数学（問題）

問題１から問題６を通じ、必要であれば「付表」に記載された数値を用いなさい。

「付表」には、以下の付表が掲載されている。

・付表Ⅰ.「標準正規分布表（上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ から確率 ε を求める表）」
　　　　「標準正規分布表（確率 ε から上側 ε 点 $u(\varepsilon)$ を求める表）」
・付表Ⅱ.「自由度 φ の χ^2 分布の上側 ε 点：$\chi^2_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅲ.「分母の自由度 n 、分子の自由度 m の F 分布の上側 ε 点：$F^m_n(\varepsilon)$」
・付表Ⅳ.「自由度 φ の t 分布の上側 ε 点：$t_\varphi(\varepsilon)$」
・付表Ⅴ.「自然対数表」
・付表Ⅵ.「指数関数表」

問題１. 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。　各５点（計２０点）

（１）箱の中に３つの玉が入っており、それぞれ１から３までの数字が書いてある。また、裏表の区別がつく１枚のコインがある。まず箱から玉を一つ無作為に選び、その玉に書かれた数字の回数だけコインを投げ、表の出た回数を X とする。
このとき、$\{X=1\}$ である確率 $P(X=1)$ は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。また、X の期待値 $E[X]$ は $\boxed{\quad ② \quad}$ である。ただし、箱から玉を１つ選ぶ確率はどれも同様に確からしいとし、コインの表と裏が出る確率も同様に確からしいものとする。

[①の選択肢]

（A）$\frac{5}{24}$	（B）$\frac{7}{24}$	（C）$\frac{1}{3}$	（D）$\frac{13}{36}$
（E）$\frac{3}{8}$	（F）$\frac{5}{12}$	（G）$\frac{11}{24}$	（H）$\frac{1}{2}$

[②の選択肢]

（A）$\frac{1}{3}$	（B）$\frac{1}{2}$	（C）$\frac{13}{24}$	（D）$\frac{3}{4}$
（E）1	（F）$\frac{31}{24}$	（G）$\frac{3}{2}$	（H）2

（2）Ａさんは、午前 0 時から午前 1 時の間に就寝し、同じ日の午前 6 時から午前 8 時の間に起床する。Ａさんの就寝時刻と起床時刻は互いに独立であり、それぞれの時刻は上記時間内に一様に分布しているものとする。

Ａさんの睡眠時間を Z とするとき、Z の確率密度関数 $f(z)$ は $\boxed{\quad ③ \quad}$ である。また、Ａさんのある日の睡眠時間が t 時間以下である確率が $1/3$ であるとき、t に最も近い数値は $\boxed{\quad ④ \quad}$ である。

[③の選択肢]

（A） $\begin{cases} z-5 & (5 \leq z \leq 13/2) \\ 8-z & (13/2 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（B） $\begin{cases} (z-5)/2 & (5 \leq z \leq 13/2) \\ (8-z)/2 & (13/2 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（C） $\begin{cases} 4(z-5)/9 & (5 \leq z \leq 13/2) \\ 4(8-z)/9 & (13/2 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（D） $\begin{cases} 4(z-5)^2/9 & (5 \leq z \leq 13/2) \\ 4(8-z)^2/9 & (13/2 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（E） $\begin{cases} z-5 & (5 \leq z \leq 6) \\ 1 & (6 < z \leq 7) \\ 8-z & (7 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（F） $\begin{cases} (z-5)/2 & (5 \leq z \leq 6) \\ 1/2 & (6 < z \leq 7) \\ (8-z)/2 & (7 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（G） $\begin{cases} (z-5)/3 & (5 \leq z \leq 6) \\ 2/3 & (6 < z \leq 7) \\ (8-z)/3 & (7 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（H） $\begin{cases} 4(z-5)/9 & (5 \leq z \leq 6) \\ 4/9 & (6 < z \leq 7) \\ 4(8-z)/9 & (7 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（I） $\begin{cases} 12(z-5)/25 & (5 \leq z \leq 6) \\ 6(z-5)(8-z)/25 & (6 < z \leq 7) \\ 12(8-z)/25 & (7 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

（J） $\begin{cases} 3(z-5)^2/5 & (5 \leq z \leq 6) \\ 3/5 & (6 < z \leq 7) \\ 3(8-z)^2/5 & (7 < z \leq 8) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$

[④の選択肢]

（A） 5.67　**（B）** 5.82　**（C）** 6.00　**（D）** 6.08　**（E）** 6.15

（F） 6.17　**（G）** 6.22　**（H）** 6.25　**（I）** 6.27　**（J）** 6.31

（３）n 回じゃんけんをしたところ、グーを出した回数が X_1 回、チョキを出した回数が X_2 回、パーを出した回数が X_3 回であった。グーを出す確率は p_1 、チョキを出す確率は p_2 、パーを出す確率は p_3 であるという。ただし、$p_1+p_2+p_3=1$ である。

このとき、(X_1,X_2,X_3) の積率母関数 $\phi(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ は ⑤ である。また、X_1 の積率母関数 $\phi(\theta_1)$ は ⑥ である。X_1 と X_2 の共分散 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$ は ⑦ である。

[⑤の選択肢]

（Ａ） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^n$

（Ｂ） $\left(1+p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}\right)^n$

（Ｃ） $\left(1-p_1e^{\theta_1}-p_2e^{\theta_2}-p_3e^{\theta_3}\right)^n$

（Ｄ） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3e^{\theta_3}+2\right)^n$

（Ｅ） $\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n\cdot\left(p_2e^{\theta_2}+1-p_2\right)^n\cdot\left(p_3e^{\theta_3}+1-p_3\right)^n$

（Ｆ） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}\right)^n$

（Ｇ） $\left(1-p_1e^{\theta_1}-p_2e^{\theta_2}\right)^n$

（Ｈ） $\left(1+p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}\right)^n$

（Ｉ） $\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n\cdot\left(p_2e^{\theta_2}+1-p_2\right)^n$

（Ｊ） $\left(1+p_1e^{\theta_1}+p_2e^{\theta_2}+p_3\right)^n$

[⑥の選択肢]

（Ａ） $\left(p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｂ） $\left(p_1e^{\theta_1}+p_2\right)^n$

（Ｃ） $\left(p_1-p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｄ） $\left(p_1e^{\theta_1}+1-p_1\right)^n$

（Ｅ） $\left(p_1e^{\theta_1}+2-p_1\right)^n$

（Ｆ） $\left(p_1e^{\theta_1}+3-p_1\right)^n$

（Ｇ） $\left(1-p_2-p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｈ） $\left(1+p_2+p_1e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｉ） $\left(p_1+(1-p_1)e^{\theta_1}\right)^n$

（Ｊ） $\left(p_2+(1-p_1)e^{\theta_1}\right)^n$

[⑦の選択肢]

（Ａ） 0

（Ｂ） $n(n-1)p_1p_2$

（Ｃ） $-n(n-1)p_1p_2$

（Ｄ） $n^2p_1p_2$

（Ｅ） $-n^2p_1p_2$

（Ｆ） np_1p_2

（Ｇ） $-np_1p_2$

（Ｈ） p_1p_2

（Ｉ） $-p_1p_2$

（4）確率変数 $X_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ は互いに独立で、すべて平均 2 の指数分布に従うとする。
このとき、確率変数 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ の標準偏差は $\boxed{\quad ⑧ \quad}$ である。
また、$n = 100$ のとき、S_{100} が 190 以上 240 以下となる確率 $P(190 \leq S_{100} \leq 240)$ を、中心極限定理を利用した近似により求めると、最も近い数値は $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ である。

[⑧の選択肢]

（A）$\dfrac{n}{4}$　（B）$\dfrac{\sqrt{n}}{2}$　（C）$\sqrt{\dfrac{n}{2}}$　（D）$\dfrac{n}{2}$　（E）n

（F）$\sqrt{n}$　（G）$\sqrt{2n}$　（H）$2\sqrt{n}$　（I）$2n$　（J）$4n$

[⑨の選択肢]

（A）0.0498　（B）0.2857　（C）0.3313　（D）0.4672　（E）0.4971

（F）0.5029　（G）0.5328　（H）0.6687　（I）0.7143　（J）0.9502

問題２． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各５点（計２０点）

（１）パラメータ $0 < p < 1$ の幾何分布

$$P(X = k) = p(1-p)^k \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

に従う母集団から次の標本値を得た。

13, 25, 37, 0, 41, 18, 31, 27, 11, 7

モーメント法によりパラメータ p を推定すると、p は $\boxed{\quad ① \quad}$ である。

[①の選択肢]

（A） $\frac{1}{24}$	**（B）** $\frac{1}{23}$	**（C）** $\frac{1}{22}$	**（D）** $\frac{1}{21}$	**（E）** $\frac{1}{20}$
（F） $\frac{1}{7}$	**（G）** $\frac{1}{3}$	**（H）** $\frac{1}{2}$	**（I）** $\frac{2}{3}$	**（J）** $\frac{6}{7}$
（K） $\frac{19}{20}$	**（L）** $\frac{20}{21}$	**（M）** $\frac{21}{22}$	**（N）** $\frac{22}{23}$	**（O）** $\frac{23}{24}$

（2）ある会社では、果汁濃度が低い製品を出荷しないように各製品に n 回の定量分析を行っている。同一製品における定量分析各回の果汁濃度の分析値は、互いに独立で同一の正規分布に従い、分散は $\sigma^2 = (2.0\%)^2$ とする。
果汁濃度 97%の製品を誤って不合格とする確率が 2.5%、果汁濃度が 95%以下の製品を誤って合格とする確率が 5.0%以下となるように分析するとき、実施すればよい最小の定量分析回数 n は $\boxed{②}$ である。このとき、果汁濃度の分析値の平均が $\boxed{③}$ %以下ならば、製品を不合格とすればよい（③は最も近い数値とする）。

[②の選択肢]

（A） 7　（B） 8　（C） 9　（D） 10　（E） 11

（F） 12　（G） 13　（H） 14　（I） 15　（J） 16

[③の選択肢]

（A） 95.63　（B） 95.67　（C） 95.71　（D） 95.75　（E） 95.79

（F） 95.83　（G） 95.87　（H） 95.91　（I） 95.95　（J） 95.99

（３）4 面サイコロ（正 4 面体の各面に 1～4 までの数字が割り当てられているサイコロ）を、28 回投げ、底面の数字を確認したところ、下表の結果を得た。

数字	1	2	3	4
出現回数	6	$9-x$	12	$x+1$

この 4 面サイコロについて、帰無仮説を「それぞれの数字の出る確率が等しい」として、有意水準 5%で検定を行った結果、帰無仮説が採択された。このとき、x のとりうる値のうち、最小値は［ ④ ］であり、最大値は［ ⑤ ］である。

［④、⑤の選択肢］

（A） -1　（B） 0　（C） 1　（D） 2　（E） 3

（F） 4　（G） 5　（H） 6　（I） 7　（J） 8

（K） 9

（4）世帯数 N の都市の総人口を推計するために n 世帯の世帯人数をランダムに抽出して調べるとき、これは大きさ N の有限母集団から非復元抽出にて無作為に取り出した大きさ n の標本を考えていることになる（任意抽出法）。このとき、標本変量を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とすると、推定量

$$Z_R = \boxed{⑥}$$

によって、世帯数 N の都市の総人口を推定することができる。この都市の世帯人数の母平均を μ 、母分散を σ^2 とすると、推定量 Z_R の変動係数 $\dfrac{\sqrt{V[Z_R]}}{E[Z_R]}$ は $\boxed{⑦}$ である。

いま、世帯数 160,000 の都市で、n 世帯の世帯人数を調べて総人口を推定する。推定量 Z_R の変動係数が 3%以下となるようにするために必要な最小の標本数 n は $\boxed{⑧}$ である。
ただし、母集団の変動係数は 1 とする。

[⑥の選択肢]

（A）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$　（B）$\displaystyle\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（C）$\displaystyle\frac{N}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（D）$\displaystyle\frac{N-n}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

（E）$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（F）$\displaystyle\frac{N}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（G）$\displaystyle\frac{N-n}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（H）$\displaystyle\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

（I）$\displaystyle\frac{N}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（J）$\displaystyle\frac{N-n}{n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

[⑦の選択肢]

（A）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\dfrac{n}{N}$　（B）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\dfrac{n}{N-n}$　（C）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{n}}$　（D）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-n}{n-1}\cdot\dfrac{1}{N}}$

（E）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{N}}$　（F）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{n}{N-n}}$　（G）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{1}{n}}$　（H）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-n}{N}\cdot\dfrac{1}{n}}$

（I）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N-1}{N-n}\cdot\dfrac{1}{n}}$　（J）$\dfrac{\sigma}{\mu}\cdot\sqrt{\dfrac{N}{N-n}\cdot\dfrac{1}{n}}$

[⑧の選択肢]

（A）1,096　（B）1,104　（C）1,112　（D）1,120　（E）1,128

（F）4,660　（G）4,695　（H）4,730　（I）4,765　（J）4,800

問題３． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。なお、同じ選択肢を複数回選択してもよい。　各５点（計１０点）

（１）(x, y) のデータが下表の通り与えられている。このデータからプロビット・モデル $y = F(\alpha + \beta x)$ を用いた回帰式を求める。ここで、F は標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数である。
α の推定値に最も近い数値は ［ ① ］ であり、β の推定値に最も近い数値は ［ ② ］ である。

x	1.1	1.3	2.6	4.8
y	0.1	0.15	0.3	0.78

[①の選択肢]

（A）-1.83　（B）-1.53　（C）-1.41　（D）-1.17　（E）-1.01

（F）-0.93　（G）-0.84　（H）-0.54　（I）-0.11　（J）-0.06

[②の選択肢]

（A）0.06　（B）0.11　（C）0.54　（D）0.84　（E）0.93

（F）1.01　（G）1.17　（H）1.41　（I）1.53　（J）1.83

（２）袋Ａには赤球が１個、白球が３個入っており、袋Ｂには赤球が３個、白球が１個入っている。それぞれの袋から球を無作為に１個取り出し、球を交換して袋に戻す試行を繰り返す。n 回の試行の直後の袋Ａの赤球の個数を X_n（ただし、$X_0 = 1$ ）とすると、X_n はマルコフ連鎖であり、極限分布が存在する。このとき、

$$P(X_2 = 1) = \boxed{\quad ③ \quad}, \quad \lim_{n \to \infty} P(X_n = 1) = \boxed{\quad ④ \quad}$$

である。

［③、④の選択肢］

（Ａ） 0	（Ｂ） $\frac{1}{70}$	（Ｃ） $\frac{3}{128}$	（Ｄ） $\frac{9}{64}$
（Ｅ） $\frac{13}{64}$	（Ｆ） $\frac{7}{32}$	（Ｇ） $\frac{8}{35}$	（Ｈ） $\frac{1}{4}$
（Ｉ） $\frac{9}{32}$	（Ｊ） $\frac{11}{32}$	（Ｋ） $\frac{3}{8}$	（Ｌ） $\frac{63}{128}$
（Ｍ） $\frac{1}{2}$	（Ｎ） $\frac{18}{35}$	（Ｏ） $\frac{3}{4}$	（Ｐ） 1

問題４． 次の（１）、（２）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１５点）
<u>なお、この問題に解答する際は、必要であれば画面左上にある「問題文のページを一覧化するボタン」を押下し、ページ間の移動に活用しなさい。</u>

（１）金融商品の価格計算では、次の通り、ある確率分布 F に従い、確率密度 f を持つ確率変数 X を前提にして、ある関数 $g(X)$ の期待値

$$\theta = E[g(X)] = \int g(x)f(x)\,dx$$

を求めようとすることが多い。この積分を求める場合に、解析的に解く代わりに、または解析的に求めることができないとき、以下のようにモンテカルロ法を使用することができる。

確率変数 X と同一の確率分布に従う、互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を生成して関数 $g(X_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ をシミュレートし、その標本平均

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

を母平均 θ の推定量とする。
このとき、$\hat{\theta}_n$ の期待値は、

$$E[\hat{\theta}_n] = \boxed{\quad ① \quad}$$

である。
また、母分散を $\sigma^2 = V[g(X)]$ とするとき、$\hat{\theta}_n$ の分散は

$$V[\hat{\theta}_n] = \boxed{\quad ② \quad}$$

であり、$\hat{\theta}_n$ と θ の平均２乗誤差は、

$$E\left[\left(\hat{\theta}_n - \theta\right)^2\right] = \boxed{\quad ③ \quad}$$

である。
よって、$\hat{\theta}_n$ と θ の標準誤差（平均 2 乗誤差の平方根）は、n と無関係な定数 c を用いて、$\boxed{\quad ④ \quad}$ と表わすことができる。

[①～④の選択肢]

（A） θ	（B） $\frac{\theta}{n}$	（C） $\frac{\theta}{n^2}$	（D） σ^2	（E） $\frac{\sigma^2}{n}$
（F） $\frac{\sigma^2}{n^2}$	（G） c	（H） $\frac{c}{\sqrt{n}}$	（I） $\frac{c}{n}$	（J） $\frac{c}{n^2}$

以下では、シミュレーション効率化の観点から、この定数部分 c を減少させる手法（分散減少法）のうち、<u>負の相関法</u>について考える。

まず、互いに独立ではない、同一のある確率分布 F に従い、確率密度 f を持つ、確率変数 X,Y を考える。$\theta = E[g(X)] = E[g(Y)]$、$\sigma^2 = V[g(X)] = V[g(Y)]$、$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}\big(g(X), g(Y)\big)$ とする。

次に、X_i と Y_i $(i = 1,2,\cdots,M)$ 以外、互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_M,\ Y_1, Y_2, \cdots, Y_M$ を生成する。なお、X_i と Y_i の同時確率分布は、X と Y の同時確率分布と同一であるとする。
このとき、θ の推定量として、標本平均

$$\hat{\theta}_{2M}^{(1)} = \frac{1}{2M} \cdot \sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(Y_i)\}$$

をとると、$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の期待値は、 $E\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] = \boxed{\quad ① \quad}$ である。また、$\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の分散は、

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] = \boxed{\quad ⑤ \quad}$$

である。
ここで、確率分布 F の逆関数 F^{-1} が存在し、$U_1, U_2, \cdots, U_M$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う互いに独立な確率変数とし、

$$X_i = F^{-1}(U_i)\ 、\quad Y_i = F^{-1}(1 - U_i)$$

とおくと、確率分布 F に従う確率変数 X_i および Y_i を生成できる。このとき、関数 $g(x)$ が単調関数ならば、$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] \leq V\left[\,\hat{\theta}_{2M}\right]$ となることが知られている。さらに、確率分布 F が標準正規分布に従うとき、分布の左右対称性から、標準正規分布に従う確率変数 X_i を用いて、

$$\hat{\theta}_{2M}^{(1)} = \frac{1}{2M} \cdot \boxed{\quad ⑥ \quad}$$

と表すことができる。

[⑤の選択肢]

（A） $\dfrac{\sigma^2}{2M}$　（B） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2}$　（C） $\dfrac{\sigma^2}{2M} + \dfrac{\sigma_{XY}}{M}$　（D） $\dfrac{\sigma^2}{2M} + \dfrac{\sigma_{XY}}{2M}$

（E） $\dfrac{\sigma^2}{2M} + \dfrac{2\sigma_{XY}}{M}$　（F） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2} + \dfrac{\sigma_{XY}}{M^2}$　（G） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2} + \dfrac{\sigma_{XY}}{4M^2}$　（H） $\dfrac{\sigma^2}{4M^2} + \dfrac{4\sigma_{XY}}{M^2}$

[⑥の選択肢]

（A） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(1/X_i)\}$　（B） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(-1/X_i)\}$　（C） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} \{g(X_i) + g(-X_i)\}$

（D） $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} g(2X_i)$　（E） $\displaystyle\sum_{i=1}^{2M} g(1/X_i)$　（F） $\displaystyle\sum_{i=1}^{2M} g(X_i)$

（２）確率変数 X が標準正規分布に従うとし、

$$g(X) = e^{-0.5} \cdot \max(e^X - 1,0)$$

である場合の金融商品の価格 $E[g(X)]$ を求めたい。なお、以下の解答にあたっては、計算途中にて端数処理せずに算出した結果と最も近い数値の選択肢を選択しなさい。

（ａ）まず、付表を用いて解析的に分散減少の効果の理論値を計算する。$g(X)$ の期待値は、

$$E[g(X)] = \boxed{⑦}$$

である。

$M = 3$ のとき、$\hat{\theta}_{2M}$ と $\hat{\theta}_{2M}^{(1)}$ の分散はそれぞれ、

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}\right] = \boxed{⑧}$$

$$V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right] = \boxed{⑨}$$

である。

よって、負の相関法によって分散は

$$1 - \frac{V\left[\hat{\theta}_{2M}^{(1)}\right]}{V\left[\hat{\theta}_{2M}\right]} = \boxed{⑩}$$

減少することが期待できる。

[⑦の選択肢]

（Ａ） 0.46	（Ｂ） 0.48	（Ｃ） 0.50	（Ｄ） 0.52	（Ｅ） 0.54
（Ｆ） 0.56	（Ｇ） 0.58	（Ｈ） 0.60	（Ｉ） 0.62	（Ｊ） 0.64

[⑧、⑨の選択肢]

（Ａ） 0.185	（Ｂ） 0.190	（Ｃ） 0.195	（Ｄ） 0.200	（Ｅ） 0.205
（Ｆ） 0.210	（Ｇ） 0.215	（Ｈ） 0.220	（Ｉ） 0.225	（Ｊ） 0.230
（Ｋ） 0.235	（Ｌ） 0.240	（Ｍ） 0245	（Ｎ） 0.250	（Ｏ） 0.255

[⑩の選択肢]

（Ａ） 13%	（Ｂ） 15%	（Ｃ） 17%	（Ｄ） 19%	（Ｅ） 21%
（Ｆ） 23%	（Ｇ） 25%	（Ｈ） 27%	（Ｉ） 29%	（Ｊ） 31%

（b）次に、実際に標準正規分布に従う乱数 $x_i\ (i=1,2,\cdots,6)$ を生成してシミュレーションする。

i	1	2	3	4	5	6
$\exp(x_i)$	0.6	5.3	1.1	1.9	0.3	0.5

標本平均、標本平均の分散の推定値は、次の通りである。

標本平均 $\hat{\theta}_6 =$ ⑪、標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散 $=$ ⑫

なお、標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散の計算において、$x_1, x_2, \cdots, x_6$ より算出した不偏分散の推定値を用いることとする。

x_1, x_2, x_3 を使用し、負の相関法による分散減少の効果を見る。
負の相関法による平均の分散の推定値は、次の通りである。

負の相関法の平均 $\hat{\theta}_6^{(1)}$ の分散 $=$ ⑬

なお、負の相関法の平均 $\hat{\theta}_6^{(1)}$ の分散の計算において、標本平均 $\hat{\theta}_6$ の分散、および x_1, x_2, x_3 より算出した不偏共分散の推定値を用いることとする。

よって、負の相関法によると、分散は ⑭ 減少する。

[⑪の選択肢]

（A） 0.46	（B） 0.48	（C） 0.50	（D） 0.52	（E） 0.54
（F） 0.56	（G） 0.58	（H） 0.60	（I） 0.62	（J） 0.64

[⑫、⑬の選択肢]

（A） 0.125	（B） 0.130	（C） 0.135	（D） 0.140	（E） 0.145
（F） 0.150	（G） 0.155	（H） 0.160	（I） 0.165	（J） 0.170
（K） 0.175	（L） 0.180	（M） 0.185	（N） 0.190	（O） 0.195

[⑭の選択肢]

（A） 13%	（B） 15%	（C） 17%	（D） 19%	（E） 21%
（F） 23%	（G） 25%	（H） 27%	（I） 29%	（J） 31%

問題５．次の（１）～（３）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１７点）
なお、この問題に解答する際は、必要であれば画面左上にある「問題文のページを一覧化するボタン」を押下し、ページ間の移動に活用しなさい。

「当たりくじ 2 枚とはずれくじ 8 枚が入った袋A」と「当たりくじとはずれくじが 5 枚ずつ入った袋B」がある。以下、【ルール 1】～【ルール 3】の下で、それぞれくじ引きを繰り返す。

（1）【ルール 1】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 1】

- 1 回目のくじ引きは袋Aから行う。
- $i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Aから行い、当たりくじの場合は袋Bから行う。
- 引いたくじは元の袋に戻す。
- 当たりくじを 3 回引いた時点でくじ引きを終了する。

確率変数 $X_j\ (j=1,2,3)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から j 枚目の当たりくじを引くまで行ったくじ引き回数とし、確率変数 X をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。なお、0 枚目の当たりくじを引いた状態とは、くじ引きを 1 度も行っていない状態を意味する（以下、（２）、（３）も同じ）。

まず、X_1 の期待値 $E[X_1]$ を求める。1 回目に引くくじが当たりかはずれかで場合分けをする。

（a）1 回目に当たりくじを引くとき

1 回目に当たりくじを引くという条件の下での X_1 の条件付き期待値は、

$$E\left[X_1 \middle| 1\text{回目に当たりくじを引く}\right]=1$$

（b）1 回目にはずれくじを引くとき

1 回目にはずれくじを引くという条件の下での X_1 の条件付き期待値は、

$$E\left[X_1 \middle| 1\text{回目にはずれくじを引く}\right]=\boxed{\text{①}}$$

ここで、1 回目に当たりくじを引く確率は、$\boxed{\text{②}}$ であるから、

$$E[X_1]=\boxed{\text{②}}\times 1+\left(1-\boxed{\text{②}}\right)\times\boxed{\text{①}}$$

が成り立つ。よって、X_1 の期待値は、

$$E[X_1]=\boxed{\text{③}}$$

次に、$E[X_2]$ を求める。
当たりくじを引いた直後のくじ引きは袋Bから引くことに注意すると、2 枚目の当たりくじを袋Bから引くという条件の下での X_2 の条件付き期待値は、$\boxed{\text{④}}$ である。
袋Bではずれくじを引いた場合は袋Aからくじを引くことに注意すると、2 枚目の当たりくじを袋Aから引くという条件の下での X_2 の条件付き期待値は、$\boxed{\text{⑤}}$ である。

よって、

$$E[X_2] = \boxed{⑥}$$

$E[X_3]$ も $E[X_2]$ と同様に考えれば求めることができる。

したがって、X の期待値は、

$$E[X] = \boxed{⑦}$$

[①、⑤の選択肢]

（A） $E[X_1]$	（B） $1 + E[X_1]$	（C） $E[X_2]$	（D） $1 + E[X_2]$
（E） $\frac{1}{2}E[X_1]$	（F） $\frac{1}{5}E[X_1]$	（G） $\frac{1}{2}(1 + E[X_1])$	（H） $\frac{1}{5}(1 + E[X_1])$
（I） $\frac{1}{2}E[X_2]$	（J） $\frac{1}{5}E[X_2]$	（K） $\frac{1}{2}(1 + E[X_2])$	（L） $\frac{1}{5}(1 + E[X_2])$

[②～④、⑥、⑦の選択肢]

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4
（E） 5	（F） 9	（G） 12	（H） 15
（I） $\frac{1}{5}$	（J） $\frac{2}{5}$	（K） $\frac{1}{2}$	（L） $\frac{4}{5}$
（M） $\frac{5}{2}$	（N） $\frac{13}{5}$	（O） $\frac{7}{2}$	（P） $\frac{36}{5}$

（２）【ルール 2】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 2】

- 1 回目のくじ引きは袋Ａから行う。
- $i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Ａから行い、当たりくじの場合は袋Ｂから行う。
- 袋から当たりくじを引いた場合は元に戻さず、代わりに当たりくじを引いた袋にはずれくじを1 枚入れる。
- 袋からはずれくじを引いた場合はくじを元に戻す。
- 「当たりくじを 3 回引いた時点」もしくは「当たりくじを引く確率が 0 になった時点」でくじ引きを終了する。

確率変数 $Y_j\ (j=1,2,3)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から「j 枚目の当たりくじを引く」もしくは「袋から当たりくじを引く確率が 0 になる」まで行ったくじ引き回数とし、確率変数 Y をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。

まず、$E[Y_1]$ を求める。（１）と同様に考えると、

$$E[Y_1] = \boxed{\quad ③ \quad}$$

次に、$\mathrm{E}[Y_2]$ を求める。袋Ａには当たりくじが 1 枚、はずれくじが 9 枚入っていることに注意すると、（１）と同様に考えて、

$$E[Y_2] = \boxed{\quad ⑧ \quad}$$

［⑧の選択肢］

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4	（E） 5
（F） 6	（G） 7	（H） 9	（I） 11	（J） 15
（K） $\frac{1}{10}$	（L） $\frac{1}{5}$	（M） $\frac{2}{5}$	（N） $\frac{1}{2}$	（O） $\frac{3}{5}$
（P） $\frac{8}{5}$	（Q） $\frac{11}{5}$	（R） $\frac{5}{2}$	（S） $\frac{17}{5}$	（T） $\frac{7}{2}$
（U） $\frac{23}{5}$	（V） $\frac{32}{5}$	（W） $\frac{36}{5}$	（X） $\frac{29}{2}$	（Y） $\frac{87}{5}$

最後に、$E[Y_3]$ を求める。

（ａ）２枚目の当たりくじを袋Ａから引いたとき

２枚目の当たりくじを袋Ａから引いた直後、袋Ａに当たりくじが０枚、袋Ｂに当たりくじが５枚入っている。よって、２枚目の当たりくじを袋Ａから引いたという条件の下での Y_3 の条件付き期待値は $\boxed{⑨}$ である。

（ｂ）２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いたとき

２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いた直後、袋Ａに当たりくじが１枚、袋Ｂに当たりくじが４枚入っている。よって、２枚目の当たりくじを袋Ｂから引いたという条件の下での Y_3 の条件付き期待値は $\boxed{⑩}$ である。

ここで、２枚目の当たりくじを袋Ａから引く確率は、$\boxed{⑪}$ であるから、Y_3 の期待値は、

$$E[Y_3] = \boxed{⑫}$$

となる。

したがって、Y の期待値は、

$$E[Y] = \boxed{⑬}$$

［⑨～⑬の選択肢］

（A） 1	（B） 2	（C） 3	（D） 4	（E） 5
（F） 6	（G） 7	（H） 9	（I） 11	（J） 15
（K） $\frac{1}{10}$	（L） $\frac{1}{5}$	（M） $\frac{2}{5}$	（N） $\frac{1}{2}$	（O） $\frac{3}{5}$
（P） $\frac{8}{5}$	（Q） $\frac{11}{5}$	（R） $\frac{5}{2}$	（S） $\frac{17}{5}$	（T） $\frac{7}{2}$
（U） $\frac{23}{5}$	（V） $\frac{32}{5}$	（W） $\frac{36}{5}$	（X） $\frac{29}{2}$	（Y） $\frac{87}{5}$

（3）【ルール 3】の下で、くじ引きを繰り返す。

【ルール 3】

・1 回目のくじ引きは袋Aから行う。 ・$i+1$ 回目 $(i \geq 1)$ のくじ引きは、i 回目のくじ引きで引いたくじがはずれくじの場合は袋Aから行い、当たりくじの場合は袋Bから行う。 ・<u>引いたくじは元の袋に戻す。</u> ・<u>「当たりくじを k 回引いた時点」もしくは「n 回連続ではずれくじを引いた時点」でくじ引きを終了する。</u>

確率変数 $Z_{n,j}$ $(j \geq 1)$ を、$j-1$ 枚目の当たりくじを引いた状態から「j 枚目の当たりくじを引く」もしくは「n 回連続ではずれくじを引いてくじ引きを終了する」まで行ったくじ引き回数とし、確率変数 Z_n をくじ引き終了までのくじ引き回数とする。なお、$Z_{n,j}$ は $j-1$ 枚目の当たりくじを引いたという条件の下での確率変数である。

（a）$n=1$ のとき

$j=1$ のとき、くじを引いた時点で引いたくじが、当たりかはずれにかかわらずくじ引きを終了することから、$Z_{1,1}$ の期待値は、

$$E[Z_{1,1}] = \boxed{⑭}$$

$j \geq 2$ のとき、同様に考えると、$Z_{1,j}$ の期待値は、

$$E[Z_{1,j}] = \boxed{⑮}$$

ここで、$j-1$ $(j \geq 2)$ 枚目の当たりくじを引く確率は、$\boxed{⑯}$ であるから、Z_1 の期待値は、

$$E[Z_1] = \boxed{⑰}$$

［⑭、⑮の選択肢］

（A） 1　（B） 2　（C） $j-1$　（D） $j+1$

（E） $2k$　（F） $\frac{13}{5}k - \frac{3}{5}$　（G） $\frac{7}{2}k - \frac{3}{2}$　（H） $5k-3$

（I） $2k-5$　（J） $\frac{13}{5}k + \frac{12}{5}$　（K） $\frac{7}{2}k + \frac{3}{2}$　（L） $5k$

［⑯、⑰の選択肢］

（A） $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（B） $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$　（C） $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{j-2}$

（D） $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$　（E） $\frac{6}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$　（F） $\frac{9}{8} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$

（G） $\frac{13}{8} - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$　（H） $\frac{7}{5} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

（b） $n \geq 2$ のとき

n 回連続ではずれくじを取り出した場合にくじ引きを終了することに注意すると、$Z_{n,1}$ の期待値は、

$$E[Z_{n,1}] = \boxed{\quad ⑱ \quad}$$

$j \geq 2$ のとき、$Z_{n,j}$ の期待値は、

$$E[Z_{n,j}] = \boxed{\quad ⑲ \quad}$$

ここで、$j-1$ $(j \geq 2)$ 枚目の当たりくじを引く確率は、$\boxed{\quad ⑳ \quad}$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty} E[Z_n] = \boxed{\quad ㉑ \quad}$$

[⑱、⑲の選択肢]

（A） $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（B） $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$　（C） $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-2}$

（D） $\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-2}$　（E） $\frac{6}{5}-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（F） $\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$

（G） $\frac{13}{8}-\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{j-1}$　（H） $\frac{7}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$　（I） $5-4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

（J） $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　（K） $\frac{7}{2}-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}$　（L） $\frac{13}{5}-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

[⑳の選択肢]

（A） $\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$　（B） $\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$

（C） $\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}^{j-2}$　（D） $\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n}\right\}^{j-1}$

（E） $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{j-2}$　（F） $\left\{1-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$

（G） $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}\cdot\left\{1-\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^{j-1}$　（H） $\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}^{j-1}$

[㉑の選択肢]

（A） 1　（B） 2　（C） $k-1$　（D） $k+1$

（E） $2k$　（F） $\frac{13}{5}k-\frac{3}{5}$　（G） $\frac{7}{2}k-\frac{3}{2}$　（H） $5k-3$

（I） $2k-5$　（J） $\frac{13}{5}k+\frac{12}{5}$　（K） $\frac{7}{2}k+\frac{3}{2}$　（L） $5k$

問題６． 次の（１）～（４）の各問について、空欄に当てはまる最も適切なものをそれぞれの選択肢の中から１つ選びなさい。同じ選択肢を複数回選択してもよい。（１８点）
<u>なお、この問題に解答する際は、必要であれば画面左上にある「問題文のページを一覧化するボタン」を押下し、ページ間の移動に活用しなさい。</u>

母集団分布がポアソン分布であるとき、母平均 λ の区間推定法のうち、精密法について考える。
以下、母平均 λ のポアソン母集団からの n 個の標本を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

（１）まず、母平均 λ の最尤推定量 T を求め、T が望ましい性質を持つか調べる。母平均 λ のポアソン分布の確率分布は、

$$f(x_i;\lambda) = P(X = x_i) = \boxed{\quad ① \quad}$$

であるから、母平均 λ の最尤推定量を求めると、

$$T = \boxed{\quad ② \quad}$$

である。

[①の選択肢]

（**A**）$\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i}e^{-\lambda}$　（**B**）$\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}$　（**C**）$\dfrac{x_i!}{\lambda}e^{-\lambda}$　（**D**）$\dfrac{x_i}{\lambda^{x_i}}e^{-x_i}$

（**E**）$\dfrac{\lambda^{x_i}}{x_i}e^{-x_i}$　（**F**）$\dfrac{\lambda}{x_i!}e^{-\lambda}$　（**G**）$\dfrac{\lambda}{x_i}e^{-\lambda}$　（**H**）$\dfrac{\lambda}{x_i}e^{-x_i}$

[②の選択肢]

（**A**）$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$　（**B**）$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$　（**C**）$\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$　（**D**）$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$

以下、最尤推定量 T が持つ性質を調べる。

（不偏性）不偏性を判定するため、T の期待値を計算すると、$E[T] =$ ③ である。

（有効性）クラーメル・ラオの不等式を用いて有効性を判定する。クラーメル・ラオの不等式は、$V[T] \geq \dfrac{1}{④}$ で与えられ、左辺と右辺をそれぞれ計算すると次の通りである。

不等式の左辺 $= V[T] =$ ⑤
不等式の右辺 $=$ ⑥

（充足性）充足性を判定するには、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ の確率分布を、T の確率分布と λ に依存しない関数を用いて、次のように分解できればよい。

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = g(T;\lambda) \cdot h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

（一致性）チェビシェフの不等式を用いて一致性を判定する。任意の $\varepsilon > 0$ に対し、T に関するチェビシェフの不等式を次のように表すことができる。

$$P(|T - E[T]| > \varepsilon) \leq ⑦$$

これを解くと、次の通りとなる。

$$\lim_{n \to \infty} P(|T - E[T]| > \varepsilon) = ⑧$$

[③、⑤～⑧の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） λ　（D） λ^2　（E） $\sqrt{\lambda}$

（F） 2λ　（G） $n\lambda$　（H） $2n\lambda$　（I） $2\lambda^2$　（J） $\dfrac{\lambda}{n}$

（K） $\dfrac{2\lambda}{n}$　（L） $\sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$　（M） $\sqrt{\dfrac{2\lambda}{n}}$　（N） $\dfrac{\lambda}{n^2}$　（O） $\dfrac{2\lambda}{n^2}$

（P） $\dfrac{\lambda}{n\varepsilon}$　（Q） $\dfrac{\lambda^2}{n^2\varepsilon^2}$　（R） $\dfrac{\lambda}{n^2\varepsilon^2}$　（S） $\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$　（T） $\dfrac{\lambda}{\varepsilon^2}$

[④の選択肢]

（A） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$　（B） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$　（C） $E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$

（D） $E\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$　（E） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$　（F） $n \cdot E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$

（G） $E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)\right]$　（H） $E\left[\left(\dfrac{\partial f(X;\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2\right]$

以上より、最尤推定量 T が持つ性質は $\boxed{\quad ⑨ \quad}$ である。なお、⑨の解答にあたっては、**（A）**から**（D）**のうち、正しいものをすべて選択しなさい。ただし、すべて誤っている場合は、**（E）**を選択しなさい。

［⑨の選択肢］

（A） 不偏性　**（B）** 有効性　**（C）** 充足性　**（D）** 一致性　**（E）** 該当なし

（２）次に、ポアソン分布と χ^2 分布の関係を示す。非負整数 k 、正の実数 λ に対し、積分 $F(k,\lambda)$ を、

$$F(k,\lambda)=\int_{\lambda}^{\infty} t^k e^{-t}\,dt$$

とおく。$k\geq 1$ の範囲で $F(k,\lambda)$ を１回部分積分すると、

$$F(k,\lambda)=\boxed{\quad ⑩ \quad}+k\cdot F(k-1,\lambda)$$

となる。部分積分をくり返すと、平均 λ のポアソン分布に従う確率変数 X を用いて、

$$F(k,\lambda)=\boxed{\quad ⑪ \quad}\cdot P\left(X\leq \boxed{\quad ⑫ \quad}\right)\ \cdots\ \text{(a)}$$

と表すことができる。一方、$F(k,\lambda)$ において、$t=y/2$ とおくと、

$$F(k,\lambda)=\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}\,dy=\Gamma(k+1)\int_{2\lambda}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)}\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}\right)^k e^{-\frac{y}{2}}\,dy$$

と表される。よって、自由度 $\boxed{\quad ⑬ \quad}$ の χ^2 分布に従う確率変数 Y を用いることで、

$$F(k,\lambda)=\Gamma(k+1)\cdot P\left(Y\geq \boxed{\quad ⑭ \quad}\right)\ \cdots\ \text{(b)}$$

と表すことができる。(a), (b) から、次の関係式が成り立つ。

$$P\left(X\leq \boxed{\quad ⑫ \quad}\right)=\boxed{\quad ⑮ \quad}\cdot P\left(Y\geq \boxed{\quad ⑭ \quad}\right)$$

なお、$k=0$ の場合についても上記の関係式は成り立つ。

[⑩の選択肢]

（A） 0　（B） 1　（C） λ^k　（D） λ^{k+1}

（E） $\dfrac{\lambda^{k+1}}{k+1}$　（F） $\lambda^k e^{-\lambda}$　（G） $\lambda^{k+1}e^{-\lambda}$　（H） $\dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda}}{k+1}$

（I） $-\dfrac{\lambda^{k+1}}{k+1}$　（J） $-\lambda^k e^{-\lambda}$　（K） $-\lambda^{k+1}e^{-\lambda}$　（L） $-\dfrac{\lambda^{k+1}e^{-\lambda}}{k+1}$

[⑪～⑬、⑮の選択肢]

（A） $\dfrac{1}{2}$　（B） 1　（C） $k-1$　（D） k　（E） $k+1$

（F） $k+2$　（G） $2k-1$　（H） $2k$　（I） $2k+1$　（J） $2(k+1)$

（K） $(k-1)!$　（L） $k!$　（M） $(k+1)!$　（N） $(k+2)!$

[⑭の選択肢]

（A） $\sqrt{\lambda}$　（B） $\sqrt{2\lambda}$　（C） $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$　（D） $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

（E） λ　（F） 2λ　（G） $\dfrac{1}{\lambda}$　（H） $\dfrac{2}{\lambda}$

（３）母平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間 (λ_L, λ_U) を求める。最尤推定量 T を n 倍した nT は、平均 $\boxed{\quad ⑯ \quad}$ のポアソン分布に従うことから、nT の実現値を $k\ (k \geq 1)$ とするとき、$P(nT \leq k) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす λ_U と、$P(nT \geq k) = \dfrac{\varepsilon}{2}$ を満たす λ_L からなる信頼区間を求めればよい。

（２）で求めたポアソン分布と χ^2 分布の関係から、

$$P(nT \leq k) = P\left(Y_U \geq \boxed{\quad ⑰ \quad}\right) = \frac{\varepsilon}{2}、\quad P(nT \geq k) = P\left(Y_L \leq \boxed{\quad ⑰ \quad}\right) = \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。ここで、Y_U は自由度 $\boxed{\quad ⑱ \quad}$ の χ^2 分布に従う確率変数、Y_L は自由度 $\boxed{\quad ⑲ \quad}$ の χ^2 分布に従う確率変数である。

よって、母平均 λ の信頼係数 $1-\varepsilon$ の信頼区間 (λ_L, λ_U) は、nT の実現値を $k\ (k \geq 1)$ とするとき、自由度 ϕ の χ^2 分布の上側 ε 点 $\chi^2_\phi(\varepsilon)$ を用いて表すことができる。

[⑯、⑰の選択肢]

（A） λ	（B） $n\lambda$	（C） $\dfrac{\lambda}{n}$	（D） $\sqrt{\lambda}$	（E） $\sqrt{2\lambda}$
（F） $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$	（G） $\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$	（H） 2λ	（I） $\dfrac{1}{\lambda}$	（J） $\dfrac{2}{\lambda}$
（K） $\sqrt{n\lambda}$	（L） $\sqrt{2n\lambda}$	（M） $\sqrt{\dfrac{1}{n\lambda}}$	（N） $\sqrt{\dfrac{1}{2n\lambda}}$	（O） $2n\lambda$
（P） $\dfrac{1}{n\lambda}$	（Q） $\dfrac{2}{n\lambda}$	（R） $\sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$	（S） $\sqrt{\dfrac{2\lambda}{n}}$	（T） $\sqrt{\dfrac{n}{\lambda}}$
（U） $\sqrt{\dfrac{n}{2\lambda}}$	（V） $\dfrac{2\lambda}{n}$	（W） $\dfrac{n}{\lambda}$	（X） $\dfrac{2n}{\lambda}$	

[⑱、⑲の選択肢]

（A） $k-1$	（B） k	（C） $k+1$	（D） $k+2$
（E） $2k-1$	（F） $2k$	（G） $2k+1$	（H） $2(k+1)$

（４）ある都市における 10 日間の交通事故の発生件数は、次の通りであった。

1，1，3，2，2，0，3，1，2，1

1 日あたりの交通事故件数は、ポアソン分布に従うものとして、その件数の母平均を精密法により、信頼係数 95%で区間推定する。信頼区間の上限に最も近い数値は ⑳ であり、信頼区間の下限に最も近い数値は ㉑ である。

［⑳、㉑の選択肢］

（A） 0.313　（B） 0.345　（C） 0.378　（D） 0.412　（E） 0.877

（F） 0.915　（G） 0.952　（H） 0.990　（I） 1.374　（J） 1.442

（K） 1.510　（L） 1.576　（M） 2.412　（N） 2.474　（O） 2.536

（P） 2.598

以　上