均衡が保たれるように保険料を算出しなおす。

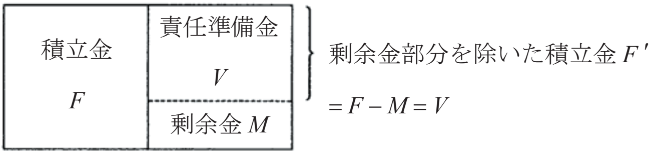
この際の収支相等の算式は，新計算基礎率，新保険料率により算出した責任準備金 V，積立金 F，剰余金 M として，

$$F = V + M$$

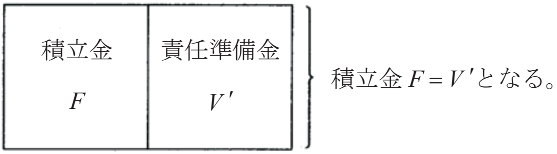
となる。（つまり，剰余金 M を温存して，剰余金部分を除いた積立金（$F - M$）と V が収支相等するように保険料率を決定することになる。剰余金については将来の給付改善等に充当することになる。）

ここで，開放基金方式の場合，剰余金の処理の方法として保険料率引下げに使用する方法がある。つまり，$V = F - M$ となるよう保険料率を決定しているのを，M を使用することにより $V' = V + M = F$ という新たな収支相等を成り立たせて保険料率を決定するのである。

剰余金温存



剰余金使用



S^{a}_{FS} ：在職中の被保険者の将来加入期間対応の給付現価

S^{a} ：在職中の被保険者の全加入期間対応の給付現価

S^{f} ：将来の被保険者の給付現価

G^{a} ：在職中の被保険者の給与現価

G^{f} ：将来の被保険者の給与現価

S^{p} ：年金受給者，受給待期者等の給付現価

とした場合

標準保険料率 P^{o} は

$$P^{o} = \frac{S^{a}_{FS} + S^{f}}{G^{a} + G^{f}}$$

となるが，このとき必ずしも

$$F - M = S^{a} + S^{f} + S^{p} - P^{o} \cdot (G^{a} + G^{f})$$

とはならないため，P^{o} を引上げ，又は，引下げ調整して

$$F - M = S^{a} + S^{f} + S^{p} - P \cdot (G^{a} + G^{f})$$

となるように，保険料率を定めることになる。

このとき，

$$U = S^a + S^f + S^p - P^o \cdot (G^a + G^f) - (F - M) > 0$$

となる場合，U を有限償却し（n 年）

$$P = P^o + \frac{U}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$$

として，P を定め（保険料率引上げ）

$$U < 0$$

となる場合は，U を永久償却し

$$P = P^o + \frac{U}{G^a + G^f}$$

として，P を定める。（保険料率引下げ）

ここで，剰余金 M を使用して保険料率を引下げる場合

$$F = S^a + S^f + S^p - P' \cdot (G^a + G^f)$$

となる。P' を定めるのであるが，

$$U' = U - M$$

とすると，

(i) $U > 0$ かつ $U' > 0$ の場合

$$P = P^o + \frac{U - M}{\bar{a}_{\overline{n}|}}$$

となり，$M / \bar{a}_{\overline{n}|}$ だけ保険料率を引下げることができる。

(ii) $U > 0$ かつ $U' < 0$ の場合

$$P = P^o + \frac{U - M}{G^a + G^f}$$

となり，$U / \bar{a}_{\overline{n}|} - (U - M) / (G^a + G^f)$ だけ保険料率を引下げることができる。

(iii) $U < 0$ の場合 （$U' < 0$ は明らか）

$$P = P^o + \frac{U - M}{G^a + G^f}$$

となり，$M/(G^a + G^f)$だけ保険料率を引下げることができる。

不足金 m の場合は，収支相等は

$$F + m = V$$

であることから，これを解消した場合は

$$F = V - m = V'$$

という収支相等となる。

不足金そのまま

積立金 F	責任準備金 V
不足金 m	

不足金相当の積立金が存在するものとして収支相等することになる。

不足金を解消

積立金 F	責任準備金 V

確定給付企業年金制度や厚生年金基金制度では，財政再計算時に原則として不足金を解消して保険料率を決定することになる。

（例）

開放基金方式で，次の諸数値が与えられている場合，

$S^a_{FS} = 688,421$　　$G^a = 12,668,846$

$S^f = 1,016,683$　　$G^f = 25,770,798$

$S^a = 1,444,662$　　$S^p = 294,945$

$F = 1,195,228$

M ＝　100, 000

⒤　剰余金を温存して，収支相等する保険料率 P は,

$$F-M=S^{a}+S^{f}+S^{p}-P\cdot(G^{a}+G^{f})$$

より，1, 195, 228 − 100, 000

$$=1,444,662+1,016,683+294,945-P\cdot(12,668,846+25,770,798)$$

従って，$P=0.04321$ となる。

このケースで，標準保険料率 P^{o} を算出すると,

$$P^{o}=\frac{688,421+1,016,683}{12,668,846+25,770,798}=0.04436$$

となるが，収支相等を保つために，0. 00115 の保険料率の引下げ調整を行うことになる。

(ii)　剰余金を使用して保険料率を引下げる場合

$$F=S^{a}+S^{f}+S^{p}-P\cdot(G^{a}+G^{f})$$

より，1, 195, 228

$$=1,444,662+1,016,683+294,945-P\cdot(12,668,846+25,770,798)$$

従って，$P=0.04061$ となり，⒤のケースより 0. 00260 保険料率を引下げることができる。

$$M/(G^{a}+G^{f})=100,000/(12,668,946+25,770,798)$$

$$=0.00260$$

であることから，先程の結果が数値例でも検証できた。

第３章　練　習　問　題

１．ある年金制度で財政再計算を行ったところ，次のような状況となった。

⑴　保険料・給付とも給与比例制で，被保険者の給与合計額は B

⑵　標準保険料率は P_1

⑶　特別保険料率は P_2

⑷　積立金は F で，年金受給権者はいない。

このとき，給与を一律２倍とし，給付率を一律 $\dfrac{1}{2}$ とする制度変更を行うとすると，標準保険料率および特別保険料率はどうなるかを導け。

なお，過去勤務債務の償却割合 r 等他の前提の変更はないものとする。

２．ある年金制度は既に定常人口になっているものとする。

期初の被保険者の総数を L，脱退残存表による x 歳の被保険者数を l_x，

$\varepsilon_x = \left(\sum_{y=x}^{r-1} l_y\right) / l_x$ （ここで，r は定年年齢）とする。次の各問に答えよ。

⑴　毎年期初に x_0 歳で新規加入があるとした場合，毎年の新規加入者数を求めよ。

⑵　毎年期初に x_1 歳と x_2 歳で３：１の割合で新規加入があるとした場合，それぞれの年齢の毎年の新規加入者数を求めよ。

⑶　上記⑵の場合にこの年金制度を加入年齢方式（特定年齢方式）で運営したとする。標準保険料率を決定するために加入年齢 x_1 歳を用いた場合，毎年発

生する後発過去勤務債務の額を示せ。

ここで，$x_1 < x_2$ とし，制度内容は Trowbridge モデル（定年退職者に即時支給開始終身年金を支給）によるものとする。

3．生存退職者に加入全期間の給与累計額に比例する年金額を給付する制度（死亡給付はないものとする）において，次のように過去勤務期間を通算することとした。

すなわち，制度発足時に，過去勤務期間に対応する給付の算定方式として，発足時給与と給与指数によって過去勤務期間のみなし給与累計額を推定し，それに対しては発足後の将来勤務期間の給与累計額に対する支給率の σ 割合を乗ずることとする。

この場合，発足後直ちに一律 j の給与改定があったとすれば，これによって何程の不足が計上されるか。

なお，計算に当っては次の条件を仮定せよ。

⑴　財政方式は加入年齢方式（特定年齢方式）とし，過去勤務債務は有限積立を行なう。

⑵　被保険者は一定年齢 x_0 歳において，年 1 回加入する。

⑶　人員，給与は定常人口にある。

⑷　保険料は加入応当日ごとの年払とし，制度は定時加入日に発足する。

4．最終給与比例制で，かつ，過去勤務期間を完全に通算する年金制度において，過去勤務債務償却を定率（給与比例）による凍結方式とし，再計算期まで特別保険料率の変更を行なわないことにした。

制度発足後毎年期末に一定率の給与改定（給与改定率は予定利率と等しいものとする）がある場合，n 年経過後に再計算を行なうものとして再計算前と再

計算後の特別保険料率の大小を比較せよ。この場合，被保険者集団は定常人口にあり，経験率は予定の基礎率に等しいものとする。

5．ある最終給与比例制の年金制度において財政再計算を行ったところ、次の諸数値が得られた。財政方式として、加入年齢方式を採用して期初未積立債務の x%を期初払いで償却する場合と、閉鎖型総合保険料方式を採用した場合とで初年度の保険料総額が等しくなる場合、x に最も近いものを選択肢の中から1つ選びなさい。なお、保険料の払い込みは年1回であるものとする。

項目		金額（千円）
S^p	年金受給権者の給付現価	1,000,000
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の被保険者期間に対応する給付現価	3,000,000
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の被保険者期間に対応する給付現価	3,000,000
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	3,000,000
G^a	在職中の被保険者の給与現価	12,500,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	20,000,000
F	積立金残高	4,000,000
i	予定利率	2.0%
―	給与総額（年間）	1,000,000

(A)　5　　(B)　6　　(C)　7　　(D)　8　　(E)　9

(F)　10　　(G)　11　　(H)　12　　(I)　13　　(J)　14

６．定常状態にある企業の年金制度を考える。

≪制度内容≫

加入時期	年１回期初加入
給付内容	「(加入全期間における毎期初の給与の累計額（定年到達時は（定年＋１）歳までの累計とする。）×α）の年金額を、脱退時から年１回期初払いで生死に関わらず n 年間支給する。
昇給時期	年１回期初昇給
脱退時期	年１回期末脱退（死亡による脱退は発生しない）。 定年退職は定年到達時の期初に脱退。
拠出方法	「昇給後給与合計×保険料率」を年１回期初払い。
財政方式	加入年齢方式（加入年齢 x_e 歳）

必要であれば以下の記号および計算基数を用いよ。

x_e ：加入年齢、 x_r ：定年年齢、 L_x ： x 歳の被保険者数、

B_x ： x 歳の１人あたり給与、b_x ： 給与指数、i：予定利率、

$\ddot{a}_{\overline{n|}}$ ：利率 i の期初払い n 年確定年金現価率

D_x 、 C_x 等の計算基数は、生存脱退のみを考えた場合の期初拠出、期末脱退に対応したものと考えること。また、b_x は x に関して単調増加であるものとする。

なお、以下の設問において、責任準備金は期初の昇給直後・加入直後・保険料の拠出直前のものと考えること。

(1) 標準保険料率および制度全体の被保険者の責任準備金を求めよ。

(2) ある昇給時期に一律 β のベースアップがあった場合に発生する後発過去勤務債務を求めよ。なお、ここで言うベースアップとは、過去の給与累計には影響せず、将来にわたっての給与が従前の(1+β)（β>0）となるものとする。

(3) 給付内容は上表の「制度内容」と同じ条件で、拠出方法を「昇給後給与合計×保険料率（年１回期初払い)」から「期初被保険者数×保険料率（年１回期初払い)」に変更（すなわち、給与合計に比例した保険料から被保険者数に比例した保険料に変更）した場合、変更後の被保険者の責任準備金と(1)で求めた従前の被保険者の責任準備金の大小関係を示せ。((注）本問では、当該拠出方法の変更についての可否は問題にしないこととする。)

7. ある年金制度は財政再計算時に財政方式を加入年齢方式から開放基金方式に見直すことを検討している。なお、財政再計算前後の諸数値の前提条件は以下のとおりとする。

項目		財政再計算前	財政再計算後 （給付改善なし）
S^p	年金受給権者の給付現価	10,000	10,040
S^a_{PS}	在職中の被保険者の過去の加入期間に対応する給付現価	9,500	9,600
S^a_{FS}	在職中の被保険者の将来の加入期間に対応する給付現価	6,300	6,840
S^f	将来加入が見込まれる被保険者の給付現価	7,000	7,560
G^a	在職中の被保険者の給与現価	70,000	78,000
G^f	将来加入が見込まれる被保険者の給与現価	70,000	72,000
F	積立金残高	20,000	20,000
M	年金制度上の剰余金	1,200	次の(Ⅰ)または(Ⅱ)のとおり

上表のとおり、年金制度上の剰余金があるため、財政再計算時に財政方式の変更に合わせ、次のような変更を検討の選択肢として考えている。

(Ⅰ) 年金制度上の剰余金は将来の給付改善に利用するための準備金として温

存し、保険料率を設定する。

(Ⅱ)年金制度上の剰余金は将来の給付改善に利用するための準備金として温存しないで、財政再計算時点で将来および現在の被保険者、年金受給権者全対象者の給付を一律α%改善する。

このとき、標準保険料率と特別保険料率（存在する場合）の合計率は(Ⅰ)による変更の場合、再計算前の保険料率の 10%増であったのに対し、(Ⅱ)による変更では再計算前の保険料率の 80%増になったとすると、給付改善比率α%の数値（%単位で小数点以下第２位を四捨五入）はいくらか。

次の選択肢の中から最も適切なものを１つ選びなさい。

なお、財政再計算前は特別保険料の設定はなかったものとし、財政再計算後の特別保険料率は(Ⅰ)(Ⅱ)ともに償却年数の等しい元利均等償却方式によって算定するものとする。また、計算過程において小数点以下の端数が生じた場合には、小数点以下第５位を四捨五入し小数点以下第４位まで求めた数値を使用して計算しなさい。

(A) 13.3　(B) 16.5　(C) 18.4　(D) 21.3　(E) 22.6

(F) 26.7　(G) 31.5　(H) 32.6　(I) 34.8　(J) いずれにも該当しない

８．財政方式は加入年齢方式、給付は加入３年以上の脱退者に対し年度末に「脱退時給与×加入者期間」の額を支給し、保険料は給与に比例して拠出する年金制度があり、制度発足後、初めての事業年度末に財政決算を行った。当該事業年度では計算基礎率どおり推移しなかったことから損益が発生した。損益発生の理由は以下のとおりであり、それ以外を理由に損益は発生していない。なお、この年金制度発足時の加入者については過去勤務期間を通算しない取り扱いとしている。

①利差損益

予定利率を 2.0%としていたが、実際の運用利回りが 5.75%であった。

②新規加入差損益

予定加入年齢を 30 歳としているが、年度末に年齢 31 歳で新規に 2 名加入した。なお、当該加入者の加入時給与は 1 名あたり 250 千円、年度末責任準備金率（給与 1 円あたりの率）は 0.13207。

③昇給差損益

全加入者一律で、年度末に予定より 3%多く昇給した。（ただし、②の新規加入者は考慮しない。）

その他の前提は以下である。

期初積立金	23,789 千円	保険料 （期初払い）	314 千円
期初 責任準備金	23,789 千円	決算期間	1 年

このとき、発生した損益の合計額は $\boxed{a}$ 千円の利益となる。

a を求めなさい。

理論編　練習問題解答例

第１章

１．(1)　$\dfrac{10{,}000}{l_{30}} \times \sum_{x=30}^{59} l_x$

(2)　$\dfrac{10{,}000}{l_{30}} \times \sum_{x=30}^{39} (l_x - l_{60})$

２．　$\mathring{e}_x = 60 - 0.8\,x$

$$\frac{d\mathring{e}_x}{dx} = -0.8$$

一方，$\dfrac{d\mathring{e}_x}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\int_x^\infty l_y\ dy}{l_x} \right)$

$$= \frac{-l_x^2 - \dfrac{dl_x}{dx} \cdot \int_x^\infty l_y\ dy}{l_x^2}$$

$$= \mathring{e}_x \cdot \mu_x - 1$$

$$\therefore \mu_x = \frac{1}{300 - 4x}$$

$$l_x = l_0 \cdot exp\left\{ -\int_0^x \mu_y dy \right\}$$

$$= l_0 \cdot exp\left[\frac{1}{4} \log(300 - 4x) \right]_0^x$$

$$=100{,}000\times\left(\frac{300-4x}{300}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$=100{,}000\times\left(1-\frac{x}{75}\right)^{\frac{1}{4}}$$

3．　$$\int_0^1 \mu_{x+t}dt=\int_0^1\frac{a}{1+at}dt=\left[\log\left(t+\frac{1}{a}\right)\right]_0^1$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{a}\right)-\log\frac{1}{a}=\log(1+a)$$

したがって

$$q_x=1-e^{-\int_0^1\mu_{x+t}dt}=1-e^{-\log(1+a)}=1-\frac{1}{1+a}$$

$$1+a=\frac{1}{1-q_x},\ a=\frac{q_x}{1-q_x}$$

4．　$$\frac{D_{x+1}}{D_x}=v\cdot p_x\qquad\therefore\quad 1+i=\frac{1}{v}=\frac{D_x}{D_{x+1}}\cdot p_x$$

$$=1.0600\cdots$$

（答）6.0％

5．この制度の平均年齢は、

平均年齢＝$\dfrac{\int_a^{3a}y\cdot l_y dy}{\int_a^{3a}l_y dy}$＝37.78 が成立する。

ここで、$\int_a^{3a} l_y dy = 6a^2$、$\int_a^{3a} y \cdot l_y dy = \dfrac{34}{3}a^3$ より、$\dfrac{17}{9}a = 37.78$

$a = 20.0$、つまり $a = 20$ となる。

次に $2a = 40$ 歳以上で脱退する者の脱退時平均年齢は

$$40 + \frac{\int_{40}^{60} l_y dy}{l_{40}} = 40 + \frac{1,000}{60} = 56.67$$

これより答えは 57 歳となる。

よって、解答は（H）

6．従前の集団全体の人口は $\int_0^\omega l_x dx$、t 年後の集団全体の人口は $\alpha \cdot \int_0^t l_x dx + \int_t^\omega l_x dx$

と表せるから、$\alpha \cdot \int_0^t l_x dx + \int_t^\omega l_x dx = \beta \cdot \int_0^\omega l_x dx$ が成り立つ。

$$\beta = \frac{\alpha \cdot \int_0^t l_x dx + \int_t^\omega l_x dx}{\int_0^\omega l_x dx} = \frac{\alpha \cdot \int_0^\omega l_x dx + (1-\alpha) \cdot \int_t^\omega l_x dx}{\int_0^\omega l_x dx} = \alpha + (1-\alpha) \cdot \frac{l_t}{l_0} \cdot \frac{\dfrac{\int_t^\omega l_x dx}{l_t}}{\dfrac{\int_0^\omega l_x dx}{l_0}}$$

$$= \alpha + (1-\alpha) \cdot {}_t p_0 \cdot \frac{\mathring{e}_t}{\mathring{e}_0} \quad \cdots 解答（G）$$

7．x 歳の給与を B_x とすると、y 歳（$x < y$）の給与は

$$B_y = B_x \times (1 + R_x) \times (1 + R_{x+1}) \times \cdots \times (1 + R_{y-1})$$

となる。

ここで、

$$1+R_x=1+\frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)}-x\cdot f_{(x)}}{x\cdot f_{(x)}}=\frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)}}{x\cdot f_{(x)}}$$

であるから、

$$B_y=B_x\times\frac{1.02(x+1)\cdot f_{(x+1)}}{x\cdot f_{(x)}}\times\frac{1.02(x+2)\cdot f_{(x+2)}}{(x+1)\cdot f_{(x+1)}}\times\cdots\times\frac{1.02y\cdot f_{(y)}}{(y-1)\cdot f_{(y-1)}}$$

$$=\frac{1.02^{(y-x)}\cdot y\cdot f_{(y)}}{x\cdot f_{(x)}}$$

よって、$B_{40}=100{,}000\times\dfrac{1.02^{(40-20)}\cdot 40\cdot 30}{20\cdot 20}=445{,}784$ …解答（Ｅ）

８．動態的昇給率による給与指数は$b'_x=b_x\cdot(1+r)^{x-15}$とかけるから、

$\dfrac{300{,}000}{200{,}000}=\dfrac{b_{35}}{b_{25}}\cdot(1+r)^{10}=\dfrac{1+20k}{1+10k}\cdot 1.025^{10}$　これを整理して、

$\dfrac{1.5}{1.025^{10}}=2-\dfrac{1}{1+10k}$、 $1+10k=\dfrac{1}{2-\dfrac{1.5}{1.025^{10}}}=1.2074\cdots$

$k=0.02074\cdots$

よって、解答は（Ｆ）

９． $d_{25}^{(w)} = l_{25}^{(T)} \cdot q_{25}^{(w)} = 100{,}000 \cdot 0.06226 = 6{,}226$ 等により残存表は以下の通りとなる。

年齢 x	残存数 $l_x^{(T)}$	生存脱退数 $d_x^{(w)}$	死亡脱退数 $d_x^{(d)}$	生存脱退率 $q_x^{(w)}$	死亡脱退率 $q_x^{(d)}$	死亡率 q_x
25	100, 000	6, 226	511	0. 06226	0. 00511	0. 00527
26	93, 263	5, 100	752	0. 05468	0. 00806	0. 00829
27	87, 411					

上記のうち、求めるべき q_{26} の算出は以下の通り。

脱退および死亡は一年を通じて一様に分布するから

$$q_{26} = \frac{d_{26}^{(d)}}{l_{26}^{(T)} - \frac{1}{2} d_{26}^{(w)}} = \frac{752}{93{,}263 - \frac{1}{2} \cdot 5{,}100} = 0.008289\cdots$$

よって、解答は（Ｉ）

第２章

１．　$a_{\overline{n}|}=\dfrac{1-v^n}{1-v}\cdot v=\dfrac{1-v^n}{i}$ ――――――⑴

$S_{\overline{n}|}=\dfrac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)}=\dfrac{(1+i)^n-1}{i}=\dfrac{1-v^n}{iv^n}$ ――――――⑵

⑴より $v^n=1-ia_{\overline{n}|}$ となりこれを⑵に代入すると

$S_{\overline{n}|}=\dfrac{1-(1-ia_{\overline{n}|})}{i(1-ia_{\overline{n}|})}$

$i(1-ia_{\overline{n}|})S_{\overline{n}|}=ia_{\overline{n}|}$ 　ここで $i\neq 0$ より

$(1-ia_{\overline{n}|})S_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}$

よって $i=\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}}-\dfrac{1}{S_{\overline{n}|}}$ となる。

これに $S_{\overline{n}|}=34.86832$　$a_{\overline{n}|}=11.95038$ を代入すると

$i=0.055$

２．　$a_{\overline{10}|}+\dfrac{1}{2}a_{\overline{10}|}\cdot v^{10}+\dfrac{1}{4}a_{\overline{10}|}\cdot v^{20}$

$=a_{\overline{10}|}\left(1+\dfrac{1}{2}v^{10}+\dfrac{1}{4}v^{20}\right)$ ――――――⑴

$a_{\overline{10}|}=7.722$：$v^{10}=0.61391$ を代入すると

⑴$=10.81988\cdots\cdots\fallingdotseq 10.820$

３． $a_x = \sum_{t=1}^{\omega} {}_t p_x v^t$ 　　　　ここで $p_x \geqq p_{x+t}$ ($t = 1, 2, 3, \cdots\cdots$) より

$$\leqq \sum_{t=1}^{\omega} (p_x v)^t \qquad \left(\because\ {}_t p_x \leqq (p_x)^t\right)$$

$$= \frac{p_x v}{1 - p_x v} = \frac{p_x}{1 + i - p_x} = \frac{p_x}{1 + i - (1 - q_x)} = \frac{p_x}{q_x + i}$$

４． $A_x \equiv \frac{1}{l_x}(v d_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots)$

$$A_{\overline{1+e_x}|} \equiv v^{1+e_x} = v^{\frac{1}{l_x}(l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots)} = v^{\frac{1}{l_x}(d_x + 2d_{x+1} + 3d_{x+2} + \cdots)}$$

とする。ここで A_x は v が d_x 個，v^2 が d_{x+1} 個…の相加平均であり，

$A_{\overline{1+e_x}|}$ は，その相乗平均である。

相加平均は，相乗平均より大きいので

$A_{\overline{1+e_x}|} < A_x$

$\therefore\quad 1 - d(1 + a_{\overline{e_x}|}) < 1 - d(1 + a_x)$ より

$a_{\overline{e_x}|} > a_x$

となる。

５． t 年目の年金額を B_t とすると，

$B_1 = 1$，$B_2 = 1 + R$，$B_3 = 1 + (B_1 + B_2) R = (1 + R)^2$

ここで，$B_k = (1 + R)^{k-1}$ とすると

$$B_{k+1} = 1 + R \cdot \sum_{t=1}^{k} B_t = 1 + R \cdot \frac{1 - (1 + R)^k}{1 - (1 + R)} = (1 + R)^k$$

よって数学的帰納法により，

$B_t = (1+R)^{t-1}\ (t = 1, 2, \cdots\cdots)$

従って，この年金の現価は$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}(1+R)^{t-1}\cdot v^{t-1} = \frac{1-\{(1+R)v\}^n}{1-(1+R)v}$となる。

故に，$\dfrac{1}{1+i'} = (1+R)v$ を満たす i' で年金額 1 の年金現価と等しくなる。

$$\left(i' = \frac{i-R}{1+R}\right)$$

6．題意より，

$$1 = b\cdot\ddot{a}_x + \left\{\sum_{t=1}^{\left[\frac{1}{b}\right]}\overline{C}_{x+t-1}\cdot(1-tb)\right\}/D_x \quad \text{———①}$$

ここで$\left[\dfrac{1}{b}\right]$は$\dfrac{1}{b}$の整数部を表す。

今，$b' = \dfrac{b}{1-b}$ とおくと

$b = \dfrac{b'}{1+b'}$ であり，$\ddot{a}_x = 1 + a_x$ であるから

各々を①に代入すると

$$1 = \frac{b'}{1+b'}(1+a_x) + \left\{\sum_{t=1}^{\left[\frac{1+b'}{b'}\right]}\overline{C}_{x+t-1}\left(1-t\frac{b'}{1+b'}\right)\right\}/D_x$$

両辺に $1+b'$ をかけて

$$1+b' = b'(1+a_x) + \left\{\sum_{t=1}^{\left[1+\frac{1}{b'}\right]}\overline{C}_{x+t-1}(1+b'-tb')\right\}/D_x \quad \text{より}$$

$$1 = b'a_x + \left\{\sum_{t=1}^{\left[1+\frac{1}{b'}\right]}\overline{C}_{x+t-1}\{1-(t-1)b'\}\right\}/D_x \quad \text{となる。}$$

これは，期末払の給付額が b' で元本が 1 である元本保証終身年金である。

７．題意より，${}_{4|}\ddot{a}_{\overline{20|}}+{}_{24|}\ddot{a}_x$ である。

８．$10,000\cdot a_{xyz}+8,000\cdot a_{\overset{[2]}{xyz}}+6,000\cdot a_{\overset{[1]}{xyz}}$

ここで，$a_{\overset{[2]}{xyz}}=(a_{xy}-a_{xyz})+(a_{yz}-a_{xyz})+(a_{zx}-a_{xyz})$

$$a_{\overset{[1]}{xyz}}=a_x-(a_{xy}+a_{zx}-a_{xyz})+a_y-(a_{yz}+a_{xy}-a_{xyz})$$
$$+a_z-(a_{yz}+a_{zx}-a_{xyz})$$

を代入して

与式$=6,000(a_x+a_y+a_z)-4,000(a_{xy}+a_{yz}+a_{zx})+4,000a_{xyz}$ となる。

９．$\delta=\log(1+i)$ とすると、①の年金額は $\dfrac{1}{\bar{a}_{\overline{n|}}}=\dfrac{\delta}{1-e^{-n\delta}}$ 、支給期間中の年金の総額は $\dfrac{n}{\bar{a}_{\overline{n|}}}=\dfrac{n\delta}{1-e^{-n\delta}}$

$\delta'=\log(1+i')$ とすると、同様に②の支給期間中の年金の総額は $\dfrac{n'\delta'}{1-e^{-n'\delta'}}$

ここで、$f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}=\int_0^1 e^{-xt}dt(x>0)$ とすると、$f(x)$ は x の単調減少関数かつ $f(x)>0$ であるから、題意より

$\dfrac{n\delta}{1-e^{-n\delta}}=\dfrac{n'\delta'}{1-e^{-n'\delta'}}\Leftrightarrow n\delta=n'\delta'\Leftrightarrow i'=(1+i)^{\frac{n}{n'}}-1$ …解答（F）

１０．年金Ｂの年金現価は $\left(1+\dfrac{1}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{10|}}-\dfrac{10v^9}{i}$

これが、年金Ａの年金現価 $K\ddot{a}_{\overline{10|}}$ と等しいので、$\left(1+\dfrac{1}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{10|}}-\dfrac{10v^9}{i}=K\ddot{a}_{\overline{10|}}$

となるKを求めればよい。

$$K=\left(1+\frac{1}{i}\right)-\frac{10v^9}{i\ddot{a}_{\overline{10|}}}=\frac{1}{1-v}-\frac{10v^9}{i\dfrac{1-v^{10}}{d}}=\frac{1}{1-v}-\frac{10v^{10}}{1-v^{10}}$$

$$=\frac{1}{1-0.9302}-\frac{10\times 0.4850}{1-0.4850}=4.909\cdots\fallingdotseq 4.9$$ …解答（E）

１１．初年度の給付額が１で、以降は「１＋（初年度から前年度までの給付の合計の2．0%）」を期初に給付するn年年金現価（予定利率i%）は、t年度の給付額をB_tとすると、$B_1=1$、$B_2=1.02$、$B_3=1+(B_1+B_2)\times 0.02=1.02^2$より

$B_k=1.02^{k-1}$と仮定すると、

$$B_{k+1}=1+\left(\sum_{t=1}^{k}B_t\right)\times 0.02=1+\frac{1-1.02^k}{1-1.02}\times 0.02=1.02^k \qquad \therefore B_t=1.02^{t-1}$$

よって、この年金の現価は、$\displaystyle\sum_{t=1}^{n}1.02^{t-1}\times\left(\frac{1}{1+i}\right)^{t-1}=\frac{1-\left(\dfrac{1.02}{1+i}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1.02}{1+i}\right)}$ …（ア）

n年間各期初に1を給付する年金現価（予定利率5．0%）は、$\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1.05}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{1.05}\right)}$ …（イ）

（ア）＝（イ）より、$\dfrac{1}{1.05}=\dfrac{1.02}{1+i}$ 　　$i=7.1\%$ …（ウ）

t年度の給付額t（$t\geq 1$）を期初に給付する永久年金現価（$I\ddot{a}_{\overline{m|}}$において$m\to\infty$としたもの、予定利率は$i$%とする）は、

①t年度の給付額がt（$t\geq 1$）である期初払m年年金現価（予定利率i%）

$$I\ddot{a}_{\overline{m|}}=\left(1+\frac{1}{i}\right)\ddot{a}_{\overline{m|}}-\frac{nv^{m-1}}{i}$$ （ただし$v=\dfrac{1}{1+i}$）

②m年間各期初に1を給付する年金現価（予定利率i%）

$$\ddot{a}_{\overline{m|}}=\frac{1-v^m}{d}$$ （ただし$d=1-v$）

において、$m\to\infty$として求めると、$I\ddot{a}_{\infty}=\left(1+\dfrac{1}{i}\right)\dfrac{1}{d}\cdots$(エ)

ゆえに、(エ)に(ウ)を代入すると$I\ddot{a}_{\infty}=\left(1+\dfrac{1}{i}\right)\dfrac{1}{d}=\left(1+\dfrac{1}{i}\right)\dfrac{1+i}{i}=227.5\cdots$

解答 228

１２．①$\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x|}}=\int_0^{\mathring{e}_x}v^t dt$

$\mathring{e}_x=\int_0^{\omega-x}{}_t p_x dt$、$t=\int_0^u\dfrac{l_{x+s}}{l_x}ds$、$dt=\dfrac{l_{x+u}}{l_x}du$として置換積分を行うと、

$\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x|}}=\int_0^{\omega-x}\dfrac{l_{x+u}}{l_x}v^{\int_0^u\frac{l_{x+s}}{l_x}ds}du$となる。ここで、$\int_0^u\dfrac{l_{x+s}}{l_x}ds\le\int_0^u ds=u$、$0<v\le 1$より、

$$\bar{a}_{\overline{\mathring{e}_x|}}\ge\int_0^{\omega-x}\frac{l_{x+u}}{l_x}v^u du=\bar{a}_x$$ したがって正しい

② $q_{x-1} = \int_0^1 {}_t p_{x-1} \cdot \mu_{x-1+t} dt$

μ_x は x について単調増加、 $0 < {}_t p_{x-1} \le 1$ より、

$q_{x-1} \le \int_0^1 \mu_x dt = \mu_x$ が示された。

同様に、 μ_x は x について単調増加。

$\mu_x \cdot \mathring{e}_x = \mu_x \cdot \int_0^{\omega-x} {}_t p_x dt \le \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt = \left[-{}_t p_x \right]_0^{\omega-x} = 1$

$\mu_x \le \dfrac{1}{\mathring{e}_x}$ が示された。したがって正しい。

③ $\ddot{a}_{x|\overline{yz}} = \ddot{a}_y + \ddot{a}_z - \ddot{a}_{xy} - \ddot{a}_{yz} - \ddot{a}_{zx} + \ddot{a}_{xyz}$ となるため誤り。

④P39より、正しくは $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \dfrac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} + \dfrac{nN_{x+n}}{D_x} = (I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} + n_{n|}\ddot{a}_x$ で誤り。

⑤P42(2-39)式より、正しくは $(\overline{Ia})_x = (Ia)_x + \dfrac{1}{12}$ で誤り。

③④⑤が誤りであるため、解答は（Ｉ）

１３．給付現価を求める算式は題意より、

$$1 \times \frac{D_{65} \cdot \ddot{a}_{\overline{20}|} + N_{85} + (M_{45} - M_{65}) \cdot \ddot{a}_{\overline{20}|}}{D_{45}}$$

$$= 1 \times \frac{19{,}975.7916 \times 15.3238 + 33{,}008.8021 + (14{,}329.2308 - 11{,}497.7803) \times 15.3238}{40{,}189.4064}$$

$$= 9.5175$$

よって、解答は（C）

第３章

１．与えられた条件のもとで，定常状態の収支相等は，次式のとおり成立している。

$$C \cdot a_{\infty} + F = B \cdot a_{\infty} \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで $a_{\infty} = v + v^2 + v^3 + \cdots\cdots$

$$= \frac{v}{1-v} = \frac{v}{d} = \frac{1}{i} \qquad \cdots\cdots(2)$$

従って，(1)式は，次のとおりとなる。

$$C/i + F = B/i$$

両辺に i を乗ずると，

$$C + i \cdot F = B \qquad \cdots\cdots(3)$$

(3)式が求める極限方程式である。

２．(1)　年度初での収支相等を考えると

$$C + F = v(B + F)$$

よって，この制度の極限方程式は

$$C + dF = vB$$

(2)　保険料が $\frac{1}{2}$ となった後の第 t 年度末の積立金を F_t とすると

$$\frac{C}{2} + F_{t-1} = v(B + F_t) \qquad \cdots\cdots①$$

また，$F_0 = F$ であるから

$$C + F_0 = v(B + F_0) \qquad \cdots\cdots②$$

①式より

$$\frac{C}{2} + F_0 = v\,(B + F_1)$$

$$\frac{C}{2}v + vF_1 = v^2\,(B + F_2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{C}{2}v^{t-1} + v^{t-1}F_{t-1} = v^t\,(B + F_t)$$

上式の辺々を加え整理すると

$$\frac{C}{2}\ddot{a}_{\overline{t}|} + F_0 = vB\ddot{a}_{\overline{t}|} + v^t F_t \qquad \cdots\cdots③$$

を得る。

同様にして②式より

$$C \cdot \ddot{a}_{\overline{t}|} + F_0 = vB\ddot{a}_{\overline{t}|} + v^t F_0 \qquad \cdots\cdots④$$

を得る。

③ − ④ × $\frac{1}{2}$ を求めると

$$\frac{F_0}{2} = \frac{B}{2}v\ddot{a}_{\overline{t}|} + v^t\left(F_t - \frac{F_0}{2}\right)$$

ここで $F_t < \frac{F_0}{2}$ とすると

$$\frac{F_0}{2} < \frac{B}{2}v\ddot{a}_{\overline{t}|}$$

となるので，$F_0 = F$ に注意して $F < Bv\ddot{a}_{\overline{t}|}$ を満たす最小の t が求めるものであるから，これを t について解くと

$$t > \frac{1}{\delta}\log\frac{vB}{C}$$

を得る。

故に積立金が $\frac{F}{2}$ を下回るのは $\left[\frac{1}{\delta}\log\frac{vB}{C}\right]+1$ 年後となる。

3．① $$G^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$$

$$= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} + \sum_{x=x_e}^{x_r-2} l_x^{(T)} \cdot \frac{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y}{D_x}$$

$$= L + \sum_{x=x_e}^{x_r-2} \frac{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y}{v^x}$$

$$= L + \sum_{x=x_e}^{x_r-2} l_{x+1}^{(T)} \cdot \frac{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y}{D_{x+1}} \cdot v$$ ここで $x+1 \to x$ とおくと，

$$= L + v \cdot \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$$

② $$S^p = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$$

$$= \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x \cdot \frac{\sum_{y=x}^{\omega} D_y}{D_x}$$ ①と同様の展開により

$$= B + v \cdot \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$$ を導くことができる。

③ $$S^a = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$

$$= D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \frac{1}{v^x}$$

$$= D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \left(\frac{1}{v^{x_r-1}} + \sum_{x=x_e}^{x_r-2} \frac{1}{v^x} \right)$$

$$= v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} + D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \sum_{x=x_e}^{x_r-2} l_{x+1}^{(T)} \cdot \frac{1}{D_{x+1}} \cdot v$$

第２項で $x+1 \to x$ とおくと，

$$= v \cdot l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} + v \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$

$$= v \cdot \left(l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} + \sum_{x=x_e+1}^{x_r-1} l_x^{(T)} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} \right)$$

４．⑴　左辺 $= (l_{x_r} + v l_{x_r+1} \cdot \ddot{a}_{x_r+1})$

$$+ d \cdot l_{x_r+1} \cdot \ddot{a}_{x_r+1} + d \sum_{x=x_r+2}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$$

$$= l_{x_r} + l_{x_r+1} \cdot \ddot{a}_{x_r+1} + d \sum_{x=x_r+2}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x \qquad (\because v+d=1)$$

この変形を $\omega - x_r$ 回行うと

$$= \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x$$

⑵　Trowbridge モデルで，$F = \sum_{x=x_r+1}^{\omega} l_x \cdot \ddot{a}_x$，$B = \sum_{x=x_r}^{\omega} l_x$ であるとき，

極限方程式より $C = B - dF$ であり，⑴より $C = l_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}$ である。

これは，退職時年金現価積立方式を意味する。

５．毎年の保険料総額を C，給付総額を B，定常状態の積立金を F，割引率を d とすれば，極限方程式として次の関係が成立する。

$$C+d\cdot F=B \qquad \cdots\cdots（＊）$$

題意より

$$C=\alpha\times l_r\times \ddot{a}_r$$

$$B=\alpha\times(l_r+l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots\cdots)$$

一方，（＊）より

$$F=(B-C)/d=\alpha\times\{(l_r+l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots\cdots)-l_r\times\ddot{a}_r\}/d$$

$$=\alpha\times\{(l_r+l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots\cdots)-l_r\times(1+a_r)\}/d$$

$$=\alpha\times\{(l_{r+1}+l_{r+2}+\cdots\cdots)-l_r\times a_r\}/d$$

$$=\alpha\times(l_r\times e_r-l_r\times a_r)/d$$

$$=\alpha\times l_r\times(e_r-a_r)/d$$

$$\therefore F=\alpha\times l_r\times(e_r-a_r)/d$$

よって証明された。

６．x 歳の被保険者１人あたりの保険料を P_x とする。Trowbridge モデルでは，定年退職時のみに給付があるから次の式が成り立つ。

$$(V_x+P_x)\cdot l_x\cdot(1+i)=V_{x+1}\cdot l_{x+1}$$

これから，

$$P_x=V_{x+1}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot v-V_x \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

題意に基づき V_x，V_{x+1} を書き換えて⑴式に代入すると

$$P_x=\frac{x+1-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_{x+1}}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot v-\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x}\cdot\ddot{a}_{x_r}$$

$$=\frac{x+1-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x\cdot(l_{x+1}/l_x)\cdot v}\cdot\ddot{a}_{x_r}\cdot\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot v-\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x}\cdot\ddot{a}_{x_r}$$

$$=\frac{x+1-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x}\cdot\ddot{a}_{x_r}-\frac{x-x_e}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x}\cdot\ddot{a}_{x_r}$$

$$=\frac{1}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}}{D_x}\cdot\ddot{a}_{x_r}$$

これは，単位積立方式の一人あたりの保険料である。

７．n＋１年度の運用利回りをjとすると、予定利率i＝j＋0.01で表される。

n年度までの積立金をF_n とすると、極限方程式から

$$F_n=(300-200)\cdot\frac{1+i}{i}=100\cdot\frac{1+j+0.01}{j+0.01}$$

となる。n＋1年度の積立金 F_{n+1} は

$$F_{n+1}=(F_n+C-B)\cdot(1+j)$$

$$=\left(100\frac{1+j+0.01}{j+0.01}-100\right)\cdot(1+j)=100\cdot\frac{1+j}{j+0.01}$$

と表せるので、積立不足は

$$F_n-F_{n+1}=100\cdot\frac{1+j+0.01}{j+0.01}-100\cdot\frac{1+j}{j+0.01}=\frac{1}{j+0.01}=20$$

これを解けば、 j＝ 0.04

よって、解答は（F）

８．①加入時積立方式における積立金は、被保険者（x_e歳の者を除く）の給付現価と受給権者の給付現価の合計（P73参照）。よって、誤り。

②退職時年金現価積立方式における積立金は、受給権者（x_r 歳の者を除く）の給付現価（P69参照）。よって正しい。

③単位積立方式における積立金は、被保険者の過去の被保険者期間に対応する給付現価と受給権者の給付現価の合計（P69参照）。よって正しい。

④平準積立方式における積立金は、被保険者の過去の保険料の元利合計と受給権者の給付現価の合計（P71参照）。よって正しい。

⇒②、③、④が正しい。

よって、解答は(J)

９.この年金制度は極限方程式 $C+\dfrac{i}{1+i}F=\dfrac{i}{1+i}B$ が成立している。

ここで、運用利回りが低下した年度では、積立金の減少額を $\varDelta F$ とすると

$(C+F)\times(1+j)-B=F-\varDelta F$ …①

一方、翌年度末は題意より

$\{(F-\varDelta F)+(C+\varDelta C)\}\times(1+i)-B=F$ …②

が成立しているので、①、②から$\varDelta F$を消去すると

$\{(C+F)\times(1+j)-B+(C+\varDelta C)\}\times(1+i)-B=F$

$\therefore \varDelta C=B-(1+j)C-jF$ … 解答（B）

１０．定常状態であった当初の積立金を F_0、保険料を減らしてから t 年後の積立金を F_t（$0\leqq t\leqq n$）とすると、$F_{t-1}+(\alpha\cdot{}^{T}C-B)=v\cdot F_t$ の関係が成立する。

そのため、

F_0＋（α・${}^{T}C$－B）＝v・F_1

v・F_1＋ v・（α・${}^{T}C$－B）＝v^2・F_2

. . . . .

v^{n-1}・F_{n-1}＋ v^{n-1}・（α・${}^{T}C$－B）＝v^n・F_n

上式の辺々を加えて整理すると、$F_0 + \dfrac{1-v^n}{1-v}(\alpha\cdot{}^{T}C - B) = v^n\cdot F_n$ となる。

$F_0 = B/d - {}^{T}C/d$ 、$F_n=0$ より $\alpha = -\dfrac{v^n}{1-v^n}\cdot\dfrac{B}{{}^{T}C} + \dfrac{1}{1-v^n}$

$B = l_{x_r}(e_{x_r}+1)$ 、${}^{T}C = l_{x_r}(a_{x_r}+1)$ より、$\alpha = -\dfrac{v^n}{1-v^n}\cdot\dfrac{e_{x_r}+1}{a_{x_r}+1} + \dfrac{1}{1-v^n}$

よって解答は（ J ）

第 4 章

1．

問 題 番 号	解　　答　　例
①	加入年齢方式
②	個人平準保険料方式
③	総合保険料方式
④	到達年齢方式
⑤	標準保険料
⑥	特別保険料
⑦	定常人口
⑧	責任準備金
⑨	$x_r - x_e$
⑩	過去勤務債務

2．解法にあたり，保険料は年 1 回期初払と仮定する。

題意より，加入年齢 x 歳の平準保険料率は,

$$P_x = \frac{x_r - x}{x_r - x_o} D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} \Big/ \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y$$ である。

今 $x_o \leqq x \leqq x_r - 2$ である任意の x に対して

$P_x < P_{x+1}$ を示すことができれば，題意が証明できたことになる。

$$P_{x+1} - P_x = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{x_r - x_o} \left\{ \frac{x_r - x - 1}{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y} - \frac{x_r - x}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y} \right\}$$

$$= \frac{1}{x_r - x_o} \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{\left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y \right) \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right)} \left\{ (x_r - x - 1) \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - (x_r - x) \sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y \right\}$$

上式の｛　｝内を A とすると

$$A=(x_r-x-1)\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y-(x_r-x-1)\sum_{y=x+1}^{x_r-1}D_y-\sum_{y=x+1}^{x_r-1}D_y$$

$$=(x_r-x-1)\cdot D_x-\sum_{y=x+1}^{x_r-1}D_y$$

$$=\sum_{y=x+1}^{x_r-1}(D_x-D_y)$$

D_xは，xについて単調減少であるから$D_x>D_y$，従って$A>0$

また，x_r-x_o，$D_{x_r}\cdot\ddot{a}_{x_r}$，$\sum_{y=x+1}^{x_r-1}D_y$，$\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y$の各項は正であるから$P_{x+1}-P_x>0$

$\therefore P_x<P_{x+1}$が示せた。

３．加入年齢をx_o，定年年齢をx_r，特定年齢方式による保険料率をP_oとし，保険料は年１回期初払いと仮定する。

題意より，$x_o<x<x_r$のとき給付額$B_x=0$

$$V_{x_o}=0$$

$$V_{x_o+1}=\frac{1}{p_{x_o}}\cdot P_o(1+i)\quad（ただし x_o+1<x_r として）$$

$$>P_o(1+i)\quad（ただし 0<p_{x_o}<1 として）$$

次に，$V_{x_o+t}>P_o\sum_{k=1}^{t}(1+i)^k$であると仮定したとき（$x_o+t+1<x_r$として）

$$V_{x_o+t+1}=\frac{1}{p_{x_o+t}}(V_{x_o+t}+P_o)(1+i)$$

$$>\frac{1}{p_{x_o+t}}\left(P_o\sum_{k=1}^{t}(1+i)^k+P_o\right)(1+i)$$

$$=\frac{1}{p_{x_o+t}}\cdot P_o\cdot\sum_{k=1}^{t+1}(1+i)^k$$

よって

$$0 < p_{x_o+t} < 1 \text{ ならば } V_{x_0+t+1} > P_o \cdot \sum_{k=1}^{t+1} (1+i)^k \text{ となる。}$$

従って数学的帰納法により，題意は証明された。

４．標準者の給付現価を M

一律定額の保険料を P_o，保険料総額を C_o，積立金を F_o，

r %逓増の x_e 才時の保険料率を P_r，保険料総額を C_r，積立金を F_r とする。

$$P_o = M \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \qquad C_o = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} P_o \cdot l_x$$

$$P_r = M \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x (1+r)^{x-x_e} \qquad C_r = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} P_r (1+r)^{x-x_e} l_x$$

$$C_o - C_r = \left(M \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \right) \cdot \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x \right)$$

$$- \left(M \Big/ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x (1+r)^{x-x_e} \right) \cdot \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (1+r)^{x-x_e} l_x \right)$$

$$= M \left\{ \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x \right) \cdot \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x (1+r)^{x-x_e} \right) \right.$$

$$\left. - \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} (1+r)^{x-x_e} l_x \right) \cdot \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \right) \right\}$$

$$\Big/ \left\{ \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \right) \cdot \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x (1+r)^{x-x_e} \right) \right\}$$

ここで分子の｛　｝内だけを取り出して考えると

$$\left\{\quad\right\}=\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x D_x (1+r)^{x-x_e} + \sum_{x>y}^{x_r-1} l_x D_y (1+r)^{y-x_e} + \sum_{x>y}^{x_r-1} l_y D_x (1+r)^{x-x_e}$$

$$-\left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} l_x D_x (1+r)^{x-x_e} + \sum_{x>y}^{x_r-1} l_x D_y (1+r)^{x-x_e} + \sum_{x>y}^{x_r-1} l_y D_x (1+r)^{y-x_e}\right)$$

$$=\sum_{x>y}^{x_r-1} l_x D_y \left\{(1+r)^{y-x_e} - (1+r)^{x-x_e}\right\}$$

$$+\sum_{x>y}^{x_r-1} l_y D_x \left\{(1+r)^{x-x_e} - (1+r)^{y-x_e}\right\}$$

$$=\sum_{x>y}^{x_r-1} l_x l_y \left\{v^y(1+r)^{y-x_e} - v^y(1+r)^{x-x_e} + v^x(1+r)^{x-x_e}\right.$$

$$\left.-v^x(1+r)^{y-x_e}\right\}$$

$$=\sum_{x>y}^{x_r-1} l_x l_y (v^x - v^y)\left\{(1+r)^{x-x_e} - (1+r)^{y-x_e}\right\} < 0$$

（∵ $x>y$ より $v^x<v^y$，$(1+r)^{x-x_e}>(1+r)^{y-x_e}$ だから）

よって $C_o<C_r$ となり，またこれにより $F_o>F_r$ となる。

５．最低年齢を x_o，定年年齢を x_r とすれば定常人口にあるため，年齢別人員構成と脱退残存表を同一視出来る。これを今

$\{\, l_{x_o}\,,\ l_{x_o+1}\,,\ \cdots\cdots,\ l_{x_r-1}\,\}$

と表わすものとする。定年脱退人員も同様に l_{x_r} とすれば，全員加入の際の保険料率 P_{x_o} と t 年待期期間をおいた場合の保険料率 P_{x_o+t} は夫々次のように示される。

$$P_{x_o} = \ddot{a}_{x_r} D_{x_r} / \sum_{x=x_o}^{x_r-1} D_x \ , \quad P_{x_o+t} = \ddot{a}_{x_r} D_{x_r} / \sum_{x=x_o+t}^{x_r-1} D_x$$

従って保険料総額 C_{x_o}， C_{x_o+t} は

$$C_{x_o} = \sum_{x=x_o}^{x_r-1} l_x \cdot \ddot{a}_{x_r} D_{x_r} / \sum_{x=x_o}^{x_r-1} D_x \ , \quad C_{x_o+t} = \sum_{x=x_o+t}^{x_r-1} l_x \cdot \ddot{a}_{x_r} D_{x_r} / \sum_{x=x_o+t}^{x_r-1} D_x$$

となり簡単な代数演算により

$$C_{x_o} < C_{x_o+1}$$

６．(1)　$D_{x+1/2} = l_{x+1/2} \cdot v^{x+1/2}$ とすると，仮定より

$$= l_x \cdot \frac{1+p_x}{2} \cdot v^x \cdot v^{1/2} = D_x \cdot \left(\frac{1+p_x}{2} \cdot v^{1/2} \right)$$

$\overline{D_x} = D_x + D_{x+1/2}$ とする。また，この企業の x 歳の被保険者数を L_x とする。

$${}^{E}P^{(1)} = D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} / \sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x$$

$${}^{E}P^{(2)} = D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} / \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \overline{D_x}$$

(2)　給付現価 S は，保険料の支払回数によらない。

$$S = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x}$$

年 1 回払の場合の人数現価を $G^{(1)}$，年 2 回払の場合を $G^{(2)}$ とすると

$$G^{(1)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) / D_x \right\}$$

$$G^{(2)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D_y} \right) / D_x \right\}$$ となる。

従って，$V^{(1)}$，$V^{(2)}$ は，それぞれ，次のとおりである。

$$V^{(1)} = S - {}^{E}P^{(1)} \cdot G^{(1)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} - {}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) / D_x \right\}$$

$$V^{(2)} = S - {}^{E}P^{(2)} \cdot G^{(2)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r}}{D_x} - {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y \right) / D_x \right\}$$

⑶　⑵より

$$V^{(1)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right) / D_x \right\}$$

$$V^{(2)} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ L_x \cdot \left(D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y \right) / D_x \right\}$$

従って $V^{(1)} > V^{(2)}$ を示すためには，任意の $x\,(x_e < x \leqq x_r - 1)$ に対して上記 2 式の（　）内を比較し，

$$D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y > D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} - {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y$$

すなわち，${}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y < {}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y$ を示すことができればよい。

$$\frac{{}^{E}P^{(1)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{{}^{E}P^{(2)} \cdot \sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y} = \frac{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} / \sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}{D_{x_r} \cdot \ddot{a}_{x_r} / \sum_{y=x_e}^{x_r-1} \overline{D}_y} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y}$$

$$= \left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \overline{D}_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y} \right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (*)$$

ここで，$\dfrac{\overline{D}_x}{D_x}\,(x_e < x \leqq x_r - 1)$ について考えてみる。

$$\frac{\overline{D}_x}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1/2}}{D_x} = \frac{D_x + D_x \cdot \{ v^{1/2} \cdot (1 + p_x) \}}{D_x} = 1 + \left(\frac{1 + p_x}{2} \right) \cdot v^{1/2}$$

仮定より，p_x は x について単調増加であるから $(\overline{D}_x / D_x)$ も x について単調増加となる。一般に，$a_i > 0$，$b_i > 0$ ($i = 1$，$\cdots\cdots\cdots n$) で

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots\cdots\cdots < \frac{b_n}{a_n} \text{ であれば}$$

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots\cdots + b_n}{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n} < \frac{b_2 + \cdots\cdots + b_n}{a_2 + \cdots\cdots + a_n} < \cdots\cdots\cdots < \frac{b_n}{a_n} \text{ が言える。}$$

従って $\dfrac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} \overline{D}_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} < \dfrac{\sum_{y=x}^{x_r-1} \overline{D}_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}$ $(x_e < x \leqq x_r - 1)$

よって（＊）< 1 を示すことができたため $V^{(1)} > V^{(2)}$ が言えた。

７．単一の全期平準払保険料 P を適用したときの初期過去勤務債務は

$$U = \sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x} U_{\lambda x} = \sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x} \frac{1}{D_x}\left(\ddot{a}_{x_r} D_{x_r} - P \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right)$$

ここに　λ　　　：加入年齢

　　　　x　　　：現在年齢，　　x_r　　：定年年齢

　　　　$l_{\lambda x}$　　　：加入年齢 λ，現在年齢 x の総人員

上式に加入年齢 λ に対応する全期平準払加入年齢保険料 P_λ を導入して変形すると，

$$U = \sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x} \cdot \frac{1}{D_x}\left(\ddot{a}_{x_r} D_{x_r} - P_\lambda \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y + (P_\lambda - P) \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \right)$$

$$= \sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x}\left(V_{\lambda x} + (P_\lambda - P) \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right) = V + \sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x} (P_\lambda - P) \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x}$$

ここに，$V_{\lambda x}$：加入年齢系列別に P_λ を適用したときの１人当り責任準備金

題意により $U=V$

よって $\sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x}(P_{\lambda}-P)\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\right)/D_x=0$

$$\sum_{\lambda}\left(P_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\right)/D_x\right)=P\sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\right)/D_x$$

故に $P=\dfrac{\sum_{\lambda}\left(P_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\right)/D_x\right)}{\sum_{\lambda}\sum_{x} l_{\lambda x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y\right)/D_x}$

すなわち，P は P_{λ} の加重平均である。

８．今 $(x\,,\ t)$ なるものに対応する給付現価率，給与現価率及び給与額を，それぞれ $S(x\,,\ t)$，$G(x)$，$B(x\,,\ t)$ とすれば ${}^{C}P$ は次の算式により表わされる。

$${}^{C}P=\frac{\sum_{x,t} B(x,t)\cdot S(x,t)}{\sum_{x,t} B(x,t)\cdot G(x)}$$

一方，${}^{I}P(x,\ t)$ は次の様にもとめられる。

$${}^{I}P(x,\ t)=\frac{S(x,t)}{G(x)}$$

従って

$${}^{C}P=\frac{\sum_{x,t} B(x,t)\cdot {}^{I}P(x,t)\cdot G(x)}{\sum_{x,t} B(x,t)\cdot G(x)}$$

となるが，これは ${}^{C}P$ が，$B(x,\ t)\cdot G(x)$ による $P(x,\ t)$ の加重平均として表わせられる事を示している。

$\therefore \max_{x,t}\ {}^{I}P(x,\ t) \geqq {}^{C}P \geqq \min_{x,t}\ {}^{I}P(x,\ t)$

９．定常状態における責任準備金を V、年金資産を F、標準保険料を P_N、給付を S とする。

責任準備金について $(V+P_N-S)\cdot(1+i)=V$ …①

年金資産について $(F+P_N-S)\cdot(1+j)+(V-F)\cdot r=F$ …②

が成り立つ。①より $P_N-S=-\dfrac{i}{1+i}V$

これを②に代入して変形すると、$\dfrac{F}{V}=\dfrac{r-\dfrac{1+j}{1+i}\cdot i}{r-j}$ …解答（Ｅ）

１０．① (L) ② (J) ③ (K) ④ (Q) ⑤ (H) ⑥ (A) ⑦ (L) ⑧ (Y) ⑨ (U) ⑩ (E) (P85～89 参照)

第５章

１．⑴ア　⑵イ　⑶ウ　⑷オ

２．標準保険料率を P，特別保険料率を P' とすると

$$P = \frac{S^a_{F.S.} + S^f}{G^a + G^f} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$P' = \frac{S^p + S^a_{P.S.}}{L \cdot \ddot{a}_\infty} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ここで $L \cdot \ddot{a}_\infty = G^a + G^f$ であるから⑵は，次のように変形できる。

$$P' = \frac{S^p + S^a_{P.S.}}{G^a + G^f}$$

$$\therefore P + P' = \frac{S^p + S^a_{P.S.} + S^a_{F.S.} + S^f}{G^a + G^f}$$

$$= \frac{S^p + S^a + S^f}{G^a + G^f}$$

従って $P + P'$ は，開放型総合保険料方式の保険料率であることがわかる。

３．加入年齢方式で過去勤務債務を永久償却とした場合の保険料を P とすると，

$$P = {}^{E}P + \frac{S^a - G^a \cdot {}^{E}P}{L \cdot \ddot{a}_\infty}$$

とかける。ここで,

$${}^{E}P = \frac{S^f}{G^f}, \quad L \cdot \ddot{a}_\infty = G^a + G^f \text{ であるから,}$$

$$P=\frac{S^f}{G^f}+\frac{S^a-G^a\cdot\dfrac{S^f}{G^f}}{G^a+G^f}$$

$$=\frac{S^a+S^f}{G^a+G^f}$$

従って，P が開放型総合保険料方式の保険料であることが示された。

4．仮定より，次式が成立する。

$F(1+i)+C-B=F$ ………①

⑴　予定利率を i' とした場合の保険料を C' とすると

$F(1+i')+C'-B=F$ ………②

①から②を差し引くと

$\Delta i\cdot F+C-C'=0$（ここで $\Delta i=i-i'$ とする。）

$\therefore C'=C+\Delta i\cdot F$

即ち利息の不足する部分を保険料として補うこととなる。

⑵　$F_1=F(1+i')+C-B$

$=F(1+i-\Delta i)+C-B$　　①を適用すると

$=F-\Delta i\cdot F$

$=F(1-\Delta i)$

開放型総合保険料方式の場合，F_1 を定常状態として保険料を決定するため，F_1 と F_1 に基づく保険料 C_1 との間には,

$F_1(1+i)+C_1-B=F_1$ が成立する。

同様にして $F_2=F_1(1-\Delta i)$

$=F(1-\Delta i)^2$

よって $F_n=F(1-\Delta i)^n$

５．「過去勤務期間を通算するとした場合の加入年齢方式の過去勤務債務」は，

$$S^a - G^a \cdot {}^{E}P$$

と書ける。また，

「過去勤務期間を通算するとした場合の開放基金方式の過去勤務債務」は，

$$(S^a + S^f) - (G^a + G^f) \cdot {}^{OAN}P$$

と書けるが，

$${}^{OAN}P = \frac{S_{FS}^a + S^f}{G^a + G^f}$$

であるから，これは

$$S^a - S_{FS}^a$$

と書ける。

これから（A）は次のように書ける。

$$(A) = \left| S_{FS}^a - G^a \cdot {}^{E}P \right|$$

一方，「過去勤務期間を通算しない場合の総合保険料方式の保険料収入現価」は

$$G^a \cdot {}^{C}P$$

であるが，

$${}^{C}P = \frac{S_{FS}^a}{G^a}$$

であるから，上の収入現価は

$$S_{FS}^a$$

である。

加入年齢方式の標準保険料収入現価は過去勤務期間の通算によらず同じであるから，「過去勤務期間を通算しない場合の加入年齢方式の標準保険料収入現価」は

$G^{a} \cdot {}^{E}P$

と書ける。

従って，(B) は次のように書ける。

$$(B) = \left| S^{a}_{FS} - G^{a} \cdot {}^{E}P \right|$$

よって，$(A) = (B)$ が示された。

6．⑴ア　標準保険料率（算式）S^{f}_{o} / G^{f}_{o}

（値）　6. 8/144 = 0. 0472　　4. 72%

特別保険料率（算式）$\{(S^{p} + S^{a}) - (S^{f}_{o} / G^{f}_{o}) \times G^{a} - F\} / (\sum LB \times \ddot{a}_{\overline{15}|})$

（値）　{(763 + 823) − 0. 0472 × 3, 063 − 1, 000}/(283 × 10. 90)

= 0. 14310　　14. 31%

イ　標準保険料率（算式）$(S^{a}_{F.S.} + S^{f}_{o} / i) / (G^{a} + G^{f}_{o} / i)$

（値）　(296 + 6. 8/0. 05)/(3, 063 + 144/0. 05)

= 0. 07269　　7. 27%

特別保険料率（算式）$(S^{p} + S^{a}_{P.S.} - F) / (\sum LB \times \ddot{a}_{\overline{15}|})$

（値）　(763 + 527 − 1, 000)/(283 × 10. 90)

= 0. 09401　　9. 40%

ウ　保険料率　（算式）$(S^{p} + S^{a} - F) / G^{a}$

（値）　(763 + 823 − 1, 000)/3, 063

= 0. 19132　　19. 13%

⑵　年金受給権者以外の給付を一律 2 倍するのだから，⑴における S^{f}_{o}， $S^{a}_{F.S.}$， $S^{a}_{P.S.}$， S^{a} が 2 倍となることにより $S^{f}_{o} = 13.6$， $S^{a}_{F.S.} = 592$， $S^{a}_{P.S.} = 1,054$， $S^{a} = 1,646$ として上記算式を適用する。

ア　標準保険料率　13. 6/144 = 0. 0944　　9. 44%

特別保険料率　$\{(763+1,646)-0.0944\times 3,063-1,000\}/(283\times 10.90)$

$=0.36303$　　36. 30%

イ　標準保険料率　$(592+13.6/0.05)/(3,063+144/0.05)$

$=0.14538$　　14. 54%

特別保険料率　$(763+1,054-1,000)/(283\times 10.90)$

$=0.26486$　　26. 49%

ウ　保険料率　$(763+1,646-1,000)/3,063$

$=0.46001$　　46. 00%

⑶　定常人口を仮定しているわけだから

$S^p+S^a+S_0^f/i=B/d$　（B は単年度の給付額，d は割引率）

$\therefore B=(763+823+136)/21$

$=82$

標準保険料　$283\times 0.0472=13.3576$

特別保険料　$283\times 0.1431=40.4973$

1 年度の積立金　$(1,000+13.3576+40.4973-82)\times 1.08$

$=1,049.6032$

この積立金を使用して上記算式にもとづいて保険料率を求める。

標準保険料率　13. 6/144 = 0. 0944　　9. 44%

特別保険料率　$\{(763+1,646)-0.0944\times 3,063-1,049.6032\}$

$/(283\times 10.90)=0.34695$　　34. 70%

7．①誤　P60～61 および P72 の記述

完全積立方式における積立金の額は年金受給権者、在職中の被保険者および将来加入が見込まれる新規の被保険者の給付現価の合計額である。

②誤　P102～103 の記述

開放基金方式において、標準保険料が変化しない条件として、脱退・死亡・新規加入・給付支払が予定どおりであるだけでなく、年金制度が定常人口にある必要がある。

③正　P101～102 の記述

④正　P89～90 の記述

⑤誤　P103～104 の記述

保険料の洗い替え前後で、未積立債務は減少しない。したがって積立金水準は変動しない。

⑥正　P104 の記述

よって、誤っているものは①②⑤・・解答（B）

８．・開放基金方式

標準保険料率＝（3,000,000+3,000,000）／（41,000,000+19,000,000）

＝10.0％

標準掛金（年額）＝1,100,000×10.0％＝110,000

責任準備金＝（3,000,000+3,000,000+2,000,000+1,000,000）

－（41,000,000+19,000,000）×10.0％　＝3,000,000

未積立債務＝3,000,000－2,500,000＝500,000

・加入年齢方式

標準保険料率＝3,000,000/41,000,000＝7.3％

標準掛金（年額）＝1,100,000×7.3％＝80,300

責任準備金＝（3,000,000+2,000,000+1,000,000）

－19,000,000×7.3％＝4,613,000

未積立債務＝4,613,000－2,500,000＝2,113,000

各年度の未積立債務の推移は以下のとおりとなり、開放基金方式の方が加入年齢方式より２年早く全額償却することになる。

・開放基金方式

１年度（期初）：500,000

２年度（期初）：(500,000－500,000×50％)×1.03＝257,500

３年度（期初）：(257,500－257,500×50％)×1.03＝132,613

４年度（期初）：(132,613－132,613×50％)×1.03＝68,296

・加入年齢方式

１年度（期初）：2,113,000

２年度（期初）：(2,113,000－2,113,000×50％)×1.03＝1,088,195

３年度（期初）：(1,088,195－1,088,195×50％)×1.03＝560,420

４年度（期初）：(560,420－560,420×50％)×1.03＝288,616

５年度（期初）：(288,616－288,616×50％)×1.03＝148,637

６年度（期初）：(148,637－148,637×50％)×1.03＝76,548

よって、解答は（Ｆ）

第 6 章

１．変更前の給付現価を S，給与現価を G，標準保険料率を P，積立金を F，過去勤務債務を U とすると

$$U = S - G \cdot P - F$$

である。ここで給付を 2 倍にする制度変更を行った場合，題意より，給付現価は $2S$，標準保険料率は $2P$ となる。よってこのとき過去勤務債務は

$$\begin{aligned} 2S - G \cdot 2P - F &= 2(S - G \cdot P - F) + F \\ &= 2U + F \end{aligned}$$

となり，題意は示された。

２．初回の給付改善による追加的給付現価を S，給付改善の回数を n とすると，t 回目の給付改善による追加的給付現価は,

$$S(1+r)^{t-1}\ (t = 1, \cdots\cdots, n)$$

である。

∴ n 回までの給付改善による総追加的給付現価の現価は

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{n} S(1+r)^{t-1} / (1+i)^{t-1} &= S\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^{t-1} \\ &= S \cdot \frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^{n}}{1-\dfrac{1+r}{1+i}} \\ &= S \cdot \frac{1-\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)^{n}}{i-r}(1+i) \end{aligned}$$

となる。

これを毎年同額ずつ永久償却する際の，1回当りの償却額は

$$\left\{ S \cdot \frac{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r} \cdot (1+i) \right\} \Bigg/ \left(\frac{1}{1-v}\right) \qquad \left(\because \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{1-v}\right)$$

$$= S \cdot \frac{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r} \cdot i$$

となる。そして これが $\frac{1}{2}S$ を超えないのだから

$$\frac{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n}{i-r} \cdot i \leqq \frac{1}{2}$$

$i<r$ のとき　$\left\{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n\right\} i \geqq \frac{1}{2}(i-r)$

$$\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n \leqq \frac{i+r}{2i}$$

$$\therefore n \log\left(\frac{1+r}{1+i}\right) \leqq \log\left(\frac{i+r}{2i}\right)$$

よって $n \leqq \dfrac{\log\left(\frac{i+r}{2i}\right)}{\log\left(\frac{1+r}{1+i}\right)}$　$\left(\because i<r \text{より} \log\left(\frac{1+r}{1+i}\right)>0\right)$

$i>r$ のとき　$\left\{1-\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n\right\} i \leqq \frac{1}{2}(i-r)$

$$\left(\frac{1+r}{1+i}\right)^n \geqq \frac{i+r}{2i}$$

$$\therefore n\log\left(\frac{1+r}{1+i}\right) \geqq \log\left(\frac{i+r}{2i}\right)$$

よって $n \leqq \dfrac{\log\left(\dfrac{i+r}{2i}\right)}{\log\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right)}$ 　　$\left(\because i > r \text{ より} \log\left(\dfrac{1+r}{1+i}\right) < 0\right)$

以上より題意は示された。

（ただし $i \neq r$ を仮定）

３．特定年齢を x_e，定年年齢を x_r，定年時の給付現価を A とする。特定年齢を超えたある年齢 x（$x_e < x < x_r$）で追加加入した場合の後発過去勤務債務は

$$l_x\left(\frac{D_{x_r}}{D_x}\cdot A - {}^EP\cdot\frac{N_x - N_{x_r}}{D_x}\right) \text{　———①　（}{}^EP\text{：標準保険料率）}$$

となる。また，${}^EP = \dfrac{D_{x_r}\cdot A}{N_{x_e} - N_{x_r}}$

であるからこれを代入すると

①は $l_x\left(\dfrac{D_{x_r}}{D_x}\cdot A - \dfrac{D_{x_r}\cdot A}{N_{x_e} - N_{x_r}}\,\dfrac{N_x - N_{x_r}}{D_x}\right)$

$$= \frac{l_x\cdot D_{x_r}\cdot A}{D_x}\left(1 - \frac{N_x - N_{x_r}}{N_{x_e} - N_{x_r}}\right)$$

$$= \frac{l_x\cdot D_{x_r}\cdot A}{D_x}\cdot\frac{N_{x_e} - N_x}{N_{x_e} - N_{x_r}} \text{　———①}'$$

となる。一方，年齢 x までの標準保険料の元利合計は

$${}^EP\{l_{x_e}\cdot(1+i)^{x-x_e} + l_{x_e+1}\cdot(1+i)^{x-x_e-1} + \cdots + l_{x-1}(1+i)\}$$
$$= {}^EP\left(\frac{D_{x_e}}{D_x}\cdot l_x + \frac{D_{x_e+1}}{D_x}\cdot l_x + \cdots + \frac{D_{x-1}}{D_x}\cdot l_x\right)$$

$$= {}^{E}P \cdot \frac{l_x}{D_x} \cdot (N_{x_e} - N_x)$$

$$= \frac{D_{x_r} \cdot A}{N_{x_e} - N_{x_r}} \cdot \frac{l_x}{D_x} \cdot (N_{x_e} - N_x) \quad \text{———②}$$

①′＝②より題意は示された。

４．⑴，⑵，⑶各々の給付に対する給付現価，標準保険料率を各々 S_1，S_2，S_3，P_1，P_2，P_3 とし，給与現価を G とすると

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= S_1 - P_1 \cdot G \\ U_2 &= S_2 - P_2 \cdot G \\ U_3 &= S_3 - P_3 \cdot G \end{aligned}\right\} \text{となる。}$$

ここで

$$\alpha_{\tau+t} + \beta_{\tau+t} = (\alpha_{\tau+t} + \beta_t) + (\alpha_t + \beta_{\tau+t}) - (\alpha_t + \beta_t)$$

だから，$\alpha_{\tau+t} + \beta_{\tau+t}$ なる給付に対する給付現価と標準保険料率は，$S_1 + S_2 - S_3$，$P_1 + P_2 - P_3$ となる。

よって責任準備金は,

$$S_1 + S_2 - S_3 - (P_1 + P_2 - P_3) \cdot G$$

$$= U_1 + U_2 - U_3$$

となる。

５．極限方程式の成立と同値であることを示せばよい。

６．(６－18)の分子は，(６－19)であるが，これに，(６－17)を適用して

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1}\left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}(N_x - N_{x_r})/D_x\right) l_x + \frac{v}{d}\left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y}(N_{x_e} - N_{x_r})/D_{x_e}\right) l_{x_e}$$

$$= \sum_{x=x_e}^{x_r-1}\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{v^x} + \frac{v}{d}\cdot\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} {}^{U}P_y D_y}{v^{x_e}}$$

$$= ({}^{U}P_{x_e} D_{x_e} + {}^{U}P_{x_e+1} D_{x_e+1} + \cdots + {}^{U}P_{x_r-1} D_{x_r-1})/v^{x_e}$$

$$+ ({}^{U}P_{x_e+1} D_{x_e+1} + \cdots + {}^{U}P_{x_r-1} D_{x_r-1})/v^{x_e+1}$$

$$\vdots$$

$$+ {}^{U}P_{x_r-1} D_{x_r-1}/v^{x_r-1}$$

$$+ (v + v^2 + \cdots)({}^{U}P_{x_e} D_{x_e} + {}^{U}P_{x_e+1} D_{x_e+1} + \cdots + {}^{U}P_{x_r-1} D_{x_r-1})/v^{x_e}$$

$$= {}^{U}P_{x_e} D_{x_e}\left\{\frac{1}{v^{x_e}} + \frac{1}{v^{x_e}}(v + v^2 + \cdots)\right\}$$

$$+ {}^{U}P_{x_e+1} D_{x_e+1}\left\{\frac{1}{v^{x_e+1}}(v+1) + \frac{1}{v^{x_e+1}}(v^2 + v^3 + \cdots)\right\}$$

$$\vdots$$

$$+ {}^{U}P_{x_r-1} D_{x_r-1}\left\{\frac{1}{v^{x_r-1}}(v^{x_r-x_e-1} + v^{x_r-x_e-2} + \cdots + 1) + \frac{1}{v^{x_r-1}}(v^{x_r-x_e} + v^{x_r-x_e+1} + \cdots)\right\}$$

$$= {}^{U}P_{x_e} D_{x_e}\frac{1}{v^{x_e}}(1 + v + v^2 + \cdots)$$

$$+ {}^{U}P_{x_e+1} D_{x_e+1}\frac{1}{v^{x_e+1}}(1 + v + v^2 + \cdots)$$

$$\vdots$$

$$+\ {}^{U}P_{x_r-1}D_{x_r-1}\ \frac{1}{v^{x_r-1}}(1+v+v^2+\cdots)$$

$$={}^{U}P_{x_e}l_{x_e}(1+v+v^2+\cdots)+{}^{U}P_{x_e+1}l_{x_e+1}(1+v+v^2+\cdots)+\cdots$$

$$+\ {}^{U}P_{x_r-1}l_{x_r-1}(1+v+v^2+\cdots)$$

$$=\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_y l_y\cdot\frac{1}{1-v}$$

(６－18)の分母も同様の式展開で

$$\sum_{y=x_e}^{x_r-1}l_y\cdot\frac{1}{1-v}$$ となる。

よって(６－18)は

$$\frac{\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_y l_y\frac{1}{1-v}}{\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1}l_y\frac{1}{1-v}}=\frac{\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1}{}^{U}P_y l_y}{\displaystyle\sum_{y=x_e}^{x_r-1}l_y}$$

よって(６－20)が導けた。

7．① ${}^{E}P$，${}^{A}P_x$については(６－17)より明らか。

${}^{OAN}P$については(６－20)より明らか。

② (６－18)，(６－19)より明らか。

③ (６－17)より${}^{A}P_x$は，$x\leqq y\leqq x_r-1$における${}^{U}P_y$の最小値より大きい。

ここで，(６－15)をみると，D_xが減少関数だから${}^{U}P_x$は単調増加。

よって${}^{A}P_x>{}^{U}P_x$

④ $${}^{A}P_{x+1}=\frac{\displaystyle\sum_{y=x+1}^{x_r-1}{}^{U}P_y D_y}{\displaystyle\sum_{y=x+1}^{x_r-1}D_y}=\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1}{}^{U}P_y D_y-{}^{U}P_x D_x}{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y-D_x}$$

$$= \frac{{}^{A}P_x \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - {}^{U}P_x D_x}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x}$$

$$\therefore\ {}^{A}P_{x+1} - {}^{A}P_x = \frac{{}^{A}P_x \sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - {}^{U}P_x D_x - {}^{A}P_x \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x \right)}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y - D_x}$$

$$= \frac{({}^{A}P_x - {}^{U}P_x)\, D_x}{\sum_{y=x+1}^{x_r-1} D_y} > 0 \qquad \text{(③より)}$$

よって ${}^{A}P_x$ は単調増加。${}^{E}P = {}^{A}P_{x_e}$ で $x_e \leqq x$ だから

$${}^{A}P_x \geqq {}^{E}P$$

⑤　${}^{OAN}P$ は ${}^{A}P_x$，${}^{E}P$ の加重平均値だが，${}^{A}P_x$ のうちの最小値は ${}^{E}P$ だから，${}^{OAN}P > {}^{E}P$ である。${}^{A}P_x$ が単調増加で ${}^{OAN}P$ は ${}^{A}P_x$ の加重平均値であるから，近似的に ${}^{OAN}P = {}^{A}P_x$ となる x が $x_e \leqq x \leqq x_r - 1$ の範囲で存在する。

⑥　${}^{U}P_x$ が単調増加であることより，⑤と同様に示せる。

⑦　${}^{U}P_{x_e} \leqq {}^{U}P_{x_1} < {}^{A}P_{x_1} = {}^{OAN}P = {}^{U}P_{x_2}$ は ${}^{U}P_x$ が単調増加であること，③，⑤，⑥より示せる。

また $x_1 < x_2$ も明らか。

８．解答(B)、(E)

(A)　開放基金方式の場合、一定の若年齢層の責任準備金は一般的に負値になる（この間で前提としている制度設計での一つの事例として P132 の表 6-4)。これらの層の脱退が予定を下回った場合、負値の減少が予定より小さく財政上剰余要因となることがある。(誤り)

(B)　(A)と同様の理由から一定の若年齢層においては、昇給が予定を下回った場合、責任準備金（負値）の増加が予定よりも減少し、不足要因となる。(正

しい）

(C) 開放基金方式では、在職中の被保険者の年齢構成が影響し、標準保険料の水準は一般的に予定加入年齢の標準保険料の水準より高い。予定よりも多く新規加入が発生すれば、剰余要因となる。（P135）（誤り）

(D) 開放基金方式では、通常、新規の被保険者をその時点の在職中の被保険者数を維持するように見込む。傾向的に被保険者数の減少が生じている状況では、新規の被保険者数の見込みは傾向的に減少することになる。これは、新規の被保険者に係る責任準備金が負値であれば恒常的な不足要因になる。（P103）（誤り）

(E) 開放型総合保険料方式では、不足分を永久償却しているため発生した不足額による積立水準の低下は保険料率で解消できないが、開放基金方式ではこうした問題はない。（P103～104）（正しい）

9．給付改善に伴う給付現価の増加が剰余金以下となる必要があるので、次のような不等式が成り立つ必要がある。

$$M \geq \Delta B \cdot v \cdot \ddot{a}_{\infty} + \Delta B \cdot v^2 \cdot \ddot{a}_{\infty} + \cdots + \Delta B \cdot v^t \cdot \ddot{a}_{\infty} = \Delta B \cdot a_{\overline{t|}} \cdot \ddot{a}_{\infty}$$

$$= \Delta B \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{(1+i)^t}}{i} \cdot \frac{1+i}{i}$$

tについて解くと、$t \leq \left[\dfrac{\log(1 - \dfrac{i^2 M}{(1+i)\Delta B})}{\log \dfrac{1}{1+i}} \right]$より、題意の$t$は$\left[\dfrac{\log(1 - \dfrac{i^2 M}{(1+i)\Delta B})}{\log \dfrac{1}{1+i}} \right]$となる。

・・・正解（E）

１０．(1)

$$P_{x_e}^A = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} C_x \cdot b_x \cdot \alpha(x) + D_{x_r} \cdot b_{x_r} \cdot \alpha(x_r)}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \cdot b_x} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$P_{x_e}^B = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} C_x \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x} b_y}{x - x_e + 1} \cdot \beta(x) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r} b_y}{x_r - x_e + 1} \cdot \beta(x_r)}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x \cdot b_x} \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$V^A = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot b_y \cdot \alpha(y) + D_{x_r} \cdot b_{x_r} \cdot \alpha(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e}^A \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right)$$

$$V^B = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \frac{\sum_{z=x_e}^{y} b_z}{y - x_e + 1} \cdot \beta(y) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r} b_y}{x_r - x_e + 1} \cdot \beta(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e}^B \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right)$$

(2)ベースアップがあっても標準保険料率は変わらない。また、ベースアップ後の責任準備金V^{A_γ}、V^{B_γ}は$V^{A_\gamma} = (1+\gamma)V^A$

$$V^{B_\gamma} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \frac{\sum_{z=x_e}^{y} b_z}{y-x_e+1} \cdot \beta(y) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1} \cdot \beta(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$+ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1} \cdot \beta(y) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1} \cdot \beta(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \gamma$$

$$- P_{x_e}^{B} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot (1+\gamma)$$

よって、制度 A における後発過去勤務債務は

$$V^{A_\gamma} - V^{A} = \gamma \cdot V^{A}$$

$$= \gamma \cdot \left\{ \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot b_y \cdot \alpha(y) + D_{x_r} \cdot b_{x_r} \cdot \alpha(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} - P_{x_e}^{A} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \right\}$$

同様に、制度 B における後発過去勤務債務は

$$V^{B_\gamma} - V^{B} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y-x_e+1} \cdot \beta(y) + D_{x_r} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r-x_e+1} \cdot \beta(x_r)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \gamma$$

$$- P_{x_e}^{B} \cdot \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\displaystyle\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \gamma$$

(3) 被保険者がいつ脱退しても年金年額が等しくなるように支給率 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ を設定するので、以下の関係が成り立つ。

① $b_x \cdot \alpha(x) = \dfrac{\sum_{y=x_e}^{x} b_y}{x - x_e + 1} \cdot \beta(x) \quad (x_e \le x \le x_r)$

② $P_{x_e}^{A} = P_{x_e}^{B}$

②を用いると、

$$(V^{A_\gamma} - V^{A}) - (V^{B_\gamma} - V^{B}) =$$

$$\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot B_x \left(\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \left(b_y \cdot \alpha(y) - \frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y - x_e + 1} \cdot \beta(y) \right) + D_{x_r} \cdot \left(b_{x_r} \cdot \alpha(x_r) - \frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r - x_e + 1} \cdot \beta(x_r) \right)}{D_x \cdot b_x} \right) \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \gamma$$

ここで（）内の分子について①を用いると

$$\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \left(b_y \cdot \alpha(y) - \frac{\sum_{z=x}^{y} b_z}{y - x_e + 1} \cdot \beta(y) \right) + D_{x_r} \cdot \left(b_{x_r} \cdot \alpha(x_r) - \frac{\sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r - x_e + 1} \cdot \beta(x_r) \right)$$

$$= \sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \left(\frac{\sum_{z=x_e}^{y} b_z - \sum_{z=x}^{y} b_z}{y - x_e + 1} \cdot \beta(y) \right) + D_{x_r} \cdot \left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r} b_y - \sum_{y=x}^{x_r} b_y}{x_r - x_e + 1} \cdot \beta(x_r) \right)$$

$$= \sum_{y=x}^{x_r-1} C_y \cdot \left(\frac{\sum_{z=x_e}^{x-1} b_z}{y - x_e + 1} \cdot \beta(y) \right) + D_{x_r} \cdot \left(\frac{\sum_{y=x_e}^{x-1} b_y}{x_r - x_e + 1} \cdot \beta(x_r) \right) > 0$$

よって、制度Aの後発過去勤務債務のほうが大きい。

第７章

１．⑴　加入年齢方式による標準保険料は，

$$
{}^{E}P = \frac{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} \frac{l_{x_e+\tau} \cdot b_{x_e+\tau}}{l_{x_e} \cdot b_{x_e}} \cdot s_\tau^{(x_e)} \mu_{x_e+\tau} exp(-\delta\tau) d\tau}{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} \frac{l_{x_e+\tau} \cdot b_{x_e+\tau}}{l_{x_e} \cdot b_{x_e}} exp(-\delta\tau) d\tau}
$$

$$
= \frac{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau} \cdot b_{x_e+\tau} \cdot s_\tau^{(x_e)} \mu_{x_e+\tau}\, exp(-\delta\tau) d\tau}{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau} \cdot b_{x_e+\tau}\, exp(-\delta\tau) d\tau}
$$

よってケース１，ケース２の ${}^{E}P$ をそれぞれ P_1，P_2 とすると，

ケース１では $s_\tau^{(x_e)} = k$ を代入して

$$
P_1 = k \frac{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau} \cdot b_{x_e+\tau} \cdot \mu_{x_e+\tau}\, exp(-\delta\tau) d\tau}{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau} \cdot b_{x_e+\tau}\, exp(-\delta\tau) d\tau}
$$

ケース２では $s_\tau^{(x_e)} = m\, exp(-\delta(\omega - x_e - \tau))$ を代入して

$$
P_2 = m\, exp(-\delta(\omega - x_e)) \frac{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, d\tau}{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, exp(-\delta\tau) d\tau}
$$

P_1 と P_2 が等しくなるためには，

$$
m = k \frac{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, exp(\delta(\omega - x_e - \tau)) d\tau}{\displaystyle\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, d\tau}
$$

⑵　x_e 歳における脱退力 μ_x の変化に対する，期間 Δt における損益の変化は，

$$
({}_oV_{x_e} - s_o^{(x_e)})(\mu'_{x_e} - \mu_{x_e})\, l_{x_e} b_{x_e} \Delta t
$$

であり，ケース１とケース２の比較の上では，${}_oV_{x_e} - s_o^{(x_e)}$ をくらべればよい。

ここで，${}_oV_{x_e} = 0$ である。

したがって，ケース１では，${}_{o}V_{x_e} - s_o^{(x_e)} = 0 - k = -k$

ケース２では,

$${}_{o}V_{x_e} - s_o^{(x_e)} = 0 - m\ \ exp(-\delta(\omega - x_e))$$

$$= -k \frac{exp(-\delta(\omega - x_e)) \int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, exp(\delta(\omega - x_e - \tau))\, d\tau}{\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, d\tau}$$

$$= -k \frac{\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, exp(-\delta\tau)\, d\tau}{\int_0^{\omega - x_e} l_{x_e+\tau}\, b_{x_e+\tau}\, \mu_{x_e+\tau}\, d\tau}$$

$$> -k$$

したがってケース１，２とも μ_x が大きくなると損益はマイナスに振れるが，ケース１の方が，ケース２よりもその絶対値は大きい。

２.

(1)　題意より、

$$S_x = \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \alpha + D_{x_r} b_{x_r} \alpha}{D_x b_x} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{\alpha \ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y + D_{x_r} b_{x_r}\right)$$

(2)　現在 x 歳（x_e 歳加入、$x_e \le x \le x_r - 1$）の被保険者が、将来 y 歳（$x \le y \le x_r$）で脱退した場合、

i.　$x \le y < x_r$ のとき：　過去加入期間は $x - x_e$、将来加入期間は $y + 1 - x$

ii.　$y = x_r$ のとき：　過去加入期間は $x - x_e$、将来加入期間は $x_r - x$

であるから、

$${}^{P}S_x = \frac{\alpha \ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x - x_e}{y + 1 - x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x - x_e}{x_r - x_e}\right) \quad ・・・（ア）$$

$$ {}^{F}S_x = \frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x}\left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{y+1-x}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x_r - x}{x_r - x_e} \right) $$

(3)　ファクラーの公式より、導かれる関係式は

$$ b_{x+1} l_{x+1} {}^{P}S_{x+1} = b_x l_x ({}^{P}S_x + P_x)(1+i) - b_x d_x \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} $$ ・・・（イ）

ゆえに、$ {}^{P}S_{x+1} = \frac{b_x l_x}{b_{x+1} l_{x+1}} \left\{ ({}^{P}S_x + P_x)(1+i) - \frac{d_x}{l_x} \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \right\} $

(4)　（イ）式に（ア）式を代入すると、

$$ b_{x+1} l_{x+1} \frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_{x+1} b_{x+1}} \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x+1-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x+1-x_e}{x_r - x_e} \right) $$

$$ = b_x l_x \left(\frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x} \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x-x_e}{x_r - x_e} \right)(1+i) + b_x l_x P_x (1+i) - b_x d_x \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \right. $$

両辺に v^{x+1} を掛けると、

$$ D_{x+1} b_{x+1} \frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_{x+1} b_{x+1}} \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x+1-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x+1-x_e}{x_r - x_e} \right) $$

$$ = D_x b_x \left(\frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x} \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x-x_e}{x_r - x_e} \right) + D_x b_x P_x - C_x b_x \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \right. $$

$$ \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \left(\sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x+1-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x+1-x_e}{x_r - x_e} \right) $$

$$ = \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{x-x_e}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{x-x_e}{x_r - x_e} \right) + D_x b_x P_x - C_x b_x \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} $$

$$ D_x b_x P_x = \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \left(-C_x b_x \frac{x-x_e}{x+1-x_e} + \sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{1}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{1}{x_r - x_e} + C_x b_x \right) $$

$$ D_x b_x P_x = \alpha\ddot{a}_{\overline{n}|} \left(C_x b_x \frac{1}{x+1-x_e} + \sum_{y=x+1}^{x_r-1} C_y b_y \frac{1}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{1}{x_r - x_e} \right) $$

ゆえに、

$$ P_x = \frac{\alpha\ddot{a}_{\overline{n}|}}{D_x b_x} \left(\sum_{y=x}^{x_r-1} C_y b_y \frac{1}{y+1-x_e} + D_{x_r} b_{x_r} \frac{1}{x_r - x_e} \right) $$ ・・・（ウ）

従って、（ア）式および（ウ）式より、${}^{P}S_x = (x - x_e) P_x$

よって、求める $f(x)$ は $f(x)=x-x_e$ となる。

３．P148～150 より、解答は(E)

４． $v^{\tau}=\exp(-\delta\tau)$

$$l_{x_e+\tau}=l_{x_e}\exp(-\int_{x_e}^{x_e+\tau}\mu_y dy)=l_{x_e}\exp(-\mu\tau)$$

$$b_{x_e+\tau}=b_{x_e}\exp(-\int_{x_e}^{x_e+\tau}\lambda_y dy)=b_{x_e}\exp(\lambda\tau)$$

よって、

$$^{E}P=\frac{\int_{\frac{n}{2}}^{n}\left(v^{\tau}\cdot s\mu\frac{l_{x_e+\tau}b_{x_e+\tau}}{l_{x_e}b_{x_e}}\right)d\tau+v^{n}\cdot s\frac{l_{x_e+n}b_{x_e+n}}{l_{x_e}b_{x_e}}}{\int_{0}^{n}\left(v^{\tau}\cdot\frac{l_{x_e+\tau}b_{x_e+\tau}}{l_{x_e}b_{x_e}}\right)d\tau}$$

$$=\frac{\int_{\frac{n}{2}}^{n}(s\mu\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)\tau\})d\tau+s\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)n\}}{\int_{0}^{n}(\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)\tau\})d\tau}=\frac{\int_{\frac{n}{2}}^{n}(s\mu\cdot A^{\tau})d\tau+s\cdot A^{n}}{\int_{0}^{n}(A^{\tau})d\tau}$$

ここで、 $A=\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)\}$

積分計算を行うと、

$$ {}^{E}P = \frac{-\frac{1}{\mu+\delta-\lambda} s\mu(A^{n} - A^{\frac{n}{2}}) + sA^{n}}{-\frac{1}{\mu+\delta-\lambda}(A^{n}-1)} = \frac{s\left\{\mu(A^{\frac{n}{2}} - A^{n}) + (\mu+\delta-\lambda)A^{n}\right\}}{1-A^{n}} $$

$$ = \frac{s\left\{\mu A^{\frac{n}{2}} + (\delta-\lambda)A^{n}\right\}}{1-A^{n}} $$

また、$t \geq \dfrac{n}{2}$ の場合の責任準備金についても同様に、

$$ {}_{t}V_{x_e} = \int_{t}^{n}\left[(s\mu - {}^{E}P)\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)(\tau-t)\}\right]d\tau + s\cdot\exp\{-(\mu+\delta-\lambda)(n-t)\} $$

$$ = \frac{1}{A^{t}}\left\{\int_{t}^{n}\left\{(s\mu - {}^{E}P)A^{\tau}\right\}d\tau + sA^{n}\right\} $$

積分計算を行うと、

$$ {}_{t}V_{x_e} = -\frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\frac{1}{A^{t}}(s\mu - {}^{E}P)(A^{n} - A^{t}) + \frac{1}{A^{t}}sA^{n} $$

$$ = \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left\{(s\mu - {}^{E}P)(1 - \frac{A^{n}}{A^{t}}) + s(\mu+\delta-\lambda)\frac{A^{n}}{A^{t}}\right\} $$

$$ = \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left[(s\mu - {}^{E}P) + \left\{{}^{E}P + s(\delta-\lambda)\right\}\frac{A^{n}}{A^{t}}\right] $$

$$ = \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left[(s\mu - {}^{E}P) + \left\{\frac{s\left\{\mu A^{\frac{n}{2}} + (\delta-\lambda)A^{n}\right\}}{1-A^{n}} + s(\delta-\lambda)\right\}\frac{A^{n}}{A^{t}}\right] $$

$$ = \frac{1}{\mu+\delta-\lambda}\left[(s\mu - {}^{E}P) + \frac{1}{1-A^{n}}\left\{s\mu A^{\frac{n}{2}} + s(\delta-\lambda)\right\}A^{n-1}\right] $$

$\mu > \lambda > \delta$ より $\mu+\delta-\lambda > 0$ であり、$A < 1$

そのため、$\left\{ s\mu A^{\frac{n}{2}} + s(\delta - \lambda) \right\} < 0$ のとき、${}_{t}V_{x_e}$ は $t \geq \dfrac{n}{2}$ で単調減少となる。

解答

〈1〉 C	〈2〉 N	〈3〉 R	〈4〉 L	〈5〉 X
〈6〉 T	〈7〉 Q	〈8〉 D	〈9〉 N	〈10〉 R
〈11〉 H	〈12〉 Q	〈13〉 X	〈14〉 O	〈15〉 E

〈5〉と〈6〉及び〈13〉と〈14〉の解答はそれぞれ逆でも正解。

実務編　練習問題解答例

第１章

１．加入年齢方式、開放基金方式の標準保険料率、開放型総合保険料方式の保険料率の算出の定義により、

$$\frac{S^f}{G^f}=0.10、\ \frac{S^a_{FS}+S^f}{G^a+G^f}=0.12、\ \frac{S^p+S^a_{PS}+S^a_{FS}+S^f-F}{G^a+G^f}=0.14$$

将来の新規加入者の数および将来の年間付与ポイントを２倍に引き上げた場合のその年の開放型総合保険料方式の保険料率は$\dfrac{S^p+S^a_{PS}+2S^a_{FS}+4S^f-F}{2G^a+4G^f}$となる。

$$\frac{S^p+S^a_{PS}+2S^a_{FS}+4S^f-F}{2G^a+4G^f}=\frac{(S^p+S^a_{PS}+S^a_{FS}+S^f-F)+(S^a_{FS}+S^f)+2S^f}{2G^a+4G^f}$$
$$=\frac{0.14(G^a+G^f)+0.12(G^a+G^f)+2\cdot 0.1G^f}{2G^a+4G^f}=\frac{0.14(1.5G^f+G^f)+0.12(1.5G^f+G^f)+2\cdot 0.1G^f}{2\cdot 1.5G^f+4G^f}$$
$$=\frac{0.85}{7}=0.121$$

２．

〈1〉　(N)　$\dfrac{B_x}{b_x}$	〈2〉　(U)　$\displaystyle\sum_{t=x_e}^{y} b_t(1+j_1)^{y-t+1}$	〈3〉　(P)　$\dfrac{B_x}{b_x D_x}$
〈4〉　(Y)　$(v(1+j_2))^{x_r-y-1}C_y$	〈5〉　(B)　x_r-1	〈6〉　(E)　D_{x_r}

〈7〉 (M) $\dfrac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}\vert}}\dfrac{N_{x_r}}{D_{x_r}}$	〈8〉 (T) $b_y D_y$	〈9〉 (G) C_y
〈10〉 (A) $l_y - l_{y+1}$	〈11〉 (J) $\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t$	〈12〉 (W) $\sum_{t=x+1}^{x_r-1} b_t D_t$
〈13〉 (U) $\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t D_t$	〈14〉 (M) $\sum_{t=x_e}^{x-1} b_t v^t l_x$	〈15〉 (X) $\sum_{t=x_e}^{x-1} b_t (1+i)^{x-t}$
〈16〉 (G) 定年より前の l_x $(x \le x_r - 1)$ に依存しない		

（補足解説）

●〈2〉の導出

x_e 歳で加入した x 歳の被保険者の $x-1$ 歳時点までに獲得した年金原資を $F(y)^{j_1}_{\approx x-1}$、x_e 歳で加入した x 歳の被保険者の x 歳時点以降に獲得した年金原資を $F(y)^{j_1}_{x\approx}$ と定義すると、

$$F(y)^{j_1}_{\approx x-1} = \alpha \frac{B_x}{b_x} \sum_{t=x_e}^{x-1} b_t (1+j_1)^{x-t} (1+j_1)^{y-x+1} = \alpha \frac{B_x}{b_x} \sum_{t=x_e}^{x-1} b_t (1+j_1)^{y-t+1}$$

$$F(y)^{j_1}_{x\approx} = \alpha \frac{B_x}{b_x} \sum_{t=x}^{y} b_t (1+j_1)^{y-t+1}$$

したがって、 $F(y)^{j_1}_{x} = F(y)^{j_1}_{\approx x-1} + F(y)^{j_1}_{x\approx} = \alpha \dfrac{B_x}{b_x} \sum_{t=x_e}^{y} b_t (1+j_1)^{y-t+1}$

●〈11〉、〈12〉の導出

(2) の 1 行目の S_x の[ ]内の算式、$\left[\sum_{y=x}^{x_r-1} F(y)^i_x C_y + F(x_r-1)^i_x D_x\right]$ について、

$C_y = v^{y+1}(l_y - l_{y+1})$ を利用して展開する。

$$\sum_{y=x}^{x_r-1} F(y)_x^i C_y + F(x_r-1)_x^i D_{x_r} = \sum_{y=x}^{x_r-1}\sum_{t=x_e}^{y} b_t(1+i)^{y-t+1}v^{y+1}(l_y - l_{y+1}) + \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t(1+i)^{x_r-t}v^{x_r}l_{x_r}$$

$$= \sum_{y=x}^{x_r-1}\sum_{t=x_e}^{y} b_t v^t (l_y - l_{y+1}) + \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t l_{x_r}$$

$$= \left(\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_x - \sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_{x+1}\right) + \left(\sum_{t=x_e}^{x+1} b_t v^t l_{x+1} - \sum_{t=x_e}^{x+1} b_t v^t l_{x+2}\right) + \cdots + \left(\sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t l_{x_r-1} - \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t l_{x_r}\right) + \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t v^t l_{x_r}$$

$$= \sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_x + b_{x+1}v^{x+1}l_{x+1} + b_{x+2}v^{x+2}l_{x+2} + \cdots + b_{x_r-1}v^{x_r-1}l_{x_r-1}$$

$$= \sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_x + \sum_{t=x+1}^{x_r-1} b_t D_t$$

●<13>の導出

<11>、<12>の導出同様、(2)の3行目の${}^{E}P$の分子の算式、

$\left[\sum_{y=x_e}^{x_r-1} F(y)_{x_e}^i C_y + F(x_r-1)_{x_e}^i D_{x_r}\right]$について、$C_y = v^{y+1}(l_y - l_{y+1})$を利用して展開する。

$$\sum_{y=x_e}^{x_r-1} F(y)_{x_e}^i C_y + F(x_r-1)_{x_e}^i D_{x_r}$$

$$= x\sum_{y=x_e}^{x_r-1}\sum_{t=x_e}^{y} b_t(1+i)^{y-t+1}v^{y+1}(l_y - l_{y+1}) + \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t(1+i)^{x_r-t}v^{x_r}l_{x_r}$$

上式は上記<11>、<12>の導出に用いたS_xの[ ]内の算式の第1項の和の始点がx_e歳になったのみである。したがって、

$$\sum_{y=x_e}^{x_r-1} F(y)_{x_e}^i C_y + F(x_r-1)_{x_e}^i D_{x_r} = \left.\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_x\right|_{x=x_e} + \left.\sum_{t=x+1}^{x_r-1} b_t D_t\right|_{x=x_e} = \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t D_t$$

●<14>、<15>の導出

(2)のV_xの算式変形は以下のとおり。

$$= \frac{\dfrac{B_x}{b_x D_x}\dfrac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}\dfrac{N_{x_r}}{D_{x_r}}}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y D_y} \times \left(\sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y D_y \left[\sum_{t=x_e}^{x} b_t v^t l_x + \sum_{t=x+1}^{x_r-1} b_t D_t\right] - \sum_{y=x}^{x_r-1} b_y D_y \cdot \sum_{t=x_e}^{x_r-1} b_t D_t\right)$$

添字整理$y \to t$を行い整理すると、

$$=\frac{B_x}{b_x D_x}\frac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}\frac{N_{x_r}}{D_{x_r}}\times\left(\sum_{t=x_e}^{x}b_t v^t l_x+\sum_{t=x+1}^{x_r-1}b_t D_t-\sum_{t=x}^{x_r-1}b_t D_t\right)$$

$$=\frac{B_x}{b_x D_x}\frac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}\frac{N_{x_r}}{D_{x_r}}\times\left(\sum_{t=x_e}^{x}b_t v^t l_x-b_x D_x\right)$$

$$=\frac{B_x}{b_x D_x}\frac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}\frac{N_{x_r}}{D_{x_r}}\sum_{t=x_e}^{x-1}b_t v^t l_x$$

$$=\frac{B_x}{b_x}\frac{\alpha}{\ddot{a}'_{\overline{n}|}}\frac{N_{x_r}}{D_{x_r}}\sum_{t=x_e}^{x-1}b_t(1+i)^{x-t}$$

上式はそれぞれ、x_e、x_r、i、$\ddot{a}'_{\overline{n}|}$（利率$j_3$に対応）、$b_x$、$B_x$、$N_{x_r}$（定年以後の$l_x\ (x \geq x_r)$に対応）を算式中に含んでいるが、定年より前の$l_x\ (x \leq x_r-1)$に関連する算式は含んでいないことがわかる。

３．x歳時点における、加入期間が１年伸びることにより増加する年金額は、x歳から$x+1$歳までの年金額の増加、すなわち加入期間$(x-x_e)$年から加入期間$(x+1-x_e)$年までの年金額の増加であるから、

$\alpha_{x+1-x_e}-\alpha_{x-x_e}=\frac{(x+1-x_e)^2}{(x_r-x_e)^2}-\frac{(x-x_e)^2}{(x_r-x_e)^2}=\frac{2(x-x_e)+1}{(x_r-x_e)^2}$である。

これより、「単位」を変更した後の標準保険料は、${}^{U}P_x^2=\frac{2(x-x_e)+1}{(x_r-x_e)^2}\cdot\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$と表せる。

一方で、通常の単位積立方式による標準保険料${}^{U}P_x^1$は、x歳時の年金額が１であることに留意して、${}^{U}P_x^1=\frac{1}{x_r-x_e}\cdot\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}$となる。

よって、${}^{U}P_x^1={}^{U}P_x^2$となるxは、$\frac{1}{x_r-x_e}=\frac{2(x-x_e)+1}{(x_r-x_e)^2}$を満たす。

この式を整理すると、$x = \dfrac{x_r + x_e - 1}{2}$ ・・・解答(F)

第２章

１．ベースアップ前の期初積立金を F、t 年後の期初積立金を F_t とし、給付額を B、保険料を C、ベースアップを α とする。

F_t<0.9 F となる t を求める。

① ベースアップ前には以下の極限方程式が成立している。

$$F = F \times (1+i) + (C-B) \times (1+i)$$

これより $(B-C) = iF \big/ (1+i)$

② また、$F_t = F_{t-1} \times (1+i) + (C-B) \times (1+\alpha) \times (1+i)$

$$\begin{aligned}
&= F_{t-1} \times (1+i) - \frac{iF}{(1+i)} \times (1+\alpha) \times (1+i) \\
&= F_{t-1} \times (1+i) - iF \times (1+\alpha) \\
&= F_{t-2} \times (1+i)^2 - iF \times (1+\alpha) \times (1+i) - iF \times (1+\alpha) \\
&\dots \\
&= F \times (1+i)^t - iF \times (1+\alpha) \times \{1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{t-1}\} \\
&= F \times \{(1+i)^t + (1+\alpha) \times \{(1+i)^t - 1\}\} \\
&= F \times \{-\alpha(1+i)^t + (1+\alpha)\} < 0.9F
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad (1+i)^t > \dfrac{(0.1+\alpha)}{\alpha}$ を満たす最小の t が求める解。

i=5.0%、α＝5.0%を代入して t を求めると t ＝23・・・解答（D）

２．再計算前の標準保険料率を P_A、再計算後の標準保険料率を P_B とすると。

$$P_A = \frac{\ddot{a}_{60} \times D_{60} / D_{55}}{(N_{55} - N_{60}) / D_{55}} = \frac{\ddot{a}_{60} \times D_{60}}{N_{55} - N_{60}} \quad ・・・①$$

$$P_B = \frac{k \times \ddot{a}_{60} \times D_{60} / D_{55}}{(N_{55} - N_{59} + k \times D_{59}) / D_{55}} = \frac{k \times \ddot{a}_{60} \times D_{60}}{N_{55} - N_{59} + k \times D_{59}} \quad ・・・②$$

$P_B = 0.95 \times P_A$ であるので①、②から

$$\frac{k \times D_{60}}{N_{55} - N_{59} + k \times D_{59}} = \frac{D_{60}}{N_{55} - N_{60}} \times 0.95$$

これを k について解くと

$$k = \frac{0.95 \times (N_{55} - N_{59})}{N_{55} - N_{59} - 0.95 \times D_{59}} = 0.9398$$ ・・・・解答（C）

３．特別保険料 $\dfrac{PSL_0}{\ddot{a}_{\overline{\alpha|}}}$ による償却を m 回行った後（m 年後）の期末の未積立債務の残高は $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{\alpha-m|}}}{\ddot{a}_{\overline{\alpha|}}} PSL_0$ であり、特別保険料 $\dfrac{PSL_0}{X}$ による償却を n 回行った後に未積立債務がちょうど 0 となる場合の償却開始時点における未積立債務の残高は $\dfrac{\ddot{a}_{\overline{n|}}}{X} PSL_0$ である。

題意のとおり $\alpha = 5$、$m = 3$、$n = 3$ とし、3 年経過後に第 4 年度以降の償却計画を作成する時点において、以下の式が成り立つ。

$$\frac{\ddot{a}_{\overline{2|}}}{\ddot{a}_{\overline{5|}}} PSL_0 = \frac{\ddot{a}_{\overline{3|}}}{X} PSL_0$$

これを解いて、$X = \ddot{a}_{\overline{3|}} \dfrac{\ddot{a}_{\overline{5|}}}{\ddot{a}_{\overline{2|}}}$ となる。

$\ddot{a}_{\overline{2|}} = 1.96618$、$\ddot{a}_{\overline{3|}} = 2.89969$、$\ddot{a}_{\overline{5|}} = 4.67308$ を用いて計算すると、

$X = 6.89178$・・・解答は（E）

4.

（1）

①

$$S_x = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}、G_x = \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x} \text{ より、}$$

$$P_x = \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_x - N_{x_r}}、\overline{P} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{N_x - N_{x_r}}{D_x}}$$

②

$$\overline{P} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot S_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot G_x} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot G_x \cdot P_x}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot G_x}$$

であり、$\overline{P}$ は $P_{x_e}, P_{x_e+1}, \ldots, P_{x_r-1}$ の加重平均値として表すことができる。・・(ア)

また、

$$\frac{P_{x+1}}{P_x} = \left.\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_{x+1} - N_{x_r}}\middle/\frac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_x - N_{x_r}}\right. = 1 + \frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x_r}} > 1$$

より、$P_x (x_e \le x \le x_r - 1)$ は x の増加関数であり、$P_{x_e} \le P_x$ ・・・(イ)

（ア）（イ）より、$P_{x_e} \le \overline{P}$ であるから $P_x \le \overline{P}$ となる整数 x が $(x_e \le x \le x_r - 1)$ の間で存在する（少なくとも x_e はこの条件を満たす)。このため、それらのうちの最大値 x_N が存在することが言える。

（注）P_x が x の増加関数であることを示さなくとも、背理法を用いて x_N が存在することを示すこともできる。

（x_N が存在しないと仮定すると、$\overline{P} < P_{x_e}, P_{x_e+1}, \ldots, P_{x_r-1}$ であり、$\overline{P}$ が

$P_{x_e}, P_{x_e+1}, \ldots, P_{x_r-1}$ の加重平均であることと矛盾)

(2)

①

$$D_x = v^x \cdot mp^x = m(vp)^x \text{、}$$

$$N_x - N_{x_r} = \sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y = \sum_{y=x_e}^{x_r-1} m(vp)^y = m \cdot \frac{(vp)^x - (vp)^{x_r}}{1-vp}$$

②

前提より、$\bar{x}$ は $(x_e \le \bar{x} \le x_r - 1)$ を満たす正の整数・・・(ウ)

よって $P_{\bar{x}}$ が定義され $P_{\bar{x}} = \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{N_{\bar{x}} - N_{x_r}}$

ここで(2)①の結果を用いると、

$$\frac{\overline{P}}{P_{\bar{x}}} - 1 = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}}{D_x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{N_x - N_{x_r}}{D_x}} \cdot \frac{N_{\bar{x}} - N_{x_r}}{D_{x_r}\ddot{a}_{x_r}} - 1 = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{N_{\bar{x}} - N_{x_r}}{D_x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{N_x - N_{x_r}}{D_x}} - 1$$

$$= \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{m(vp)^{\bar{x}} - m(vp)^{x_r}}{(1-vp)\cdot m(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{m(vp)^x - m(vp)^{x_r}}{(1-vp)\cdot m(vp)^x}} - 1 = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{(vp)^{\bar{x}} - (vp)^{x_r}}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{(vp)^x - (vp)^{x_r}}{(vp)^x}} - 1$$

$$= \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{(vp)^{\bar{x}} - (vp)^x}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{(vp)^x - (vp)^{x_r}}{(vp)^x}} \qquad \cdot\cdot\cdot(\text{エ})$$

(エ)の分子 $= \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{(vp)^{\bar{x}} - (vp)^x}{(vp)^x} = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{(vp)^{\bar{x}}}{(vp)^x} - \sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x$

$$= \left(\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x\right) \cdot \left((vp)^{\bar{x}} \cdot \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \dfrac{1}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x} - 1 \right) \quad \cdot\cdot\cdot(\text{オ})$$

ここで、

$$\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x \cdot \frac{1}{(vp)^x}}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} L_x} \geq \prod_{x=x_e}^{x_r-1} \left[\left(\frac{1}{(vp)^x} \right)^{L_x} \right]^{\frac{1}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} L_y}} \qquad (\because 相加平均 \geqq 相乗平均)$$

$$= \left(\frac{1}{vp} \right)^{\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} x \cdot L_x}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} L_y}} = \frac{1}{(vp)^{\bar{x}}}$$

より、（オ）≧０、つまり $P_{\bar{x}} \leq \overline{P}$ ・・・・（カ）

（ウ）（カ）と、$\bar{x}$ の定義から、$\bar{x} \leq x_N$ であることが示せた。

５．　合併前の A，B の給付現価，標準保険料率，給与現価，積立金を各々(S_A，P_A，G_A，F_A)，(S_B，P_B，G_B，F_B)とする。条件⑴～⑷より

$$\left.\begin{array}{l} G_B = 0.1 G_A \\ S_B = 0.2 S_A \\ F_B = 0.1 F_A \\ S_A - P_A \cdot G_A - F_A = 0.5 S_A \end{array}\right\} \cdots (☆)$$

が成立する。

合併後の B の給付水準を，合併前の B の α 倍とすると，標準保険料率を P_A とした場合の合併後の過去勤務債務は，（☆）より

$$(S_A + \alpha S_B) - P_A(G_A + G_B) - (F_A + F_B)$$

$$= (1 + 0.2\alpha) S_A - P_A \cdot 1.1 \cdot G_A - 1.1 F_A$$

償却残余年数は，従前の A と同一かつ合併後の総給与で償却することから，合併後に A が負担する過去勤務債務は，

$$\frac{1}{1.1}\{(1 + 0.2\alpha) S_A - P_A \cdot 1.1 \cdot G_A - 1.1 \cdot F_A\}$$

$$= \frac{1}{1.1}\{(0.2\alpha - 0.1) S_A + 1.1(S_A - P_A \cdot G_A - F_A)\}$$

（☆）第４式より

$$= \frac{1}{1.1}(0.2\alpha - 0.1)S_A + 0.5S_A$$

A の先発の過去勤務債務額は 0.5S_A であるから，

$$\frac{1}{1.1}(0.2\alpha - 0.1)S_A + 0.5S_A \leqq 1.05 \cdot 0.5S_A$$

$$0.2\alpha - 0.1 \leqq 0.05 \cdot 0.5 \cdot 1.1$$

$$\alpha \leqq 0.6375$$

∴B の給付水準は B の従前の 63.75%以下に設定する。

６．A 社は B 社の 3 倍の規模であり、A 社と B 社の諸数値は以下の通り。（単位：百万円）

	A 社	B 社
将来加入員の給付現価	375	125
現在加入員の将来分給付現価	525	175
現在加入員の過去分給付現価	600	200
将来加入員の給与現価	15,000	5,000
現在加入員の給与現価	18,750	6,250
給与総額	300	100

分割前制度の加入者の責任準備金は A 社は B 社の 3 倍なので、各社の積立金 $F(A)$、$F(B)$ は、

$$F(A) = F \times \frac{3}{4} = 525、\ F(B) = F \times \frac{1}{4} = 175$$

まず、A 社について求める。

$$^{OAN}P(A)=\frac{(S_{FS}^{a}(A)+S^{f}(A))\times 1.2}{G^{a}(A)+G^{f}(A)}=\frac{(525+375)\times 1.2}{15{,}000+18{,}750}=0.032=3.2\%$$

したがって、過去勤務債務$U(A)$は、

$$U(A)=(S_{PS}^{a}(A)\times 1.2)-F(A)=600\times 1.2-525=195$$

よって、A 社の特別保険料率は、過去勤務債務÷給与総額÷20 年の期初払年金現価率であるから、

$$\frac{195}{300\times 14.7}=0.04421=4.4\%$$ ・・・解答（H）

次に B 社について求めると、

$$^{E}P(B)=\frac{S^{f}(B)}{G^{f}(B)}=\frac{125}{5{,}000}=0.025=2.5\%$$

したがって、過去勤務債務$U(B)$は、

$$U(B)=S^{a}(B)-{}^{E}P(B)\cdot G^{a}(B)-F(B)=175+200-0.025\times 6{,}250-175=43.75$$

よって、B 社の特別保険料率は、過去勤務債務÷給与総額÷20 年の期初払年金現価率であるから、

$$\frac{43.75}{100\times 14.7}=0.02976=3.0\%$$ ・・・解答（A）

第３章

１．　給付現価，標準保険料率，給与現価，特別保険料率を，制度変更前後で，それぞれ（S，P_1，G，P_2），（S'，P_1'，G'，P_2'）とする。

$$S' = 2 \times \frac{1}{2} \times S = S$$

$$G' = 2G$$

また，標準者１人当りの給付現価は $2 \times \frac{1}{2} = 1$ 倍，給与現価は２倍となることから

$$P_1' = \frac{1}{2} P_1$$

変更後の過去勤務債務は

$$S' - P_1' G' - F = S - \frac{1}{2} P_1 \cdot 2G - F$$

$$= S - P_1 \cdot G - F$$

となり，これは変更前に等しい。

一方，給与は２倍になるのであるから，特別保険料率 P_2' は P_2 の $\frac{1}{2}$ となる。

∴　標準保険料率，特別保険料率とも変更前の $\frac{1}{2}$ となる。

２．⑴　求める新規加入者数を A とおくと y（$y \geq x_0$）歳の加入者数は，

$A \times (l_y / l_{x_0})$ となる。

加入者総数は，L であるから，次式が成り立つ。

$$L = \sum_{y=x_0}^{r-1} \{A \times (l_y / l_{x_0})\}$$

ところで（右辺）$= A \times \left(\sum_{y=x_0}^{r-1} l_y \right) / l_{x_0}$

$= A \times \varepsilon_{x_0}$

従って　$\underline{\underline{A = L/\varepsilon_{x_0}}}$

⑵　求める新規加入者数をそれぞれA_1，A_2とすると，

$$\begin{cases} A_1 : A_2 = 3 : 1 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ A_1 \cdot \varepsilon_{x_1} + A_2 \cdot \varepsilon_{x_2} = L & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

上記の連立方程式を解くと　$A_1 = 3 \cdot L/(3 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})$

$\underline{\underline{A_2 = L/(3 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})}}$

⑶　定常人口を仮定しているのであるから，毎年発生する後発過去勤務債務は，x_2歳で加入する新規加入者の加入時責任準備金相当額である。

x_2歳の人，1人あたりの責任準備金は，

$$\left\{D_r \cdot \ddot{a}_r - {}^{E}P \cdot \left(\sum_{y=x_2}^{r-1} D_y\right)\right\} / D_{x_2} \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\ddot{a}_r = N_r/D_r$

$$\sum_{y=x_2}^{r-1} D_y = N_{x_2} - N_r$$

$${}^{E}P = D_r \cdot \ddot{a}_r \Big/ \left(\sum_{y=x_1}^{r-1} D_y\right)$$

$= N_r/(N_{x_1} - N_r)$を代入すると①は，

$$\frac{1}{D_{x_2}}\left\{N_r - \frac{N_r}{N_{x_1} - N_r} \cdot (N_{x_2} - N_r)\right\}$$

$= \dfrac{N_r}{D_{x_2}} \cdot \dfrac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_r}$ となる。⑵より新規加入者数は，

$L/(3 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2})$であるから

$$\underline{\underline{\frac{L}{3 \cdot \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2}} \cdot \frac{N_r}{D_{x_2}} \cdot \frac{N_{x_1} - N_{x_2}}{N_{x_1} - N_r}}}$$

３．　制度発足時の過去勤務債務を U_0 とすると

$$U_0=\sum_{x\geqq x_0}L_xB_x\left\{\frac{\sum_{t\geqq 0}d_{x+t}^{(w)}v^{t+\frac{1}{2}}\alpha\left(\sigma\sum_{k=1}^{x-x_0}b_{x-k}+\sum_{\mu=0}^{t}b_{x+\mu}\right)\bar{a}_{x+t+\frac{1}{2}}}{l_xb_x}\right.$$

$$\left.-P\cdot\frac{\sum_{t\geqq 0}l_{x+t}b_{x+t}v^t}{l_xb_x}\right\}$$

$$=\sum_{x\geqq x_0}L_x\alpha\cdot\sigma\left(\frac{B_x\sum_{k=1}^{x-x_0}b_{x-k}}{b_x}\right)\cdot\frac{\sum_{t\geqq 0}d_{x+t}^{(w)}v^{t+\frac{1}{2}}\bar{a}_{x+t+\frac{1}{2}}}{l_x}$$

$$+\sum_{x\geqq x_0}L_xB_x\left\{\frac{\sum_{t\geqq 0}d_{x+t}^{(w)}v^{t+\frac{1}{2}}\alpha\left(\sum_{\mu=0}^{t}b_{x+\mu}\right)\bar{a}_{x+t+\frac{1}{2}}}{l_xb_x}\right.$$

$$\left.-P\frac{\sum_{t\geqq 0}l_{x+t}b_{x+t}v^t}{l_xb_x}\right\}$$

ここで j の給与改定があったとすれば

$$U_0'=\sum_{x\geqq x_0}L_x\alpha\cdot\sigma\left(\frac{B_x\sum_{k=1}^{x-x_0}b_{x-k}}{b_x}\right)\cdot\frac{\sum_{t\geqq 0}d_{x+t}^{(w)}v^{t+\frac{1}{2}}\bar{a}_{x+t+\frac{1}{2}}}{l_x}$$

$$+\sum_{x\geqq x_0}L_xB_x(1+j)\left\{\frac{\sum_{t\geqq 0}d_{x+t}^{(w)}v^{t+\frac{1}{2}}\alpha\left(\sum_{\mu=0}^{t}b_{x+\mu}\right)\bar{a}_{x+t+\frac{1}{2}}}{l_xb_x}\right.$$

$$\left.-\frac{P\sum_{t\geqq 0}l_{x+t}b_{x+t}v^t}{l_xb_x}\right\}$$

$$U_0' - U_0 = j\sum_{x\geqq x_0} L_x B_x \left\{ \frac{\alpha \sum_{t\geqq 0} d_{x+t}^{(w)} v^{t+\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mu=0}^{t} b_{x+\mu} \right) \overline{a}_{x+t+\frac{1}{2}}}{l_x b_x} - \frac{P\sum_{t\geqq 0} l_{x+t} b_{x+t} v^t}{l_x b_x} \right\}$$

即ち，U_0 において $\sigma = 0$，すなわち過去勤務期間に対応する給付をつけないとした場合における PSL の j 割合だけ不足が計上される。

4．　初期 PSL を V_0 とする。

発足後 r 年度のベアによる後発 PSL は，$i(1+i)^{r-1}V_0$ よって，償却が行われなかった場合の n 年度末 PSL 累積残は

$$V_0(1+i)^n + i\sum_{r=0}^{n-1}(1+i)^r V_0(1+i)^{n-1-r} = V_0(1+i)^n + niV_0(1+i)^{n-1}$$

$$= \{1+(n+1)\ i\}(1+i)^{n-1}V_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

つぎに，特別保険料率 u は題意により

$u = d \cdot V_0/G_0$　（G_0；発足時給与総額）

よって，n 年度末までの償却済 PSL 累積額は

$$u \times \sum_{r=0}^{n-1}(1+i)^r G_0(1+i)^{n-r} = nuG_0(1+i)^n = in(1+i)^{n-1}V_0 \cdots\cdots (2)$$

故に，n 年度末未償却残は

$$(1)-(2) = \{1+(n+1)i\}(1+i)^{n-1}V_0 - in(1+i)^{n-1}V_0 = (1+i)^n V_0$$

よって，見直し後における特別保険料率 u' は

$$u' = \frac{d\,(1+i)^n V_0}{(1+i)^n G_0} = d \cdot \frac{V_0}{G_0}$$

すなわち，見直しの前後において特別保険料率は変わらない。

5．加入年齢方式の場合の標準保険料率は以下の通り計算される。

$^{E}P = S^f / G^f = 3{,}000{,}000 / 20{,}000{,}000 = 0.15$

これを用いて、加入年齢方式の責任準備金を計算すると

$S^p + S^a_{PS} + S^a_{FS} - {}^{E}P \cdot G^a$

$= (1{,}000{,}000 + 3{,}000{,}000 + 3{,}000{,}000 - 0.15 \times 12{,}500{,}000)$

$= 5{,}125{,}000$

よって、未積立債務＝5, 125, 000−4, 000, 000=1, 125, 000

一方、閉鎖型総合保険料方式の保険料率は以下の通り計算される。

$${}^{C}P = \frac{\left(S^P + S^a_{PS} + S^a_{FS} - F\right)}{G^a}$$

$$= \frac{(1{,}000{,}000 + 3{,}000{,}000 + 3{,}000{,}000 - 4{,}000{,}000)}{12{,}500{,}000} = 0.24$$

加入年齢方式による年間の標準保険料額は、

0.15×1,000,000=150,000

閉鎖型総合保険料方式による年間の保険料額は、

0.24×1,000,000=240,000

したがって、150,000+x×1,125,000=240,000、x=0.08

よって、解答は（D）

６．

（１）求めるべき標準保険料率をP_{x_e}、制度全体の被保険者の責任準備金をVと

すると

$$P_{x_e}=\frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}C_x\cdot\sum_{y=x_e}^{x}b_y+D_{x_r}\cdot\sum_{y=x_e}^{x_r-1}b_y}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}D_x\cdot b_x}\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}\quad\cdot\cdot\cdot\cdot①$$

$$V=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x_e}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x_e}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right]\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right]$$

（２）ベースアップがあっても標準保険料は変わらないため、ベースアップ後の

責任準備金V'は

$$V'=\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x_e}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x_e}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right]\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$+\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right]\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}\cdot\beta-P_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right]\cdot(1+\beta)$$

よって発生する後発過去勤務債務は

$$V'-V=\beta\cdot\left\{\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}C_y\cdot\sum_{z=x}^{y}b_z+D_{x_r}\cdot\sum_{z=x}^{x_r-1}b_z}{D_x\cdot b_x}\right]\cdot\alpha\cdot\ddot{a}_{\overline{n}|}-P_{x_e}\cdot\sum_{x=x_e}^{x_r-1}L_x\cdot B_x\left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1}D_y\cdot b_y}{D_x\cdot b_x}\right]\right\}$$

（３）

変更後の制度の標準保険料率P'_{x_e}は

$$P'_{x_e} = \frac{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} C_x \cdot \sum_{y=x_e}^{x} b_y + D_{x_r} \cdot \sum_{y=x_e}^{x_r-1} b_y}{\sum_{x=x_e}^{x_r-1} D_x} \cdot \alpha \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot \frac{B_{x_e}}{b_{x_e}} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで変更後の責任準備金V''とし、変更前後の責任準備金について考えると、給付現価が等しいことから

$$V - V'' = \sum_{x=x_e}^{x_r-1} \left\{ P'_{x_e} \cdot L_x \cdot \left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right] - P_{x_e} \cdot L_x \cdot B_x \cdot \left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right] \right\}$$

ここで各項の比を①②を用いて整理すると

$$\frac{P'_{x_e} \cdot L_x \cdot \left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{D_x} \right]}{P_{x_e} \cdot L_x \cdot B_x \cdot \left[\frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{D_x \cdot b_x} \right]} = \frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} \cdot \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}$$

一般に$a_i > 0, b_i > 0$で$\frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots < \frac{b_n}{a_n}$ならば、

$\frac{b_1 + \cdots + b_n}{a_1 + \cdots + a_n} < \frac{b_2 + \cdots + b_n}{a_2 + \cdots + a_n} < \cdots < \frac{b_n}{a_n}$が言える。

今、$(D_y \cdot b_y)/(D_y) = b_y$は$y$について単調増加であるという前提を用いると、

$$\frac{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{\sum_{y=x_e}^{x_r-1} D_y} < \frac{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y \cdot b_y}{\sum_{y=x}^{x_r-1} D_y} \quad (x_e < x < x_r - 1)$$

と言える。よって$V - V'' < 0$となり、「変更前責任準備金」＜「変更後責任準備金」と言える。

7．まず、財政再計算前の加入年齢方式の保険料を求めると、

$$\frac{S^f}{G^f}=\frac{7{,}000}{70{,}000}=0.1$$

これより（Ｉ）の保険料率は 0. 1×1. 1＝0. 11、

（Ⅱ）の保険料率は 0. 1×1. 8＝0. 18 であったことが分かる。

（Ｉ）の場合

開放基金方式の責任準備金は

$${}^{OAN}V=S^p+S^a_{PS}=10{,}040+9{,}600=19{,}640$$

であり、剰余金を準備金設定した場合の積立金の額

$$F-M=20{,}000-1{,}200=18{,}800$$

を上回るため、特別保険料の設定が必要となる。

このときの標準保険料、特別保険料を ${}^{OAN}P(n)_1, {}^{OAN}P(psl)_1$ とするとそれぞれ

$${}^{OAN}P(n)_1=\frac{S^a_{FS}+S^f}{G^a+G^f}=\frac{6{,}840+7{,}560}{78{,}000+72{,}000}=0.096 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$${}^{OAN}P(psl)_1=\frac{S^p+S^a_{PS}-(F-M)}{B\ddot{a}_{\overline{n|}}}=\frac{19{,}640-18{,}800}{B\ddot{a}_{\overline{n|}}}=\frac{840}{B\ddot{a}_{\overline{n|}}} \quad \cdot ②$$

①＋②＝0. 11 より $B\ddot{a}_{\overline{n|}}=60{,}000$ ・・・・・・・・・③

（Ⅱ）の場合

同様に、標準保険料、特別保険料を ${}^{OAN}P(n)_2, {}^{OAN}P(psl)_2$ とするとそれぞれ

$${}^{OAN}P(n)_2=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\left(S^a_{FS}+S^f\right)}{G^a+G^f}=0.096\cdot\left(1+\frac{\alpha}{100}\right) \quad \cdot\cdot\cdot ④$$

$${}^{OAN}P(psl)_2=\frac{\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\left(S^p+S^a_{PS}\right)-F}{B\ddot{a}_{\overline{n|}}}=\frac{19{,}640\cdot\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)-20{,}000}{B\ddot{a}_{\overline{n|}}} \quad \cdot ⑤$$

③の結果および④＋⑤＝0. 18 より

$$\left(0.096+\frac{19{,}640}{60{,}000}\right)\cdot\left(1+\frac{\alpha}{100}\right)=0.18+\frac{20{,}000}{60{,}000}$$

∴α＝21.2598・・・・・解答（D）21.3

８.

各理由における損益額は以下のとおり。

①利差損益　運用利回りが予定より大きかったことから以下の利益（利差益）が発生する。

利差益（＋）＝（期初積立金＋保険料）×（5.75%－2.0%）

＝（23,789,000円＋314,000円）×3.75%＝903,862.5円

②新規加入差損益　年度末加入なので、当該新規加入者の年度末責任準備金額が損失（新規加入差損）となる。

新規加入差損（－）

＝新規加入者加入時給与（1名あたり）×責任準備金率×人数

＝250,000円×0.13207×2＝66,035円

③昇給差損益　当該事業年度の保険料、給付金には影響がないこと、給付および保険料は給与に比例して行われる制度であるから年度末責任準備金が3%増加することから、以下の額が損失（昇給差損）となる。

昇給差損（－）＝　年度末責任準備金×3%

＝（期初責任準備金＋保険料）×1.02×3%

＝（23,789,000円＋314,000円）×1.02×3%＝737,551.8円

したがって、①～③を合計すると100,275.7円≒100千円の利益（＋）である。よって、解答はa＝100

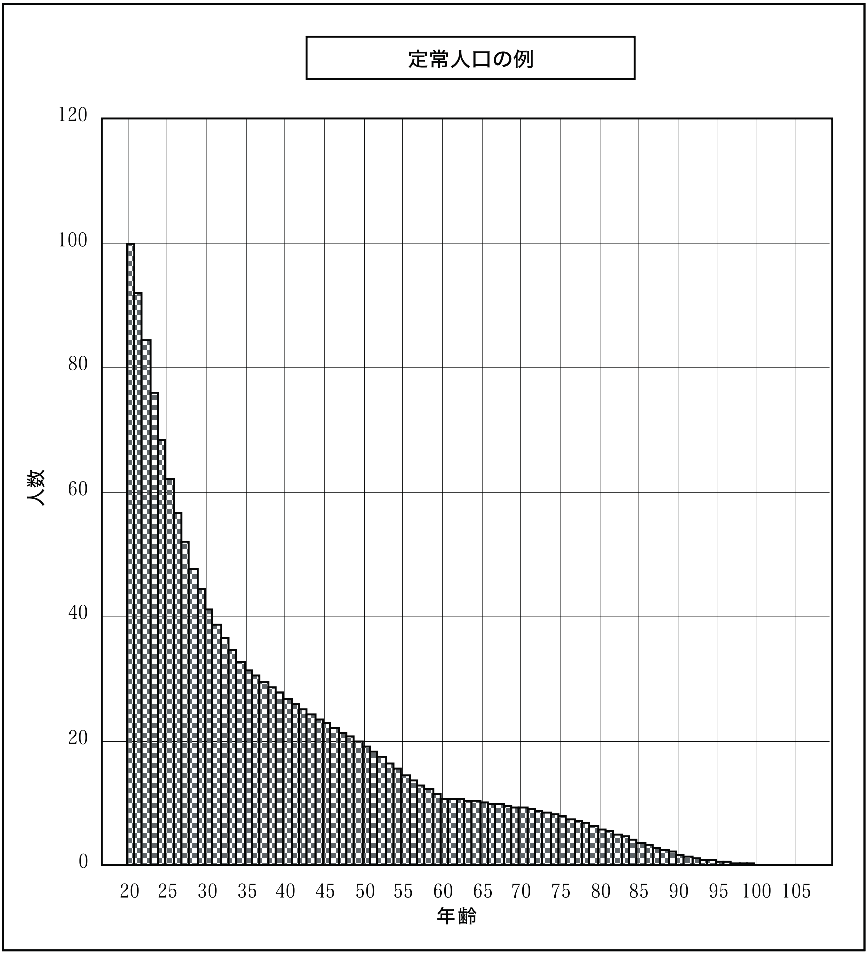
定常人口及び計算基数の例（予定利率＝5.5％）

年齢	人数	生存脱退率	死亡脱退率	v_x	D_x	N_x
20	100000.000	0.08000	0.00086	1.00000000	100000.0000	826940.1612
21	91914.000	0.08000	0.00082	0.94786730	87122.2749	726940.1612
22	84485.511	0.10000	0.00078	0.89845242	75906.2110	639817.8863
23	75971.061	0.10000	0.00075	0.85161366	64697.9934	563911.6753
24	68316.976	0.09000	0.00074	0.80721674	55146.6072	499213.6818
25	62117.894	0.09000	0.00075	0.76513435	47528.5347	444067.0746
26	56480.695	0.08000	0.00076	0.72524583	40962.3888	396538.5400
27	51919.314	0.08000	0.00077	0.68743681	35691.2476	355576.1512
28	47725.791	0.07000	0.00077	0.65159887	31098.0716	319884.9036
29	44348.237	0.07000	0.00076	0.61762926	27390.7688	288786.8320
30	41210.156	0.06000	0.00076	0.58543058	24125.6853	261396.0632
31	38706.227	0.06000	0.00079	0.55491050	21478.4916	237270.3779
32	36353.275	0.05000	0.00086	0.52598152	19121.1508	215791.8862
33	34504.348	0.05000	0.00094	0.49856068	17202.5110	196670.7354
34	32746.696	0.04000	0.00103	0.47256937	15475.0854	179468.2244
35	31403.099	0.03000	0.00111	0.44793305	14066.4859	163993.1390
36	30426.149	0.03000	0.00120	0.42458109	12918.3673	149926.6531
37	29476.853	0.03000	0.00130	0.40244653	11862.8571	137008.2858
38	28554.227	0.03000	0.00143	0.38146590	10892.4642	125145.4287
39	27656.768	0.03000	0.00158	0.36157906	10000.1081	114252.9645
40	26783.367	0.03000	0.00174	0.34272896	9179.4357	104252.8564
41	25933.263	0.03000	0.00192	0.32486158	8424.7208	95073.4207
42	25105.473	0.03000	0.00211	0.30792567	7730.6196	86648.7000

年龄	人数	生存脱退率	死亡脱退率	v_x	D_x	N_x
43	24299.337	0.03000	0.00230	0.29187267	7092.3122	78918.0804
44	23514.468	0.03000	0.00253	0.27665656	6505.4318	71825.7681
45	22749.542	0.03000	0.00280	0.26223370	5965.6968	65320.3363
46	22003.357	0.03000	0.00313	0.24856275	5469.2151	59354.6396
47	21274.386	0.03000	0.00348	0.23560450	5012.3412	53885.4245
48	20562.120	0.03000	0.00388	0.22332181	4591.9697	48873.0832
49	19865.475	0.03000	0.00433	0.21167944	4205.1126	44281.1135
50	19183.493	0.04000	0.00485	0.20064402	3849.0531	40076.0009
51	18323.114	0.05000	0.00542	0.19018390	3484.7612	36226.9478
52	17307.647	0.05000	0.00598	0.18026910	3120.0339	32742.1865
53	16338.765	0.05000	0.00652	0.17087119	2791.8241	29622.1526
54	15415.298	0.05000	0.00706	0.16196321	2496.7111	26830.3285
55	14535.701	0.05000	0.00758	0.15351963	2231.5154	24333.6175
56	13698.735	0.05000	0.00811	0.14551624	1993.3884	22102.1021
57	12902.702	0.05000	0.00865	0.13793008	1779.6707	20108.7137
58	12145.958	0.05000	0.00927	0.13073941	1587.9555	18329.0430
59	11426.067	0.05000	0.01001	0.12392362	1415.9596	16741.0875
60	10740.389		0.01087	0.11746314	1261.5998	15325.1280
61	10623.641		0.01175	0.11133947	1182.8306	14063.5281
62	10498.813		0.01270	0.10553504	1107.9927	12880.6975
63	10365.478		0.01382	0.10003322	1036.8921	11772.7048
64	10222.227		0.01512	0.09481822	969.2534	10735.8127
65	10067.667		0.01655	0.08987509	904.8325	9766.5594
66	9901.047		0.01788	0.08518965	843.4668	8861.7269

年齢	人数	生存脱退率	死亡脱退率	v_x	D_x	N_x
67	9724.017		0.01946	0.08074849	785.1996	8018.2601
68	9534.787		0.02117	0.07653885	729.7817	7233.0605
69	9332.936		0.02288	0.07254867	677.0921	6503.2788
70	9119.398		0.02472	0.06876652	627.1092	5826.1867
71	8893.967		0.02747	0.06518153	579.7224	5199.0774
72	8649.649		0.03080	0.06178344	534.4051	4619.3551
73	8383.240		0.03471	0.05856250	490.9435	4084.9500
74	8092.258		0.03914	0.05550948	449.1971	3594.0064
75	7775.527		0.04423	0.05261562	409.1142	3144.8094
76	7431.615		0.04986	0.04987263	370.6342	2735.6952
77	7061.075		0.05585	0.04727263	333.7956	2365.0610
78	6666.714		0.06191	0.04480818	298.7233	2031.2653
79	6253.978		0.06817	0.04247221	265.6203	1732.5420
80	5827.644		0.07490	0.04025802	234.6094	1466.9217
81	5391.154		0.08162	0.03815926	205.7224	1232.3123
82	4951.128		0.08941	0.03616992	179.0819	1026.5899
83	4508.447		0.09756	0.03428428	154.5689	847.5080
84	4068.603		0.10580	0.03249695	132.2172	692.9391
85	3638.145		0.11465	0.03080279	112.0650	560.7219
86	3221.032		0.12504	0.02919696	94.0443	448.6569
87	2818.274		0.13613	0.02767485	77.9953	354.6126
88	2434.622		0.14794	0.02623208	63.8652	276.6173
89	2074.444		0.16051	0.02486453	51.5801	212.7520
90	1741.475		0.17387	0.02356828	41.0436	161.1720

年齢	人数	生存脱退率	死亡脱退率	v_x	D_x	N_x
91	1438.685		0.18805	0.02233960	32.1396	120.1284
92	1168.140		0.20305	0.02117498	24.7353	87.9888
93	930.949		0.21890	0.02007107	18.6851	63.2534
94	727.165		0.23561	0.01902471	13.8341	44.5683
95	555.837		0.25318	0.01803290	10.0234	30.7342
96	415.110		0.27162	0.01709279	7.0954	20.7108
97	302.358		0.29090	0.01620170	4.8987	13.6154
98	214.402		0.31102	0.01535706	3.2926	8.7167
99	147.719		0.33194	0.01455646	2.1503	5.4241
100	98.685		0.35361	0.01379759	1.3616	3.2739
101	63.789		0.37597	0.01307828	0.8343	1.9122
102	39.806		0.39895	0.01239648	0.4935	1.0780
103	23.926		0.42246	0.01175022	0.2811	0.5845
104	13.818		0.44640	0.01113765	0.1539	0.3034
105	7.650		0.47065	0.01055701	0.0808	0.1495
106	4.049		0.49506	0.01000664	0.0405	0.0687
107	2.045		0.51948	0.00948497	0.0194	0.0282
108	0.983		1.00000	0.00899049	0.0088	0.0088


定常人口の例
120
100
80
60
40
20
0
人数
20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100 105
年齢

平成７年６月　印　刷
平成７年６月　発　行
平成23年２月　第７刷
平成27年３月　第８刷

発行所　社団法人　日本アクチュアリー会
東京都中央区晴海１－８－10
晴海アイランド　トリトンスクエア
オフィスタワーＸ２階
電　話（5548）６０３３

発行者　浅　野　紀久男

印刷所　株式会社　ケ　イ　ス　イ
電　話（5225）６５２６